ملحق (1)

حول خواص المصفوفات والعمليات المعرفة عليها(1)

1-1 : الأشعة :

تلعب الأشعة والمصفوفات دوراً كبيراً في التحليل متعدد المتغيرات. وبدون أن نشرح أنواعها وخوصها نعرضها وفق التالي :

- تعريف الشعاع: يتألف الشعاع X من عدة مركبات أو من عدة متحولات $X_1, X_2, \dots, X_P$،

ونرمز له على شكل عمود X كما يلي:
$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_P \end{bmatrix}$$

كما نرمز لمنقوله الذي يكتب على شكل سطر بـX' ونكتبه كما يلي:

$$X' = [X_1, X_2, X_3, \dots, X_P] \qquad (1-1)$$

ويعرف مربع طول الشعاع X في الفضاء R^P بالعلاقة: (وسنرمز بـ x للمركبات وبـ X للأشعة أو المصفوفة) .

$$\|X\|^2 = X' * X = (x_1, x_2, \dots, x_P) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_P \end{bmatrix} = x_1^2 + x^2 + \dots + x_p^2$$

بذلك يكون طوله $\|X\|$ مساوياً لـ :

$$\|X\| = \sqrt{X' * X} = \sqrt{x_1^2 + x^2 + \dots + x_p^2} \qquad (2-1)$$

وإن القيم العددية لهذه المركبات تمثل إحداثيات النقطة X في الفضاء R^P، فإذا كان $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

---

(1)- لقد تم استخلاص هذا الملحق من المصادر التالية (بتصرف وإضافة)

1- مجدي الطويل: المصفوفات (النظرية والتطبيق) – الباب الثالث– جامعة القاهرة– كلية الهندسة– عام

2- Lancaster, k. mathematical econ- omics- mac. Comb.Landon, New York- educ.- Moscow- cof. Pad. 1972

3- Johnston R.A.+Dean. W. (1988) Applied Multivariate statistical Analysis 2d Ed. Prentice-Hall Intenational Editions. London .

ويمكن تمديد وتقليص الشعاع X بضربه بثابت C فنحصل على الشعاع CX، كما يمكن تحويل الشعاع X إلى الشعاع الواحدي المميز e، الذي يكون طوله مساوياً للواحد ويكون اتجاهه باتجاه X . كما في الشكل (1−1)، ونحصل على مركبات e بتقسيم مركبات X على طوله ℓ_x .

وللحصول على مركبات الشعاع الواحدي e من الشعاع X نقوم بما يلي:

1−نحسب طول الشعاع X من العلاقة (1−2) كما يلي:

$$\ell_x = \sqrt{X' * X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_p^2} = \|X\|$$

2− ثم نقسم كل مركبة من مركبات X على طوله ℓ_x فنحصل على الشعاع الواحدي المميز التالي:

$$e = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\ell_x} \\ \frac{x_2}{\ell_x} \\ \vdots \\ \frac{x_p^2}{\ell_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_P \end{bmatrix} \qquad (3-1)$$

وللتأكد من أن طول هذا الشعاع يساوي الواحد نجد أن :

$$\|e\| = \ell_e = \sqrt{e' * e} = \sqrt{\left(\frac{X_1}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\ell_x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_P}{\ell_x}\right)^2} = 1$$

ويستخدم الشعاع الواحدي e في التعبير عن الحلول المختلفة في التحليل متعدد المتغيرات ويدخل في صلب المصفوفات المتعامدة .

- إذا كان X وY شعاعان متعامدان (في نفس الفضاء) فإن جداءهما السلمي يساوي الصفر، أي إذا كان X وY متعامدان فإن:

$$X' * Y = Y' * X = 0 \qquad (4-1)$$

ويمكن كتابة هذا الجداء على الشكل التالي:

$$X' * Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_py_p = 0 \qquad (5-1)$$

أما إذا كان X وY غير متعامدين فإن جداءهما يساوي:

$$X' * Y = Y' * X = \ell_x\ell_y \cos\theta \qquad (6-1)$$

حيث أن θ هي الزاوية المحصورة بينهما .

1−2 : المصفوفة:

- **تعريف المصفوفة:** تعرف المصفوفة بأنها جملة من الأعداد الحقيقية أو المركبة، الموضوعة على شكل أسطر وأعمدة ضمن مستطيل (أو مربع) مؤلف من p سطراً و n عموداً، ونرمز لها بالرمز A_{P*n}، (وتسمى $p * n$ مرتبة (order) المصفوفة A) ونكتبها كما يلي:

$$A_{P*n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix} \qquad (7-1)$$

- **منقول المصفوفة A:** ونرمز له بـ A' ويتم الحصول عليه باستبدال أسطرها بأعمدتها أو أعمدتها بأسطرها. فنحصل على مصفوفة من المرتبة A'_{n*p}
- **الجمع والطرح:** ويمكن أن نجمع أو نطرح أي مصفوفتين إذا كانتا من نفس المرتبة وذلك بجمع أو طرح عناصرهما المتقابلة، فنحصل على مصفوفة ثالثة من نفس المرتبة كما يلي :

$$A_{P*n} \pm B_{P*n} = C_{P*n} \qquad (8-1)$$

- **الضرب:** يمكن ضرب أية مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة الأولى (اليسرى) يساوي عدد أسطر اليمنى، فنحصل على مصفوفة جديدة من جراء ضرب كل سطر من الأولى بعمود من الثانية (ضرب أشعة) كما يلي:

$$A_{P*n} * C_{n*k} = B_{P*k} \qquad (9-1)$$

- **المصفوفات المربعة:** ولها عدة أنواع هي:

المصفوفة النظامية (غير الشاذة unsingufor): وهي المصفوفة المربعة A التي تكون قيمة محددها $|A|$ غير معدومة . أي التي يكون محددها (انظر المحددات لاحقاً) :

$$|A| \neq 0 \qquad (10-1)$$

وهذا يعني أن أعمدة (أو أسطر) المصفوفة مستقلة عن بعضها البعض .

- **مقلوب المصفوفة A:** ونرمز له بـ A^{-1} وهو مصفوفة تحقق العلاقة التالية:

$$AA^{-1} = A^{-1}\,A = I \qquad (11-1)$$

حيث I هي المصفوفة الواحدية (انظر لاحقاً) .

- **المصفوفة المتناظرة:** هي مصفوفة مربعة تكون عناصرها المتناظرة بالنسبة لقطرها الرئيسي متساوية، أي يكون فيها :

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i \neq j) \qquad (12-1)$$

ومن التعريف نستنتج أنه إذا كانت A متناظرة فإن $A' = A$.

- **المصفوفة القطرية:** وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها الواقعة خارج قطرها الرئيسي معدومة . ونرمز لها بـ D_{iag} حيث أن :

$$D_{iag} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \quad i \neq j \qquad (13-1)$$

ونشير هنا إلى أن مقلوب هذه المصفوفة القطرية يساوي مصفوفة قطرية أيضاً، وإن عناصر قطرها الرئيسي تساوي مقاليب عناصر المصفوفة القطرية الأصلية . أي أن:

$$D_{iag}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \qquad i \neq j \qquad (14-1)$$

- المصفوفة الواحدية: ونرمز لها بـ I وهي مصفوفة قطرية وتكون عناصرها القطرية تساوي الواحد، ونكتب ذلك على الشكل :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (15-1)$$

- المصفوفة المتعامدة : ونرمز لها بـ Q وهي التي تكون الأشعة المؤلفة لأعمدتها متعامدة، وهي تحقق العلاقة التالية:

$$Q' * Q = Q * Q' = I \qquad (16-1)$$

ومنها ومن العلاقة (1-11) نستنتج أن:

$$Q' = Q^{-1} \qquad (17-1)$$

أي أن Q^{-1} مقلوب المصفوفة المتعامدة يساوي منقولها Q' .

وتتميز هذه المصفوفات بأن جداءات الأعمدة فيها معدومة (لأنها متعامدة) أي أن:

$$q_i' * q_j = 0 \qquad for\ \ i \neq j \qquad (18-1)$$

وإن طول كل شعاع (عمود) فيها يساوي الواحد، أي أن: $q_i' * q_i = 1$

1-3 خواص العمليات على المصفوفات :

أ- **خواص عمليات الجمع والطرح:** إذا كانت A وB وC مصفوفات من نفس المرتبة m * n وكان e و d عددان حقيقيان، فإنها تحقق الخواص التالية:

$$\begin{aligned} &1 - A \pm B = B \pm A \\ &2 - (A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C) \\ &3 - C(A \pm B) = CA \pm CB \\ &4 - (e + d)A = eA + dA \\ &5 - (ed)A = e(dA) \\ &6 - (A + B)' = A' + B' \end{aligned} \qquad (19-1)$$

ب- **خواص الضرب:** إذا كانت A وB وC متوافقة في المراتب لإجراء الضرب، وكان e عدداً فإنها تحقق الخواص التالية:

$$\begin{aligned} &1 - e(A'B) = (eA) * B = A(eB) \\ &2 - A(B * C) = (AB) * C \\ &3 - A(B + C) = AB + AC \\ &4 - (B + C) * A = B * A + CA \end{aligned} \qquad (20-1)$$

$5 - A * B \neq B * A$ (ولكن بصورة عامة)

$6 - e * A * B = A * (e * B)$ ($\boldsymbol{e} =$ عدد)

$7 - (AB)' = B' * A'$

$8 - (AB)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$

ج- **خواص المنقول** : إذا كانت A وB مصفوفتان متوافقتان في الجمع والضرب فإنهما تحققان الشروط اللازمة فإن :

$$(A + B)' = A' + B' \qquad (21-1)$$

$(e * A)' = eA'$ ($\boldsymbol{e} =$ عدد)

$(AB)' = B' * A'$ (الجداء معكوس)

$(A')' = A$

د- **خواص المقلوب** : وهي خاصة بالمصفوفات المربعة:

إذا كانت A وB مربعتان ونظاميتان فيكون لهما مقلوبان A^{-1} وB^{-1}، ولهما نفس المرتبة، فإنهما تحققان الخواص التالية :

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I \qquad (22-1)$$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ (معكوس)

$(A^{-1})' = (A')^{-1}$

$(eA)^{-1} = \frac{1}{e} * A^{-1}$ ($e =$ عدد)

1-4 المحددات (المعينات):

- **تعريف:** يعرف المحدد على المصفوفات المربعة فقط ، وهو عدد يعبر عن قيمة كامل المصفوفة، ويرمز له بـ $|A|$، ويمكن حساب قيمته بنشره حسب الأسطر أو الأعمدة وحساب الجداءات اللازمة .
- **خواص المحددات (المعينات)** : إذا كانت A وB مصفوفتين مربعتين من المرتبة $k * k$ فإن محدديهما يحققان الخواص التالية:

$$1 - |A| = |A'| \qquad (23-1)$$

$2 - |AB| = |A| * |B|$

$3 - |eA| = e^k|A|$ (e عدد حقيقي)

$4 - |A * A^{-1}| = 1$

$5 - |A * A^{-1}| = |A| * |A^{-1}| = 1$

$$6 - |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$$

إذا كان عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة معدومة فإن: $7 - |A| = 0$

إذا كان عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة متناسية فإن: $8 - |A| = 0$

1-5 : رتبة المصفوفة المربعة أو المستطيلة :

إن رتبة المصفوفة A حسب الأسطر هو أكبر عدد من الأسطر المستقلة خطياً فيها (باعتبارها أشعة)، وإن رتبة المصفوفة A حسب الأعمدة هو أكبر عدد من الأعمدة المستقلة خطياً فيها (باعتبارها أشعة)

إن رتبة المصفوفة A حسب الأسطر = رتبة المصفوفة حسب الأعمدة

وتكون المصفوفة المربعة نظامية (unsignular) إذا كانت رتبتها تساوي عدد أسطرها (أو عدد أعمدتها) .

- **تعريف:** إننا نقول عن المصفوفة المربعة A بأنها نظامية إذا كانت المعادلة AX=0، تقتضي أن يكون X=0 .

وإذا لم تنجح المصفوفة A في أن تكون نظامية فإنها تسمى مصفوفة شاذة (signular) .

وهنا نلاحظ أن المعادلة AX=0 يمكن كتابتها كما يلي:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_p & a_{p2} & \cdots & a_{pk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_kx_k = 0 \qquad (24-1)$$

حيث a_1 a_2 و a_k هي الأشعة العمودية في A

وهذا يعني أن (1−24) لا تحقق إلا إذا كانت $x_i = 0$، أي ان الأشعة a_i مستقلة عن بعضها البعض وإن المصفوفة من المرتبة k .

إذا كانت A مصفوفة مربعة نظامية من المرتبة $k * k$ فإنه يوجد مصفوفة وحيدة B من المرتبة $k * k$ أيضاً بحيث يكون

$$A * B = B * A = I \qquad (82-2)$$

حيث I من المرتبة $k * k$، وعندها تسمى المصفوفة B بمقلوب المصفوفة A ونرمز لها بـA^{-1} ونكتب ذلك كما يلي:

$$B = A^{-1} \qquad (83-2)$$

- خواص رتبة المصفوفة (rank) : وهي تختلف عن مرتبة المصفوفة (order)، وتعرف الرتبة بأنها تساوي أكبر عدد من الأعمدة (أو الأسطر) المستقلة في A .

وتكون رتبة المصفوفة من المرتبة $n * n$ كاملة، إذا كانت رتبتها $r = n$، وفي هذه الحالة يكون محدد المصفوفة $|A| \neq 0$، ويكون المقلوب A^{-1} موجوداً . وبالنسبة للمصفوفات المستطيلة A من المرتبة $m * n$ فإن رتبتها أقل من أصغر العددين n أو m أي أن:

$$rank(A) \leq \min(n\,, m) \qquad (24-1)$$

ومن خواص الرتبة إنها لا تتغير إذا تم ضرب المصفوفة A من اليسار أو اليمين بأية مصفوفة نظامية B أو بأي عدد حقيقين e .

ومن أهم خواصها ما يلي:

$$1 - rank(A) = rank(A') = rank(A' * A) = rank(A * A')$$

$$2 - rank(I) = n \qquad (25-1)$$

$$3 - rank(A*B) \leq (B) \qquad \left(\text{موجود } A*B\right)$$

$$4 - rank(A) = rank(A*B) = r(B) \qquad \left(\text{نظامية } B\right)$$

إذا كانت A و B متكافئتين فإن:

$$5 - rank(A) = rank(B)$$

إذا كانت B_{n*n} مربعة ونظامية و C_{m*n} مربعة ونظامية فإن :

$$6 - rank(B*A*C) = rank(A)$$

7- إذا كانت A مصفوفة قطرية فإن رتبتها تساوي عدد العناصر القطرية غير المعدومة فيها

8- إذا كانت A نظامية من المرتبة $n*n$ فإن رتبتها تكون كاملة وتساوي n لأن $|A| \neq 0$ ولأن A^{-1} يكون موجوداً .

1-6 أثر المصفوفة: (trace)

إن أثر المصفوفة المربعة A هو مجموع عناصرها القطرية (a_{ii}) ونرمز له بـ $tr(A)$ ويساوي:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

- خواص أثر المصفوفة:

إذا كانت A و B من المرتبة $k*k$ وكان e عدد حقيقي فإن:

$$1 - tr(cA) = c * tr(A)$$

$$2 - tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$$

$$3 - tr(A*B) = tr(B*A) \qquad \left(\text{الجداء معكوس}\right)$$

$$4 - tr(B^{-1}*A*B) = tr(A) \qquad (26-1)$$

$$5 - tr(AA') = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2$$

1-7 : المصفوفات المتعامدة:

نقول عن مصفوفة A أنها متعامدة إذا كانت أعمدتها (أو كانت أسطرها) متعامدة مثنى مثنى وكان طول كل شعاع عمود منها يساوي الواحد . وهذا يعني أنها تحقق العلاقة :

$$A*A' = A'*A = I \qquad (27-1)$$

وهذا يعني أن منقولها A' يساوي مقلوبها A^{-1} أي أن $A' = A^{-1}$.

1-8 : المصفوفات الشاذة (singural) :

لنفترض أنه لدينا المعادلة النموذجية التالية :

$$A_{k*k} * X_{k*1} = \lambda * X \qquad : X \neq 0 \qquad \mathbf{(28-1)}$$

لإيجاد حلول لهذه المعادلة نكتبها كما يلي:

$$[A-\lambda I]X=0 \qquad : X\neq 0 \qquad \mathbf{(29-1)}$$

وحتى تتحقق هذه المعادلة (بفرض أن $X\neq 0$) فإنه يجب أن تكون المصفوفة $[AX-\lambda I]$ مصفوفة شاذة وأن يكون محددها مساوياً للصفر، أي يجب أن يكون لدينا :

$$|A-\lambda I|=0 \qquad \mathbf{(30-1)}$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة لـ A

وبعد نشر هذا المحدد نحصل على معادلة مؤلفة من كثير حدود بالنسبة لـ λ، نقوم بإيجاد جذورها الجبرية ونرتبها تنازلياً فنحصل على ما يسمى بالجذور الكامنة للمصفوفة A، أو ما يسمى بالقيم الذاتية لـ A وهي:

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq\cdots\geq\lambda_k \qquad \mathbf{(31-1)}$$

ثم نعوض هذه القيم الذاتية واحدة بعد الأخرى في المعادلة الأساسية :

$$[A-\lambda I]X=0 \qquad \mathbf{(32-1)}$$

نقوم بحلها فنحصل منها على الحلول الخاصة X، المقابلة لتلك القيم الذاتية التالية :

$$\ell_1,\ell_2,\ell_3,\dots,\ell_k$$

ثم نقوم بمعيرتها فنحصل على الحلول الممعيرة (طولها واحد) التالية:

$$e_1,e_2,e_3,\dots,e_k$$

وعندها نجد أن كل من هذه الحلول يحقق المعادلة النموذجية الأولى (1−28)، لنأخذ الحل ℓ_i ونعالجه كما يلي:

$$A*\ell_i=\lambda_i*\ell_i$$

نضرب الطرفين من اليسار بـ ℓ_i' ثم نقسم على $\|\ell_i\|^2$ فنحصل على أن:

$$\ell_i'*A*\ell_i=\lambda_i*\ell_i'*\ell_i=\lambda_i*\|\ell_i\|^2 \qquad \mathbf{(33-1)}$$

$$\frac{\ell_i'}{\|\ell_i\|^2}*A*\frac{\ell_i}{\|\ell_i\|^2}=\lambda_i$$

أما بالنسبة للحلول الممعيرة e_i فنجد من المعادلة الأساسية أن:

$$A*e_i=\lambda_i*e_i$$

$$e_i'*A*e_i=\lambda_i*e_i'*e_i=\lambda_i*1=\lambda_i \qquad \mathbf{(34-1)}$$

وبمقارنة العلاقتين (1−33) و(1−34) نجد أن:

$$e_i=\frac{\ell_i}{\|\ell_i\|}$$

1−9 : الصيغة التربيعية :

إذا كانت A مربعة ومتناظرة وكان $X'(x_1x_2\ \dots x_k)$ شعاع من مرتبة A، فإننا نقول عن الجداء $X'*A*X$ بأنه الصيغة التربيعية لـ X ونرمز له بـ :

$$Q(X)=X'_{1k}*A_{kk}*X_{k1}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}*x_i*x_j=\text{عدد} \qquad (35-1)$$

وكمثال على ذلك نأخذ المثال البسيط التالي :

$$Q(X)=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{bmatrix}$$

$$Q(X) = a_{11}^2 x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12}^2 x_1 x_2 \qquad (36-1)$$

وهي تعبر عن مربع المسافة المميزة من النقطة $X(x_1 x_2)$ حتى مركز الإحداثيات 0.

10-1 : معكوس المصفوفة (شبه المقلوب Pseud Inverce) :

نعلم أن القيم الشاذة للمصفوفة A هي الجذور التربيعية للقيم الذاتية غير المعدومة للمصفوفة $A * A'$ أو للمصفوفة $A' * A$، ويمكننا أن نكتب أية مصفوفة A من المرتبة $\mathrm{m * n}$ وفق الصيغة التالية :

$$A = U * \sigma * V' = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i * U_i * V_i \qquad (37-1)$$

حيث أن r هي رتبة المصفوفة A، وبذلك يكون $\mathrm{r \le (m\,, n)}$، وإن U هي مصفوفة من المرتبة $\mathrm{m * r}$، والتي أعمدتها مؤلفة من الأشعة $\mathrm{u_1\,, u_2\,, \dots u_r}$، التي هي الأشعة الشاذة اليسرى، وإنها تحقق العلاقة $\mathrm{u' * u = I}$ حيث I من المرتبة $\mathrm{r * r}$، وأن V هي مصفوفة من المرتبة $\mathrm{n * r}$، والتي أعمدتها مؤلفة من الأشعة $\mathrm{v_1\,, v_2\,, \dots v_r}$، التي هي الأشعة الشاذة اليمينية وإن V تحقق العلاقة $V' * \mathrm{V = I}$، حيث I من المرتبة $\mathrm{r * r}$، وأنσ هي المصفوفة القطرية المؤلفة من القيم الشاذة σ_i للمصفوفة A أي أن:

$$\sigma_{r*r} = diag(\sigma_1\,, \sigma_2\,, \dots \sigma_r)$$

وبناء على ذلك تم تعريف معكوس المصفوفة A (شبه المقلوب Pseud – Inverce) على شكل مصفوفة من المرتبة المعكوسة $\mathrm{n * m}$، ونرمز لها بالرمز الخاص التالي $\mathrm{A^\dagger}$ وهو يساوي :

$$\mathrm{A^\dagger} = V * \sigma^{-1} * U' = \sum \frac{1}{\sigma_i} \mathrm{v}_i * u_i' \qquad (38-1)$$

وتستخدم هذه المصفوفة لإيجاد الحل المثالي X الذي يجعل مربع الخطأ التالي: $||AX - B||^2$ أصغر ما يمكن . وإن هذا الحل يساوي :

$$\mathrm{X = A^\dagger * B} \qquad (39-1)$$

إذا كانت رتبة A أقل من n، فليس لهذه المسألة حل وحيد بالنسبة لـ X ، وإن تحليل القيمة الشاذة سيعطينا الحل بأصغر قيمة للخطأ .

إن معكوس المصفوفة A يتمتع بالخواص التالية:

$$\begin{aligned}
&1 - A * \mathrm{A^\dagger} * A = A \\
&2 - \ \mathrm{A^\dagger} * A * \mathrm{A^\dagger} = \mathrm{A^\dagger} \\
&3 - \ \left(A * \mathrm{A^\dagger}\right)' = A * \mathrm{A^\dagger} \\
&4 - \ \left(\mathrm{A^\dagger} * A\right)' = \mathrm{A^\dagger} * A
\end{aligned} \qquad (40-1)$$

11-1 : قواعد اشتقاق المصفوفات :

تعتمد عمليات اشتقاق المصفوفات على القواعد التالية :

- قواعد الاشتقاق بالنسبة للمتحول t :

$$1-\frac{dA(t)}{dt}=\left[\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right] \qquad (41-1)$$

$$2-\frac{d}{dt}(A\pm B)=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt} \qquad (42-1)$$

$$3-\frac{d}{dt}(\propto * A)=\propto\frac{dA}{dt} \qquad (43-1)$$

$$4-\frac{\mathrm{d}(A*B)}{dt}=\frac{dA}{dt}*B+A\frac{dB}{dt} \qquad (44-1)$$

- قواعد الاشتقاق بالنسبة للمصفوفة ذاتها فهي:

$$5-\frac{\partial}{\partial X}(C'*X)=C \qquad (45-1)$$

حيث A متناظرة :

$$6-\frac{\partial}{\partial X}(X'*A*X)=2AX \qquad (46-1)$$

$$7-\frac{\partial|A|}{\partial A}=(adjount\ of\ A)=|A|*(A^{-1})' \qquad (47-1)$$

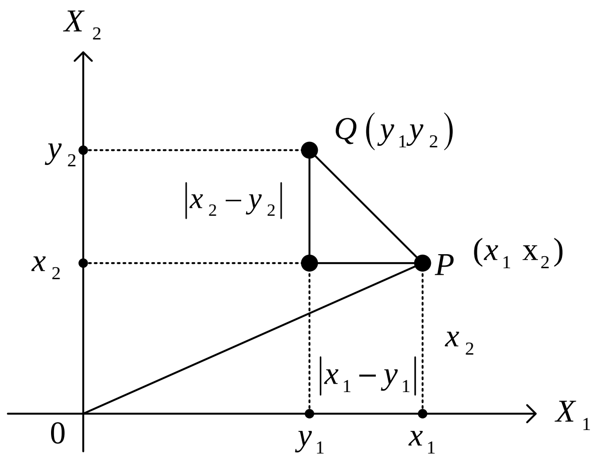
شرط وجود A^{-1} :

$$8-\frac{\partial}{\partial A}[tr|A'MA|]=MA+M'A \qquad (48-1)$$

12-1 : الصيغة التربيعية والمسافات :

قبل أن نعرف الصيغة التربيعية نستعرض تعريف المسافة بين نقطتين في المستوى أو في الفضاء R^P، وذلك من خلال إحداثيات الشعاع الواصل بينهما .

لنفترض أنه لدينا نقطة $P(x_1\,,x_2)$ في المستوى $X_1 0\, X_2$ كما في الشكل (1-1) التالي :



الشكل (1-2): المسافات

فإن المسافة $d(P\,,0)$ من النقطة $P(x_1\,,x_2)$ حتى مركز الإحداثيات $O(0\,,0)$ تساوي حسب نظرية فيثاغورث ما يلي:

$$d(P\ ,0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad (49-1)$$

ولكن المسافة $d(P\ ,0)$ من النقطة $P(x_1\ ,x_2)$ إلى النقطة $Q(y_1\ ,y_2)$ تساوي :

$$d(P\ ,Q) = \sqrt{(x_1 -\ y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad (50-1)$$

وتسمى هذه المسافات بالمسافات الإقليدية (Euclidean)، لأنها تفترض أن X_1 و X_2 لهما نفس وحدة القياس (متر أو غيره)، وبالتالي فإن المسافة $d(P\ ,Q)$ تحسب بنفس تلك الواحدة القياسية (متر)، أما إذا كانت واحدة قياس X_1 (متر) تختلف عن واحد قياس X_2 (كغ)، فإن المقدار الذي تحت الجذر يصبح غير قابل للجمع . وبالتالي تصبح المسافة غير معرفة .

وللتخلص من هذه المشكلة نقوم بمعيرة المتحولين X_1 و X_2 وتحويلها إلى متحولين ممعيرين، وذلك بتقسيم كل منها على انحرافه المعياري $\sqrt{S_{11}}$ و $\sqrt{S_{22}}$، فنحصل على متحولين جديدين مجردين من واحدات القياس نرمز لهما بـ : $Z_2 = \frac{X_2}{\sqrt{S_{22}}}$ $\qquad Z_1 = \frac{X_1}{\sqrt{S_{11}}}$

وبناء على ذلك نقوم بوضع تعريف جديد للمسافة من النقطة $P(Z_1\ ,Z_2)$ حتى المركز (O) بالعلاقة التالية:

$$d^*(P\ ,0) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{\frac{X_1^2}{S_{11}} + \frac{X_2^2}{S_{22}}} \qquad (51-1)$$

وتسمى هذه المسافة $d^*(P\ ,0)$ بالمسافة الإحصائية من P حتى المركز O .

وبناء على ذلك يمكننا تعريف المسافة الإحصائية بين أي نقطتين $P(x_1\ ,x_2)$ و $Q(y_1\ ,y_2)$ في المستوى وحسابها من العلاقة :

$$d^*(P\ ,Q) = \sqrt{\frac{(x_1 -\ y_1)^2}{S_{11}} + \frac{(x_2 -\ y_2)^2}{S_{22}}} \qquad (52-1)$$

وتسمى هذه المسافة بالمسافة الإحصائية من P حتى المركز Q، وبصورة عامة يمكننا تعريف المسافة الإحصائية في الفضاء R^P بين اي نقطتين $P\left(x_1\ ,x_2, \dots .x_p\right)$ و $Q\left(y_1\ ,y_2, \dots .y_p\right)$ بالعلاقة :

$$d^*(P\ ,Q) = \sqrt{\frac{(x_1 -\ y_1)^2}{S_{11}} + \frac{(x_2 -\ y_2)^2}{S_{22}} + \cdots + \frac{\left(x_p -\ y_p\right)^2}{S_{pp}}} \qquad (53-1)$$

حيث أن $S_{11}, S_{22}\ ,S_{33}, \dots, S_{pp}$ هي تباينات المتحولات الإحداثية $\left(X_1\ ,X_2\ ,X_3 \dots .X_p\right)$ على الترتيب .

وهنا نلاحظ ما يلي :

1- إذا وضعنا الإحداثيات $y_1 = y_2 = y_3 = \cdots = y_p = 0$ في المعادلة (1-53) فإننا نحصل على المسافة P حتى المركز (O) في الفضاء R^P ونحصل على المعادلة :

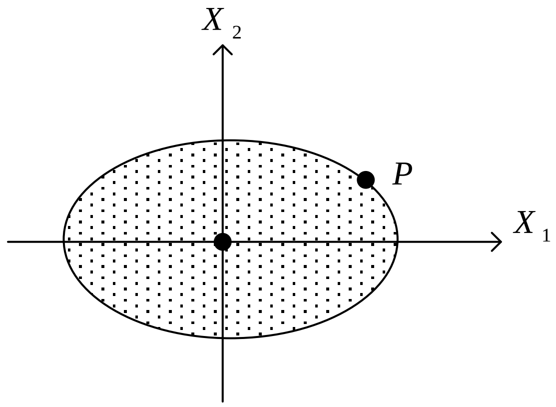
$$d^*(p\,,0)=\sqrt{\frac{x_1^2}{S_{11}}+\frac{x_2^2}{S_{22}}+\cdots+\frac{x_p^2}{S_{pp}}} \qquad (53a-1)$$

2- إذا كانت التباينات متساوية: $S_{11}=S_{22}=\cdots=S_{pp}=1$، فإننا نحصل على المسافة (الإقليدية) المعرفة في (1−50) .

3-إذا وضعنا المسافة $d^*(P\,,Q)$ مساوية لعدد ثابت C في (1−53)، وربعنا الطرفين فإننا سنحصل على المعادلة التالية (في حالة متحولين):

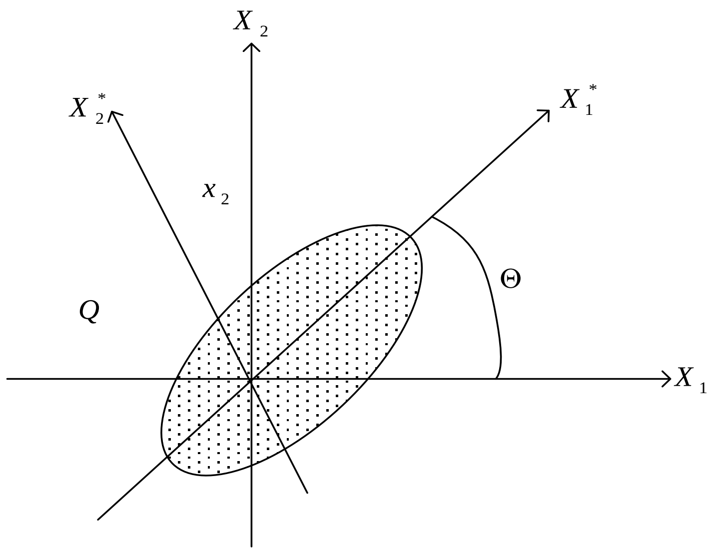
$$\frac{x_1^2}{S_{11}}+\frac{x_2^2}{S_{22}}=C^2 \qquad (54-1)$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه المبدأ (O) ومحوراه يوازيان المحورين الإحداثيين OX_1 وOX_2، كما هو موضح على الشكل التالي:



الشكل (1−3) شكل القطع الناقص

وإذا كانت قياسات X_1 مرتبطة مع قياسات X_2 فإن شكل الانتشار لهما يكون له الشكل التالي:



الشكل (1−4) قطع ناقص

وعندها فإن المسافة من P حتى المركز (O) تعطى بالعلاقة $(53a-1)$، وإذا وضعنا تلك المسافة مساوية لعدد ثابت C فإننا نحصل على قطع ناقص كالقطع المبين على الشكل $(4-1)$

وحتى نحصل على قطع ناقص مناسب لشكل الانتشار $(3-1)$ فإننا نقوم بتدوير المحاور الإحداثية OX_1 و OX_2 إلى اليسار بزاوية قدرها (θ)، فنحصل على محاور جديدة نرمز لها بـ OX_1^* و OX_2^*،

ولإيجاد الإحداثيات الجديدة بدلالة الإحداثيات القديمة نستخدم معادلتي التحويل التاليتين :

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ x_2^* &= -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{aligned} \qquad (55-1)$$

ومنها نحسب تبايني X_1^* و X_2^* الجديدين ونرمز لهما بـ S_{11}^* و S_{22}^*، وعندها نجد أن المسافة من نفس النقطة $P(x_1^*, x_2^*)$ ذات الإحداثيات الجديدة إلى المركز (O) تعطى بالعلاقة $(53a-1)$ التي تأخذ الشكل التالي :

$$d^*(P, O) = \sqrt{\frac{x_1^{*2}}{S_{11}^*} + \frac{x_2^{*2}}{S_{22}^*}} \qquad (56-1)$$

وإذا قمنا بتعويض (x_1^*, x_2^*) وكذلك S_{11}^* و S_{22}^* من $(1-55)$ في $(1-56)$، فإننا سنحصل على المسافة الجديدة $d^{**}(P, O)$ بدلالة الإحداثيات القديمة x_1, x_2، وبعد إجراء الإصلاحات المطولة نحصل على المسافة الجديدة x_1^*, x_2^* بدلالة الإحداثيات القديمة من العلاقة التالية :

$$d^{**}(P, O) = \sqrt{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2} \qquad (57-1)$$

أن المقدار الذي تحت الجذر يأخذ صيغة تسمى بالصيغة التربيعية لأنه يتضمن حدود لـ X من الدرجة الثانية هي (x_2^2, x_1^2) و $(x_1 * x_2)$ مضروبة بالأعداد a_{22}, a_{11} و $2a_{12}$ على الترتيب .

حيث أن a_{ij} هي الأعداد المناسبة التي تجعل المسافة $d^{**}(P, O)$ غير سالبة لجميع قيم x_2, x_1، وهي تحدد وتحسب من العلاقات التالية :

$$a_{11} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta * S_{11} + 2\sin\theta\cos\theta * S_{12} + \sin^2\theta S_{22}} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta * S_{22} - 2\sin\theta\cos\theta * S_{12} + \sin^2\theta * S_{11}}$$

$$a_{22} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta * S_{11} + 2\sin\theta\cos\theta * S_{12} + \sin^2\theta S_{22}} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta * S_{22} - 2\sin\theta\cos\theta * S_{12} + \sin^2\theta * S_{11}}$$

$$a_{12} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta\, S_{11} + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta * S_{22}} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta * S_{22} - 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta * S_{11}}$$

وإذا ربعنا طرفي العلاقة $(57-1)$ نحصل على مربع المسافة $d^{**}(P, O)$ ويكون لدينا :

$$d^{**2}(P, O) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \qquad (58-1)$$

وهنا نلاحظ أنه يمكن كتابة (1-58) على شكل مصفوفة كما يلي:

$$d^{**2}(P, O) = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (59-1)$$

$$d^{**2}(P, O) = X' * A * X \qquad \text{وهي الصيغة التربيعية المطلوبة} \qquad (60-1)$$

وإذا وضعنا تلك المسافة مساوية لعدد ثابت C فإن المعادلة (1-56) تعطينا أن :

$$\frac{X_1^{*2}}{S_{11}^*}+\frac{X_2^{*2}}{S_{22}^*}=C^2$$

وهي معادلة قطع ناقص بدلالة الإحداثيات الجديدة X_1^* و X_2^*، ومحوراه يوازيان المحورين OX_1^* و OX_2^* ، اللذين يصنعان مع المحورين القديمين OX_1 و OX_2 زاوية قدرها θ، وإن هذا القطع يأخذ نفس وضعية القطع في الشكل (1−4) بالنسبة للمحورين OX_1 و OX_2 .

ولكن إذا جعلنا تلك المسافة مساوية لعدد ثابت C في المعادلة (1−58) فإننا نحصل على أن:

$$d^{**2}(P\,,O)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=C^2 \qquad (61-1)$$

وهي معادلة القطع المذكور بدلالة الإحداثيات القديمة OX_1 و OX_2 ، كما هو مبين على الشكل (1−4) السابق .

وبصورة عامة فإنه يمكننا تعريف المسافة من نقطة P إلى مركز الإحداثيات (O) في الفضاء R^P بواسطة العلاقة التالية:

$$d^{**}(P\,,O)=\sqrt{a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+\cdots+a_{PP}x_P^2+2a_{12}x_1x_2+ +2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{P-1}a_Px_{P-1}x_P} \qquad (62-1)$$

وبتربيع الطرفين يمكن كتابة هذه العلاقة مصفوفياً كما يلي:

$$d^{**2}(P\,,O)=(x_1x_2x_3\dots x_P)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1P}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2P}\\\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\a_{P1}&a_{P2}&\cdots&a_{PP}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_P\end{bmatrix}=X'*A*X$$

ولحساب المسافة بين نقطتين $P(x_1x_2x_3\dots x_P)$ و $Q(y_1y_2y_3\dots y_P)$ في الفضاء R^P نعمم العلاقة (1−62) فنجد أن:

$$d(P\,,O)=\sqrt{a_{11}(x_1-y_1)^2+a_{22}(x_2-y_2)^2+\cdots a_{PP}(x_P-y_P)^2+2a_{12}(x_1-y_1)(x_2-y_2) +2a_{13}(x_1-y_1)(x_3-y_3)+\cdots+2a_{P-1}P(x_{P-1}-y_{P-1})(x_P-y_P)} \qquad (63-1)$$

وإذا وضعنا هذه المسافة مساوية لعدد ثابت C، ثم ربعنا الطرفين فإننا سنحصل على معادلة قطع ناقص كما يلي:

$$d^{**2}(P\,,Q)=a_{11}(x_1-y_1)^2+a_{22}(x_2-y_2)^2+..a_{PP}(x_P-y_P)^2+2a_{12}(x_1-y_1)(x_2-y_2)$$
$$+2a_{13}(x_1-y_1)(x_3-y_3)+\cdots+2a_{P-1}P(x_{P-1}-y_{P-1})(x_P-y_P)=C^2 \qquad (64-1)$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه O ومحوراه يوازيان المحورين الجديدين X_1^* و X_2^*، اللذين يصنعان مع المحورين القديمين OX_1 و OX_2 الزاوية θ .

وأخيراً يمكننا كتابة مربع المسافة من P حتى Q مصفوفياً كما يلي:

$$d^{**2}(P\ ,O) = [(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \dots (x_P - y_P)] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2P} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3P} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{P1} & a_{P2} & \cdots & a_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ (x_P - y_P) \end{bmatrix} \quad (65-1)$$

كما يمكن كتابتها على شكل الصيغة التربيعية المعممة كما يلي:

$$d^{**2}(P\ ,O) = (X - Y)' * A * (X - Y) \qquad (66-1)$$

ملحق (2)

مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات(2)

1-2 مقدمة:

لقد ظهرت مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات عند معالجة المعادلات الخطية المتجانسة. ولكي نوضح جوهر هذه القضية دعنا ننطلق من المعادلة الخطية التالية:

$$a * \mathrm{x} = \lambda * \mathrm{x} \qquad (1-2)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$(a - \lambda) * \mathrm{x} = 0 \qquad (2-2)$$

ومن الواضح أن الحل البسيط لهذه المعادلة بالنسبة لـ x هو الحل الذي يكون فيه x = 0 . ويسمى هذا الحل بالحل التافه (Trivial solution). لأنه لا يفيدنا في معالجة المسائل العلمية المختلفة. ويجعلنا نخسر جميع المعلومات المتوفرة في العلاقة (2-1) أو في العلاقة (2-2) .

وحتى نمنع هذا الحل التافه (x = 0) من الحدوث، نفترض أو نشترط أن يكون المضروب الأول $(a - \lambda)$ معدوماً، وعندها نجد أن λ تأخذ قيمة معينة هي a لأن:

$$(a - \lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = a \qquad (3-2)$$

وتسمى هذه القيمة لـــ λ بالقيمة الذاتية (الكامنة) للمعادلة (2-2) (eigenvalue) .

وعندها فإن المعادلة (2-2) تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة (المحدودة وغير المعدومة) بالنسبة للمتحول المجهول x . وذلك لأن جداء أية قيمة محدودة لـ x في $(a - \lambda)$ يساوي الصفر .

وكذلك الأمر في حالة المصفوفات المربعة، حيث نجد أنه لو كانت لدينا جملة من المعادلات الخطية كمايلي:

$$\begin{aligned} a_{11}\mathrm{x}_1 + a_{12}\mathrm{x}_2 + a_{13}\mathrm{x}_3 &= \lambda\mathrm{x}_1 \\ a_{21}\mathrm{x}_1 + a_{22}\mathrm{x}_2 + a_{23}\mathrm{x}_3 &= \lambda\mathrm{x}_2 \\ a_{31}\mathrm{x}_1 + a_{32}\mathrm{x}_2 + a_{33}\mathrm{x}_3 &= \lambda\mathrm{x}_3 \end{aligned} \qquad (4-2)$$

فإنه يمكننا كتابتها بدلالة المصفوفات والأشعة كمايلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} \qquad (5-2)$$

---

(1)- لقد تم استخلاص هذا الملحق من المصادر التالية (بتصرف وإضافة)

4- مجدي الطويل: المصفوفات (النظرية والتطبيق) – الباب الثالث- جامعة القاهرة- كلية الهندسة- عام

5- Lancaster, k. mathematical econ- omics- mac. Comb.Landon, New York- educ.- Moscow- cof. Pad. 1972

6- Johnston R. A.+Dean. W. (1988) Applied Multivariate statistical Analysis 2d Ed. Prentice- Hall Intenational Editions. London .

والتي يمكن كتابتها باختصار على الشكل التالي:

$$A_{33} * X_{31} = \lambda * X_{3.1} \qquad (6-2)$$

وهذه العلاقة تعبر عن عملية تحويل الشعاع X إلى شعاع آخر هو λX . وهذه العملية تصادفنا كثيراً في الدراسات والبحوث العلمية .

وبصورة عامة إذا كان لدينا n معالة خطية وتتضمن n متحولاً ومشابهة للمعادلات (2-4) فإنه يمكننا كتابتها بدلالة مصفوفة A وشعاع X كما يلي:

$$A_{n.n} X_{n.1} = \lambda X_{n.1} \qquad (7-2)$$

حيث أن: A هي مصفوفة مربعة من المرتبة $n.n$ (وتسمى بمصفوفة التحويل)، وتتضمن الأمثال العددية a_{ij} المصاحبة للمتحول X_j في المعادلة الخطية i، وإن $X_{n.1}$ هو الشعاع العمود المؤلف من المتحولات X_j ، أي أن $X_{n.1}$ هو الشعاع العمود الذي يرمز للمتحولات X_j نفسها، أما λ فهو عدد حقيقي (سلمي) يستخدم في عملية التحويل من X إلى λX، ويسمى شكل المعادلة (7) بالشكل النموذجي لمشكلة القيم الذاتية للمصفوفة A . (standard eigenvalue problem) وذلك لتميزها عن الشكل العام المشكلة لقيم الذاتية للمصفوفة A (Generalized eigenvalue problem) والذي تكون على الشكل التالي:

$$A_{n.n} X_{n.1} = \lambda B_{n.n} X_{n.1} \qquad (8-2)$$

حيث أن B هي مصفوفة مربعة من المرتبة $n.n$ أيضاً ومحددة إيجابياً (positive definite) وأن A مصفوفة متناظرة، ويمكن تحويل المشكلة العامة للقيم الذاتية المبينة في (8) إلى المشكلة النموذجية المعروضة في العلاقة (2-7) وذلك باستخدام تحويل وتحليل تشوليسكي (cholesky) [انظر ذلك في الطويل- المصفوفات- ص 138). لذلك فإننا سنركز اهتمامنا في هذه الورقة على المشكلة النموذجية للقيم الذاتية وسنعرضها من خلال الفقرة التالية .

2-2 المشكلة النموذجية للقيم الذاتية:

إن الشكل العام لهذه المشكلة يكون من شكل المعادلة (7) السابقة وهي:

$$A * X = \lambda * X \qquad (9-2)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$[A - \lambda I] * X = 0 \qquad (10-2)$$

حيث أن: I هي مصفوفة أحادية من المرتبة n .

إن حل المعادلة (2-10) بالنسبة للشعاع X يصطدم بالحل التافه (الذي هو X = 0).

وحتى نمنع حدوث هذا الحل التافه. فإننا نفترض أو نشترط أن تكون المصفوفة اليسارية $[A - \lambda I]$ شاذة. وهذا يعني أنه يجب أن يكون محددها معدوماً. أي نشترط أن يحقق محددها الشرط التالي .

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (11-2)$$

وبما أن هذا المحدد هو من المرتبة $n.n$ وان عناصر قطره الرئيسي تساوي $(a_{ii}-\lambda)$ فإن العلاقة (2-11) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (12-2)$$

وعندما نقوم بحساب منشور أو مفكوك هذا المحدد فإننا سنحصل منه على كثير حدود من المرتبة n بالنسبة للوسيط المجهول λ يكون له الشكل التالي:

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots + a_n\lambda^n = 0 \qquad (13-2)$$

وتسمى المعادلة (2-13) بالمعادلة المميزة للمصفوفة A (Characteristics equation)، وعندما نقوم بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ فإننا سنحصل على n جذراً لها: أي إننا سنحصل منها على n قيمة لـ λ وسنرمز لها بالرموز :

$$\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3 \;\; \ldots\ldots\ldots \;\; \lambda_n \qquad (14-2)$$

وتسمى هذه الجذور بالقيم الذاتية أو القيم المميزة للمصفوفة A، كما تسمى بالجذور الكامنة للمصفوفة A، وهي تستخدم كثيراً في المسائل العلمية. وإن هذه القيم الذاتية قد لا تكون مختلفة عن بعضها البعض بل قد يكون بعضها مكرراً عدة مرات (عدة جذور مضاعفة). كما يمكنها أن تكون حقيقية أو عقدية (مركبة). ولكن إذا ظهرت جذور عقدية فإنها تكون على شكل أزواج مترافقة .

وهنا نشير إلى أنه إذا كانت المصفوفة A نظامية $(|A|=0)$ فإن عدد قيمها الذاتية يساوي مرتبتها n. وإذا كانت A شاذة، فإن عدد القيم الذاتية لها يكون مساوياً لرتبتها r، حيث أن $r \le n$.

والآن نعود إلى مسألة إيجاد الشعاع X الذي يحقق العلاقة (2-10) مقابل كل قيمة من القيم الذاتية λ_k. ولذلك نأخذ أحد القيم الذاتية وليكن $\lambda=\lambda_k$ ونعوضها في المعادلة (2-10) فإننا سنحصل على المعادلة المحددة التالية:

$$[A-\lambda_k I] * X = 0 \qquad (15-2)$$

وبما أن قيمة λ_k تجعل المصفوفة $[A-\lambda_k I]$ مصفوفة شاذة فإنه يمكننا الحصول من (2-15) على عدد لانهائي من الحلول المقبولة لـ X . وإذا أخذنا أحد تلك الحلول وليكن X_k المقابل للقيمة الذاتية λ_k فإنه سيكون على شكل شعاع عمود كمايلي:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_k \qquad (16-2)$$

ويسمى هذا الشعاع X_k بالشعاع الذاتي (المميز) للمصفوفة A والمقابلة للقيمة الذاتية λ_k

ولكن بما أن جملة المعادلات (2-10) هي جملة معادلات خطية متجانسة فإن أي حل مقبول لها مثل X_k يشكل مع مضاعفاته حزمة من الحلول المقبولة (غير التافهة) ونرمز لها بالرموز:

$$X_k, \quad C_1X_k, \quad C_2X_k, \quad C_3X_k, \ldots\ldots \qquad (17-2)$$

حيث C_i أي عدد حقيقي (غير الصفر) يضاعف أو يقلص الحل X_k
وبذلك نحصل على لانهاية أخرى من الحلول المرتبطة بالحل X_k المقابل للقيمة الذاتية λ_k وحدها .
ولكن هذه الحلول المتضاعفة تحدد لنا فقط الاتجاه العام للحل X_k، ولا تحدد لنا عناصر الحل المطلوب (مركبات X_k). ولذلك تبقى أطوال هذه الحلول كيفية (غير محددة). وهذا أمر لا يساعدنا على التوصل إلى حلول محددة الطول بل محددة الاتجاه فقط .
وللتخلص من هذه المشكلة يمكن أن نقوم بتحويل هذه الأشعة المتضاعفة إلى أشعة ممعيرة واحدية بحيث يكون طول كل منها مساوياً للواحد الصحيح .
لذلك نأخذ أي شعاع منها مثل X_k ونحسب طوله ℓ_k كما يلي:

$$\|X_k\|^2 = X_k' * X_k = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots = \ell_k^2 = \text{مربع الطول} \qquad (18-2)$$

ثم نحسب طوله $\boldsymbol{\ell_k}$ فنجد أن :

$$\|X_k\|_k = \sqrt{\ell_k^2} = +\ell_k$$

ثم نقسم عناصر ذلك الشعاع على طوله $(+\ell_k)$ فنحصل على الشعاع الواحدي للشعاع X_k ونرمز له بـ e_k وهو يساوي

$$e_k = \frac{X_k}{\|X_k\|} = \frac{X_k}{\ell_k} \qquad (19-2)$$

وبالتالي نحصل على شعاع جديد يكون له نفس الاتجاه ويكون طوله الجديد مساوياً للواحد لأن: $e_K' * e_k = 1$، ويسمى الشعاع e_k بالشعاع الذاتي الممعير المقابل للقيمة الذاتية λ_k، ونحصل على نفس النتيجة إذا حولنا الأشعة الأخرى إلى أشعة واحدية . وإذا كان للمصفوفة n قيمة ذاتية مختلفة (جذراً مختلفاً) فإنه سيكون لها n شعاعاً ذاتياً واحدياً مختلفاً مقابلاً لها. وللحصول على هذه الأشعة نعود ونعوض كل من القيم الذاتية التي حصلنا عليها في (2-14) في المعادلة (2-10)، واحدة تلو الأخرى حتى نحصل على جميع الأشعة الذاتية الواحدية المقابل لكل منها.

مثال (2−1): أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المقابلة لها للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

الحل: نكتب المعادلة الذاتية لـ A كما يلي:

$$AX = \lambda X \Longrightarrow [A - \lambda I] * X = 0$$

ثم نضع محدد المصفوفة اليسرى مساويا للصفر فنحصل على أن :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ثم نقوم بحساب مفكوكه فنحصل على كثير حدود من المرتبة الثانية بالنسبة لـ λ وهو:

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 3 * 3 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ λ نحصل على الجذرين التاليين:

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -2$$

ولإيجاد الأشعة الذاتية المقابلة لهما، نأخذ كل قيمة على حدة، فنجد أنه عندما نأخذ $\lambda_1 = 4$ فإن مصفوفة المعادلة المميزة تساوي :

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لهذه القيمة نكتب المعادلة المميزة كما يلي :

$$[A - \lambda_1 I] * X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين غير المستقليتين التاليتين:

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

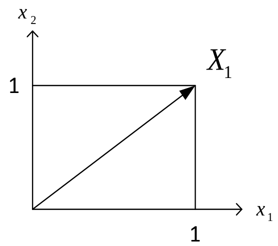
وهما عبارة عن معادلة واحدة (الثانية تنتج من الأولى بضربها بـ (1-))

نأخذ أحدهما ولتكن الأولى: $-3x_1 + 3x_2 = 0$

فنحصل منها على أن: $x_1 = x_2$

أي أن العنصر x_1 يساوي x_2 وله نفس الإشارة

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية . يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة ويكون لها نفس الاتجاه .



وحتى نحدد أحد الحلول الخاصة نضع كيفياً $x_1 = 1$

فنحصل على أن: $x_2 = 1$

وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الأول والذي نرمز له بـ X_1 وهو $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ وهو يقابل $\lambda_1 = 4$.

ومنه نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس الذاتية $\lambda_1 = 4$ وذلك بأخذ مضاعفات X_1 كما يلي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad X_{c_2} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots$$

حيث c_i أي عدد حقيقي (غير الصفر)

أما عندما نأخذ القيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ فإننا نجد أن المصفوفة:

$$[A - \lambda_2 I] = \begin{bmatrix} 1+2 & 3 \\ 3 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم نكتب المعادلة الذاتية كمايلي:

$$[A - \lambda_2 I]X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين غير المستقلتين التاليتين:

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

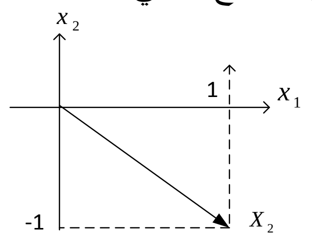
وهما عبارة عن معادلة واحدة، وإذا أخذنا أحدهما نجد أن:

$$x_1 = -x_2$$

أي أن العنصر x_1 يساوي $(-x_2)$ وأن العنصرين مختلفان بالإشارة .

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية، فإنه يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة كمايلي:

نضع بشكل كيفي $x_1 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -1$، وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الخاص X_2 المقابل للقيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ وهو $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ كم في الشكل:



ومنه نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس القيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$ وهي:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_c = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots$$

حيث c_i أي عدد حقيقي (غير الصفر)

وللتحقق من أن هذه الأشعة تشكل حلول مقبولة للمعادلة (2-9) أو للمعادلة (2-10) نقوم بتعويضها في المعادلة الذاتية $AX = \lambda X$ لنتأكد من تحققها:

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 X_1$$

$$AX_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2 X_2$$

أي أن الشعاعين الذاتيتين X_2, X_1 يحققان المعادلة الذاتية، وبذلك يشكلان حلين مقبولين لها. علماً بأن مضاعفات كل منهما تشكل حلول مقبولة لها أيضاً، ونشير هنا أيضاً إلى أن الحلين X_1 و X_2 متعامدان لأنهما يحققان شرط التعامد وهو أن يكون الجداء السلمي لها يساوي الصفر:

$$\langle X_1 , X_2 \rangle = X_1^* * X_2 = (1 ,1) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

ولكن هذين الحلين محددان بالاتجاه فقط ، وغير محددين بالطول لأن جميع مضاعفاتهما تشكل حلول مقبولة أيضاً .

لذلك يفضل أن نقوم بحساب الأشعة الذاتية الممعيرة الواحدية لهما، ولهذا نقوم بحساب طول كل منها فنجد أن:

$$\ell_1^2 = \|X_1\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_1 = \sqrt{2}$$

$$\ell_2^2 = \|X_2\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_2 = \sqrt{2}$$

وبذلك نجد أن الأشعة الذاتية الواحدية هي:

$$e_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{X_1}{\ell_1} = \frac{X_1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{X_2}{\ell_2} = \frac{X_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ويمكننا التأكد من أن هذين الشعاعين يحققان المعادلة النموذجية (2-9) أو (2-10) فنجد أن:

$$A * e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1$$

$$A * e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathrm{e}_2$$

أي أن الشعاعين e_2, e_1 يحققان المعادلة الذاتية المفروضة .

2-3 نظريات مختلفة حول القيم والأشعة الذاتية : (أنظر المصفوفات- للطويل)

لقد أشرنا سابقاً إلى أنه إذا كانت المصفوفة A نظامية ومن المرتبة $n * n$، فإنه عدد قيمها الذاتية سيكون مساوياً لـ n قيمة ذاتية. ونرمز لها $\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3 \;\; \dots \;\; \lambda_n$، وبناء على ذلك نقدم النظريات التالية (بدون برهان) .

ن1: إن مجموع القيم الذاتية للمصفوفة A يساوي أثر trace تلك المصفوفة أي أن:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (20-2)$$

ن2: إن قيمة محدد المصفوفة A يساوي جداء قيمها الذاتية أي أن:

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad (21-2)$$

وكتطبيق على ذلك نأخذ القيم الذاتية للمصفوفة A في المثال السابق فنجد أن:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 4 + (-2) = 2 \\ tr(A) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_i = tr(A)$$

$$\left.\begin{aligned} |A| = 1 - 9 = -8 \\ \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k} = 4(-2) = -8 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad |A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k}$$

ن3: إذا كانت المصفوفة A مصفوفة صفرية فإن جميع قيمها الذاتية تكون أصفاراً أي أن:

$$A = [0] \Longrightarrow \qquad \lambda_k = 0 : \forall_i = 1,2, \dots \dots n \qquad (22-2)$$

ن4: إذا كان المصفوفة A هي المصفوفة الأحادية I فإن جميع قيمها الذاتية تكون متساوية وتساوي الواحد الصحيح أي أن:

$$A = I \Longrightarrow \qquad \lambda_{\grave{k}} = 1 \quad \forall_{\grave{k}} = 1,2, \dots \dots n \qquad (23-2)$$

ن5: إذا كانت المصفوفة A مصفوفة قطرية D فإن قيمها الذاتية تساوي عناصرها القطرية. أي أن:

$$A = D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad \lambda_k = a_{\grave{k}k} \qquad k = 1,2, \dots \dots n \qquad (24-2)$$

ويستفاد من هذه النظرية في إيجاد القيم الذاتية λ_k لأي مصفوفة وذلك بتحويلها إلى مصفوفة قطرية.

ن6: تكون أي مصفوفة A مصفوفة شاذة ($|A| = 0$) إذا وفقط إذا كانت إحدى قيمها الذاتية مساوية للصفر (لأن قيمة $|A| = \prod \lambda_k$) .

أما إذا كانت المصفوفة قطرية D فإنها تكون شاذة إذا وفقط إذا كان أحد عناصرها القطرية معدوماً .

ن7: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة أي: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq . \lambda_k . \neq \lambda_n$ فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مختلفة (من حيث الاتجاه) .

ن8: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مستقلة خطياً

ن9: يمكن أن يكون لمصفوفتين مختلفتين A , B ولهما نفس المرتبة n.n نفس القيم الذاتية: وعندها تكون المصفوفتان A وB متشابهتان. (يستفاد منها في التعرف على المصفوفات) .

ن10: إن للمصفوفة A ولمنقولها A' نفس القيم الذاتية وذلك لأن لهما نفس كثير الحدود بالنسبة لـ λ .

ن11: إذا كانت المصفوفة A حقيقية ومتناظرة فإن قيمها الذاتية تكون حقيقية. وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة، أي يكون الجداء السلمي لأي شعاعين يساوي الصفر $< U_k * U_n >= U'_k * U_n = 0$، أما إذا لم تكن مختلفة فيمكن تحويل الأشعة الذاتية المقابلة لها إلى أشعة متعامدة (حسب نظرية غرام).

ن12: إذا كانت المصفوفة A حقيقية ومتناظرة سلبياً فإن قيمها الذاتية تكون تخيلية صرفة (الجزء الحقيقي معدوم). وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة. أو يمكن تحويلها إلى متعامدة (نظرية غرام) .

ن13: إذا كان الشعاع U هو الشعاع الذاتي للمصفوفة A والمقابل للقيمة الذاتية λ، وكان a أي عدد حقيقي غير الصفر، فإن الشعاع $(\alpha * u)$ يكون أيضاً شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها .

ن**14**: إذا كانت A مصفوفة مربعة ومتناظرة، وكانت L أي مصفوفة نظامية ($|L| \neq 0$) ومن مرتبة A ، فإن المصفوفة B المعرفة بالعلاقة $B = L^{-1} * A * L$ تكون مشابهة لـ A ويكون لها نفس القيم الذاتية التي لـ A (ولكن الأشعة الذاتية تبقى غير متطابقة) .

وإن الأشعة الذاتية لـ B تساوي حاصل ضرب L^{-1} في الأشعة الذاتية لـ A. أي أن: $V = L^{-1} * U$

حيث: U هي الأشعة الذاتية لـ A و V هي الأشعة الذاتية لـ B

وبالتالي فإن المصفوفتين B,A تكونان متشابهتين. وتسمى المصفوفة $B = L^{-1} * A * L$ بتحويلة التشابه .

ن**15**: إذا شكلنا من أعمدة الأشعة الذاتية للمصفوفة A بحسب ترتيبها مصفوفة T، فإننا سنحصل على مصفوفة مربعة من مرتبة A، وتسمى المصفوفة T بالمصفوفة الظاهرية لـ A(medal matrix)، وإذا كانت المصفوفة T نظامية ($|T| \neq 0$) فإن المصفوفة D المعرفة بالعلاقة:

$D = T^{-1} * A * T$ تكون مصفوفة قطرية، وإن عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية لـ D وتساوي القيم الذاتية لـA حسب الترتيب السابق . أي أن:

$$D = T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \qquad (25-2)$$

أي أن المصفوفتين D,A تكونان متشابهتين وتسمى المصفوفة $D = T^{-1} * A * T$ بتحويلة الاستقطار والتشابه Similarity diagonalization transformation، ويستفاد من هذه النظرية في عملية تحويل المصفوفات إلى مصفوفات قطرية، وفي عمليات التحقق من صحة الأشعة الذاتية.

وهناك شكل آخر لهذه النظرية وهو أن يكون:

$A * T = T * \Lambda$ (وتطبق عندما يكون T^{-1} غير موجود)

حيث Λ: هي مصفوفة قطرية مؤلفة من القيم الذاتية λ_k على القطر الرئيسي .

ن**16**: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ومكررة m مرة وكانت الأشعة $U_1, U_2, U_3 \dots U_m$ هي الأشعة الذاتية المقابلة لـ λ المكررة، فإن التركيب الخطي لها $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i * U_i$ يكون أيضاً شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها حيث أن a_i أية أعداد حقيقية غير الصفر

ن**17**: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة النظامية A ($|A| \neq 0$) ويقابلها الشعاع الذاتي U فإن λ^n تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^n ويقابلها نفس الشعاع الذاتي U . حيث أن n عدد صحيح بشكل عام

نتيجة هامة: إذا كان n=-1 فإنه يكون لدينا المصفوفة A^{-1} ويكون λ^{-1} قيمة ذاتية لها، أما شعاعها الذاتي فيبقى U هو نفسه الذي لـ A . أي القيم الذاتية لـ A^{-1} هي مقاليب القيم الذاتية لـ A، ولكن الأشعة الذاتية تبقى نفسها .

ن18: إذا كان للمصفوفة A القيمة والشعاع الذاتيين (λ, U) وكان $f(A) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i * A^i$، فإن $f(A)$ يكون له القيمة والشعاع الذاتيين $[f(\lambda), u]$.

ن19: نظرية (كايلي– هاملتون) .

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكانت معادلتها المميزة بالنسبة لـ λ هي :

$$|A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots a_n\lambda^n = 0 \qquad (26-2)$$

فإن A نفسها تحقق تلك المعادلة الذاتية أي يكون لدينا:

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots a_n A^n = 0 \qquad (27-2)$$

ن20: يمكن الحصول على المقلوب A^{-1} من العلاقة (2–27) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i * A^i = 0$ وذلك بضرب تلك الصيغة بـ A^{-1} من اليسار فنجد أن :

$$a_0 A^{-1} + a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \cdots a_n A^{n-1} = 0$$

وبالتالي نحصل على المقلوب A^{-1} من العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}[a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \cdots a_n A^{n-1}] \qquad (28-2)$$

ن21: يمكن فك أو نشر أي مصفوفة A_{n*n}^{k} (حيث $k \geq n$) على شكل متسلسلة قوى من A حتى القوة (n-1) أي يمكن كتابة A_n^k على الشكل التالي:

$$A_n^k = B_0 + B_1 A^1 + B_2 A^2 + \cdots B_{n-1} A^{n-1} \qquad (29-2)$$

ن22: يمكن فك واقتطاع أي دالة مصفوفة $f(A)$ إلى الحد A^{n-1} كحد أعلى. أي يمكن كتابتها كمايلي:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$$ **بشرط تقارب المتسلسلة** (2–30)

وهناك نظريات أخرى يمكن البحث عنها في المراجع المختصة .

مثال (2–2): لنأخذ المصفوفة المتناظرة التالية : $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

والمطلوب: إيجاد القيم والأشعة الذاتية لـ A

ثم حساب المصفوفة T والجداء $T^{-1} * A * T$

ثم التأكد من أن: $T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

الحل: لإيجاد القيم الذاتية لهذه المصفوفة نشكل المعادلة الذاتية لها وهي:

$$A * X = \lambda X$$
$$[A - \lambda I] * X = 0$$

وحتى لا نحصل على الحل التافه للشعاع العمودي (X=0) نضع محدد المصفوفة مساوياً للصفر، أي نجعل: $|A - \lambda I| = 0$ فنجد أن:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبأخذ مفكوك هذا المحدد حسب الأقطار نجد أن:

$$(5-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)+16+16-16(2-\lambda)-4(5-\lambda)-4(5-\lambda)=0$$

$$(10-5\lambda-2\lambda+\lambda^2)(5-\lambda)+32-\cancel{32+16\lambda}-20+4\lambda-20+4\lambda=0$$

$$50-35\lambda+5\lambda^2-10\lambda+7\lambda^2+\lambda^3+24\lambda-40=0$$

ومنه نحصل على المعادلة المميزة التالية :

$$10-21\lambda+12\lambda^2-\lambda^3=0$$

نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ حسب خوارزمية معادلات الدرجة الثالثة، فنحصل على (3) جذور كامنة أو على (3) قيم ذاتية للمصفوفة السابقة A وهي: $\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=1 \qquad \lambda_3=10$

وهنا نلاحظ أن: مجموع هذه القيم لذاتية = مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A= trac(A)

1+1+10=5+2+5=12

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لكل من هذه القيم الذاتية نعوض قيم λ على التوالي في مصفوفة المعادلة الذاتية: فعندما نضع $\lambda_1=1$ فإنه يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 5-1 & -2 & -4 \\ -2 & 2-1 & 2 \\ -4 & 2 & 5-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$4x_1-2x_2-4x_3=0$$
$$-2x_1+1X_2+2x_3=0$$
$$-4x_12+2x_2+4x_3=0$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض، بل هي عبارة عن معادلة واحدة (لأن الثانية تنتج من الأولى بضربها بـ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ والثالثة من الأولى بضربها بـ (1-)) .

ولذلك نأخذ معادلة واحدة منها ولتكن المعادلة الثانية فنجد أن:

$$-2x_1+x_2+2x_3=0 \qquad (1)$$

وهي تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة لذلك نبدأ بالحل البسيط الذي يكون فيه $x_3=0$ فنحصل على أن: $x_2=2x_1$ ثم نضع $x_1=-1$ فنحصل على أن $x_2=-2$

وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الخاص الأول وهو: $u_1=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

ومنها نحصل على حزمة الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية: $\lambda=1$ من العلاقة: $U_1=C*\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

حيث C هو أي عدد حقيقي (غير الصفر) .

ولكن إذا وضعنا $x_2=0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن $x_3=x_1$، لذلك يمكن أن نضع $x_1=1$ فنحصل على $x_3=1$، وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الخاص الآخر المقابل أيضاً للقيمة الذاتية $\lambda=1$ وهو: $u_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ومنها نحصل على حزمة أخرى من الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ من العلاقة الآتية :

$$U_2 = C * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولكن إذا وضعنا $x_1 = 0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن : $x_2 = -2x_3$ وعندها يمكن أن نضع $x_3 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -2$ وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الخاص الثالث المقابل أيضاً لـ $\lambda_2 = 1$ وهو :

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على حزمة ثالثة من الأشعة المقابلة أيضاً للجذر الذاتي$1 = \lambda$ من العلاقة الآتية:

$$u_3 = cu_3$$

وحسب النظرية (16) نلاحظ أن: $u_3 = u_1 + u_2$ أي أن u_3 غير مستقل عن u_1, u_2 لأنها تقابل نفس القيمة الذاتية $\lambda = 1$.

وللتحقق من أن هذه الأشعة u_1, u_2, u_3 صحيحة نتأكد من أن قيمها تحقق المعادلة الذاتية التالية:

$$AU = \lambda * U$$

وكمثال على ذلك نأخذ أحد أشعة الحزمة الثالثة فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 * \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}'$$

وأخيراً لنأخذ القيمة الذاتية الثالثة $\lambda_2 = 10$ ونعوضها في المعادلة $[A - \lambda I]X = 0$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix} (5-10) & -2 & -4 \\ -2 & (2-10) & 2 \\ -4 & 2 & (5-10) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية التالية:

$$-5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض (لأن محددها معدوم)، ولحلها نقوم بضرب الثانية بـ (2)، ثم نطرحها من الثالثة فنحصل على المعادلة التالية:

$$0 + 18x_2 - 9x_3 \Longrightarrow x_3 = 2x_2$$

فإذا وضعنا $x_2 = 1$ فإن $x_3 = 2$، وبالتعويض في المعادلة الثالثة أو غيرها نجد أن $x_1 = -2$

وبذلك نحصل على الشعاع الخاص الأول المقابل للقيمة الذاتية: $\lambda_3 = 10$ وهو:

$$u_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U_4 = C \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحته نعوضه في المعادلة $A * \mathrm{U} = \lambda\mathrm{U}$ فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بتشكيل المصفوفة T من الأشعة الذاتية المستقلة أو المتعامدة المقابلة للقيم الذاتية وهي: U_1, U_2, U_4 فنحصل على أن :

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & +2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن:

$$T^{-1} * A * T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

وإذا أردنا أن نحصل على الأشعة الذاتية الواحدية فإننا نقوم بحساب أطوال الأشعة الذاتية السابقة ونقسم عناصر كل شعاع على طوله كما يلي:

$$\|u_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 0^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \|u_1\| = \sqrt{5} = \ell_1$$

$$\|u_2\| = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \|u_2\| = \sqrt{2} = \ell_2$$

$$\|u_3\| = (-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \|u_3\| = \sqrt{9} = 3 = \ell_2$$

وهكذا نجد أن الأشعة الذاتية الممعيرة الواحدية هي:

$$e_1 = \frac{U_1}{\ell_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$ وهو يقابل $\lambda_1 = 1$

$$e_2 = \frac{U_2}{\ell_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$ وهو يقابل $\lambda_2 = 1$

$$e_3 = \frac{U_3}{\ell_3} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$ وهو يقابل $\lambda_3 = 10$

وهي تحقق العلاقة السابقة:

$$T^{-1} * A * T = \Lambda$$

كما أنها تحقق المعادلة الذاتية :

$$A * U = \lambda * \mathrm{U}$$

4-2 نظريات مكملة

1- نظرية النشر الطيفي (Spectral decomposition)

إذا كانت A مصفوفة مربعة نظامية وحقيقية من المرتبة $k * k$ فإنه يكون لها عدداً من القيم الذاتية الحقيقية يساوي k قيمة هي:

$$\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3 \; \dots \lambda_k \qquad (31-2)$$

ويقابلها عدداً k من الأشعة الذاتية المميزة (الواحدية) والمتعامدة هي:

$$e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \; \dots e_k \qquad (32-2)$$

أي أنها تحقق العلاقتين :

$$e_i' .. e_i = 1 \qquad e_i' .. e_j = 0 \qquad : i \neq j$$

وكانت E مصفوفة الأشعة المتعامدة $e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \; \dots e_k$

فإنه يمكننا نشر المصفوفة A على الشكل التالي:

$$\boxed{A = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' + \cdots \lambda_k e_k e_k' = E * \Lambda * E' \qquad (33-2)}$$

وللتأكد من ذلك نقوم بتطبيقها على المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ من المثال (2-1)، حيث كان لها القيم الذاتية التالية:

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -2$$

وكان لها الأشعة الذاتية المميزة المقابلة لها التالية:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

وحسب هذه النظرية نجد أن:

$$A = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \;, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \;, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A$$

2- نظرية المصفوفة المتعامدة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة ومتناظرة ومن المرتبة $k * k$، فإنه يكون لها مجموعة من الأشعة المتعامدة المميزة $e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \; \dots e_k$ مقابل القيم الذاتية $\lambda_1 \;\; \lambda_2 \; \dots \lambda_k$، وإذا شكلنا من هذه الأشعة المتعامدة مصفوفة E ، فإن E ستكون متعامدة وتحقق العلاقات التالية (حسب النظرية (15)) :

$$E * E' = E' * E = I \quad \Longrightarrow \quad E' = E^{-1} \qquad (34-2)$$

$$E^{-1} * A * E = E' * A * E = \Lambda = diog\ (\lambda_1 \;\; \lambda_2 \; \dots \lambda_k) \qquad (35-2)$$

حيث أن I هي المصفوفة الواحدية من المرتبة $k * k$، وإن Λ هي المصفوفة القطرية التي تتألف عناصر قطرها الرئيسي من القيم الذاتية $\lambda_k \dots \lambda_3 \ \lambda_2 \ \lambda_1$.

ومن جهة أخرى نجد أنه لو ضربنا العلاقة (2−35) من اليمين بـ E' ومن اليسار بـ E فنجد أن:

$$E * E' * A * E * E' = E * \Lambda * E'$$

ومنها نستنتج أن :

$$A = E * \Lambda * E' \qquad (36-2)$$

وهذا يؤكد صحة العلاقة (2−33)

وبدمج هذه النظرية مع نظرية النشر الطيفي نستنتج أنه يمكننا كتابة أي مصفوفة مربعة ومتناظرة على الشكل التالي:

$$A = E * \Lambda * E' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i * e_i * e_i' \qquad (37-2)$$

حيث أن: e_i هي الأشعة الذاتية المميزة المقابلة للقيم الذاتية λ_i

وأن E هي المصفوفة المتعامدة من الأشعة المتعامدة e_i

وأن Λ هي المصفوفة القطرية المؤلفة من القيم الذاتية λ_i

3- تعريف المصفوفة المحددة إيجابياً :

نقول عن أية مصفوفة مربعة ومتناظرة A ومن المرتبة $k * k$، إنها محددة إيجابياً إذا كانت نتيجة جداء الصيغة التربيعية $(X'A\,X)$ تساوي قيمة موجبة، حيث X أي شعاع له نفس المرتبة k ولا يساوي الصفر . ونكتب ذلك كما يلي:

نقول عن المصفوفة A المربعة والمتناظرة إنها محددة إيجابياً إذا كان :

$$X'A\,X > 0 \qquad : \left(\text{بشرط } X \neq 0\right) \qquad (38-2)$$

ونقول عن المصفوفة A المربعة والمتناظرة إنها شبه محددة إيجابياً إذا كان :

$$X'A\,X \geq 0 \qquad : \left(\text{بشرط } X \neq 0\right) \qquad (39-2)$$

4- إذا كانت A مصفوفة مربعة ومحددة إيجابياً $(X'A\,X > 0)$، فإن جميع قيمها الذاتية تكون موجبة، وبالمقابل يمكننا أن نقول عن أية مصفوفة مربعة ومتناظرة A أنها محددة إيجابياً إذا كانت جميع قيمها الذاتية موجبة $(\lambda_i > 0)$، وعندها فإن عدد تلك القيم يكون مساوياً لرتبتها r حيث $(r \leq k)$ وحيث k مرتبة A .

أما إذا كانت إحدى القيم الذاتية معدومة فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة شاذة (Signular) لأن محددها يكون معدوماً $(|A| = 0)$ حسب النظرية (2) .

5- إذا كانت A مصفوفة مربعة وشبه محددة إيجابياً $(X'A\,X \geq 0)$ وكانت رتبتها تساوي r (حيث $\mathrm{r} \leq k$) فإنه يكون لها r قيمة ذاتية غير معدومة. ويكون لها $(k-r)$ قيمة ذاتية معدومة. وتستخدم هذه النظرية كثيراً في التحليل متعدد المتغيرات وخاصة في التحليل التمييزي .

6- إذا كانت A مربعة ومحددة إيجابياً فإن مقلوبها A^{-1} يساوي :

$$A^{-1} = E * \Lambda^{-1} * E' = \sum_{i=1}^{P} \frac{1}{\lambda_i} e_i * e_i' \qquad \lambda_i \neq 0 \qquad (40-2)$$

حيث أن Λ هي المصفوفة القطرية $\Lambda = Diag\,(\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \dots \lambda_k)$

7- إذا كانت A مصفوفة متناظرة وحقيقية من $k * k$ وكانت B مصفوفة متناظرة وحقيقية ومحددة إيجابياً فإنه يكون للمعادلة الذاتية العامة التالية:

$$A * e = \lambda * B * e \qquad (41-2)$$

k شعاعاً ذاتياً متعامداً $(e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \;\; \dots e_k)$ وتكون هذه الأشعة متعامدة مع المصفوفة B أي أنها تحقق العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} e_i' * B * e_j &= 0 \qquad i \neq j \\ e_i' * B * e_j &= 1 \qquad i = j \end{aligned} \qquad (42-2)$$

وبالمقابل يكون بالنسبة لـ A ما يلي:

$$\begin{aligned} e_i' * A * e_j &= 0 \qquad i \neq j \\ e_i' * A * e_j &= 1 \qquad i = j \end{aligned} \qquad (43-2)$$

ويمكن كتابة هاتين العلاقتين بشكل مصفوفي موحد كما يلي:

$$\begin{aligned} e' * B * e &= I \\ e' * A * e &= \Lambda \end{aligned} \qquad (44-2)$$

8- نتيجة هامة: إذا كان X_i حل خاص للمعادلة المميزة (2−11) ويقابل القيمة الذاتية λ_i فإنه يحقق المعادلة (2−10) ويمكن كتابته ومعالجته كما يلي:

$$A * X_i = \lambda_i * X_i \qquad (45-2)$$

لنضرب الطرفين من اليسار بـ X_i' فنحصل على أن:

$$X_i' * A * X_i = \lambda_i * X_i' * X_i = \lambda_i \, \|X_i\|^2 \qquad (46-2)$$

نقسم الطرفين على $\|X_i\|^2$ فنستنتج العلاقة الهامة التالية:

$$\frac{X_i' * A * X_i}{\|X_i\|^2} = \lambda_i \qquad (47-2)$$

وهي علاقة هامة ولها استخدامات متعددة .

وكذلك نجد أنه إذا كان e_i هو الحل الممعير للمعادلة (2−11) المقابل للقيمة الذاتية λ_i فإنه يحقق المعادلة (2−10) ونكتب ذلك كما يلي:

$$Ae_i = \lambda_i e_i \qquad (48-2)$$

لنضرب الطرفين من اليسار بـ e_i' فنحصل على أن :

$$e_i' * A * e_i = \lambda_i * e_i' * e_i = \lambda_i * 1 = \lambda_i \qquad (49-2)$$

ومنها نستنتج العلاقة الهامة التالية:

$$e_i' * A * e_i = \lambda_i \qquad (50-2)$$

مثال (2-3): نأخذ نتائج المثال (2-1) السابق حيث كان له القيمتين الذاتيتين $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$

ويقابلهما الحلين الخاصين والمميزين التاليين :

$$X_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \qquad e_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن :

$$\|X_1\|^2 = 2 \qquad \|X_2\|^2 = 2 \qquad \|e_1\|^2 = 1 \qquad \|e_2\|^2 = 1$$

وبتعويض X_i في (2-47) نجد أن :

$$\frac{X_1' * A * X_1}{\|X_1\|^2} = \frac{(1\ ,1)\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{2} = \frac{(1\ ,1)\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}}{2} = \frac{8}{2} = 4 = \lambda_1$$

$$\frac{X_2' * A * X_2}{\|X_2\|^2} = \frac{(1\ ,1)\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}{2} = \frac{(1\ ,1)\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 = \lambda_2$$

وكذلك نجد أن تعويض e_i في (2-50) يعطينا أن :

$$e_1' * A * e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}}\\ \frac{4}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 2 + 2 = 4 = \lambda_1$$

$$e_2' * A * e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = -1 - 1 = -2 = \lambda_2$$

2-5 مصفوفة الجذر التربيعي:

لنفترض أن A مصفوفة مربعة من المرتبة $(k * k)$ متناظرة ومحددة إيجابياً فحسب نظرية التحليل الطيفي يمكن كتابتها كما يلي:

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i * e_i * e_i' \qquad (51-2)$$

وليكن لدينا E مصفوفة الأشعة الذاتية المميزة والمتعامدة لها وهي :

$$E = [e_1\ \ e_2\ \ e_3\ \ \dots e_k] \qquad (52-2)$$

حيث أن P متعامدة وتحقق العلاقات التالية : $E * E' = E' * E = I \quad , \quad E' = E^{-1}$

وعندها فإن A يمكن أن تكتب حسب العلاقة (2-37) كما يلي:

$$A_{k*k} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i * e_i * e_i' = E_{k*k} * \Lambda_{k*k} * E'_{k*k} \qquad \mathbf{(53-2)}$$

حيث أن Λ هي المصفوفة القطرية للقيم المميزة الموجبة للمصفوفة A وتساوي :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad : \lambda_i > 0 \qquad \mathbf{(54-2)}$$

والآن لنضرب طرفي العلاقة (1−53) بـ $E * \Lambda^{-1} * E'$ فنحصل على أن:

$$E\Lambda^{-1}E'A = E\Lambda^{-1}E' * E'\Lambda * E' = E * E' = I \qquad \mathbf{(55-2)}$$

ثم نضرب طرفي (1−55) من اليمين بـ Λ^{-1} فنحصل على أن (بعد تبديل الطرفين) :

$$\Lambda^{-1} = E * \Lambda^{-1} * E' * A * \Lambda^{-1}$$

ومنها نحصل عل أن :

$$\Lambda^{-1} = E * \Lambda^{-1} * E' = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} * e_i * e_i' \qquad \mathbf{(56-2)}$$

ومن جهة أخرى لنفترض أن المصفوفة $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ ترمز إلى المصفوفة القطرية التي عناصرها القطرية $\sqrt{\lambda_i}$، أي ان:

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix} \quad : \lambda_i > 0 \qquad \mathbf{(57-2)}$$

قياساً على (1−53) يمكننا أن نعرف مصفوفة الجذر التربيعي $A^{\frac{1}{2}}$ للمصفوفة A بواسطة العلاقة التالية:

$$A^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} * e_i * e_i' = E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' \qquad \mathbf{(58-2)}$$

وكذلك نجد أن $A^{-\frac{1}{2}}$ تساوي: $A^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} * e_i * e_i' = E * \Lambda^{-\frac{1}{2}} * E'$

وهي مصفوفة مربعة ومتناظرة ومن المرتبة $K * K$ وتتمتع هذه المصفوفة الجذرية بالخواص التالية:

1) $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)' = A^{\frac{1}{2}}$ (لأن $A^{\frac{1}{2}}$ قطرية) **(59 − 2)**

2) $\left(A^{\frac{1}{2}}\right) * \left(A^{\frac{1}{2}}\right) = A$ **(60 − 2)**

3) $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} * e_i * e_i' = E\Lambda^{-\frac{1}{2}}E' = A^{-\frac{1}{2}}$ **(61 − 2)**

وذلك لأن $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ مصفوفة قطرية وعناصرها القطرية هي $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$:

4) $A^{+\frac{1}{2}} * A^{-\frac{1}{2}} = A^{-\frac{1}{2}} * A^{+\frac{1}{2}} = I$ (62 − 2)

5) $A^{-\frac{1}{2}} * A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1}$ (63 − 2)

6) $A^{-\frac{1}{2}} = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = A^{-\frac{1}{2}}$ (64 − 2)

6-2 مصفوفة المتراجحات والتعظيم :

إن قضية التعظيم تلعب دوراً هاماً في التحليل المتعدد، وفي التحليل التمييزي الخطي. فعلى سبيل المثال فهي تفيدنا في مسألة توزيع أو تصنيف المشاهدات على المجموعات التي يتألف منها المجتمع المدروس. وإن قاعدة التوزيع غالباً ما تكون على شكل تابع خطي من المتحولات التي تعظم الفروقات بين المجموعات بالنسبة لتبايناتها الداخلية. وفي طريقة المركبات الأساسية والعوامل الرئيسية نعتمد على تركيب خطي من المتحولات لتعظيم الجدوى الاقتصادية لها .

وتلعب المتراجحات المصفوفية دوراً كبيراً في البرهان على بعض النظريات وفي تعظيم النتائج المستخرجة منها. وأهم هذه المتراجحات هي:

- **متراجحة (كوشي− شوارتز) Cauchy- shwarz :**

لنفترض أنه لدينا شعاعين عموديين d ,b من المرتبة$1 * p$، فعندها يكون بينهما المتراجحة التالية:

$$(b' * d)^2 \leq (b' * b) * (d' * d) \qquad (65-2)$$

وتحدث المساواة فقط عندما يكون $b = cd$ أو $d = cb$ حيث c ثابت ما لا يساوي الصفر.

- **متراجحة (كوشي – شوارتز) الموسعة :**

لنفترض أنه لدينا شعاعين d , b من المرتبة $1 * p$، وأنه لدينا مصفوفة B محددة إيجابياً، فعندما يكون لدينا بينهم المتراجحة التالية:

$$(b' * d)^2 \leq (b' * B * b) * (d' * B^{-1} * d) \qquad (66-2)$$

وتحدث المساواة فقط عندما يكونن $b = cB^{-1}d$ أو $d = cBb$ حيث c ثابت ما لا يساوي الصفر.

- **مسألة التعظيم:**

لنفترض أنه لدينا مصفوفة محددة إيجابياً ومتناظرة B، وأنه لدينا شعاعاً معلوماً d، وإذا كان X شعاعاً كيفياً (مجهولاً) وغير معدوم، فإن تعظيم النسبة التالية يساوي :

$$\max\left[\frac{(X' * d)^2}{X' * B * X}\right] = d' * B^{-1} * d \qquad (67-2)$$

وهذه المساواة تحدث عندما $X = cB^{-1}d$

ويمكن البرهان على هذه النتيجة اعتماداً على متراجحة (كوشي− شوارتز) الموسعة بالنسبة لـ X، فنجد أن العلاقة (2−66) تأخذ الشكل التالي:

$$(X' * d)^2 \leq (X' * B * X)(d' * B^{-1} * d) \qquad (68-2)$$

وبما أن $X \neq 0$ وأن B محددة إيجابياً، فإن جداء الصيغة التربيعية لهما يساوي قيمة موجبة أي أن:

$$X' * B * X > 0$$

لذلك نقسم الآن طرفي المتراجحة (2−68) على الكمية العددية الموجبة $(X' * B * X)$، فنحصل على الحد الأعلى للنسبة المذكورة . أي نحصل على أن :

$$\frac{(X' * d)^2}{X' * B * X} \leq d' * B^{-1} * d \qquad (69-2)$$

وهذا يعني أن: $\max \frac{(X'*d)^2}{X'*B*X} = d'*B^{-1}*d$

ثم نقوم بالبحث عن قيمة X التي تقابل تلك القيمة العظمى في (2–69)، فنجد أن ذلك يحدث عندما تبلغ النسبة (2–69) حدها الأعلى $(d'*B^{-1}*d)$، ولقد تم البرهان على إن هذا يحدث عندما تأخذ X القيمة: $X = cB^{-1}d$ حيث c ثابت كيفي $0 \neq$.

وللتحقق من ذلك نعوض ذلك الحل في (2–69)، وبما أن B^{-1} متناظرة فإن $(B^{-1})' = B^{-1}$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$\frac{(cd'*B^{-1}*d)^2}{cd'*B^{-1}*B*cB^{-1}*d} = \frac{c^2(d'B^{-1}d)^2}{c^2d'*B^{-1}*d} = d'*B^{-1}*d \qquad (70-2)$$

وهذا يعني أن الحل الذي يعظم النسبة $\frac{(X'*d)^2}{X'*B*X}$ هو قيمة X التي تساوي $X = cB^{-1}d$.

وإن أكبر قيمة لتلك النسبة تساوي :

$$\max\left[\frac{(X'*d)^2}{X'*B*X}\right] = d'*B^{-1}*d \qquad (70a-1)$$

7-2 مسألة تعظيم الصيغة التربيعية من نقطة على سطح الكرة الواحدية :

لنفترض أن B هي مصفوفة محددة إيجابياً ومتناظرة ومن المرتبة$P*P$ ولها القيم الذاتية الموجبة والمرتبة التالية: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_p > 0$ ويقابلها الأشعة الذاتية المميزة والمتعامدة $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_p$ وتحقق العلاقات :

$$Be_i = \lambda_i e_i \qquad i: 1\ 2\ 3 \ldots .p$$
$$e_i' * B * e_i = \lambda_i$$

فعندها يكون لدينا :

$$\max \frac{X'*B*X}{X'*X} = \lambda_1 \qquad = \text{أكبر قيمة ذاتية} \qquad (71-2)$$

$$\min \frac{X'*B*X}{X'*X} = \lambda_p \qquad = \text{أصغر قيمة ذاتية} \qquad (72-2)$$

وعدا عن ذلك فإذا كان X متعامداً مع الأشعة الأولى $e_1, e_2, \ldots, e_k$، فعندها يكون لدينا :

$$\max \frac{X'*B*X}{X'*X} = \lambda_{k+1} \qquad (73-2)$$

وهذا يحدث عندما يكون: $X = e_{k+1}$ حيث $k = 1\ 2\ 3 \ldots (P-1)$

وللبرهان على ذلك نأخذ المصفوفة المتعامدة E والتي أعمدتها مؤلفة من الأشعة المميزة والمتعامدة $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_p$ مع المصفوفة القطرية Λ التي عناصرها القطرية هي جملة القيم الذاتية للمصفوفة B وهي: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$، واعتماداً على العلاقة (2–58) نجد أنه يمكننا أن نعرف المصفوفة $B^{\frac{1}{2}}$ بدلالة E وΛ كما يلي :

$$B^{\frac{1}{2}} = E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' \qquad (74-2)$$

نعوض ذلك في النسبة $\frac{X'*B*X}{X'*X}$ بعد تحليل B إلى جداء مصفوفتين كما يلي: $B = B^{\frac{1}{2}} * B^{\frac{1}{2}}$، ثم نفرض أن $Y = E' * X$ فإن $Y \neq 0$ لأن $X \neq 0$ وبالتالي نحصل على أن :

$$\frac{X' * B^{\frac{1}{2}} * B^{\frac{1}{2}} * X}{X' * X} = \frac{X' * E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' * E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' * X}{X' * P * P'X} = \frac{Y' * \Lambda * Y}{Y' * Y} =$$

$$= \frac{\sum^{P} \lambda_i y_i^2}{\sum^{P} y_i^2} \leq \lambda_1 \frac{\sum^{P} y_i^2}{\sum y_i^2} = \lambda_1 \qquad (75-2)$$

وذلك بعد استبدال كل القيم الذاتية λ_i بأكبرها λ_1 وإخراجها خارج المجموع الأخير وبذلك نكون حصلنا على أن:

$$\max \frac{X' * B * X}{X' * X} \leq \lambda_1 \qquad (76-2)$$

فمثلاً إذا أخذنا أي حل ممعير مثل $X = e_1$ فإننا نجد أنه يحقق $e_i' * e_1 = 1$، وبالتعويض نحصل على أن تلك النسبة تساوي اعتماداً على (2–76) ما يلي:

$$\frac{e' * B * e}{e' * e} = e_i' * B * e_1 = \lambda_1 \qquad (77-2)$$

وهكذا يتم البرهان على البند الثاني فنحصل على أن أصغر قيمة لتلك النسبة تساوي λ_P أصغر القيم الذاتية لـ B

$$\min \frac{X' * B * X}{X' * X} = \lambda_P \qquad (78-2$$

وللبرهان على البند الثالث نأخذ العلاقة العامة التالية :

$$X = E' * Y = [e_1, e_2, \dots, e_P] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_P \end{bmatrix} = e_1 y_1 + e_2 y_2 + \cdots + e_P y_P$$

وبما أن X متعامدة مع الأشعة الأولى المتعامدة $e_1, e_2, \dots, e_k$، فإنه إذا ضربنا X من اليسار بـ e_1 فإن الجداء $e_1' * X$ يكون معدوماً. ومنه نجد أن:

$$e_1' * X = e_1' * E' * Y \Longrightarrow e_1' e_1 y_1 + e_1' e_2 y_2 + \cdots + e_1' e_P y_P = 0 \qquad (79-2)$$
$$= 1 * y_1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \Longrightarrow y_1 = 0$$

وبطريقة مشابهة نجد أن: $y_1 = y_2 = y_3 = \cdots y_k = 0$

وبذلك تأخذ النسبة السابقة الشكل التالي :

$$\frac{X' * B * X}{X' * X} = \frac{\sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i * y_i^2}{\sum_{i=k+1} y_i^2} = \lambda_{k+1} \qquad (80-2)$$

لأنه إذا وضعنا $y_{k+1} = 1$ و $y_{k+2} = y_{k+3} = \cdots y_P = 0$، فإننا نحصل على القيمة العظمى لها والتي تساوي λ_{k+1} .

الخلاصة : إذا أخذنا أي شعاع ممعير مثل e_0 فإن النسبة $\frac{X'*B*X}{X'*X}$ يكون لها نفس القيمة التي للصيغة التربيعية $(e_0' * B * e_0)$ حيث أن e_0' هو منقول الشعاع الممعير $e_0' = \frac{X'}{\sqrt{X'*X}}$ والذي طوله يساوي الواحد .

وبالمقابل نجد أن المعادلة $(1-53)$ تشير إلى أن القيمة الذاتية λ_1 هي القيمة الكبرى للصيغة التربيعية $(X' * B * X)$. من أجل جميع قيم X التي تبعد عن مركزها الأصلي بمقدار الواحد (قيم X التي تقع على محيط كرة نصف قطرها يساوي الواحد) .

وكذلك نجد أن القيمة الذاتية λ_P هي القيمة الصغرة للصيغة التربيعية $(X' * B * X)$ من أجل جميع قيم X التي تبعد عن المركز بمقدار الواحد (قيم X التي تقع على محيط كرة نصف قطرها يساوي الواحد) .

أي أن القيمة الذاتية الكبرى λ_1 والقيمة الذاتية الصغرى λ_P تقدم لنا عرضاً للقيم الخارجية للصيغة $(X' * B * X)$ من أجل جميع قيم X التي تقع على محيط الكرة الواحدية .

وإن القيم الذاتية الوسطى للمصفوفة المحددة إيجابياً B وذات المرتبة $(P * P)$ أيضاً يمكن أن تفسر على أنها قيم خارجية . عندما تأخذ X أوضاعاً متعامدة مع الخيارات الأخرى .