مبادئ الارتباط القانوني

من منشورات الدكتور إبراهيم محمد العلي – جامعة تشرين – كلية الاقتصاد – 2017 م

يطبّق أسلوب الارتباط القانوني على مجموعتين من المتغيرات هما:

–مجموعة المتحوّلات المؤثّرة أو المفسّرة ونرمز لها بـ:

$X_1\ X_2\ X_3\ X_4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . X_p$

ويطلق عليها مصطلح المتغيرات المستقلة independent Variables (IV) ويرمز لعددها بـp

–مجموعة المتحوّلات التابعة أو ونرمز لها بـ

$Y_1\ Y_2\ Y_3\ Y_4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . Y_q$

ويطلق عليها مصطلح المتغيرات التابعة Dependent Variables(DV) ويرمز لعددها بـq

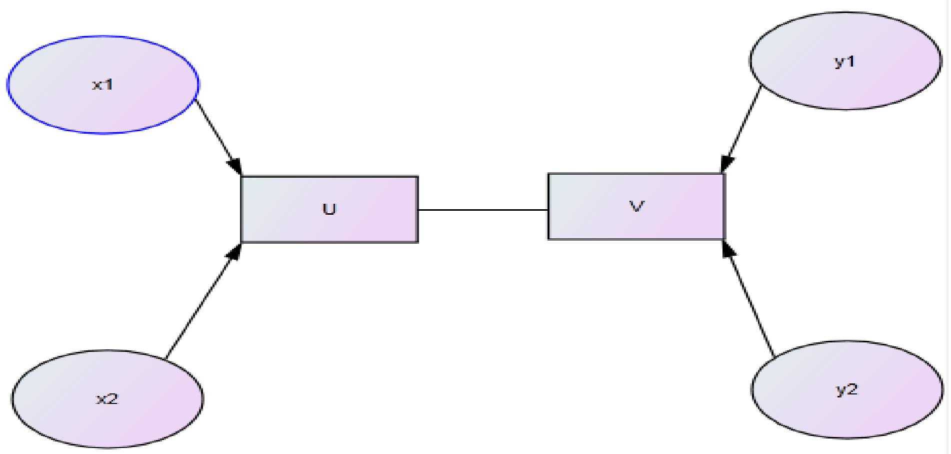
ويهدف الارتباط القانوني إلى دراسة العلاقة بين هاتين المجموعتين انطلاقاً من حساب معامل الارتباط بين هاتين المجموعتين ثمّ تحليل النتائج.

ولتسهيل مفهوم الارتباط القانوني نبدأ بدراسة العلاقة بين مجموعتين تتضمّن كل منهما متحولين فقط: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ثم $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. ولدراسة الارتباط بينهما نشكّل من متحوّلات كلّ مجموعة تركيباً خطيّاً بأمثال مجهولة a_i و b_i كما يلي (Weenink, 2003):

$$U = a_1X_1 + a_2X_2 = (a_1\ a_2)\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \acute{a}.X \qquad \textbf{(1)}$$

$$V = b_1Y_1 + b_2Y_2 = (b_1\ b_2)\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \acute{b}.Y$$

حيث$\acute{a}$ هو منقول الشعاع $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$ ، و $\acute{b}$ هو منقول الشعاع $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ ، ويمكن تمثيل هاتين المجموعتين كما في الشكل (1) التالي:



الشكل رقم (1) نموذج العلاقة في الارتباط القانوني على مسنوى متغيرين مستقلين ومتغيرين تابعين فقط.

يسمّى المركّب U بالمركب القانوني للمجموعة X (canonical variate for x) ويسمّى المركّب V بالمركب القانوني للمجموعة Y (canonical variate for y) ، ولدراسة العلاقة بين المركبين V,U نقوم بحساب مصفوفات التباينات لـX والتباينات لـY والتباينات المشتركة لـX و Y المحسوبين كما في الجدول التالي:

	$x_1 \quad x_2$	$y_1 \quad y_2$
x_1 x_2	$s_{11}^2 \quad s_{12}$ C_{xx} $s_{21} \quad s_{22}^2$	$C_{11} \quad C_{12}$ C_{xy} $s_{21} \quad C_{22}$
y_1 y_2	$C_{11} \quad C_{21}$ C_{yx} $C_{21} \quad C_{22}$	$\sigma_{11}^2 \quad \sigma_{12}$ C_{yy} $\sigma_{21} \quad \sigma_{22}^2$

علماً أنّ: $C_{yx} = \acute{C}_{xy}$ ، ثمّ نقوم بحساب معامل الارتباط القانوني بين U,V من العلاقة:

$$\rho_{(u,v)} = \frac{COV(U,V)}{\sqrt{Var(u)}.\sqrt{Var(V)}} \qquad \textbf{(2)}$$

ويسمّى هذا المعامل بمعامل الارتباط القانوني بين المجموعتين X و Y ولحساب قيمة هذا المعامل سنقوم بحساب قيمة كل من التباين $Var(u)$ ثمّ $Var(v)$ ثمّ التباين المشترك $COV(U,V)$ فنجد حسب قاعدة تباين مجموع متحوّلين أنّ تباين المركّب U يساوي :

$$Var(u) = Var(a_1x_1 + a_2x_2)$$
$$= a^2{}_1Var(X_1) + a^2{}_2\, Var(X_2) + 2a_1a_2Cov(X_1, X_2)$$

وباستخدام الرموز المختصرة المستخدمة في الجدول السابق نجد أنّ:

$$Var(u) = a^2{}_1S^2{}_{11} + a^2{}_2S^2{}_{22} + 2a_1a_2S_{12} \qquad \textbf{(3)}$$

حيث رمزنا بـ $S^2{}_{11}$ للتباين $Var(x_1)$ وبـ $S^2{}_{22}$ للتباين $Var(x_2)$ وبـ S_{12} للتباين المشترك $Cov(x_1, x_2)$ ، علماً أنّ $S_{12} = S_{21}$. وإذا رمزنا بـ C_{xx} لمصفوفة تباينات المجموعة X نحصل على مصفوفة مربّعة ومتناظرة هي:

$$C_{xx} = \begin{bmatrix} Var(x_1) & Cov(x_1x_2) \\ Cov(x_2x_1) & Var(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^2 & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}^2 \end{bmatrix}$$

وبذلك يمكننا كتابة العلاقة (3) على شكل جداء أشعة ومصفوفات كما يلي:

$$Var(U) = (a_1 \quad a_2) \begin{bmatrix} S_{11}^2 & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

والتي يمكن كتابتها بشكل مختصر كما يلي:

$$Var(U) = \acute{a}C_{xx}.a \qquad \textbf{(5)}$$

وبطرقة مشابهة نجد بالنسبة للمركب القانوني V أن تباينه:

$$Var(V) = Var(b_1Y_1 + b_2Y_2)$$
$$= b^2{}_1Var(Y_1) + b^2{}_2\, Var(Y_2) + 2b_1b_2Cov(Y_1, Y_2)$$

وباستخدام الرموز المختصرة التي في الجدول السابق نجد أنّ:

$$Var(V) = b^2{}_1\sigma^2{}_{11} + b^2{}_2\sigma^2{}_{22} + 2b_1b_2\sigma_{12} \qquad \textbf{(6)}$$

حيث رمزنا بـ $\sigma^2{}_{11}$ للتباين $Var(y_1)$ وبـ $\sigma^2{}_{22}$ للتباين $Var(y_2)$ وبـ σ_{12} للتباين المشترك $Cov(y_1, y_2)$ ، علماً بأنّ $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. وإذا رمزنا بـ C_{yy} لمصفوفة تباينات المجموعة Y نحصل على مصفوفة مربّعة ومتناظرة هي:

$$C_{yy} = \begin{bmatrix} Var(y_1) & Cov(y_1y_2) \\ Cov(y_2y_1) & Var(y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

وبذلك يمكننا كتابة العلاقة (6) على شكل جداء أشعة ومصفوفات كما يلي:

$$Var(V) = (b_1 \quad b_2) \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{21} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8)}$$

والتي يمكن كتابتها بشكل مختصر كما يلي:

$$Var(V) = \acute{b}C_{yy}.b \qquad \textbf{(9)}$$

أما بالنسبة لحساب التباين المشترك للمركبين القانونيين U و V فهو يساوي:

$$Cov(U, V) = E(U - \bar{U})(V - \bar{V}) \qquad \textbf{(10)}$$

ولكن من العلاقة (1) نجد أنّ المتوسطين $\bar{U}$ و $\bar{V}$ يساويان:

$$\bar{U} = a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2 \qquad\qquad \bar{V} = b_1\bar{Y}_1 + b_2\bar{Y}_2$$

ويكون لدينا:

$$U - \bar{U} = a_1(X_1 - \bar{X}_1) + a_2(X_2 - \bar{X}_2)$$
$$V - \bar{V} = b_1(Y_1 - \bar{Y}_1) + b_2(Y_2 - \bar{Y}_2)$$

وبذلك نجد أن:

$$Cov(U, V) = E[a_1(X_1 - \bar{X}_1) + a_2(X_2 - \bar{X}_2)][b_1(Y_1 - \bar{Y}_1) + b_2(Y_2 - \bar{Y}_2]$$
$$= E[a_1b_1(X_1 - \bar{X}_1)(Y_1 - \bar{Y}_1) + a_1b_2(X_1 - \bar{X}_1)(Y_2 - \bar{Y}_2) + a_2b_1(X_2 - \bar{X}_2)(Y_1 - \bar{Y}_1) + a_2b_2(X_2 - \bar{X}_2)(Y_2 - \bar{Y}_2)]$$
$$= a_1b_1E(X_1 - \bar{X}_1)(Y_1 - \bar{Y}_1) + a_1b_2E(X_1 - \bar{X}_1)(Y_2 - \bar{Y}_2) + a_2b_1E(X_2 - \bar{X}_2)(Y_1 - \bar{Y}_1) + a_2b_2E(X_2 - \bar{X}_2)(Y_2 - \bar{Y}_2)$$

$$Cov(U, V) = a_1b_1Cov(X_1\ Y_1) + a_1b_2Cov(X_1\ Y_2) + a_2b_1Cov(X_2\ Y_1) + a_2b_2Cov(X_2\ Y_2) \qquad \textbf{(11)}$$

وباستخدام الرموز المختصرة المستخدمة في الجدول السابق نجد أنّ:

$$Cov(U, V) = a_1b_1C_{11} + a_1b_2C_{12} + a_2b_1C_{21} + a_2b_2C_{22} \qquad \textbf{(12)}$$

وإذا رمزنا لمصفوفة التباينات المشتركة للمجموعتين X و Y بالرمز C_{xy} يكون لدينا:

$$C_{xy} = \begin{bmatrix} Cov(X_1Y_1) & Cov(X_1Y_2) \\ Cov(Y_2X_1) & Cov(X_2Y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(13)}$$

وبالتالي فإنه يمكننا كتابة العلاقتين (11) و (12) على الشكل التالي:

$$Cov(U, V) = (a_1\ a_2) \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(14)}$$

وبإختصار نجد أنّ:

$$Cov(U,V) = \acute{a}C_{xy}.b \quad \textbf{(15)}$$

وإذا عوضنا كل من (5) و (9) و (15) في العلاقة (2)نجد أنّ معامل الارتباط القانوني ρ يأخذ االشكل التالي:

$$\rho_{(U,V)} = \frac{\acute{a}\ C_{xy}.b}{\sqrt{\acute{a}.C_{xx}.a} \times \sqrt{\acute{b}.C_{yy}.b}} \quad \textbf{(16)}$$

وبما أن معامل الارتباط القانوني $\rho_{(U,V)}$ يمكن أن يأخذ قيماً متعددة مقابل الأزواج الممكنة للمركبين (U,V) نرمز لأكبر قيمة يمكن أن يأخذها ρ بالرمز ρ_1 وللزوج (U,V) الذي يقابلها بالرمز (U_1,V_1) ونرمز للقيمة التالية لـ ρ بالرمز ρ_2 وللزوج (U,V) الذي يقابلها بالرمز (U_2,V_2) ..... إلخ, وإذا قمنا بأخذ مربعات هذه المعاملات ورتبناها تنازليّاً فإننا سنحصل على المعاملات المرتبة التالية:

$$\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \geq \cdots \rho_s^2 \geq 0 \quad \textbf{(17)}$$

حيث إنّ s *هو أصغر العددين* q أو p

وعلينا الآن حساب أو تقدير قيم الأمثال في الشعاعين a و b ، بحيث نجعل قيمة ρ أكبر ما يمكن.

ولكن العلاقة (16) تتضمن في هذه الحالة البسيطة 4 مجاهيل هي a_1 و a_2 و b_1 و b_2 ، ولا يمكن حسابهم أو تقديرهم من معادلة واحدة دون وضع شروط إضافية عليهم.

وحتى نستطيع تقدير الأمثال a_i و و b_i في العلاقة (16) نستفيد من خواص معامل الارتباط ρ الذي لا يتأثر بواحدات القياس للأزواج (U,V) ونضع عليها الشرطين التاليين (French, 2005, pp. 5-12):

$$Var(U) = \acute{a}C_{xy}.a = 1 \qquad Var(V) = \acute{b}C_{xy}.b = 1 \quad \textbf{(18)}$$

وعندها تتحول المعادلة (16) إلى الشكل البسيط التالي:

$$\rho = \frac{\acute{a}\ C_{xy}.b}{1\ \times 1} = \acute{a}\ C_{xy}.b \quad \textbf{(19)}$$

وتتحول مسألة تعظيم قيمة ρ إلى مسألة تعظيم البسط $\acute{a}\ C_{xy}.b$ وذلك في إطار الشرطين الواردين في (18) ، ولحل هذه المسألة نشكل تابع لاغرانج من المعامل (19) والشرطين (18) كما يلي:

$$L = \acute{a}\ C_{xy}.b - \frac{\lambda_x}{2}(\acute{a}\ C_{xx}a - 1) - \frac{\lambda_y}{2}(\acute{b}\ C_{yy}b - 1) \quad \textbf{(20)}$$

حيث λ_x و λ_y هما عددان وسيطان يسميان مضاريب لاغرانج

ثم نشتق هذا التابع بالنسبة للشعاع a ونضع مشتقه مساوياً للصفر وكذلك نشتقه بالنسبة للشعاع b ونضع مشتقه مساوياً للصفر, وذلك حتى نحصل على الوضعية التي تعطينا القيمة العظمى للتابع L المفروض فنجد أنّ[1]:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = C_{xy}.b - \lambda_x C_{xx}.a = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial b} = C_{yx}.a - \lambda_y C_{yy}.b = 0 \qquad \textbf{(21)}$$

نضرب الأولى بـ $\acute{a}$ والثانية بـ $\acute{b}$ فنحصل على المعادلتين:

$$\acute{a}C_{xy}.b - \lambda_x \acute{a}C_{xx}.a = 0$$
$$\acute{b}C_{yx}.a - \lambda_y \acute{b}C_{yy}.b = 0 \qquad \textbf{(22)}$$

ثم نطرح الثانية من الأولى فنحصل على المعادلة التالية:

$$\acute{a}C_{xy}.b - \lambda_x \acute{a}C_{xx}.a - \acute{b}C_{yx}.a + \lambda_y \acute{b}C_{yy}.b = 0 \qquad \textbf{(23)}$$

وبما أنه لدينا من الشرطين (18) أنّ:

$$Var(U) = \acute{a}C_{xx}.a = 1 \qquad Var(V) = \acute{b}C_{yy}.b = 1$$

وبما أنّ الجدائين الآخرين المتعلقين بـ$Cov(u,v)$ متساويان أي أنّ:

$$\acute{a}C_{xy}.b = \acute{b}C_{yx}.a = Cov(U,V)$$

فإننا نستنتج من (23) أنّ:

$$-\lambda_x + \lambda_y = 0 \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y = \lambda$$

أي أنّ الوسيطين λ_x وλ_y متساويان ويساويان λ لذلك نضع في (21) ونفرض أنّ المصفوفة المقلوبة ${C_{yy}}^{-1}$ موجودة فإننا نضرب المشتق الثاني من (21) من اليسار بـ${C_{yy}}^{-1}$ فنحصل على :

$${C_{yy}}^{-1}.C_{yx}.a = \lambda {C_{yy}}^{-1}.C_{yy}.b = \lambda.I.b = \lambda.b$$

ومنها نجد أنه يمكننا حساب الشعاع b بدلالة a من العلاقة:

$$b = \frac{{C_{yy}}^{-1}.C_{yx}}{\lambda}.a \qquad \textbf{(24)}$$

ثم نقوم بتعويض b في معادلة المشتق الأول من (21) فنحصل على:

$$\frac{C_{xy}.{C_{xy}}^{-1}.C_{yx}.a}{\lambda} = \lambda C_{xx}.a$$

ومنها نجد أنّ:

$$C_{xy}.{C^{-1}}_{yy}.C_{yx}.a = \lambda^2 C_{xx}.a \qquad \textbf{(25)}$$

وهو الشكل العام للمعادلة الذاتية بالنسبة للمجهول a (وهي $AX = \lambda BX$) ويمكن استخدامها في حساب a .

[1] إنّ عملية الاشتقاق هنا تمت حسب قواعد اشتقاق المصفوفات وهي:

$$\frac{\partial \acute{c}.x}{\partial x} = c$$
$$\frac{\partial \acute{X}.BX}{\partial x} = 2B.X$$

وبفرض أنّ $C^{-1}{}_{xx}$ موجودة فإننا نضرب العلاقة (25) من اليسار بالمقلوب $C^{-1}{}_{xx}$ فنحصل على:

$$C^{-1}{}_{xx}.C_{xy}\,C^{-1}{}_{yy}.C_{yx}.a=\lambda^2.a \qquad \textbf{(26)}$$

$$[C^{-1}{}_{xx}.C_{xy}\,C^{-1}{}_{yy}.C_{yx}.-\lambda^2.I].a=0 \qquad \textbf{(26')}$$

وهو الشكل الخاص للمعادلة الذاتية بالنسبة للمجهول a علماً أن نتيجة الجداء المصفوفي هو مصفوفة مربعة من المرتبة $P\times P$. ونستخدم هذه المعادلة (26) للحصول على القيم الذاتية للمصفوفة $A=[C^{-1}{}_{xx}.C_{xy}\,C^{-1}{}_{yy}.C_{yx}]$ وذلك من خلال حساب جذور معين المصفوفة التالية بالنسبة لـλ^2:

$$\left|C_{xx}^{-1}.C_{xy}.C_{yy}^{-1}.C_{yx}-\lambda^2\mathrm{I}\right|=0 \qquad \textbf{(27)}$$

فنحصل على الجذور الكامنة ونرتبها تنازلياً:

$$\lambda_1^2\le\lambda_2^2\le\lambda_3^2\ldots\ge 0 \qquad \textbf{(28)}$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة$A=[C^{-1}{}_{xx}.C_{xy}\,C^{-1}{}_{yy}.C_{yx}]$ وعددها يساوي P قيمة.

ثم نقوم بحساب الأشعة الذاتية a المقابلة للقيم الذاتية ${\lambda_k}^2$ وذلك بتعويض كل قيمة لـ λ_K^2 في المعادلة (26) السابقة, ثم نقوم بحساب عناصر الشعاع a_k بالاستعانة بالشرط (18) فنحصل على العنصرين $(a^*{}_1,a^*{}_2)$, وبعدها نعود إلى العلاقة (24) ونعوض فيها قيم الأشعة a فنحصل على الأشعة الذاتية b أي فنحصل على العنصرين $(b^*{}_1,b^*{}_2)$, وبذلك نكون قد وصلنا إلى الصيغة العددية للمركبين القانونيين U_1 و V_1 كما يلي:

$$U_1=a_1^*X_1+a_2^*X_2 \qquad \textbf{(29)}$$
$$V_1=b_1^*Y_1+b_2^*Y_2$$

وبعدها يمكننا حساب القيم النظرية للزوج U_1,V_1 المقابلة لقيم المتحولات الفعلية X و لقيم المتحولات الفعلية Y ثم حساب معامل الارتباط بينهما من معادلة بيرسون المعروفة في (2) فنحصل على قيمة معامل الارتباط القانونيρ_1 المقابل للزوج الأول (U_1,V_1) ومن جهة أخرى يمكننا أن نستخلص قيمة ρ_k لأي زوج(U_k,V_k) من العلاقة (19) بعد تعويض b من العلاقة (24) فنجد أنّ:

$$\rho_k=\frac{\acute{a}\;C_{xy}.C^{-1}{}_{yy}.C_{yx}.a}{\lambda_k}$$

واعتماداً على العلاقة (25) نستنتج أنّ:

$$\rho_k=\frac{\acute{a}\;.\lambda_k^2C_{xx}.a}{\lambda_k}=\lambda_k.\acute{a}\;.C_{xx}.a=\lambda_k$$

$$\rho_k=\lambda_k=\pm\sqrt{{\lambda_k}^2} \qquad \textbf{(30)}$$

ومنه نستخلص أنّ القيمة العددية لمعامل الارتباط القانوني ρ_k المقابلة للزوج (U_k,V_k) *تساوي الجذر التربيعي* للقيمة الذاتية المقابلة لها λ_k^2 (مع وضع الإشارة المناسبة).

ملاحظة: بما أن قيمة ρ_k تحقق المتراجحتين $-1 \leq \rho_k \leq +1$

فإنّ مربعها يحقق المتراجحة $\rho_K^2 \leq +1$ وبما أنّ $\rho_k = \lambda^2$ فإننا نجد $\lambda_k^2 \leq +1$

ومنه نستنتج أنّ القيم الذاتية لمسائل الارتباط القانوني λ_K^2 تحقق المتراجحة:

$$\lambda_K^2 \leq +1 \quad \text{مهما تكن } \forall K<=S \qquad \textbf{(31)}$$

وهذه الميزة خاصّة بمسائل الارتباط القانوني.

الارتباط القانوني المعياري:

وهو حالة خاصّة من الارتباط القانوني العام ويستخدم لتخليص المتحولات X و Y من تأثير واحدات القياس المختلفة, وهو يشترط أن نقوم بتحويل المتحولات X إلى متحولات معيارية كما يلي:

$Z_x = \frac{x_i - \bar{x_\iota}}{\sigma_{x_i}}$ فيكون لدينا $\bar{Z}_x = 0$ و $Var(Z_x) = 1$, وأن نقوم بتحويل المتحولات Y إلى متحولات معيارية كما يلي:

$Z_y = \frac{y_i - \bar{y_\iota}}{\sigma_{y_i}}$ فيكون لدينا $\bar{Z}_y = 0$ و $Var(Z_y) = 1$

وهو يشترط أن نقوم بتحويل المتحولات X والمتحولات Y إلى متحولات معياريّة كما يلي:

$$Z_{xi} = \frac{x_i - \bar{x_\iota}}{\sigma_{x_i}} \Longrightarrow \qquad \textbf{(32 a)}$$

فيكون لدينا: $\bar{Z}_{xi} = 0, Var(Z_{xi}) = 1$

$$Z_{yi} = \frac{y_i - \bar{y_\iota}}{\sigma_{y_i}} \Longrightarrow \qquad \textbf{(32 b)}$$

فيكون لدينا: $\bar{Z}_{yi} = 0, Var\left(Z_{yi}\right) = 1$

وعندها نجد أنّ التباين المشترك لكل زوج Z_x, Z_y من المتحولات المعياريّة يساوي معامل الارتباط بين x و y:

$$Cov\left(Z_x, Z_y\right) = \sum (Z_x - 0)(Z_y - 0) = \sum \left(\frac{x_i - \bar{x_\iota}}{\sigma_{x_i}}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y_\iota}}{\sigma_{y_i}}\right) = r_{xy} \qquad \textbf{(32 c)}$$

وبذلك تتحوّل عناصر مصفوفات التباينات المشتركة Cov إلى معاملات الارتباط الزوجيّة بين المتحوّلات X و Y وتتحوّل مصفوفات التباينات المشتركة $C_{xx}, C_{xy}, C_{yy}, C_{yx}$ إلى مصفوفات مؤلّفة من معاملات الارتباط الزوجيّة r_{yx} أو r_{yy} أو r_{xy} أو r_{xx} ونرمز لها على الترتيب بـ R_{yx} , R_{yy} , $R_{xy,}$ $R_{xx},$ ونكتبها كما يلي:

مصفوفة الارتباط للمتحولات المعيارية Z_x و Z_y

$Z_{y1} \quad Z_{y2}$	$Z_{x1} \quad Z_{x2}$	

Z_{x1} Z_{x2}	1 r_{21}	r_{12} 1	${r^{11}}_{11}$ ${r^{11}}_{21}$	$r\ {}^{11}{}_{12}$ ${r^{11}}_{22}$
Z_{y1} Z_{y2}	${r^{11}}_{11}$ ${r^{11}}_{21}$	${r^{11}}_{21}$ ${r^{11}}_{22}$	1 ${r^{1}}_{21}$	${r^{1}}_{12}$ 1

وإذا قمنا بتشكيل المركبين الخطيين المعياريين كما يلي:

$$U_z = e_1 Z_1 + e_2 Z_2 = \acute{e}.Z_x \quad \textbf{(33)}$$
$$V_z = \cancel{f}_1 z_1 + \cancel{f}_2 z_2 = \acute{\cancel{f}}.Z_y$$

وإذا أجرينا نفس الخطوات السابقة على هذين التركيبين وعرفنا معامل الارتباط القانوني كما في (2) و (16) للمركبين U_z وV_z ووضعنا الشرطين المفروضين على التباين $Var(U_z) = 1$ و $Var(V_z) =$ 1 واللذين يأخذان الشكل التالي:

$$Var(U_z) = e'R_{xx}.e = 1 \quad \textbf{(34)}$$

$$Var(V_z) = {\cancel{f}_1}'.R_{yy}.\cancel{f}=1 \quad \textbf{(35)}$$

$$Cov(U_z.V_z) = e'.R_{xy}.\cancel{f} \quad \textbf{(36)}$$

وعندها فإنّ معامل الارتباط القانوني للمركبين المعياريين U_{zx} و V_{zy} يساوي:

$$\rho_{(U_xV_y)} = \frac{Cov(U_x,V_y)}{\sqrt{Var(U_{zx})}.\sqrt{Var(V_{zy})}} = \frac{\acute{e}.R_{xy}.\cancel{f}}{\sqrt{\acute{e}R_{xx}e}\,\sqrt{\acute{\cancel{f}}R_{yy}.\cancel{f}}} = e'.R_{xy}.\cancel{f} \quad \textbf{(37)}$$

وإذا شكلنا منه مع الشرطين (34) و (35) تابع لاغرانج وأخذنا مشتقيه بالنسبة لـeو $\cancel{f}$ وعالجناهما كالسابق نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\cancel{f} = \frac{R_{yy}^{-1}.R_{xy}}{\lambda}.e \quad \textbf{(38)}$$
$$R_{xx}^{-1}.R_{xy}.R_{yy}^{-1}.R_{yx}.e = \lambda^2 e$$

والثانية يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$[R - \lambda^2 I]e = 0 \quad \textbf{(39)}$$

وحتّى نستبعد الحل التافه $(e = 0)$ نضع معين هذه المصفوفة مساوياً للصفر فنحصل على أنّ:

$$|R - \lambda^2 I|e = 0 \quad \textbf{(40)}$$

ومن(40) نحصل على القيم الذاتية لـλ^2 ثم نحسب الأشعة الذاتية e^* من (39) مقابل كل قيمة ذاتية λ_k^2 وبالاستفادة من الشرط (34) ، ثم نقوم بحساب الأشعة f من العلاقة (38) مع الاستعانة بالشرط * (35) ثم نعوض في (33) فنحصل علىZ_x, Z_y, وبما أن Z_x, Z_y هي القيم المعياريّة للمتحولينXوY إذ يمكننا أن نكتب ذلك وبشكل مختصر كما يلي:

$$U_{z_x} = {e^*}_1 z_1 + {e^*}_2 z_2 = {e^*}_1 \left(\frac{x_1 - \overline{x_1}}{\sigma_{x_1}} \right) + {e^*}_2 \left(\frac{x_2 - \overline{x_2}}{\sigma_{x_2}} \right)$$

$$U_{z_x} = \frac{{e^*}_1}{\sigma_{x_1}} x_1 + \frac{{e^*}_2}{\sigma_{x_2}} x_2 - \left[\frac{{e^*}_1}{\sigma_{x_1}} \overline{x_1} + \frac{{e^*}_2}{\sigma_{x_2}} \overline{x_2} \right] = \frac{{e^*}_1}{\sigma_{x_1}} x_1 + \frac{{e^*}_2}{\sigma_{x_2}} x_2 - \bar{U}$$

$$U = U_{z_x} + \bar{U} = \frac{{e^*}_1}{\sigma_{x_1}} x_1 + \frac{{e^*}_2}{\sigma_{x_2}} x_2 \qquad (42)$$

وكذلك نجد أنّ:

$$V_{zy} = {f^*}_1 z_1 + {f^*}_2 z_2 = {f^*}_1 \left(\frac{y_1 - \overline{y_1}}{\sigma_{y_1}} \right) + {f^*}_2 \left(\frac{y_2 - \overline{y_2}}{\sigma_{y_2}} \right) \qquad (43)$$

$$V_{z_y} = \frac{{f^*}_1}{\sigma_{y_1}} y_1 + \frac{{f^*}_2}{\sigma_{y_2}} y_2 - \left[\frac{{f^*}_1}{\sigma_{x_1}} \overline{y_1} + \frac{{f^*}_2}{\sigma_{y_2}} \overline{y_2} \right] = \frac{{f^*}_1}{\sigma_{y_1}} y_1 + \frac{{f^*}_2}{\sigma_{y_2}} y_2 - \bar{V}$$

ومنها نجد أنّ:

$$V = V_{z_x} + \bar{V} = \frac{{f^*}_1}{\sigma_{y_1}} y_1 + \frac{{e^*}_2}{\sigma_{y_2}} y_2 \qquad (44)$$

وبمقارنة العلاقتين (42), (44) مع العلاقتين في(29) نستنتج مباشرة أنّ أمثال الشعاعين a و b مرتبطة مع أمثال الشعاع e وf المعياريين وفق العلاقات التالية:

$$a^*_1 = \frac{{e^*}_1}{\sigma_{x_1}} \qquad a^*_2 = \frac{{e^*}_2}{\sigma_{x_2}} \qquad (45)$$

$$b^*_1 = \frac{{f^*}_1}{\sigma_{y_1}} \qquad b^*_2 = \frac{{f^*}_2}{\sigma_{y_2}} \qquad (46)$$

أي أنه يمكننا حساب أمثال b و a لتقسيم أمثال الشعاعين المعياريين f, e على الانحراف المعياري المناسب ويمكن كتابة هاتين العلاقتين على الشكل التالي:

(47)

---

* يمكن الاستعاضة عن الشرطين (34) و (35) وتحويل الشعاع الأول e^* إلى الشعاع الواحدي وتحويل الشعاع f^* إلى الشعاع الواحدي كما يلي: 1- نحسب طويلة الشعاع e^* من العلاقة $\|e^*\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$, 2-تقسيم الشعاع e^* على الطويلة $\|e^*\|$ فنحصل على الشعاع e^{**} وهو الشعاع الواحدي لأن طويلته تساوي الواحد $e^{**} = \begin{bmatrix} \frac{e_1^*}{\|e^*\|} \\ \frac{e_2^*}{\|e^*\|} \end{bmatrix}$ وكذلك نفعل مع الشعاع f^* والشرط (35)

$$a^*{}_1 = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix} = (e_1^*, e_2^*) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{x1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{x1}} \end{bmatrix} = \acute{e}^* . C_{\sigma_x}^{-\frac{1}{2}}$$

$$b^*{}_1 = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{bmatrix} = (\cancel{f}_1^*, \cancel{f}_2^*) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{y1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{y1}} \end{bmatrix} = \acute{\cancel{f}}^* . C_{\sigma_y}^{-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(48)}$$

مثال تطبيقي :

لنفرض أننا نريد دراسة العلاقة بين أطوال الوالدين ومتوسط أطوال أولادهم من الذكور والإناث ، ومن أجل التسهيل والاختصار نفترض أن طول الأب X_1 وطول الأم X_2 ومتوسط أطوال الأبناء X_1 ومتوسط أطوال البنات Y_2 وبذلك نحصل على مجموعتين من المتحولات هما:

–مجموعة المتحولات المستقلة أو المؤثرة وهي $X(X_1, X_2)$

–مجموعة المتحولات التابعة وهي $Y(Y_1, Y_2)$

ثمّ نشكل منهما التركيبين الخطيين :

$$U = a_1X_1 + a_2X_2$$
$$V = b_1Y_1 + b_2Y_2 \qquad \textbf{(49)}$$

ولنفترض إننا أجرينا دراسة ميدانية على n أسرة مكتملة (لديها أبناء وبنات) وأخذنا أطوال الوالدين وأطوال الأولاد والذكور والإناث وحصلنا على الجدول كالتالي: (بعد حساب متوسطات أطوال الأولاد):

جدول(1): البيانات الأولية عن المتغيرات الأصلية

رقم الأسرة	طول الأب X_1	طول الأم X_2	متوسط أطوال الأبناء Y_1	متوسط أطوال البنات Y_2
1	x_{11}	x_{21}	y_{11}	y_{21}
2	x_{12}	x_{22}	y_{12}	y_{22}
3	x_{13}	x_{23}	y_{13}	y_{23}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{1n}	x_{2n}	y_{1n}	y_{2n}
المتوسط	$\bar{x}_1 = 186$	$\bar{x}_2 = 161$	$\bar{y}_1 = 184$	$\bar{y}_2 = 159$
التباين	$S_{11}^2 = 91.48$	$S_{22}^2 = 52.19$	$\sigma_{11}^2 = 96.78$	$\sigma_{22}^2 = 43.22$

ولنفترض أنّه بناءً على ذلك حسبنا مصفوفة التباينات المشتركة Cov لمتحولات كل مجموعة على حدة ، فحصلنا على المصفوفتين C_{xx} و C_{yy} ، ثم حسبنا التباينات المشتركة Cov للمتحولات المتقابلة في المجموعتين X مع Y فحصلنا على المصفوفة C_{xy} وعلى المصفوفة المقابلة C_{yx} ، علماً بأنّ $\acute{C}_{xy} = C_{yx}$ ، ووضعنا النتائج في جدول موحد فكان كما يلي:

جدول رقم(2) التباينات المشتركة لمتحولات المجموعتين Y و X

المتحولات / المتحولات	X_1	X_2	Y_1	Y_2
X_1	91.48	50.75	66.88	44.27
	C_{xx}		C_{xy}	
X_2	50.75	52.19	49.26	33.65
y_1	66.88	49.26	96.78	54.28
	C_{yx}		C_{yy}	
y_2	44.27	33.65	54.28	43.22

وهكذا نجد أنه يمكننا استخدام هذه المصفوفات لحساب الأمثال a_i و b_i للمركبين U و V المعرفين بالعلاقة (1) وذلك بالاعتماد على المعادلة الذاتية التالية:

$$\left[C_{xx}^{-1}.C_{xy}.C_{yy}^{-1}.C_{yx}-\lambda^2\mathrm{I}\right]a=0 \qquad \textbf{(50)}$$

ومنها نحسب القيم الذاتية λ^2 للمصفوفة, فنحصل في هذه الحالة على قيمتين عدديتين نرمز لها بـ λ_1^2 و λ_2^2.

وبعدها نقوم بحساب الأشعة الذاتية لهذه المعادلة وذلك بتعويض قيم λ_i^2 على التوالي في المعادلة الذاتية السابقة (50), ثم حساب قيم الأشعة الذاتية المقابلة لكل قيمة ذاتية λ_k^2, فنحصل على الشعاع $a=\begin{bmatrix}a^*{}_1\\a^*{}_2\end{bmatrix}$ بعد الاستعانة بالشرط $Var(u)=1$, ثم نقوم بحساب الشعاع b مقابل كل قيمة لـλ_k^2 من ا **(51)** تالية:

$$b=\frac{C_{yy}^{-1}.C_{yx}}{\lambda}a$$

بعد الاستعانة بالشرط $Var(v)=1$ نحصل على الشعاع $b=\begin{bmatrix}b^*{}_1\\b^*{}_2\end{bmatrix}$ ومنهما نحصل على التركيبين الخطيين وذلك بدلالة المتحولات الأصلية y , x:

$$U_i=a^*{}_1X_1+a^*{}_2X_2$$
$$V_i=b^*{}_1Y_1+b^*{}_2Y_2 \qquad \textbf{(52)}$$

كما يمكن حساب المصفوفة الارتباطية بين متحولات هاتين المجموعتين بحساب معامل الارتباط الزوجي بين كل متحولين من العلاقة:

$$r_{ij}=\frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}^2}.\sqrt{S_{jj}^2}}=\frac{Cov(X_i.\bar{X}_j)}{\sigma_{x_i}.\sigma_{x_j}} \qquad \textbf{(52')}$$

فمثلاً نجد أنّ:

$$r_{23} = \frac{S_{23}}{\sqrt{S_{22}^2}.\sqrt{S_{33}^2}} = \frac{49.26}{\sqrt{52.19}.\sqrt{96.78}} = 0.693$$

علماً بأنّ كل معاملات الارتباط القطرية ستساوي $r_{ii} = 1$ فنحصل على الجدول المصفوفي التالي:

جدول (3) المصفوفة الارتباطية الكلية

المتحولات \ المتحولات	X_1	X_2	Y_1	Y_2
X_1	1	0.735	0.7107	0.7040
	R_{xx}		R_{xy}	
X_2	0.735	1	0.6931	0.7005
y_1	0.7107	0.6931	1	0.839
	R_{yx}		R_{yy}	
y_2	0.7040	0.7005	0.839	1

وهنا يمكننا أيضاً استخدام هذه المصفوفات الارتباطية لحساب الأمثال المعيارية f_i و e_i للمركبين المعياريين U_Z و V_Z المعرفين بدلالة القيم المعيارية لـZ_x و Z_y بالعلاقتين:

$$U_Z = e_1 Z_1 + e_2 Z_2 \qquad V_Z = f_1 Z_1 + f_2 Z_2 \qquad \textbf{(53)}$$

وذلك بالاعتماد على المعادلة الذاتية التالية:

$$\left[R_{xx}^{-1}.R_{xy}.R_{yy}^{-1}.R_{yx} - \lambda^2 \mathrm{I}\right].e = 0 \qquad \textbf{(54)}$$

ومنها نحسب القيم الذاتية λ^2 للمصفوفة فنحصل هنا على قيمتين λ_1^2 و λ_2^2, وبعدها نقوم بحساب الأشعة الذاتية المقابلة لكل منهما فنحصل على الشعاع $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ بعد الاستعانة بالشرط $Var(U_z) = e'R_{xx}.e = 1$ ، ثم نقوم بحساب الشعاع f مقابل الشعاع e وقيمة λ_k^2 من العلاقة التالية مع الاستعانة بالشرط $Var(V_z) = f'R_{yy}.f = 1$:

$$f = \frac{R_{yy}^{-1}.R_{yx}}{\lambda_k}.e \qquad \textbf{(55)}$$

والآن لنتابع حل المثال السابق ولنحسب الأمثال المعيارية للشعاعين e و f المعرفين بالعلاقة (33) وذلك باستخدام المصفوفات الارتباطية المذكورة وهي:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7346 \\ 0.7346 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_{yy} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8392 \\ 0.8392 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{xy} = \begin{bmatrix} 0.7107 & 0.7040 \\ 0.6931 & 0.7085 \end{bmatrix}$$

ومنها نحسب المصفوفات التالية:

$$R^{-1}{}_{xx} = \begin{bmatrix} 2.1722 & -1.5957 \\ -1.5957 & 2.1722 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}{}_{xx}.R_{xy} = \begin{bmatrix} 2.1722 & -1.5957 \\ -1.5957 & 2.1722 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0.7107 & 0.7040 \\ 0.6931 & 0.7085 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.437804 & 0.398677 \\ 0.371489 & 0.415632 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}{}_{yy} = \begin{bmatrix} 3.38131 & -2.8376 \\ -2.8376 & 3.8131 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}{}_{yy}.R_{xy} = \begin{bmatrix} 3.38131 & -2.8376 \\ -2.8376 & 3.8131 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0.7107 & 0.7040 \\ 0.6931 & 0.7085 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.40543 & 0.33315 \\ 0.363763 & 0.428921 \end{bmatrix}$$

ومنهما نجد أن:

$$R = \left(R^{-1}{}_{xx}.R_{xy}\right)\left(R^{-1}{}_{yy}.R_{xy}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0.437804 & 0.398677 \\ 0.371489 & 0.415632 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.40543 & 0.33315 \\ 0.363763 & 0.428921 \end{bmatrix}$$
$$R = \begin{bmatrix} 0.322523 & 0.316876 \\ 0.301804 & 0.302056 \end{bmatrix}$$

ومنها نشكل معادلة القيم الذاتية التالية:

$$[R - \lambda^2 \mathrm{I}]e = \begin{bmatrix} 0.322523 - \lambda^2 & 0.316876 \\ 0.301804 & 0.302056 - \lambda^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وحتى لا نحصل على الحل التافه: $e = 0$ نفترض أن هذه المصفوفة شاذة ونجعل معينها D يساوي الصفر فنجد أنّ:

$$\begin{vmatrix} 0.322523 - \lambda^2 & 0.316875 \\ 0.301804 & 0.302056 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه نحصل على المعادلة التالية بالمجهول (λ^2) :

$$(0.322523 - \lambda^2)(0.302056 - \lambda^2) - 0.316875 \times 0.301804 = 0$$
$$0.00178858 - 0.624588(\lambda^2) + (\lambda^2)^2 = 0$$

ولإيجاد جذري هذه المعادلة بالنسبة لـ(λ^2) نحسب قيمة المميز (Δ) فنجد أن:

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4a.c} = \sqrt{0.3829558} = 0.618834$$

ومنه نحصل على الجذرين التاليين:

$${\lambda_1}^2 = \frac{0.624588 + 0.618834}{2} = 0.621711$$
$${\lambda_2}^2 = \frac{0.624588 - 0.618834}{2} = 0.002877$$

ومنهما نجد أن قيمتي معاملي الارتباط القانوني تساويان:

$\rho_1 = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{0.621711} = 0.78848$ للزوج الأول $(U_{1z}\ V_{1z})$

$\rho_2 = \sqrt{\lambda_2^2} = \sqrt{0.002877} = 0.053638$ للزوج الثاني $(U_{2z}\ V_{2z})$

ثمّ نقوم بحساب الأشعة الذاتيّة e و f للمركبين القانونيين المعياريين $(U_{z1}\ V_{z1})$ المقابلين لكل قيمة من القيم الذاتية λ_k^2 ونعوض قيمتها بالتتالي في المعادلة الذاتية $[R-\lambda^2\mathrm{I}]e=0$ فنجد أنّه:

عندما نعوّض $\lambda_1^2=0.621711$ نجد أنّ:

$$[R-\lambda^2\mathrm{I}]e=\begin{bmatrix}-0.29918 & 0.316875\\ 0.301804 & -0.319655\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

وعند حساب قيمة معيّن هذه المصفوفة نجد أنّه يساوي الصفر $D=0$ ولهذا فإنّ هذه المصفوفة تكون مصفوفة شاذة وتساعدنا في الحل وحساب عناصر الشعاع $e(e_1\ e_2)$.

ومنها نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$-0.29918e_1+0.316875e_2=0$$
$$0.301804e_1-0.319655e_2=0$$

ومن المعادلة الأولى نجد أنّ:

$$e_1=\frac{0.316876}{0.29918}e_2=1.059145e_2$$

ومن المعادلة الثانية نجد أيضاً على نفس العلاقة بين e_1 و e_2 وهي(وهنا نلاحظ أن لهما نفس الإشارة):

$$e_1=\frac{0.0.319655}{0.301804}e_2=1.059147e_2$$

وذلك لأن هاتين المعادلتين غير مستقلتين (لكون المصفوفة شاذة) ويكون لهما لا نهاية من الحلول المقبولة.

$$Var(U_z)=e'R_{xx}.e=1$$
$$Var(U_z)=(e_1\,,e_2)\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}\ (e_1\,,e_2)\begin{bmatrix}1 & r_{12}\\ r_{21} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}$$
$$=(e_1\,,e_2)\begin{bmatrix}e_1+e_2r_{12}\\ e_1r_{21}+e_2\end{bmatrix}=e_1^2+e_1e_2r_{12}+e_1e_2r_{21}+e_2^2$$
$$Var(U_z)=e_1^2+e_2^2+2e_1e_2r_{12}=1$$

نعوض r_{12} و e_1 مما سبق في هذه المعادلة فنحصل على أنّ:

$$Var(U_z)=(+1.059147e_2)^2+e_2^2+2(1.059147e_2)e_2(0.7346)=1$$
$$3.67789114e_1^2=1$$
$$e_2=0.5214354634$$
$$e_1=0.5522768068$$
$$e_1^2=0.30500967$$
$$e_2^2=0.2718949118$$

وحتى نحصل على حل وحيد للشعاع e يجب أن يتحقق الشرط المفروض على تباين U_z وهو كما في العلاقة (34) يساوي:

$$Var(U_z)=e_1^2+e_2^2=1$$

وبما أن e_1 و e_2 لهما نفس الإشارة فإننا نختار الإشارة الموجبة لهما ونكتب الشعاع e على الشكل التالي:

$$e = \begin{bmatrix} 0.552271 \\ 0.5214354 \end{bmatrix} \sim c.e$$

وهو يشكل مع مضاعفاته لا نهاية من الحلول المقبولة ،وللحصول على الشعاع الواحدي الذي يحقق الشرط (34) ، نحسب طويلة ذلك الشعاع من العلاقة:

$$\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$$
$$\|e\| = \sqrt{(0.552271)^2 + (0.5214354)^2} = 0.75954235$$

ثم نقسم عناصره عليها فنجد أنّ المركبات الواحدية للشعاع الواحدي تساوي:

$$e^* = \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_1}{\|e\|} \\ \frac{e_2}{\|e\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72711 \\ 0.6865 \end{bmatrix}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على أمثال المركب القانوني المعياري الأول U_{1z} والمقابل لـ$\lambda_1{}^2 = 0.621686$ ونكتبه بدلالة الشعاع الواحدي كما يلي:

$$U_{1z} = 0.72711Z_1 + 0.6865Z_2$$

ولحساب عناصر الشعاع $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$ نعوض الشعاع e في العلاقة (55) فنجد مباشرة أنّ:

$$f = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f_1} \\ \boldsymbol{f_2} \end{bmatrix} = \frac{R_{yy}^{-1}.R_{yx}}{\lambda_1} \begin{bmatrix} e^*{}_1 \\ e^*{}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{0.621686}} \begin{bmatrix} 0.40543 & 0.33315 \\ 0.365763 & 0.42891 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.72711 \\ 0.6865 \end{bmatrix}$$

وبالنتيجة نحصل على أنّ:

$$f = \begin{bmatrix} 0.664 \\ 0.709 \end{bmatrix}$$

ولكن هذا الشعاع $\boldsymbol{f}$ هو أحد الأشعة الممكنة ولا يحقق الشرط المفروض على تباين المركب V_{1z} يحقق وهو:

$$\|\boldsymbol{f}\| = \boldsymbol{f^2{}_1 + f^2{}_2 = 1}$$

واختصاراً للحسابات نفترض أن شعاعاً آخر متناسباً معه يحقق هذا الشرط الأخير ونرمز له بالرمز $c\boldsymbol{f}.(\boldsymbol{cf_1}, \boldsymbol{cf_2})$ ثم نقوم بحساب قيمة العدد c التي تجعل الشعاع $\boldsymbol{f}$ شعاعاً واحديّاً وهو أن يكون:

$$(\boldsymbol{cf_1})^2 + (\boldsymbol{cf_2})^2 = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{c^2(0.664)^2 + c^2(0.709)^2 = 1}$$

$$\boldsymbol{c^2(0.943577)} = 1$$

$$\boldsymbol{c^2} = \frac{1}{0.943577} = 1.059797$$

$$\boldsymbol{c} = \pm 1.029464$$

وإذا أخذنا الإشارة الموجبة نجد أن عناصر الشعاع الجديد هي:

$$\boldsymbol{f}^{*}{}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}} = 1.029464 \times 0.664 = 0.684,$$
$$\boldsymbol{f}^{*}{}_{\mathbf{2}} = c\boldsymbol{f}_{\mathbf{2}} = 1.029464 \times 0.709 = 0.730$$

فيكون لدينا الشعاع الجديد هو:

$$\boldsymbol{f}^{*} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{*}{}_{\mathbf{1}} \\ \boldsymbol{f}^{*}{}_{\mathbf{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.684} \\ \mathbf{0.730} \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على التركيب المعياري الأول للمركب V_{1z} كما يلي:

$$V_{1z} = 0.684Z_1 + 0.730Z_2$$

وهكذا نكون قد حصلنا على التركيبين المعياريين للزوج الأول U_{1z}, V_{1z} والمقابلة للقيمة الذاتية الأولى $\lambda_1^2 = 0.621711$ وهما:

$$U_{1z} = 0.72711Z_1 + 0.6865Z_2$$
$$V_{1z} = 0.684Z_1 + 0.730Z_2$$

إن معامل الارتباط القانوني بينهما يساوي:

$\rho_1 = \sqrt{0.621711} = 0.7885 \Longrightarrow \rho^2 = 0.621711$ و معامل التحديد

وللحصول على التركيبين الأصليين U و V بدلالة المتحولات الأصلية X و Y نعوض Z_1 و Z_2 في العلاقتين السابقتين فنجد أن المركب U_{1z} يساوي:

$$U_{1z} = 0.72711\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}}\right) + 0.6865\left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{\sigma_{x_2}}\right)$$

وبما أنه لدينا:

$\sigma_{x_1} = \sqrt{91.48} = 9.5645$ و $\bar{x}_1 = 186$

$\sigma_{x_2} = \sqrt{52.19} = 7.2243$ و $\bar{x}_2 = 161$

وبذلك نجد أنّ:

$$U_{1z} = \frac{0.72711}{9.5645}X_1 + \frac{0.6865}{7.2243}X_2 - \left[\frac{0.72711 \times 186}{9.5645} + \frac{0.6865 \times 161}{7.2243}\right]$$

$$U_{1z} = 0.0760X_1 + 0.0950X_2 - 29.439$$

وبذلك نجد:

$$U_1 = U_{1z} + 29.439 = 0.0760X_1 + 0.0950X_2$$

وبالنسبة للمركب V_{1z} يساوي:

$$V_{1z} = 0.684\left(\frac{Y_1 - \bar{Y}_1}{\sigma_{y_1}}\right) + 0.730\left(\frac{Y_2 - \bar{Y}_2}{\sigma_{y_2}}\right)$$

وبما أنه لدينا:

$\sigma_{y_1} = \sqrt{96.78} = 9.8377$ و $\bar{y}_1 = 184$

$\bar{y}_2 = 159$ و $\sigma_{y_2} = \sqrt{43.22} = 6.5742$

وبذلك نجد أنّ:

$$V_{1z} = \frac{0.684}{9.8377}Y_1 + \frac{0.730}{6.5742}Y_2 - \left[\frac{0.684 \times 184}{9.8377} + \frac{0.730 \times 159}{6.5742}\right]$$

$$V_{1z} = 0.0695Y_1 + 0.11104Y_2 - 30.4486$$

وبذلك نجد:

$$V_1 = 0.0695Y_1 + 0.11104Y_2 = V_{1z} + 30.4486$$

وهكذا نكون قد حصلنا على التركيبين V_1 و U_2 بدلالة المتحولات الاصلية او الخام وهي:

$$U_1 = 0.0760X_1 + 0.0950X_2$$

$$V_1 = 0.0695Y_1 + 0.11104Y_2$$

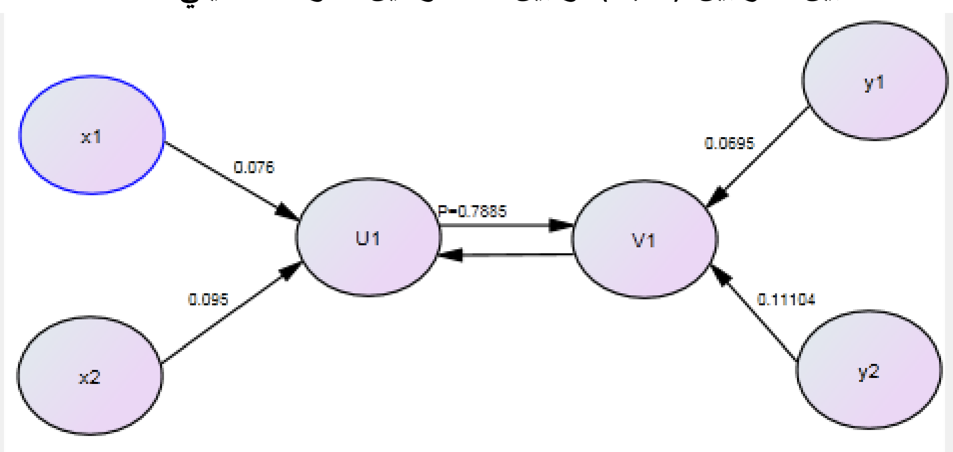
وإن قيمة معامل الارتباط بينهما هي نفس المعامل السابق :

$$\rho = 0.7885$$

وإنّ قيمة معامل التحديد:

$$\rho^2 = 0.621711$$

ويمكن تمثيل العلاقة بين المركبين (U, V) او بين المجموعتين X و Y كما يلي:



الشكل رقم (2)

وفي مجال التعليق على ذلك يمكننا أن نقول مايلي:

إن مجموع طولي الأب والأم x1 و x2 مرجحين بالأمثال $a_1 = 0.076$ و $a_2 = 0.095$ يرتبط طرداً مع مجموع متوسطي أطوال الأولاد الذكور والإناث Y1 و Y2 مرجحين بالأمثال $b1 =$ 0.0695 و $b2 = 0.11104$ على الترتيب.

وإنّ شدة الارتباط بينهما تساوي قيمة معامل الارتباط القانوني $\rho = 0.7885$ وأن قيمة معامل التحديد $\rho^2 = 0.621711$ أي أن 62.17% من تغيرات متوسطي أطوال الأولاد الذكور والاناث يفسر من خلال طولي الأب والأم.

كما يمكننا أن ندرس تغيرات U بدلالة المتحولين $X1$ و $X2$ فنقول أنه عندما يزداد $X1$ بمقدار واحد فإنّ $U1$ يزداد بمقدار 0.076, وعندما يزداد $X2$ بمقدار واحد فإنّ $U1$ يزداد بمقدار 0.095.

وكذلك يمكننا أن ندرس تغيرات V بدلالة المتحولين $Y1$ و $Y2$ فنقول أنّه عندما يزداد $Y1$ بمقدار واحد فإنّ $V1$ يزداد بمقدار 0.0695 وعندما يزداد $Y2$ بمقدار واحد فإنّ $V1$ يزداد بمقدار 0.11104 وإنّ المتوسّط $\bar{U}_1 = 29.439$ والمتوسط $\bar{V}_1 = 30.4486$.

وللحصول على الأمثال المعيارية للزوج الثاني $(U_{2Z}\, V_{2Z})$ المقابلة للقيمة الذاتية الثانية $\lambda_2^2 = 0.0028715$ نقوم بما يلي:

نعوض قيمة $\lambda_2^2 = 0.0028715$ في المعادلة الذاتية(54) فنحصل على أنّ:

$$\left(R - \lambda^2 I\right)e = \begin{bmatrix} 0.3196515 & 0.316855 \\ 0.301804 & 0.299163 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلتين غير المستقلتين التاليتين:

$$0.3196515 e_1 + 0.316855 e_2 = 0$$
$$0.301804 e_1 + 0.2991635 e_2 = 0$$

وهما تعطيانا نفس العلاقة بين e_1 و e_2 وهي أن:

$$e_1 = -0.991251 e_2$$ *(نلاحظ أنهما مختلفان بالإشارة)*

وللحصول على حل وحيد للشعاع e نستعين بالشرط المفروض على تباين U2 ونعالجه بنفس الطريقة السابقة ولكننا نختصر الحسابات وننتقل إلى شرط أن يكون الشعاع e واحديّاً وهو:

$$||e^*|| = {e^*}_1^2 + {e^*}_2^2 = 1$$

وبتعويض e_1 فيها نحصل على أنّ:

$$(-0.991261 {e^*}_2)^2 + {e^*}_2^2 = 1$$

$$1.982578 \times {e^*}_2^2 = 1$$

$${e^*}_2^2 = \frac{1}{1.982578} = 0.50439366$$

$${e^*}_2 = \pm 0.7102 \approx \pm 0.710$$

$${e^*}_1 = \pm(0.7102)(-0.991251)$$

$${e^*}_1 = \pm(0.70399) = \pm 0.704$$

وبما أنهما مختلفان في الإشارة فإننا نختار الاشارة الموجبة لـ e_1 والسالبة لـ e_2 وهكذا نكون قد حصلنا على الشعاع الواحدي e^* ونكتبه على الشكل التالي:

$$e^* = \begin{bmatrix} 0.704 \\ -0.710 \end{bmatrix}$$

وللحصول على الشعاع المعياري f للمركب V_{2Z} نعوض e^* في المعادلة (55):

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{R_{yy}^{-1}.R_{yx}}{\lambda_I}.a^* = \frac{1}{\sqrt{0.0028715}}.\begin{bmatrix} 0.40543 & 0.33315 \\ 0.363769 & 0.428921 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0.704 \\ -0.710 \end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على الشعاع f التالي(المؤلف من عنصرين مختلفين بالإشارة):

$$f = \begin{bmatrix} 0.912288 \\ -0.9040499 \end{bmatrix}$$

وهو أحد الأشعة الممكنة, ولنبحث الآن عن الشعاع الذي يحقق الشرط (34) المفروض على تباين المركب V_{2Z} وهو:

$$\|f\| = {f_1}^{*2} + {f^{*2}}_2 = 1$$

واختصاراً للحسابات نفترض أنّ شعاعاً آخر متناسباً مع f يحقق هذا الشرط ونرمز له بـ $cf(cf_1, cf_2)$

ثم نقوم بحساب العدد c الذي يجعل الشعاع f يحقق الشرط السابق, وهو أن يكون:

$$(cf_1)^2 + (cf_2)^2 = 1$$
$$c^2(0.912288)^2 + c^2(0.9040499)^2 = 1$$
$$c^2(1.64958) = 1$$
$$c^2 = \frac{1}{1.64958} = 0.606217$$
$$c = \pm 0.778599$$

وهكذا نجد أنه عندما نأخذ الاشارة الموجبة لـ c نحصل أن الشعاع المطلوب هو:

$${f^*}_1 = cf_1 = 0.778599 \times 0.912288 = 0.710$$
$${f^*}_2 = cf_2 = 0.778599 \times (-0.9040499) = -0.704$$

وبذلك نحصل على الشعاع الجديد cf وهو:

$$f^* = \begin{bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.710 \\ -0.704 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على التركيب المعياري للمركب الثاني V_{2Z} ونكتبه كما يلي:

$$V_{2Z} = 0.710Z_1 - 0.704Z_2$$

وبذلك نحصل على التركيب الثاني (للزوج الثاني) المعياري وهو:

$$U_{2Z} = 0.704Z_1 - 0.710Z_2$$
$$V_{2Z} = 0.710Z_1 - 0.704Z_2$$

وللحصول على التركيبين الخطيين بدلالة المتحولات الأصلية X و Y نقوم بحساب شعاعي الأمثال الخام a و b للمركبين U2 و V2 ونعوض Z1 و Z2 بقيمتهما فنجد أنّ:

$$U_{2z} = 0.704\frac{(X_1 - \overline{X_1})}{\sigma_{x1}} - 0.710\frac{(X_2 - \overline{X_2})}{\sigma_{x2}}$$

وبما أنه لدينا :

$\sigma_{x1} = \sqrt{91.48} = 9.5695 \longrightarrow$ وأن $\bar{X}_1 = 186$

$\sigma_{x2} = \sqrt{52.19} = 7.2243 \longrightarrow$ وأن $\bar{X}_2 = 161$

نعوض فنجد أنّ:

$$U_{2z} = \frac{0.704}{9.5695}X_1 - \frac{0.710}{7.2243}X_2 - \left[\frac{0.704 \times 186}{9.5695} - \frac{0.710 \times 161}{7.2243}\right]$$

$$U_{2z} = 0.0736X_1 - 0.0983X_2 + [2.1395]$$

وبذلك نجد أنّ U2 يساوي:

$$U_2 = U_{2z} - 2.1395 = 0.0736X_1 - 0.0983X_2$$

وكذلك بالنسبة للمركب V2 فنجد أنّ:

$$V_{2z} = 0.710\frac{(Y_1 - \bar{Y_1})}{\sigma_{Y1}} - 0.704\frac{(Y_2 - \bar{Y_2})}{\sigma_{Y2}}$$

وبما أنه لدينا :

$\sigma_{Y1} = \sqrt{96.78} = 9.5695 \longrightarrow$ وأن $\bar{Y}_1 = 184$

$\sigma_{Y2} = \sqrt{43.22} = 6.5742 \longrightarrow$ وأن $\bar{Y}_2 = 159$

نعوض فنجد أنّ:

$$V_{2z} = \frac{0.710}{9.8377}Y_1 - \frac{0.704}{6.5742}Y_2 - \left[\frac{0.710 \times 184}{9.8377} - \frac{0.704 \times 159}{6.5742}\right]$$

$$V_{2z} = 0.07217Y_1 - 0.10709Y_2 + [17.025]$$

وبذلك نجد أنّ V2 يساوي:

$$V_2 = U_{2z} - 17.025 = 0.07217Y_1 - 0.10709Y_2$$

وبذلك نكون قد حصلنا على التركيب الثاني للزوج الثاني بدلالة المتحولات الأصلية وهو:

$$U_2 = 0.0736X_1 - 0.0983X_2$$
$$V_2 = 0.07217Y_1 - 0.10709Y_2$$

وأنّ معامل الارتباط القانوني له هو $\rho_2 = 0.0536$ وإنّ معامل التحديد يساوي $\rho^2{}_2 = 0.0028715$ وهذا يدلّ على أنّ الارتباط القانوني للزوج الثاني ضعيف جداً ويمكن الاستغناء عنه ، لذلك نقوم باختبار معنوية القيم الذاتية λ^2 بواسطة العديد من مؤشرات الاختبار المعروفة نسلط الضوء على الآتي منها:

–*Wilk's Lambda*: مقياس للمعنويّة الكليّة وكلّما اقتربت قيمته من الصفر زادت المعنويّة ويعطى بالعلاقة (French, 2005, pp. 2-7):

$$\Lambda_1 = \frac{|S|}{|S_{yy}||S_{xx}|} = \frac{|R|}{|R_{yy}||R_{xx}|} = \prod_{i=1}^{s}(1 - r_i^2)$$

$$F = \frac{1 - \Lambda_1^{1/t} \times df_2}{\Lambda_1^{1/t} \times df_1}$$

حيث:

$$t = \sqrt{\frac{p^2 \times q^2}{p^2 + q^2 - 5}}, df_1 = pq, df_2 = wt - \frac{1}{2}pq + 1, w = n - \frac{1}{2}(p + q + 3)$$

هنا نرفض الفرض العدم عندما $F_\alpha < F$

كما يستخدم مقياس لامبدا لتحديد معنويّة معامل الارتباط القانوني (k) باستخدام العلاقة التالية:

$$\Lambda_k = \prod_{i=k}^{s}(1 - r_i^2)$$

$$F = \frac{1 - \Lambda_k^{1/t} \times df_2}{\Lambda_k^{1/t} \times df_1}$$

$$t = \sqrt{\frac{p^2 \times q^2}{p^2 + q^2 - 5}}, df_1 = (p - k + 1)(q - k + 1),$$

$$df_2 = wt - \frac{1}{2}(p - k + 1), w = n - \frac{1}{2}(p + q + 3)$$

وحسب نتائج هذا الاختبار نقرر صلاحية ومعنوية هذه القيم الذاتية ونقبل القيم المعنوية ونرفض القيم غير المعنويّة.

وأخيراً يمكننا حساب القيم النظرية للزوج الأوّل (U1 V1) من خلال البيانات الفعلية للمتحولات X والمتحولات Y الواردة في الجدول (1) ونرسم شكله البياني ونحسب معامل الارتباط ρ_1 ثم نقوم بحساب معاملات الارتباط بين كل من المتحولات X مع U1 وحساب معاملات الارتباط بين كل المتحولات Y مع V1 ونكرر ذلك مع كل زوج من الازواج الممكنة ثم ننتقل إلى حساب كفاءة كل تركيب خطي في هذه

الأزواج من خلال حساب متوسط مربعات معاملات ارتباط كل U مع المتحولات X وحساب متوسط مربعات معاملات كل V مع Y كما يمكن حساب معاملات ارتباط كل من X مع المركب المقابل له V1 وحساب معاملات ارتباط كل Y مع المركب المقابل له U1 ويمكن أن نكرر ذلك مع كل زوج من الأزواج الممكنة