ملحق (1)

مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات[1]

1- مقدمة:

لقد ظهرت مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات عند معالجة المعادلات الخطية المتجانسة. ولكي نوضح جوهر هذه القضية دعنا ننطلق من المعادلة الخطية التالية:

$$a * \mathrm{x} = \lambda * \mathrm{x} \qquad (1)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$(a - \lambda) * \mathrm{x} = 0 \qquad (2)$$

ومن الواضح أن الحل البسيط لهذه المعادلة بالنسبة لـ x هو الحل الذي يكون فيه x = 0 . ويسمى هذا الحل بالحل التافه (Trivial solution). لأنه لا يفيدنا في معالجة المسائل العلمية المختلفة. ويجعلنا نخسر جميع المعلومات المتوفرة في العلاقة (1) أو في العلاقة (2) .

وحتى نمنع هذا الحل التافه (x = 0) من الحدوث، نفترض أو نشترط أن يكون المضروب الأول $(a - \lambda)$ معدوماً، وعندها نجد أن λ تأخذ قيمة معينة هي a لأن:

$$(a - \lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = a \qquad (3)$$

وتسمى هذه القيمة لــ λ بالقيمة الذاتية (الكامنة) للمعادلة (2) (eigenvalue) .

وعندها فإن المعادلة (2) تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة (المحدودة وغير المعدومة) بالنسبة للمتحول المجهول x . وذلك لأن جداء أية قيمة محدودة لـ x في $(a - \lambda)$ يساوي الصفر .

وكذلك الأمر في حالة المصفوفات المربعة، حيث نجد أنه لو كانت لدينا جملة من المعادلات الخطية كمايلي:

$$\begin{aligned} a_{11}\mathrm{x}_1 + a_{12}\mathrm{x}_2 + a_{13}\mathrm{x}_3 &= \lambda\mathrm{x}_1 \\ a_{21}\mathrm{x}_1 + a_{22}\mathrm{x}_2 + a_{23}\mathrm{x}_3 &= \lambda\mathrm{x}_2 \\ a_{31}\mathrm{x}_1 + a_{32}\mathrm{x}_2 + a_{33}\mathrm{x}_3 &= \lambda\mathrm{x}_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

فإنه يمكننا كتابتها بدلالة المصفوفات والأشعة كمايلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

---

(1)- لقد تم استخلاص هذا الملحق من المصدرين التاليين (بتصرف وإضافة)

1- مجدي الطويل: المصفوفات (النظرية والتطبيق) – الباب الثالث- جامعة القاهرة- كلية الهندسة- عام

2- Lancaster, k. mathematical econ- omics- mac. Comb.Landon, New York- educ.- Moscow-cof. Pad. 1972

والتي يمكن كتابتها باختصار على الشكل التالي:

$$A_{33} * X_{31} = \lambda * X_{31} \qquad (6)$$

وهذه العلاقة تعبر عن عملية تحويل الشعاع X إلى شعاع آخر هو λX . وهذه العملية تصادفنا كثيراً في الدراسات والبحوث العلمية .

وبصورة عامة إذا كان لدينا n معالة خطية وتتضمن n متحولاً ومشابهة للمعادلات (4) فإنه يمكننا كتابتها بدلالة مصفوفة A وشعاع X كما يلي:

$$A_{n*n}X_{n*1} = \lambda X_{n*1} \qquad (7)$$

حيث أن: A هي مصفوفة مربعة من المرتبة $n * n$ (وتسمى بمصفوفة التحويل) وتتضمن الأمثال العددية a_{ij} المصاحبة للمتحول X_j في المعادلة الخطية i وإن X_{n*1} هو الشعاع العمود المؤلف من المتحولات X_j ، أي أن X_{n*1} هو الشعاع العمود الذي يرمز للمتحولات X_j نفسها، أما λ فهو عدد حقيقي (سلمي) يستخدم في عملية التحويل من X إلى λX، ويسمى شكل المعادلة (7) بالشكل النموذجي المشكلة لقيم الذاتية للمصفوفة A . (standard eigenvalue problem) وذلك لتميزها عن الشكل العام المشكلة لقيم الذاتية للمصفوفة A (Generalized eigenvalue problem) والذي تكون على الشكل التالي:

$$A_{n*n}X_{n*1} = \lambda B_{n*n}X_{n*1} \qquad (8)$$

حيث أن B هي مصفوفة مربعة من المرتبة $n * n$ أيضاً وموجبة تحديداً (positive definite) وأن A مصفوفة متناظرة، ويمكن تحويل المشكلة العامة للقيم الذاتية المبينة في (8) إلى المشكلة النموذجية المعروضة في العلاقة (7) وذلك باستخدام تحويل وتحليل تشولوسكي (cholesky) [انظر ذلك في الطويل– المصفوفات– ص 138]. لذلك فإننا سنركز اهتمامنا في هذه الورقة على المشكلة النموذجية للقيم الذاتية وسنعرضها من خلال الفقرة التالية .

2- المشكلة النموذجية للقيم الذاتية:

إن الشكل العام لهذه المشكلة يكون من شكل المعادلة (7) السابقة وهي:

$$A * X = \lambda * X \qquad (9)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$[A - \lambda I] * X = 0 \qquad (10)$$

حيث أن: I هي مصفوفة أحادية من المرتبة n .

وتسمى المعادلة (10) بالمعادلة المميزة للمصفوفة A (characteristic equation) وإن حلها بالنسبة للشعاع X يصطدم بالحل التافه (الذي هو $X = 0$).

وحتى نمنع حدوث هذا الحل التافه. فإننا نفترض أو نشترط أن تكون المصفوفة اليسارية $[A - \lambda I]$ شاذة. وهذا يعني أنه يجب أن يكون محددها معدوماً. أي نشترط أن يحقق المحدد الشرطي التالي .

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (11)$$

وبما أن هذا المحدد هو من المرتبة $n * n$ وان عناصر قطره الرئيسي تساوي $(a_{ii} - \lambda)$ فإن العلاقة (11) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

وعندما نقوم بحساب منشور أو مفكوك هذا المحدد فإننا سنحصل منه على كثير حدود من المرتبة n بالنسبة للوسيط λ ويكون له الشكل التالي:

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots + a_n\lambda^n = 0 \qquad (13)$$

وتسمى المعادلة (13) بمعادلة القيم الذاتية للمصفوفة A (Eigenvalue equation)، وعندما نقوم بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ فإننا سنحصل على n جذراً لها: أي إننا سنحصل منها على n قيمة لـ λ وسنرمز لها بالرموز :

$$\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3 \;\; \ldots\ldots\ldots \;\; \lambda_n \qquad (14)$$

وتسمى هذه الجذور بالقيم الذاتية أو المميزة كما تسمى بالجذور الكامنة للمصفوفة A، وهي تستخدم كثيراً في المسائل العلمية. وإن هذه القيم الذاتية قد لا تكون مختلفة عن بعضها البعض بل قد يكون بعضها مكرراً عدة مرات (عدة جذور مضاعفة). كما يمكنها أن تكون حقيقية أو عقدية (مركبة). ولكن إذا ظهرت جذور عقدية فإنها تكون على شكل أزواج مترافقة .

والآن نعود إلى مسألة إيجاد الشعاع X الذي يحقق العلاقة (10) مقابل كل قيمة من القيم الذاتية λ_k .

ولذلك نأخذ أحد القيم الذاتية وليكن $\lambda = \lambda_k$ ونعوضها في المعادلة (10) فإننا سنحصل على المعادلة المحددة التالية:

$$[A - \lambda_k I] * X = 0 \qquad (15)$$

وبما أن قيمة λ_k تجعل المصفوفة $[A - \lambda_k I]$ مصفوفة شاذة فإنه يمكننا الحصول من (15) على عدد لانهائي من الحلول المقبولة لـ X . وإذا أخذنا أحد تلك الحلول وليكن X_k المقابل للقيمة الذاتية λ_k فإنه سيكون على شكل شعاع عمود كمايلي:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_k \qquad (16)$$

ويسمى هذا الشعاع X_k بالشعاع الذاتي (المميز) للمصفوفة A والمقابلة للقيمة الذاتية λ_k

ولكن بما أن جملة المعادلات (10) هي جملة معادلات خطية متجانسة فإن أي حل مقبول لها مثل X_k يشكل مع مضاعفاته حزمة من الحلول المقبولة (غير التافهة) ونرمز لها بالرموز:

$$X_k, \quad C_1X_k, \quad C_2X_k, \quad C_3X_k, \ldots\ldots \qquad (17)$$

حيث C_i أي عدد حقيقي (غير الصفر) يضاعف أو يقلل الحل X_k

وبذلك نحصل على لانهاية أخرى من الحلول المرتبطة بالحل X_k المقابل للقيمة الذاتية λ_k وحدها .

ولكن هذه الحلول المتضاعفة تحدد لنا فقط الاتجاه العام للحل X_k، ولا تحدد لنا عناصر الحل المطلوب (مركبات X_k). ولذلك تبقى أطوال هذه الحلول كيفية (غير محددة). وهذا أمر لا يساعدنا على التوصل إلى حلول محددة الطول بل محددة الاتجاه فقط .

وللتخلص من هذه المشكلة يمكن أن نقوم بتحويل هذه الأشعة المتضاعفة إلى أشعة واحدية بحيث يكون طول كل منها مساوياً للواحد الصحيح .

لذلك نأخذ أي شعاع منها مثل X_k ونحسب طوله كمايلي:

$$\|X_k\|^2 = X_k' * X_k = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots = \ell_k^2 = \text{مربع الطول} \quad (18)$$

ثم نقسم عناصر ذلك الشعاع على طوله $\left(+\sqrt{\ell^2}\right)$ فنحصل على الشعاع الواحدي للشعاع X_k ونرمز له بـ V_k وهو يساوي

$$V_k = \frac{X_k}{\|X_k\|} = \frac{X_k}{\ell} \qquad (19)$$

وبالتالي نحصل على شعاع جديد يكون له نفس الاتجاه ويكون طوله الجديد مساوياً للواحد لأن: $V_K' * V_k = 1$، ويسمى هذا الشعاع V_k بالشعاع الذاتي الواحدي المقابل للقيمة الذاتية λ_k، ونحصل على نفس النتيجة إذا حولنا الأشعة الأخرى إلى أشعة واحدية . وإذا كان للمصفوفة n قيمة ذاتية مختلفة (جذراً مختلفاً) فإنه سيكون لها n شعاعاً ذاتياً واحدياً مختلفاً مقابلاً لها. وللحصول على هذه الأشعة نعود ونعوض كل من القيم الذاتية التي حصلنا عليها في (14) في المعادلة (10)، واحدة تلو الأخرى حتى نحصل على جميع الأشعة الذاتية الواحدية المقابل لكل منها.

مثال: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المقابلة لها للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

الحل: نكتب المعادلة المميزة لـ A كما يلي:

$$AX = \lambda X \Longrightarrow [A - \lambda I] * X = 0$$

ثم نضع محدد المصفوفة اليسرى مساويا للصفر فنحصل على أن :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ثم نقوم بحساب مفكوكه فنحصل على كثير حدود من المرتبة الثانية بالنسبة لـ λ وهو:

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 3 * 3 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ λ نحصل على الجذرين التاليين:

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -2$$

ولإيجاد الأشعة الذاتية المقابلة لهما، نأخذ كل قيمة على حدة، فنجد أنه عندما نأخذ $\lambda_1 = 4$ فإن مصفوفة المعادلة المميزة تساوي :

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لهذه القيمة نكتب المعادلة المميزة كما يلي :

$$[A - \lambda_1 I] * X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين غير المستقليتين التاليتين:

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

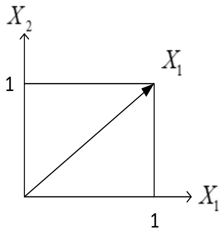
وهما عبارة عن معادلة واحدة (الثانية تنتج من الأولى بضربها بـ (1-))

نأخذ أحدهما ولتكن الأولى: $-3x_1 + 3x_2 = 0$

فنحصل منها على أن: $x_1 = x_2$

أي أن العنصر x_1 يساوي x_2 وله نفس الإشارة

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية . يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة ويكون لها نفس الاتجاه .



وحتى نحدد أحد هذه الحلول نضع كيفياً $x_1 = 1$

فنحصل على أن: $x_2 = 1$

وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الأول والذي نرمز له بـ X_1 وهو $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ وهو يقابل $\lambda_1 = 4$.

ومنه نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس الذاتية $\lambda_1 = 4$ وذلك بأخذ مضاعفات X_1 كما يلي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{c_2} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots$$

حيث c_i أي عدد حقيقي (غير الصفر)

أما عندما نأخذ القيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ فإننا نجد أن المصفوفة:

$$[A - \lambda_2 I] = \begin{bmatrix} 1+2 & 3 \\ 3 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم نكتب المعادلة الذاتية كمايلي:

$$[A - \lambda_2 I]X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين غير المستقلتين التاليتين:

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

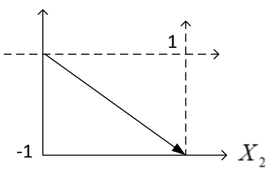
وهما عبارة عن معادلة واحدة، وإذا أخذنا أحدهما نجد أن:

$$x_1 = -x_2$$

أي أن العنصر x_1 يساوي $(-x_2)$ وأن العنصرين مختلفان بالإشارة .

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية، فإنه يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة كمايلي:

نضع بشكل كيفي $x_1 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -1$، وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الأول X_2 المقابل للقيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ وهو $\mathrm{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



ومنه نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس القيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$

$$\mathrm{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_c = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots \dots \dots$$

حيث c_i أي عدد حقيقي (غير الصفر)

وللتحقق من أن هذه الأشعة تشكل حلول مقبولة للمعادلة (9) أو (10) نقوم بتعويضها في المعادلة الذاتية $AX = \lambda X$ لنتأكد من تحققها:

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathrm{X}_1$$

$$AX_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathrm{X}_2$$

أي أن الشعاعين الذاتيتين $\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1$ يحققان المعادلة الذاتية، وبذلك يشكلان حلين مقبولين لها. علماً بأن مضاعفات كل منهما تشكل حلول مقبولة لها أيضاً، ونشير أيضاً إلى x_1 وx_2 متعادان لأنها يحققان شرط التعامد وهو أن يكون الجداء السلمي لها يساوي الصفر:

$$\langle x_1 , x_2 \rangle = x_1^* * x_2 = (1 ,1) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

ولكن هذين الحلين محددين بالاتجاه فقط وغير محددين بالطول لأن جميع مضاعفاتهما تشكل حلول مقبولة أيضاً .

لذلك يفضل أن نقوم بحساب الأشعة الذاتية الواحدية لها أو لهذا نقوم بحساب طول كل منها فنجد أن:

$$||X_1||^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = \ell_1^2$$

$$||X_2||^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 = \ell_2^2$$

وبذلك نجد أن الأشعة الذاتية الواحدية هي:

$$V_1 = \frac{\mathrm{X}_1}{||X_1||} = \frac{\mathrm{X}_1}{\ell_2} = \frac{\mathrm{X}_1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{X_2}{\ell} = \frac{X_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ويمكننا التأكد من أن هذين الشعاعين يحققان المعادلة المميزة (9) أو (10) فنجد أن:

$$A * V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_1 V_1$$

$$A * V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_2 V_2$$

أي أن الشعاعين V_2, V_1 يحققان المعادلة الذاتية المفروضة .

3- نظريات مختلفة حول القيم والأشعة الذاتية : (أنظر المصفوفات)

ن**1:** إن مجموع القيم الذاتية للمصفوفة A يساوي أثر trace تلك المصفوفة أي أن:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = tr(A)$$

ن**2:** إن قيمة محدد المصفوفة A يساوي جداء قيمها الذاتية أي أن:

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

وكتطبيق على ذلك نأخذ القيم الذاتية للمصفوفة A في المثال السابق فنجد أن:

$$\left.\begin{matrix} \sum \lambda_k = 4 + (-2) = 2 \\ tr(A) = 1 + 1 = 2 \end{matrix}\right| \Rightarrow \quad \sum \lambda_i = tr(A)$$

$$\left.\begin{matrix} |A| = 1 - 9 = -8 \\ \prod \lambda_k = 4(-2) = -8 \end{matrix}\right| \Rightarrow \quad |A| = \prod \lambda_{\grave{k}}$$

ن**3:** إذا كانت المصفوفة A مصفوفة صفرية فإن جميع قيمها الذاتية تكون أصفاراً أي أن:

$$A = [0] \Rightarrow \qquad \lambda_k = 0 : \forall_i = 1,2, \dots \dots n$$

ن**4:** إذا كان المصفوفة A هي المصفوفة الأحادية I فإن جميع قيمها الذاتية تكون متساوية وتساوي الواحد الصحيح أي أن:

$$A = I \Rightarrow \qquad \lambda_{\grave{k}} = 1 \quad \forall_{\grave{k}} = 1,2, \dots \dots n$$

ن5: إذا كانت المصفوفة A مصفوفة قطرية D فإن قيمها الذاتية تساوي عناصرها القطرية. أي أن:

$$A = D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad \lambda_{\grave{k}} = a_{\grave{k}} \qquad \forall_{\grave{k}} = 1,2, \ldots\ldots n$$

ويستفاد من هذه النظرية في إيجاد القيم الذاتية $\lambda_{\grave{k}}$ لأي مصفوفة وذلك بتحويلها إلى مصفوفة قطرية.

ن6: تكون أي مصفوفة A مصفوفة شاذة ($|A| = 0$) إذا وفقط إذا كانت إحدى قيمها الذاتية مساوية للصفر (لأن قيمة $|A| = \prod \lambda_k$) .

أما إذا كانت المصفوفة قطرية D فإنها تكون شاذة إذا وفقط إذا كان أحد عناصرها القطرية معدوماً .

ن7: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة أي: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq . \lambda_k . \neq \lambda_n$ فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مختلفة (من حيث الاتجاه) .

ن8: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مستقلة خطياً

ن9: يمكن أن يكون لمصفوفتين مختلفتين A , B ولهما نفس المرتبة n*n نفس القيم الذاتية: وعندها تكون B,A متشابهتان. (يستفاد منها في التعرف على المصفوفات) .

ن10: إن للمصفوفة A ولمنقولها A' نفس القيم الذاتية وذلك لأن لهما نفس كثير الحدود بالنسبة لـ λ .

ن11: إذا كانت المصفوفة A حقيقة ومتناظرة فإن قيمها الذاتية تكون حقيقية. وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة أي يكون الجداء السلمي لأي شعاعين يساوي الصفر $< U_k * U_n \geq U_k^* * U_n = 0$، أما إذا لم تكن مختلفة فيمكن تحويل الأشعة الذاتية المقابلة لها إلى أشعة متعامدة (نظرية غرام).

ن12: إذا كانت المصفوفة A حقيقية ومتناظرة سلبياً فإن قيمها الذاتية تكون تخيلية صرفة (الجزء الحقيق معدوم). وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة. أو يمكن تحويلها إلى متعامدة (نظرية غرام) .

ن13: إذا كان الشعاع U هو الشعاع الذاتي للمصفوفة A والمقابل للقيمة الذاتية λ وكان X أي عدد حقيقي غير الصفر فإن الشعاع ($\alpha * u$) يكون أيضاً شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها .

ن14: إذا كانت A مصفوفة مربعة ومتناظرة وكانت L أي أن مصفوفة نظامية ($|L| \neq 0$) ومن مرتبة A ، فإن المصفوفة B المعرفة بالعلاقة $B = L^{-1}A * L$ تكون مشابهة لـ A ويكون لها نفس القيم الذاتية التي لـ A (ولكن الأشعة الذاتية تبقى غير متطابقة) .

وإن الأشعة الذاتية لـ B تساوي حاصل ضرب L^{-1} في الأشعة الذاتية لـ A. أي أن: $V = L^{-1} * U$

حيث: U هي الأشعة الذاتية لـ A و V هي الأشعة الذاتية لـ B

وبالتالي فإن B,A تكونان متشابهتين. وتسمى مصفوفة العلاقة $B = L^{-1}A * L$ بتحويلة التشابه .

ن**15**: إذا شكلنا من أعمدة الأشعة الذاتية للمصفوفة A بحسب ترتيبها مصفوفة T فإننا سنحصل على مصفوفة مربعة من مرتبة A (وتسمى المصفوفة T بالمصفوفة الظاهرية لـ A(medal malrix)، وإذا كانت المصفوفة T نظامية ($|T| \neq 0$) فإن المصفوفة D المعرفة بالعلاقة:

$D = T^{-1} * A * T$ تكون مصفوفة قطرية وإن عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية لـ D وتساوي القيم الذاتية لـA حسب الترتيب السابق . أي أن:

$$D = T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

أي أن المصفوفتين D,A تكونان متشابهتين وتسمى المصفوفة $D = T^{-1} * A * T$ بتحويلة الاستقطار والتشابه Similarity diagonalization transformation، ويستفاد من هذه النظرية في عملية تحويل المصفوفات إلى مصفوفات قطرية، وفي عمليات التحقق من صحة الأشعة الذاتية، وهناك شكل آخر لهذه النظرية وهو أن يكون:

(وتطبق عندما T^{-1} غير موجود) $\quad A * T = T * \Lambda$

حيث Λ: هي مصفوفة قطرية مؤلفة من القيم الذاتية λ_k على القطر الرئيسي .

ن**16**: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ومكررة m مرة وكانت الأشعة $U_1, U_2, U_3 \ldots . U_m$ هي الأشعة الذاتية المقابلة لـ λ المكررة . فإن التركيب الخطي لها $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i * U_i$ يكون أيضاً شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها حيث أن x_i^* أية أعداد حقيقية غير الصفر

ن**17**: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة النظامية A ($|A| \neq 0$) ويقابلها الشعاع الذاتي U فإن λ^n تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^n ويقابلها نفس الشعاع الذاتي U . حيث أن n عدد صحيح بشكل عام

نتيجة هامة: إذا كان n=-1 فإنه يكون لدينا المصفوفة A^{-1} ويكون λ^{-1} قيمة ذاتية لها، أما شعاعها الذاتي فيبقى U هو نفسه الذي لـ A .

ن**18**: إذا كان للمصفوفة A القيمة والشعاع الذاتيين (λ , U) وكان $f(A) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i * A^i$ فإن $f(A)$ يكون له القيمة والشعاع الذاتيين $[f(\lambda), u]$.

ن**19**: نظرية (كايلي– هاملتون) .

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكانت معادلتها الذاتية بالنسبة لـ λ هي :

$$|A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots a_n\lambda^2 = 0$$

فإن A نفسها تحقق تلك المعادلة الذاتية أي يكون لدينا:

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots a_n A^n = 0$$

ن20: يمكن الحصول على المقلوب A^{-1} من العلاقة $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i * A^i = 0$ وذلك بضرب تلك الصيغة بـ A^{-1} من اليسار فنجد أن :

$$a_0A^{-1} + a_1I + a_2A + a_3A^2 + \cdots a_nA^{n-1} = 0$$

وبالتالي نحصل على المقلوب A^{-1} من العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}[a_1I + a_2A + a_3A^2 + \cdots a_nA^{n-1}]$$

ن21: يكن فك أو نشر أي مصفوفة A_{n*n}^{k} (حيث $k \geq \mathrm{n}$) على شكل متسلسلة قوى من A حتى القوة (n-1) أي يمكن كتابة A_n^k على الشكل التالي:

$$A_n^k = B_0 + B_1A^1 + B_2A^2 + \cdots B_{n-1}A^{n-1}$$

ن22: يمكن فك واقتطاع أي دالة مصفوفة $f(A)$ إلى الحد A^{n-1} كحد أعلى. أي يمكن كتابتها كمايلي:

بشرط تقارب المتسلسلة $\qquad f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^i$

وهناك نظريات أخرى يمكن البحث عنها في المراجع المختصة .

مثال آخر: لنأخذ المصفوفة المتناظرة التالية : $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

والمطلوب: إيجاد القيم والأشعة الذاتية لـ A

ثم حساب المصفوفة T والجداء $T^{-1} * A * T$

ثم التأكد من أن: $T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

الحل: لإيجاد القيم الذاتية لهذه المصفوفة نشكل المعادلة الذاتية لها وهي:

$$A * X = \lambda \mathrm{X}$$
$$(A - \lambda \mathrm{I}) * X = 0$$

وحتى لا نحصل على الحل التافه للشعاع العمودي (X=0) نضع محدد المصفوفة مساوياً للصفر أي نجعل: $|A - \lambda \mathrm{I}| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبأخذ مفكوك هذا المحدد حسب (سايروس) نجد أن:

$$(5-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) + 16 + 16 - 16(2-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(5-\lambda) = 0$$
$$(10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2)(5-\lambda) + \cancel{32} - \cancel{32} + 16\lambda - 20 + 4\lambda - 20 + 4\lambda$$
$$50 - 35\lambda + 5\lambda^2 - 10\lambda + 7\lambda^2 + \lambda^3 + 24\lambda - 40 = 0$$

ومنه نحصل على المعادلة : $\qquad 10 - 21\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ حسب خوارزمية معادلات الدرجة الثالثة فنحصل على (3) جذور كامنة أو على (3) قيم ذاتية للمصفوفة السابقة A وهي: $\lambda_3 = 10$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_1 = 1$

وهنا نلاحظ أن: مجموع هذه القيم لذاتية = مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A= trac(A)

1+1+10=5+2+5=12

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لكل من هذه القيم الذاتية نعوض قيم λ على التوالي في مصفوفة المعادلة المميزة: فعندما نضع $\lambda_1 = 1$ فإنه يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 5-1 & -2 & -4 \\ -2 & 2-1 & 2 \\ -4 & 2 & 5-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-2x_1 + 1X_2 + 2x_3 = 0$$
$$-4x_1 2 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض بل هي عبارة عن معادلة واحدة (لأن الثانية تنتج من الأولى بضربها بـ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ والثالثة من الأولى بضربها بـ (1-)) .

ولذلك نأخذ معادلة واحدة منها ولتكن المعادلة الثانية فنجد أن:

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \qquad (1)$$

وهي تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة لذلك نبدأ بالحل البسيط الذي يكون فيه $x_3 = 0$ فنحصل على أن: $x_2 = 2x_1$ ثم نضع $x_1 = -1$ فنحصل على أن $x_2 = -2$

وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الأول وهو: $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

ومنها نحصل على حزمة الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية: $\lambda = 1$ من العلاقة: $U_1 = C * \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

حيث C هو أي عدد حقيقي (غير الصفر) .

ولكن إذا وضعنا $x_2 = 0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن $x_3 = x_1$، لذلك نضع $x_1 = 1$ فنحصل على $x_3 = 1$ وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الآخر المقابل أيضاً للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ وهو: $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ومنها نحصل على حزمة أخرى من الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ من العلاقة الآتية :

$$U_2 = C * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولكن إذا وضعنا $x_1 = 0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن : $x_2 = -2x_3$ وعندها نضع $x_3 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -2$ وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الثالث المقابل أيضاً لـ $\lambda_2 = 1$ وهو :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على حزمة ثالثة من الأشعة المقابلة أيضاً للجذر الذاتي $\lambda = 1$ من العلاقة الآتية :

وحسب النظرية (16) نلاحظ أن: $U_3 = U_1 + U_2$ أي أن U_3 غير مستقل عن U_1, U_2

وللتحقق من أن هذه الأشعة U_1, U_2, U_3 صحيحة نتأكد من أن قيمها تحقق المعادلة الذاتية التالية:

$$AU = \lambda * \mathrm{U}$$

وكمثال على ذلك نأخذ أحد أشعة لحزمة الثالثة فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 * \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}'$$

وأخيراً لنأخذ القيمة الذاتية الثالثة $\lambda_2 = 10$ ونعوضها في المعادلة $(A - \lambda \mathrm{I})X = 0$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix} (5-10) & -2 & -4 \\ -2 & (2-10) & 2 \\ -4 & 2 & (5-10) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2\mathrm{x}_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض (لأن محددها معدوم) ولحلها نقوم بضرب الثانية بـ (2)، ثم نطرحها من الثالثة فنحصل على المعادلة التالية:

$$0 + 18\mathrm{x}_2 - 9\mathrm{x}_3 \Longrightarrow \mathrm{x}_3 = 2\mathrm{x}_2$$

فإذا وضعنا $x_2 = 1$ فإن $x_3 = 2$، وبالتعويض في المعادلة الثالثة أو غيرها نجد أن $x_1 = -2$

وبذلك نحصل على الشعاع الأول المقابل للقيمة الذاتية: $\lambda_3 = 10$ وهو:

$$\mathrm{U}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{U}_4 = C \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحته نعوضه في المعادلة $A * \mathrm{U}_4 = \lambda \mathrm{U}_4$ فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بتشكيل المصفوفة T من الأشعة الأولى المقابلة للقيم الذاتية وهي: U_1, U_2, U_4

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & +2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن:

$$T^{-1} * A * T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

وإذا أردنا أن نحصل على الأشعة الذاتية الواحدية فإننا نقوم بحساب أطوال الأشعة الذاتية السابقة ونقسم عناصر كل شعاع على طوله كما يلي:

$$\|u_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 0^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad \|u_1\| = \sqrt{5} = \ell_1$$

$$\|u_2\| = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \|u_2\| = \sqrt{2} = \ell_2$$

$$\|u_3\| = (-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad \|u_3\| = \sqrt{9} = 3 = \ell_2$$

وهكذا نجد أن الأشعة الذاتية الواحدية هي:

$$V_1 = \frac{U_1}{\ell_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$ وهو يقابل $\lambda_1 = 1$

$$V_2 = \frac{U_2}{\ell_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$ وهو يقابل $\lambda_2 = 1$

$$V_3 = \frac{U_3}{\ell_3} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$ وهو يقابل $\lambda_3 = 10$

وهي تحقق العلاقة السابقة:

$$T^{-1} * A * T = \Lambda$$

كما أنها تحقق المعادلة الذاتية :

$$A * U = \lambda * U$$