

الأسس الرياضية للارتباط القانوني

د. إبراهيم محمد العلي

كلية اقتصاد - جامعة تشرين - سوريا

1- المقدمة:

إن دراسة العلاقات بين المتحولات الكمية تعد من أولى مهام علم الاحصاء، ومنه ظهرت نظرية الارتباط والانحدار ثم تطورت وتفرعت إلى عدة فروع واختصاصات هي:

1- الارتباط البسيط (الانحدار البسيط): وهو يختص بدراسة العلاقة بين متحولين كمييين فقط X , Y . وحساب معامل الارتباط بينهما ثم استخراج النموذج الرياضي الذي يمثل تلك العلاقة أو يعبر عنها أفضل تعبير .

2- الارتباط المتعدد (الانحدار المتعدد): وهو يختص بدراسة العلاقة بين متحول تابع Y وعدة متحولات مؤثرة عليه نرمز لها بالرموز:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$$

3- الارتباط القانوني: وهو يختص بدراسة العلاقة بين عدة متحولات تابعة نرمز لها بـ $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_q$ وعدة أخرى من المتحولات مؤثرة فيها نرمز لها بالرموز:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$$

4- وهناك فروع أخرى تتناول هذا الموضوع مثل: التحليل العاملي والتحليل التمييزي، وإننا في هذه الورقة سنعتبر أن القارئ على دراية كافية بالفرعين الأول والثاني (الانحدار البسيط والمتعدد)، وأنه على اطلاع كافٍ على جبر المصفوفات وجذوائها وجذورها الكامنة، وغير ذلك من الأمور الرياضية التي سنعتمد عليها عند معالجة مسألة الارتباط القانوني (انظر الملحق (1) حول المصفوفات) .

ولكن قبل ذلك نستعرض المفاهيم العامة للارتباط القانوني كما يلي :

2- المفاهيم العامة للارتباط القانوني:

لنفترض أننا نريد دراسة العلاقة الارتباطية بين مجموعتين من المتحولات الكمية هما:

1- مجموعة المتحولات المستقلة : وتتألف من p متحولاً مستقلاً (مؤثراً) ونرمز لها بالرموز

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$$

2- مجموعة المتحولات التابعة: وتتألف من q متحولاً تابعاً (متأثراً) ونرمز لها بالرموز

$$Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_q$$

كما نفترض أننا جمعنا عن كل من هذه المتحولات المستقلة والتابعة البيانات اللازمة أو المشاهدات الميدانية وحصلنا على n مشاهدة متقابلة عن كل منها. أي حصلنا عن كل من المتحولات المستقلة X

والتابعة Y على n من القيم العددية المتقابلة من حيث الزمان أو المكان أو كلاهما، ووضعنا النتائج في جدول مناسب كما يلي :

الجدول (1): البيانات الخاصة والملاحظات الميدانية للمتحويلات المستقلة X والتابعة Y

المتحويلات رقم الملاحظة	قيم الملاحظات للمتحويلات المستقلة X					قيم الملاحظات للمتحويلات التابعة Y				
	X ₁	X ₂	X ₃		X _p	Y ₁	Y ₂	Y ₃		Y _q
1	x ₁₁	x ₁₂	x ₁₃		x _{1p}	y ₁₁	y ₁₂	y ₁₃		y _{1q}
2	x ₂₁	x ₂₂	x ₂₃		x _{2p}	y ₂₁	y ₂₂	y ₂₃		y _{2q}
3	x ₃₁	x ₃₂	x ₃₃		x _{3p}	y ₃₁	y ₃₂	y ₃₃		y _{3q}
4	x ₄₁	x ₄₂	x ₄₃		x _{4p}	y ₄₁	y ₄₂	y ₄₃		y _{4q}
5	x ₅₁	x ₅₂	x ₅₃		x _{5p}	y ₅₁	y ₅₂	y ₅₃		y _{5q}
6	x ₆₁	x ₆₂	x ₆₃		x _{6p}	y ₆₁	y ₆₂	y ₆₃		y _{6q}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n	x _{n1}	x _{n2}	x _{n3}		x _{np}	y _{n1}	y _{n2}	y _{n3}		y _{nq}
المتوسط أو التوقع	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$		$\bar{X}_p$	$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$		$\bar{Y}_q$
التباين	s ₁ ²	s ₂ ²	s ₃ ²		s _p ²	σ ₁ ²	σ ₂ ²	σ ₃ ²		σ _q ²

وبصورة عامة يمكننا أن نضع جملة المتحويلات المستقلة على شكل شعاع عمود ونرمز له بـ X وأن نضع جملة المتحويلات التابعة على شكل شعاع عمود آخر ونرمز له بـ Y كما يلي :

$$X_{p \times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \quad Y_{q \times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}$$

وسيكون هدفنا دراسة العلاقة الارتباطية بين متحويلات المجموعة Y مع متحويلات المجموعة X ونرمز لمتوسطات X ولمتوسطات Y بالعمودين التاليين:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{Y}_3 \\ \vdots \\ \bar{Y}_q \end{bmatrix}$$

كما نرسم لتباينات X ولتباينات Y بالعمودين التاليين :

$$S^2 = \begin{bmatrix} S_1^2 \\ S_2^2 \\ S_3^2 \\ \vdots \\ S_p^2 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \\ \vdots \\ \sigma_q^2 \end{bmatrix}$$

علماً بأن هذه التباينات تحسب من العلاقة الصحيحة كما يلي :

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{X}_i)^2, \quad \sigma_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_{kj} - \bar{Y}_j)^2 \quad (1)$$

* مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة :

نقوم بحساب مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة $cov(X_i, X_j)$ لكل المتحولات في المجموعة X .
وحساب مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة $cov(Y_k, Y_h)$ لكل المتحولات في المجموعة Y .
وحساب مصفوفة التباينات والتباينات المتبادلة $cov(X_i, Y_k)$ لكل المتحولات المتقابلة في المجموعتين X, Y ونضعها في جدول منظم كما يلي :

الجدول (2): مصفوفات التباينات والتباينات المشتركة لـ X, Y

المتحولات	X_1	X_2	X_3		X_p	Y_1	Y_2	Y_3		Y_q
X_1	s_{11}	s_{12}	s_{13}		s_{1p}	c_{11}	c_{12}	c_{13}		c_{1q}
X_2	s_{21}	s_{22}	s_{23}		s_{2p}	c_{21}	c_{22}	c_{23}		c_{2q}
X_3	s_{31}	s_{32}	s_{33}		s_{3p}	c_{31}	c_{32}	c_{33}		c_{3q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
X_p	s_{p1}	s_{p2}	s_{p3}		s_{pp}	σ_{p1}	σ_{p2}	σ_{p3}		c_{pq}
Y_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}		c_{1p}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}		σ_{1q}
Y_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}		c_{2p}	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}		σ_{2q}
Y_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}		c_{3p}	σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}		σ_{3q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Y_q	c_{q1}	c_{q2}	c_{q3}		c_{qp}	σ_{q1}	σ_{q2}	σ_{q3}		σ_{qq}

وهو يتضمن أربع مصفوفات مختلفة. علماً بأن التباينات المشتركة cov لمتحولات المجموعة X ولمتحولات المجموعة Y تحسب من العلاقتين التاليين:

$$S_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{X}_i)(x_{kj} - \bar{X}_j) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(Y_i, Y_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_{ki} - \bar{Y}_i)(y_{kj} - \bar{Y}_j) \quad (3)$$

ومما سبق نلاحظ أن: $S_{ij} = S_{ji}$ أي أن المصفوفة المربعة S_{ij} ، متناظرة، وأن: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ أي أن المصفوفة المربعة σ_{ij} متناظرة أيضاً .

وكذلك نلاحظ أن: $S_{ii} = S_i^2$ وأن: $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ أي أن العناصر القطرية هي التباينات S_i^2 و σ_i^2 أما التباينات المشتركة المتبادلة لـ X, Y فتحسب من العلاقة :

$$C_{ij} = \text{cov}(X_i, Y_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{X}_i)(y_{kj} - \bar{Y}_j) \quad (4)$$

كما نلاحظ أن مصفوفة التباينات المشتركة المتبادلة تحقق العلاقة : $C_{ij} = C_{ji}$ ، أي أن المصفوفة المستطيلة C_{ji} تساوي منقول المصفوفة C_{ij} ، أي أن $C_{ji} = C'_{ij}$.

وبذلك يمكننا كتابة الجدول (2) السابق على شكل مصفوفات برموز مختلفة مع مراتبها المناسبة كما يلي:

الجدول (3) : مصفوفات التباينات والتباينات المشتركة لـ Y, X :

X_1 X_2 X_3 $\vdots$ X_p	$C_{xx}(p * p)$	$C_{xy}(p * q)$
Y_1 Y_2 Y_3 $\vdots$ Y_q	$C_{yx}(q * p)$	$C_{yy}(q * q)$

وهنا نلاحظ أن: $C_{yx}(q * p) = C'_{xy}(p * q)$

*** المصفوفة الارتباطية:**

إن المصفوفة الارتباطية مؤلفة من معاملات الارتباط الزوجية لكل متحولين ضمن المجموعتين Y, X أو بينهما، ونحسبها من معادلة (بيرسون) المعرفة بالعلاقة الآتية:

$$r_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{S_i^2} * \sqrt{S_j^2}} \quad , \quad r_{ij}^* = \frac{\text{cov}(X_i, Y_j)}{\sqrt{S_i^2} * \sqrt{\sigma_j^2}} \quad (5)$$

فنحصل على الجدول التالي:

الجدول (4) : مصفوفات التباينات والتباينات المشتركة لـ X, Y

المتحولات	X_1	X_2	X_3		X_p	Y_1	Y_2	Y_3		Y_q
X_1	1	r_{12}	r_{13}		r_{1p}	r_{11}^*	r_{12}^*	r_{13}^*		r_{1q}^*
X_2	r_{21}	1	r_{23}		r_{2p}	r_{21}^*	r_{22}^*	r_{23}^*		r_{2q}^*
X_3	r_{31}	r_{32}	1		r_{3p}	r_{31}^*	r_{32}^*	r_{33}^*		r_{3q}^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
X_p	r_{p1}	r_{p2}	r_{p3}		1	r_{p1}^*	r_{p2}^*	r_{p3}^*		r_{pq}^*
Y_1	r_{11}^*	r_{21}^*	r_{31}^*		r_{p1}^*	1	r'_{12}	r'_{13}		r'_{1q}
Y_2	r_{21}^*	r_{22}^*	r_{32}^*		r_{p2}^*	r'_{21}	1	r'_{23}		r'_{2q}
Y_3	r_{31}^*	r_{32}^*	r_{33}^*		r_{p3}^*	r'_{31}	r'_{32}	1		r'_{3q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Y_q	r_{1q}^*	r_{2q}^*	r_{3q}^*		r_{pq}^*	r'_{p1}	r'_{p2}	r'_{p3}		r'_{pq}

واختصارا لكل ذلك نرمز للمصفوفات الأربعة التي يحتويها الجدول السابق بالرموز التالية:

$R_{yx}, R_{xy}, R_{yy}, R_{xx}$ ونضعها مع مراتبها كما يلي :

الجدول (5): مصفوفات معاملات الارتباط الزوجية لـ Y, X :

المتحولات	$X_1, X_2, \dots, X_p$	$Y_1, Y_2, \dots, Y_q$
X_1 X_2 X_3 $\vdots$ X_p	$R_{xx} (p \times p)$	$R_{xy} (p \times q)$
Y_1 Y_2 Y_3 $\vdots$ Y_q	$R_{yx} (q \times p)$	$R_{yy} (q \times q)$

وهنا نلاحظ أن: $R_{yx} (q \times p) = R'_{xy} (p \times q)$

3- الشروط المفروضة على المتحولات Y , X :

إن التحليل القانوني مؤسس على توفر عدة شروط وفرضيات، وقبل أن نباشر بعمليات الحساب والتحليل لابد لنا من التأكد من توفر الشروط المفروضة على المتحولات المستخدمة في الارتباط القانوني، وإن أهم هذه الشروط هي:

1- وجود علاقة سببية واضحة بين مجموعة المتحولات المستقلة (المؤثرة) X ومجموعة المتحولات التابعة Y ، مثل علاقة مجموعة المؤشرات السكانية (عدد السكان + معدل الولادة + معدل الوفاة + مدة الحياة) مع مجموعة المؤشرات الاقتصادية (الناتج + الدخل الفردي + معدل العمالة + معدل البطالة) ... الخ .

2- أن يكون للمتحولات المدروسة في المجموعة X وفي المجموعة Y صفة عشوائية، أي أن تأخذ قيمتها بطريقة عشوائية غير معروفة مسبقاً. وأن لا تتضمن قيماً شاذة (متطرفة) لأن وجود القيم الشاذة يؤثر كثيراً على نتائج التحليل وإن وجدت يجب استبعادها مع القيم المقابلة لها في المتحولات الأخرى .

3- أن تكون المتحولات ضمن كل مجموعة مستقلة عن بعضها البعض. أي أن تكون تغيرات كل متحول في المجموعة مستقلة وغير مشروطة بتغيرات أي متحول آخر فيها. وذلك بغض النظر عن وجود ارتباط نظري بين المتحولات ضمن كل مجموعة .

4- يفترض أن تكون العلاقات الثنائية بين أي متحولين ضمن X أو ضمن Y أو بين أي متحول من X مع أي متحول من Y علاقة خطية غير تامة. وإذا كانت العلاقة بينهما تامة أو شبه تامة (بمعامل ارتباط أكبر من 95%) فإننا نقوم بحذف أحدهما (الأقل أهمية للدراسة). أما إذا كانت العلاقة بينهما غير (خطية وعندها تكون $p > \alpha$) فإننا نحذف أحدهما أيضاً أو نقوم بتحويله إلى متحول آخر (حسب هدف الدراسة)، ويتم التحقق من ذلك خلال دراسة مصفوفات الارتباط الزوجية .

5- أن يكون حجم العينة n لكل المتحولات المدروسة يتراوح من 10 إلى 20 حالة أو مشاهدة، وأن تكون قيمها خاضعة للتوزيع الطبيعي أو مقاربة منه . ويتم التحقق من ذلك من خلال إجراء اختبار على بيانات كل متحول على حدة .

6- أن تكون المتحولات في كل مجموعة ذات طبيعة واحدة وأن تكون بياناتها متجانسة أو مقاربة من القيمة المتوقعة. ويتم التحقق من ذلك خلال تطبيق اختبار F على متحولات كل مجموعة على حدة .

7- أن تكون المتحولات ضمن كل مجموعة قابلة للتركيب الخطي فيما بينها .

4- التحليل الرياضي للارتباط القانوني

يهدف الارتباط القانوني إلى دراسة العلاقة بين مجموعة من المتحولات المستقلة X ومجموعة من المتحولات التابعة Y حيث أن:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}$$

حيث p هو عدد المتحولات في X و q هو عدد المتحولات في Y ، ولدراسة هذه العلاقة نشكل من كل منهما تركيباً خطياً متقلاً بأمثال مجهولة a_i و b_j كما يلي:

$$U = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \dots a_pX_p \quad (6)$$

$$V = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3 + \dots b_qY_q \quad (7)$$

$$a' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \text{ بالشعاع } a_i \text{ للأمثال } a_i \text{ بالرمز } a'(a_1, a_2, \dots a_p) \text{ ولمنقلبه بالرمز}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} \text{ بالشعاع } b_j \text{ للأمثال } b_j \text{ بالرمز } b'(b_1, b_2, \dots b_q) \text{ ولمنقلبه بالرمز}$$

فإنه يمكننا كتابة التركيبين (6) و (7) على الشكل التالي :

$$U = (a_1, a_2, a_3, \dots a_p) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = a' * X \quad (8)$$

$$V = (b_1, b_2, b_3, \dots b_q) \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix} = b' * Y \quad (9)$$

وهنا لابد من التمييز بين المتحولات المستخدمة في العلاقات (6) و (7) أو (8) و (9) وفق التالي :
إن متحولات المجموعة X تسمى بالمتحولات المستقلة (Independent viarables) وهي متحولات معروفة ولدينا عن كل منها n قيمة عددية (مشاهدة) متقابلة كما في الجدول (1) .

وإن متحولات المجموعة Y تسمى بالمتحولات التابعة (Dependent variables) وهي أيضاً معروفة لدينا عن كل منها n قيمة عددية (مشاهدة) متقابلة كما في الجدول (1). أما U , V فهي توابع جديدة ومجهولة ويطلق على كل منهما اسم التابع القانوني أو المركب القانوني (Canonical varaiite) . فيكون لدينا:

U - هو المركب القانوني للمجموعة X (التابع القانوني لـ X) وأرغب في تسميته بالمتابع القانوني لـ X.
V - هو المركب القانوني للمجموعة Y (التابع القانوني لـ Y) وأرغب في تسميته بالمتابع القانوني لـ Y.
ولكن الأمثال a_i و b_j فهي أعداد مجهولة أيضاً ويجب علينا حسابها أو تقديرها حتى تصبح العلاقات (6), (7) أو (8), (9) علاقات محددة. وبما أنها يمكن أن تأخذ قيماً متعددة، فإن العلاقتين (6) و (7) يمكن أن تعطيانا عدداً من أزواج المركبات القانونية نرسم لها بـ (U_1, V_1) و (U_2, V_2) و (U_3, V_3) كما يلي :

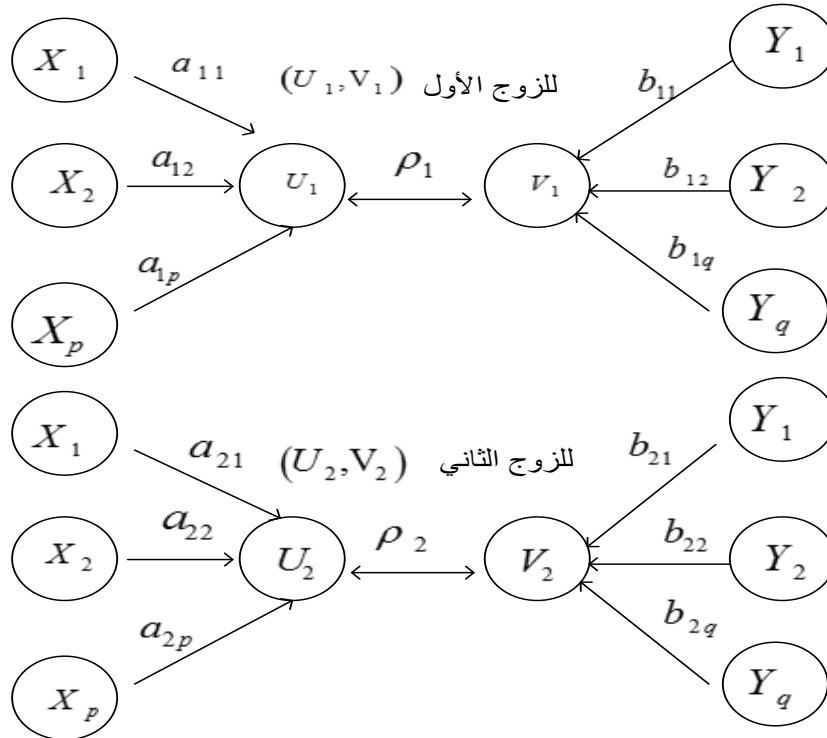
$$U_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots a_{1p}X_p \quad (10)$$

$$V_1 = b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + b_{13}Y_3 + \dots b_{1q}Y_q$$

$$U_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots a_{2p}X_p$$

$$V_2 = b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + b_{23}Y_3 + \dots b_{2q}Y_q \quad (11)$$

ويمكن تمثيل العلاقة بين هذه المتحولات ومركباتها القانونية كما يلي :



الشكل (1) : تمثيل العلاقات القانونية

ولدراسة العلاقة بين المجموعتين X و Y نقوم بحساب معامل الارتباط الزوجي ρ_k بين المركبين القانونيين في كل زوج من الأزواج الممكنة (U_1, V_1) ثم (U_2, V_2) ثم (U_3, V_3) ... الخ، وذلك باستخدام معادلة بيرسون كما يلي :

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(U_k, V_k)}{\sqrt{\text{var}(U_k)} * \sqrt{\text{var}(V_k)}} \quad (12)$$

ويسمى هذا المعامل ρ_k بمعامل الارتباط القانوني للزوج (U_k, V_k) . وبالتالي سيكون لدينا عدداً من معاملات الارتباط القانونية ρ_k مساوياً لعدد الأزواج الممكنة لـ (U_k, V_k) . وسنرى لاحقاً أن عدد هذه المعاملات الممكنة ρ_k يساوي s . حيث أن s هو أصغر العددين p أو q أي أن $s = \min(p, q)$ ، كما إن بعضها يمكن أن يكون معدوماً أو ضعيفاً، وعندها سيتم إهماله خلال التحليل والدراسة بعد إجراء الاختبارات اللازمة لذلك

ولنفرض الآن إننا حصلنا على جميع معاملات الارتباط القانونية ρ_k المقابلة للأزواج الممكنة وقمنا بتربيعها (لأنها قد تكون سالبة) ثم ترتيبها تنازلياً فإننا سنحصل على متتالية منها كما يلي :

$$\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \geq \dots \rho_s^2 \geq 0 \quad (13)$$

وسنصطلح هنا على أن يكون الزوج (U, V) الذي يقابل المعامل الأكبر ρ_1^2 هو الزوج الأول ونرمز له بـ (U_1, V_1) ، كما نسمي الزوج (U, V) الذي يقابل المعامل الثاني ρ_2^2 بالزوج الثاني ونرمز له بـ (U_2, V_2) ، وهكذا نرمز للزوج الذي يقابل المعامل ρ_k^2 بالرمز (U_k, V_k) ونسميه بالزوج k ... الخ . وبعد اختبار معنوية هذه المعاملات تستبعد المعاملات غير المعنوية ويقتصر الأمر على المعاملات الأولى فقط (الأول ثم الثاني ثم الثالث).

وبصورة عامة سنقوم بمعالجة هذه المسألة ودراسة الارتباط القانوني بين كل زوجين مركبين (U, V) لا على التحديد من خلال حساب معامل الارتباط القانوني بينهما والمعرف بالعلاقة التالية:

$$\rho(U, V) = \frac{\text{cov}(U, V)}{\sqrt{\text{var}(U)} * \sqrt{\text{var}(V)}} \quad (14)$$

لحساب قيمة هذا المعامل يلزمنا حساب التباين $\text{var}(U)$ والتباين $\text{var}(V)$ والتباين المشترك $\text{cov}(U, V)$ ، ويتم حسابهم من العلاقتين (6) و (7) باستخدام العلاقات التالية:

$$\text{var}(U) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) \quad (15)$$

$$\text{var}(V) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q b_i b_j \text{cov}(Y_i, Y_j) \quad (16)$$

$$\text{cov}(U, V) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_i b_j \text{cov}(X_i, Y_j) \quad (17)$$

ويمكن تحويل هذه المجاميع إلى جداء مصفوفات وأشعة إذا علمنا أن:

$$\text{var}(U) = E(U - \bar{U})^2 = E(a'X - a'\bar{X})^2 = a'E(X - \bar{X})^2 a \quad (18)$$

وبما أن التوقع $E(X - \bar{X})^2$ مأخوذ على جميع الأشعة $(X - \bar{X})$ فإنه يساوي مصفوفة التباينات لمتحولات المجموعة X وهي C_{xx} . ومنها نستنتج أن :

$$\text{var}(U) = a' * C_{xx} * a \quad (19)$$

أي أن التباين $\text{var}(U)$ يحسب من العلاقة:

$$\text{var}(U) = (a_1 a_2 a_3 \dots a_p) * \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p1} & s_{p2} & s_{p3} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} \quad (20)$$

وبطريقة مشابهة يمكننا أن نجد أن التباين $\text{var}(V)$ يحسب من العلاقة :

$$\text{var}(V) = b' * C_{yy} * b \quad (21)$$

وكذلك يمكننا أن نجد أن التباين المشترك $\text{cov}(U, V)$ يحسب من العلاقة :

$$\text{cov}(U, V) = a' * C_{xy} * b = b' * C_{yx} * a \quad (22)$$

حيث أن: C_{xx} و C_{yy} و C_{xy} و C_{yx} هي المصفوفات التباينية المعرفة سابقاً في الجدول (3).

وبذلك تأخذ العلاقة (14) السابقة لمعامل الارتباط القانوني الشكل التالي:

$$\rho(U, V) = \frac{a' * C_{xy} * b}{\sqrt{a' * C_{xx} * a} * \sqrt{b' * C_{yy} * b}} \quad (23)$$

وللحصول على معامل الارتباط القانوني للزوج الأول (U_1, V_1) من العلاقة (23) علينا أن نقوم بتقدير الأمثال a_i, b_j الواردة في الشعاعين a و b . بحيث نحصل من (23) على أكبر قيمة ممكنة لمعامل الارتباط القانوني ρ (تعظيم قيمة ρ). وهي مسألة معقدة ولها لا نهاية من الحلول المقبولة. وحتى نحصل على حل محدد ومثالي لهذه المسألة لابد من وضع شروط إضافية على عناصر الشعاعين b و a .

ولتحقيق هذا الهدف نعلم قيمة معامل الارتباط ρ لا تتأثر بتغيير وحدات القياسي لـ U أو V . فمثلاً إذا ضربنا المركب U بعدد ثابت k ، فإن قيمة ρ تبقى ثابتة لأنه يكون لدينا مايلي:

$$\rho(kU, V) = \frac{k * a' * C_{xy} * b}{\sqrt{k^2 a' * C_{xx} * a} * \sqrt{b' * C_{yy} * b}} = \frac{a' * C_{xy} * b}{\sqrt{a' * C_{xx} * a} * \sqrt{b' * C_{yy} * b}} = \rho(U, V) \quad (24)$$

وهذا يعني أنه يمكننا أن نقوم بتغيير واحدات القياس لكل من U و V دون التأثير على قيمة ρ . ولذلك نقوم باختيار واحدات قياس مناسبة للمركبين القانونيين U و V . وإن أبسط واحدات قياس لهما هي التي تجعل التباينين لهما $var(U)$ و $var(V)$ متساويين ومساويين للواحد الصحيح. لذلك نضع عليهما الشرطين التاليين :

$$var(U) = a' * C_{xx} * a = 1 \quad (25)$$

$$var(V) = b' * C_{yy} * b = 1 \quad (26)$$

وبذلك تتحول المعادلة (23) إلى الشكل البسيط التالي:

$$\rho = \frac{a' * C_{xy} * b}{1 * 1} = a' * C_{xy} * b \quad (27)$$

وتتحول مسألة تعظيم قيمة المعامل ρ إلى مسألة تعظيم البسط $(a' * C_{xy} * b)$ ويصبح هدفنا إيجاد القيمة العظمى لـ ρ من العلاقة (27) ضمن الشرطين (25), (26) ولنرمز لهذه القيمة العظمى بـ ρ_1 فيكون لدينا:

$$\rho_1 = \max(a' * C_{xy} * b) \quad (28)$$

ويسمى الزوج U, V الذي يقابل هذه القيمة ρ_1 بالزوج الأول ونرمز له بـ (U_1, V_1) ولإيجاد القيمة العظمى الشرطية لذلك البسط $(a' * C_{xy} * b)$ في (27) نشكل منه تابع لاغرانج مع الشرطين (25), (26) كمايلي:

$$L = a' * C_{xy} * b - \frac{\lambda_x}{2} (a' * C_{xx} * a - 1) - \frac{\lambda_y}{2} (b' * C_{yy} * b - 1) \quad (29)$$

حيث أن λ_x, λ_y هما عددا حقيقيان وسيطان يسميان بمضروبي لاغرانج، ثم نشق التابع L بالنسبة لـ a ثم بالنسبة لـ b ونضعهما مساويين للصفر فنحصل على المعادلتين التاليتين (*):

$$\frac{\partial L}{\partial a} = C_{xy} * b - \lambda_x C_{xx} * a = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = C_{yx} * a - \lambda_y C_{yy} * b = 0 \quad (31)$$

نضرب الأولى بـ a' والثانية بـ b' فنحصل على العلاقتين

$$a' * C_{xy} * b - \lambda_x * a' * C_{xx} * a = 0$$

$$b' * C_{yx} * a - \lambda_y * b' * C_{yy} * b = 0$$

• (*) إن الاشتقاق هنا يتم حسب قواعد اشتقاق المصفوفات المعرفة بالعلاقات التالية:

$$1 - \frac{\partial(c' * x)}{\partial x} = c \Rightarrow$$

$$2 - \frac{\partial(x' * B * x)}{\partial x} = 2B * x$$

$$\frac{\partial(a' C_{xy} b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} [b' C_{yx} * a]' = [b' C_{yx}]' = C_{xy} * b$$

$$\frac{\partial}{\partial b} [a' C_{xy} * b] = \frac{\partial}{\partial b} [(C_{yx} a)' * b] = C_{yx} * a$$

$$\frac{\partial(a' * C_{xx} * a)}{\partial a} = 2C_{xx} * a$$

ثم نطرح الثانية من الأولى فنحصل على ما يلي:

$$a' * C_{xy} * b - \lambda_x a' * C_{xx} * a - b' * C_{yx} * a + \lambda_y b' * C_{yy} * b = 0$$

ومن العلاقات (22) , (25) , (26) نجد أن:

$$a' * C_{xy} * b = b' * C_{yx} * a \quad \text{وأن} \quad a' * C_{xx} * a = b' * C_{yy} * b = 1 \quad \text{شرطاً}$$

وبالتالي فإننا نحصل على أن: $-\lambda_x + \lambda_y = 0$ أي أن:

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda \quad \text{عدد حقيقي} \quad (32)$$

نعوض قيمة λ الموحدة في المعادلتين (30) , (31). ونفترض أن المصفوفة C_{yy} قابلة للعكس (أي

C_{yy}^{-1} موجودة) ونضرب المعادلة (31) من اليسار بالمقلوب C_{yy}^{-1} فنحصل على أن:

$$C_{yy}^{-1} * C_{yx} * a - \lambda C_{yy}^{-1} * C_{yy} * b = 0$$

ومنها نحصل على أن:

$$C_{yy}^{-1} * C_{yx} * a - \lambda * I * b = \lambda * b$$

وبذلك نجد أن الشعاع b يحسب عن طريق الشعاع a من العلاقة التالية:

$$b = \frac{C_{yy}^{-1} * C_{yx}}{\lambda} * a \quad (33)$$

أي أن الشعاع b يتناسب مع الشعاع a (يرتبط معه تناسبياً)، وبتعويض قيمة الشعاع b من العلاقة

(33) في معادلة المشتق الأول (30) نحصل على أن:

$$C_{xy} \frac{C_{yy}^{-1} * C_{yx}}{\lambda} a - \lambda C_{xx} * a = 0$$

ومنها نجد أن:

$$C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} * a = \lambda^2 C_{xx} * a \quad (34)$$

وهذا هو الشكل العام لمعادلة القيم الذاتية ($AX = \lambda B * x$)، ولتبسيط الأمور نفترض أن المصفوفة C_{xx}

قابلة للعكس (أي أن C_{xx}^{-1} موجودة) ونضرب طرفي العلاقة (34) من اليسار بـ C_{xx}^{-1} فنحصل على

المعادلة التالية:

$$C_{xx}^{-1} * C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} * a = \lambda^2 C_{xx}^{-1} * C_{xx} * a = \lambda^2 I * a$$

أي أن:

$$C_{xx}^{-1} * C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} * a = \lambda^2 * a \quad (35)$$

وهذا هو الشكل النموذجي لمعادلة القيم الذاتية ($AX = \lambda X$)

وهنا نلاحظ أن نتيجة الجداء المصفوفي الذي في الطرف الأيسر من (35) هو عبارة عن مصفوفة

مربعة من المرتبة $p * p$.

وللاختصار نرمز لها بالرمز A فيكون لدينا ما يلي:

$$A_{p*p} = C_{xx}^{-1} * C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} \quad (36)$$

وعندها تأخذ العلاقة (35) شكل معادلة القيم الذاتية بالنسبة لـ a كما يلي:

$$A * a = \lambda^2 * a \quad (37)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل النموذجي كما يلي:

$$[A - \lambda^2 I] * a = 0 \quad (38)$$

وحتى نستطيع الحصول على الشعاع a ، علينا أن نتجنب الحصول على الحل التافه ($a = 0$)، لذلك نفترض أن المصفوفة المربعة $[A - \lambda^2 I]$ هي مصفوفة شاذة. وهذا يعني أن قيمة محددها يجب أن تساوي الصفر، أي يجب أن يكون:

$$|A - \lambda^2 I| = 0 \quad (39)$$

وبما أن مرتبة هذا المحدد تساوي p فإن مفكوكه بالنسبة لـ λ^2 سيشكل معادلة مؤلفة من كثير حدود من المرتبة p للمقادير (λ^2) كما يلي:

$$(\lambda^2)^P + C_1(\lambda^2)^{P-1} + C_2(\lambda^2)^{P-2} + \dots + C_p = 0 \quad (40)$$

وعند حل هذه المعادلة نحصل على p جذراً موجباً لـ λ^2 ، وتسمى هذه الجذور بالجذور الكامنة (Roots) للمصفوفة A ويغلب عليها اسم أو مصطلح القيم الذاتية (Eigen values) للمصفوفة A . وبعد الحصول على هذه القيم الذاتية λ_k^2 نقوم بترتيبها تنازلياً فيكون لدينا:

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \lambda_3^2 \geq \lambda_4^2 \geq \dots \lambda_p^2 \geq 0 \quad (41)$$

وبعد الحصول على القيم الذاتية λ_k^2 (الجذور السابقة) علينا أن نستخدمها في حساب الشعاعين a , b للتركيبتين (6) , (7)، لذلك نقوم بتعويض كل منها وعلى التوالي في المعادلة الذاتية (38) فنحصل في كل مرة على جملة معادلات متجانسة وغير مستقلة للمجهول a ، ولتوضيح ذلك نبدأ بتعويض القيمة الذاتية الاولى λ_1^2 في (38) فنحصل على المعادلة الذاتية التالية (بفرض أن $p=3$) :

$$[A - \lambda_1^2 I]a = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda_1^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda_1^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (42)$$

وهي تعطينا جملة معادلات متجانسة بالنسبة للمجهول a كما يلي:

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \lambda_1^2)a_1 + \alpha_{12} a_2 + \alpha_{13} * a_3 &= 0 \\ \alpha_{21} a_1 + (\alpha_{22} - \lambda_1^2)a_2 + \alpha_{23} * a_3 &= 0 \\ \alpha_{31} a_1 + \alpha_{32} a_2 + (\alpha_{33} - \lambda_1^2)a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

وهي جملة معادلات غير مستقلة لأن محدد مصفوفة أمثالها يساوي الصفر، وذلك حسب العلاقة (39). وبالتالي فإن هذه الجملة ستعطينا لانهاية من الحلول المقبولة للشعاع a . وأن كل من هذه الحلول (a^*) له لانهاية من المضاعفات مثل ($C * a^*$) ويشكل حزمة من الحلول المقبولة . وهذا الحل مع مضاعفاته يحدد لنا فقط الاتجاه العام للشعاع a^* ، ولكن طوله أو قياسه أو قيم عناصره تبقى غير محددة . (لأن كل مضاعف يعطينا قياس مختلف عن الآخر مع إن لهم نفس الاتجاه) .

وحتى نستفيد من المعادلات (43) في تحديد قياس الشعاع a ، نضيف إليها معادلة الشرط (25) ونقوم بحلها معاً بطريقة التعويض، فنحصل (غالباً) على حل وحيد لها، يعطينا العناصر الأساسية للشعاع $a(a_1, a_2, a_3, \dots)$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الهدف المطلوب .

وإذا لم نستطيع الحصول على حل وحيد للشعاع a من المعادلات (43) و (25) مباشرة (بسبب عدم الاستقلال). أو إذا كانت دقة الحل غير مضمونة (بسبب كثرة الحسابات)، فإنه يمكننا اتباع طريقة أخرى نتلخص بأن نبحث عن أي حل مقبول للجملة (43) مثل (a^*) ونضربه بعدد ثابت k ، فنحصل على شعاع جديد مقبول هو $(k * a^*)$ ، ثم نعوض هذا الحل الأخير في الشرط (25) الذي فرضناه على تباين المركب القانوني U فنحصل على معادلة جديدة من الشكل:

$$\text{var}(U) = (ka^*)' C_{xx} * (ka^*) = 1 \quad (44)$$

وهي تكافئ المعادلة:

$$k^2 * a^{*1} C_{xx} * a^* = 1 \quad (44)'$$

ومنها نحسب قيمة k^* التي تجعل ذلك الحل a^* محققاً للشرط (25)، ونستخدم ذلك العدد المحسوب k^* لتعديل الحل المقبول a^* لذلك نقوم بحساب الجداء $(k^* a^*)$ من جديد نحصل على الشعاع الذاتي الأول والذي سنرمز له أيضاً بـ a^* ونكتبه على الشكل التالي:

$$a^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (45)$$

وللحصول على عناصر الشعاع الذاتي b^* المصاحب لمتحولات المركب القانوني V_1 من الزوج الأول (U_1, V_1) نستخدم العلاقة (33) فنجد أن :

$$b^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{C_{yy}^{-1} * C_{yx}}{\lambda_1} * \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (46)$$

وبعد حصولنا على الشعاع b^* نقوم بتعديله ليحقق الشرط (26) المفروض على تباين V فنضربه بعدد ثابت k ونعوض الناتج في الشرط (26) فنحصل على أن:

$$\text{var}(V) = k * b^{*'} * C_{yy} * kb^* = 1$$

وهي تكافئ المعادلة :

$$k^2 b^{*'} C_{yy} * b^* = 1 \quad (47)$$

ومنها نحسب قيمة k^* التي تجعل الشعاع b^* يحقق الشرط (26)، لذلك نضرب ذلك الشعاع b^* بـ k^* المحسوبة فنحصل على شعاع جديد نرمز له أيضاً بـ b^* ونكتبه على الشكل التالي :

$$b_1^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (48)$$

وبعد الحصول على الشعاعين الذاتيين الأولين b_1^*, a_1^* يمكننا حساب قيمة معامل الارتباط القانوني ρ_1 للزوج الأول (U_1, V_1) من العلاقة (27) وهي:

$$\rho_1 = a^{*'} * C_{xy} * b^* \quad (49)$$

كما يمكن حساب قيمة ρ_1 من العلاقة التالية (مع وضع الإشارة المناسبة):

$$\rho_1 = \pm \sqrt{\lambda_1^2} = \pm \lambda_1 \quad (50)$$

وسنحدد إشارته لاحقاً من خلال الشكل البياني للزوج (U_1, V_1) أو من خلال حساب معامل الارتباط بينهما، وأخيراً نقوم بتعويض الشعاعين الذاتيين b_1^*, a_1^* في العلاقتين (6) و (7) فنحصل على تركيبين خطيين محددين للزوج القانوني الأول (U_1, V_1) هما:

$$\tilde{U}_1 = a_1^* X_1 + a_2^* X_2 + a_3^* X_3 + \dots + a_p^* X_p \quad (51)$$

$$\tilde{V}_1 = b_1^* Y_1 + b_2^* Y_2 + b_3^* Y_3 + \dots + b_q^* Y_q \quad (52)$$

وبعدها نقوم بحساب القيم النظرية لكل من المركبين $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$ ، وذلك بتعويض قيم المشاهدات الفعلية (في الصفوف) للمتحولات المستقلة X في العلاقة (51)، وبتعويض قيم المشاهدات الفعلية (في الصفوف) للمتحولات التابعة Y في العلاقة (52). فنحصل على القيم النظرية المتقابلة للزوج القانوني الأول $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$.

ثم نقوم برسم الشكل البياني للقيم النظرية $(\tilde{U}_{1i}, \tilde{V}_{1i})$ فنحصل على شكل انتشار، ومنه يظهر لنا اتجاه ومثانة الارتباط الخطي بين (U_1, V_1) .

وهنا يمكننا أيضاً حساب القيمة النظرية لمعامل الارتباط القانوني الأول ρ_1 فنحصل على القيمة العظمى للمعامل ρ_1 والتي تعبر عن شدة الارتباط بين مركبي الزوج الأول $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$. وإن إشارته تتحدد من خلال تلك الحسابات أو من خلال اتجاه الشكل البياني.

ومن جهة أخرى وبشكل عام يمكننا حساب قيمة معامل الارتباط القانوني ρ من العلاقة (28)، وبذلك بعد تعويض قيمة الشعاع b من العلاقة (33) في العلاقة (28) فنجد أن:

$$\rho = a' * C_{xy} \frac{C_{yy}^{-1} * C_{yx}}{\lambda} * a \quad (53)$$

$$\rho = \frac{a'}{\lambda} C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} * a \quad (54)$$

ومن العلاقة (34) نجد أن الجداء الأخير من (54) يساوي $\lambda^2 * C_{xx} * a$ وبالتالي نحصل على أن:

$$\rho = \frac{a'}{\lambda} * \lambda^2 C_{xx} * a = \lambda a' * C_{xx} * a$$

وبما أنه لدينا من الشرط (25) أن $a' * C_{xx} * a = 1$ ، فإننا نجد أن:

$$\rho = \lambda = \pm \sqrt{\lambda^2} \quad (55)$$

أي أن قيمة معامل الارتباط ρ_k المقابل لأي زوج قانوني (U_k, V_k) تساوي الجذر التربيعي للقيمة الذاتية λ_k^2 المقابلة لذلك الزوج. وتحدد إشارة ρ_k لكل زوج من خلال الحساب الفعلي لقيمته من القيم النظرية للزوج $(\tilde{U}_k, \tilde{V}_k)$ أو من خلال شكل الانتشار، أو من خلال العلاقة (99).
وهنا يمكننا أن نستخلص بعض خواص القيم الذاتية λ_k^2 المحسوبة من معين المصفوفة $[A - \lambda I]$ كما يلي:

$$\text{بما أن قيمة معامل الارتباط } \rho_k \text{ كأى معامل ارتباط خطي يحقق المترابطة المزدوجة التالية:}$$

$$-1 \leq \rho_k \leq +1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \rho_k^2 \leq 1 \quad (56)$$

ومن العلاقة (55) نستنتج $\rho_k^2 = \lambda_k^2$ ومن (56) نجد أن:

$$0 \leq \lambda_k^2 \leq 1 \quad (57)$$

وهذا يعني أن جميع القيم الذاتية λ_k^2 المحسوبة من المصفوفة $[A - \lambda I]$ هي قيم غير سالبة وأصغر أو تساوي الواحد، لذلك يمكننا ترتيبها تنازلياً كما يلي:

$$1 \geq \lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \lambda_3^2 \geq \dots \lambda_p^2 \geq 0 \quad (58)$$

وتقابلها معاملات التحديد المقابلة للزوج القانوني (U_k, V_k) :

$$1 \geq \rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \geq \dots \rho_p^2 \geq 0 \quad (59)$$

* **طريقة أخرى:** يمكن معالجة الموضوع السابق بأسلوب آخر، وذلك بحساب b أولاً ثم حساب a كما يلي:

لنأخذ المشتق الأول المحسوب في العلاقة (30) ونضرب طرفي المعادلة (30) من اليسار بالمصفوفة المقلوبة C_{xx}^{-1} (بفرض أن C_{xx}^{-1} موجودة) فنحصل على ما يلي:

$$C_{xx}^{-1} * C_{xy} * b = \lambda * C_{xx}^{-1} * C_{xx} * a = \lambda I * a = \lambda a \quad (60)$$

ومنها نستخلص أن الشعاع a يمكن أن يحسب بدلالة الشعاع b من العلاقة:

$$a = \frac{C_{xx}^{-1} * C_{xy}}{\lambda} * b \quad (61)$$

وبتعويض a في معادلة المشتق الثاني (31) نجد أن:

$$C_{yx} \frac{C_{xx}^{-1} * C_{xy} * b}{\lambda} - \lambda C_{yy} * b = 0$$

$$C_{yx} * C_{xx}^{-1} * C_{xy} * b = \lambda^2 C_{yy} * b \quad (62)$$

وهو الشكل العام لمعادلة القيم الذاتية $(AX = \lambda BX)$. ولتبسيط الأمور نضرب طرفي (62) بالمقلوب

$$C_{yy}^{-1} * C_{yx} * C_{xx}^{-1} * C_{xy} * b = \lambda^2 * b \quad (63)$$

وهي معادلة الشكل النموذجي لمعادلة القيم الذاتية ($AX = \lambda X$) .
وهنا نلاحظ أن نتيجة الجداء المصفوفي في الطرف الأيسر هي عبارة عن مصفوفة مربعة من المرتبة $q \times q$ ، واختصاراً للرموز نرمز لذلك الجداء بالرمز B فيكون لدينا:

$$B = C_{yy}^{-1} * C_{yx} * C_{xx}^{-1} * C_{xy} \quad (64)$$

وبالتعويض في (63) نحصل على المعادلة الذاتية التالية:

$$B * b = \lambda^2 * b \quad (65)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$[B - \lambda^2 I] * b = 0 \quad (66)$$

وهي معادلة الشكل النموذجي لمعادلة القيم الذاتية.

وحتى نتحاشى الحصول على الحل التافه ($b=0$) نفترض أن المصفوفة المربعة $[B - \lambda^2 I]$ هي مصفوفة شاذة، وهذا يقتضي أن يكون محددها مساوياً للصفر. فيكون لدينا:

$$|B - \lambda^2 I| = 0 \quad (67)$$

وبما أن مرتبة هذا المحدد تساوي q فإن مفكوكه سيشكل معادلة مؤلفة من كثير حدود من المرتبة q للمقادير λ^2 كما يلي:

$$(\lambda^2)^q + c_1(\lambda^2)^{q-1} + c_2(\lambda^2)^{q-2} + \dots + c_q = 0 \quad (68)$$

ثم نقوم بإيجاد جذور هذه المعادلة بالنسبة لـ (λ^2) فنحصل على q جذراً. وتسمى هذه الجذور بالجذور الكامنة للمصفوفة B أو بالقيم الذاتية (eigenvalue) للمصفوفة B . ثم نقوم بترتيبها تنازلياً فنحصل على القيم الذاتية التالية:

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \lambda_3^2 \geq \dots \geq \lambda_q^2 \geq 0 \quad (69)$$

وعلى معادلات التحديد المقابلة لها :

$$\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \geq \dots \geq \rho_q^2 \geq 0$$

وللحصول على الشعاع الذاتي الأول b المصاحب لـ V_1 من الزوج (U_1, V_1) نأخذ الجذر الأول λ_1^2 ونقوم بتعويض قيمة λ_1^2 في المعادلة (66) . ثم نجري الحسابات اللازمة فنحصل على جملة معادلات خطية غير مستقلة ، تعطينا لا نهاية من الحصول المقبولة للشعاع b ، وحتى نستطيع الاستفادة من هذه المعادلات نأخذ المضاعف k لأحد الحلول ونخضعه للشرط الذي وضعناه على تباين V فنحصل على:

$$var(V) = kb' * C_{yy} * kb = K^2 b^1 * C_{yy} * b = 1 \quad (70)$$

ومن هنا نحصل قيمة العدد k^* الذي يجعل ذلك الحل حلاً يحقق الشرط (26)، ومنه نحصل على عناصر الشعاع الأول b^* وهي: $(b_1^*, b_2^*, b_3^*, \dots, b_q^*)$ ، وللحصول على عناصر الشعاع الأول a نطبق العلاقة (61) كما يلي:

$$a^* = \begin{bmatrix} a^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ a_p^* \end{bmatrix} = \frac{C_{xx}^{-1} * C_{xy}}{\lambda_1} * \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_q^* \end{bmatrix} \quad (71)$$

ثم نقوم بتعديله حتى يحقق الشرط المفروض عليه وهو الشرط (25) كما فعلنا مع b . وبعد ذلك نعوض شعاعي الأمثال a^*, b^* في العلاقتين (6) و (7) فنحصل على نفس التركيبين الخطيين المحددين للزوج الأول (U_1, V_1) وهما:

$$U_1 = a_1^* X_1 + a_2^* X_2 + \dots + a_p^* X_p \quad (72)$$

$$V_1 = b_1^* Y_1 + b_2^* Y_2 + \dots + b_q^* Y_q \quad (73)$$

وبعدها نقوم بحساب القيم النظرية لـ U_1, V_1 وذلك بتعويض القيم الفعلية لـ X و Y في المعادلتين (72) و (73)، فنحصل على مجموعة القيم النظرية المتقابلة $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$ ثم نرسم الشكل البياني لهما، الذي يظهر لنا متانة وإشارة معامل الارتباط بين U_1, V_1 ، ومنها نحسب قيمة معامل الارتباط القانوني ρ_1 ونحدد إشارته المناسبة. كما يمكن حساب ρ_1 من العلاقة: $\rho_1 = \pm \sqrt{\lambda_1^2}$ ثم تحديد إشارته كما سبق.

* حساب أمثال الزوج الثاني (U_2, V_2) وما بعده :

للحصول على أمثال الزوج الثاني (U_2, V_2) التي تجعل معامل الارتباط القانوني ρ_2 ثاني أكبر معامل ارتباط، نأخذ القيمة الذاتية الثانية λ_2^2 ونعوضها في المعادلة (38)، فنحصل منها على جملة معادلات غير مستقلة، ويكون لها لانهاية من الحلول المقبولة، وحتى نستطيع الحصول على حل وحيد للشعاعين a, b الذي يجعل معامل الارتباط ρ_2 أكبر ما يمكن نستفيد من الشرطين المشابهين للشرطين السابقين المفروضين على U_1, V_1 وهما:

$$\text{var}(U_2) = 1 \quad \text{var}(V_2) = 1 \quad (74)$$

وهنا يشترط أيضاً أن تكون المركبات القانونية في الزوج (U_2, V_2) غير مرتبطة خطياً مع المركبات القانونية للزوج الأول U_1, V_1 . أي أن يكون :

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_1, V_2) &= 0 & \text{cov}(V_1, U_2) &= 0 \\ \text{cov}(U_1, U_2) &= 0 & \text{cov}(V_1, V_2) &= 0 \end{aligned} \quad (75)$$

وبصورة عامة للحصول على أمثال الزوج k وهو (U_k, V_k) التي تجعل معامل الارتباط القانوني ρ_k يأخذ قيمة أكبر من المعاملات التالية له، نقوم بتعويض القيمة الذاتية λ_k^2 في المعادلة (28) ومنها نحصل على جملة معادلات خطية غير مستقلة. وحتى نستطيع الحصول على حل وحيد للشعاعين a, b نستعين بالشرطين السابقين وهما:

$$\text{var}(U_k) = 1 \quad \text{var}(V_k) = 1 \quad (76)$$

ونضيف إليهما شروط أن تكون المركبات القانونية (U_k, V_k) غير مرتبطة بالمركبات القانونية السابقة لها وهي:

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_k, V_\ell) &= 0 \quad , , k \neq \ell \\ \text{cov}(U_k, U_\ell) &= 0 \quad , , k \neq \ell \\ \text{cov}(V_k, V_\ell) &= 0 \quad , , k \neq \ell \\ \text{cov}(V_k, U_\ell) &= 0 \quad , , k \neq \ell \end{aligned} \quad (77)$$

وذلك من أجل قيم $k, \ell = 1, 2, 3 \dots \dots p$

وهذا يعني أن معاملات ارتباط المركبين (U_k, V_k) تكون معدومة مع جميع المركبات التي تسبقها . وهكذا نتابع حتى نحصل على أمثال جميع الأزواج الممكنة، ويكون كل زوج مستقل عن الأزواج الأخرى السابقة له، ويمكن توضيح ذلك من خلال عرض التباينات والتباينات المشتركة لجميع الأزواج الممكنة في جدول يتناسب مع الشروط (76) و (77) كما يلي:

جدول (6): التباينات والتباينات المشتركة للمركبات (V_ℓ, U_k) :

المركبات	V_1	V_2	V_3	U_1	U_2	U_3
U_1	ρ_1	0	0	1	0	0
U_2	0	ρ_2	0	0	1	0
U_3	0	0	ρ_3	0	0	1
V_1	1	0	0	ρ_1	0	0
V_2	0	1	0	0	ρ_2	0
V_3	0	0	1	0	0	ρ_3

ملاحظة: إن الشروط (77) هي التي تجعل عدد الأزواج القانونية المرتبطة (U_k, V_k) يساوي p فقط أو يساوي s أصغر العددين (p, q) لأنها تجعل بقية الأزواج معدومة الارتباط .

5- اختبار معنوية القيم الذاتية λ_k^2 أو معاملات الارتباط القانونية $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p$

يوجد عدة مؤشرات لاختبار معنوية ρ_k ، ونذكر هنا أهم هذه المؤشرات وشروط استخدامها ضمن فرضية العدم التالية: لا توجد علاقة معنوية بين مجموعة المتحولات X ومجموعة المتحولات Y .

أي أن $H_0 = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_s = 0$ مقابل أن يكون أحدها غير معدوم $H_1: \rho_k \neq 0$

1- اختبار Wilk's - lambda ويحسب من العلاقة التالية:

$$\Lambda(\ell) = \prod_{k=\ell}^s (1 - \rho_k^2) \quad (78)$$

وهو يخضع للتوزيع F بدرجتي حرية $(p^*q, n-1-q)$ وهو يستخدم للدلالة على معنوية جملة معاملات الارتباط المتتالية اعتبار من ρ_ℓ حتى ρ_s . وكلما كانت قيمة هذا المؤشر صغيرة كانت المعنوية كبيرة (وذلك بعكس المؤشرات الأخرى)، وتؤخذ القيمة الحرجة له λ_s من جدول F المقابلة لدرجتي الحرية $(p^*q, n-1-q)$ ، فإذا كانت قيمة $\Lambda(\ell)$ المحسوبة أصغر من القيمة الحرجة λ_s تكون $P \leq \alpha$ (على غير العادة) وبالتالي نرفض فرضية العدم H_0 التي تقول أنه لا توجد علاقة معنوية بين مجموعة المتحولات X ومجموعة المتحولات Y .

2- اختبار χ^2 partlett's : وهو يحسب اعتماداً على قيمة $\Lambda(\ell)$ المعرفة في (81) ويعتبر بديلاً عنه ويحسب من العلاقة :

$$\chi^2_{(\ell)} = - \left[n - \frac{1}{2}(p + q + 3) \right] \ln \Lambda(\ell) = - \left[n - \frac{1}{2}(p + q + 3) \right] \sum_{k=\ell}^s \ln(1 - \rho_k^2) \quad (79)$$

وهو يخضع لتوزيع χ^2 ذي درجة حرية $df = (p - k + 1)(q - k + 1)$ ، فإذا كانت قيمة $\chi^2_{(\ell)}$ المحسوبة أكبر من χ^2_{α} أو $\rho \leq \alpha$ نرفض الفرضية H_0 ، وهو يقيس معنوية جملة المعاملات القانونية من ρ_{ℓ} حتى ρ_s .

3- اختبار **F**: وهو يعتمد أيضاً على قيمة $\Lambda(\ell)$ المعرفة من (78) ويحسب من العلاقة :

$$F(\ell) = \frac{1 - \Lambda_{\ell}^{\frac{1}{t}} * df_2}{\Lambda_{\ell}^{\frac{1}{t}} * df_1} \quad (80)$$

وهو يخضع لتوزيع F بدرجتي حرية:

$$df_1 = (p - k + 1)(q - k + 1)$$

$$df_2 = w * t - \frac{1}{2}((p - k + 1)((q - k + 1)) + 1)$$

$$w = n - \frac{1}{2}(p + q + 3) \quad t = \sqrt{\frac{p^2 * q^2 - 4}{p^2 + q^2 - 5}} \quad \text{حيث أن } t \text{ و } w \text{ يساويان:}$$

فإذا كانت قيمة $F(\ell)$ المحسوبة أكبر من $F(\alpha)$ أو كانت $\rho \leq \alpha$ نرفض فرضية العدم H_0

4- اختبار **Hotelling - lawley trace** : وتحسب قيمته من العلاقة:

$$U(\ell) = \sum_{k=\ell}^s \left(\frac{\rho_k^2}{1 - \rho_k^2} \right) \quad (81)$$

ثم نقوم بمقارنة هذه القيمة مع القيمة الحرجة التي تحسب من العلاقة:

$$U_{\alpha} = U(\ell) \frac{n - q - 1}{q}$$

فإذا كانت $U(\ell) \geq U_{\alpha}$ أو $\rho \leq \alpha$ نرفض فرضية العدم H_0

5- اختبار **Pillia's trace** : وتحسب قيمته من العلاقة التالية:

$$V(\ell) = \sum_{k=\ell}^s \rho_k^2 \quad (82)$$

وهو يخضع لتوزيع χ^2 بدرجة حرية $(s - \ell)$.

فإذا كانت $V(\ell) \geq V_{\alpha}$ أو $\rho \leq \alpha$ نرفض فرضية العدم H_0

ملاحظة: إن نتيجة تطبيق هذه الاختيارات على القيم الذاتية λ_k^2 أو على المعاملات ρ_k^2 تفرض لنا تلك المعاملات إلى معاملات معنوية (تقابل $p \leq \alpha = 0.05$) ومعاملاته غير معنونه (تقابل $p > 0.05$)، وعندها فإن التحليل الرياضي والإحصائي يقتصر على المعاملات المعنوية وعلى الأزواج القانونية المقابلة لها . وتكون المعاملات المعنوية هي الأولى في جدول الاختيار ويكون المعامل الأول هو أهم المعاملات ثم يليه المعامل الثاني ثم الثالث (إن وجد ..الخ). وإن قيمة المعامل الأول تعبر عن مصداقية ذلك الارتباط.

6- الخلاصة: لحساب الأمثال b_i, a_i في الشعاعين b, a المصاحبين للتركيبين V, U المعرفين بالعلاقين (6) و (7) يمكننا أن نتبع إحدى الطرق الحسابية التالية:

الطريقة الأولى: وهي تطبق عندما يكون $p \leq q$ (أي عندما يكون عدد المتحولات في X أقل أو يساوي عدد المتحولات في Y). وذلك لاختصار الحسابات المعقدة اللازمة لذلك). وتهدف إلى حساب الشعاع a أولاً ثم حساب الشعاع b وتتلخص بما يلي:

1- نقوم بحساب القيم الذاتية λ_k^2 من المعادلة الذاتية:

$$C_{xx}^{-1} * C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} * a = \lambda^2 * a \quad (83)$$

وذلك باستخدام محدد المعادلة الذاتية:

$$[A - I * \lambda^2] * a = 0 \quad |A - I * \lambda^2| = 0 \quad (84)$$

ومنها نحصل على القيم الذاتية: $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \lambda_3^2 \dots \dots \lambda_p^2 \geq 0$ ، وعلى المعاملات ρ_k^2 و ρ_k

2- نقوم بحساب عناصر الشعاع الأول a المقابل للقيمة الأولى λ_1^2 من المعادلة (83) وذلك بتعويض

قيمة λ_1^2 فيها وحساب عناصر الشعاع a^* ثم تعديلها لتحقيق الشرط المفروض عليها وهو:

$$\text{var}(U) = a' * C_{xx} * a = 1 \quad (85)$$

3- نقوم بحساب عناصر الشعاع الأول b من عناصر الشعاع a وذلك بتطبيق العلاقة:

$$b^* = \frac{C_{yy} * C_{yx}}{\lambda} * a^* \quad (86)$$

ثم نقوم بتعديلها لتحقيق الشرط (26) المفروض عليها وهو $\text{var}(V) = b' * C_{yy} * b = 1$

4- نعوض عناصر الشعاعين a^*, b^* في التركيبين (6)، (7) فنحصل على تركيبين محددين لهما هي:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= a_1^* x_1 + a_2^* x_2 + \dots a_p^* x_p \\ \tilde{V}_1 &= b_1^* y_1 + b_2^* y_2 + \dots b_q^* y_q \end{aligned} \quad (87)$$

5- نقوم بحساب القيم النظرية للزوج $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$ ثم نرسم شكله البياني ونحسب معامل الارتباط القانوني

الأول ρ_1 لتحديد إشارته .

6- نقوم بإجراء جميع الحسابات اللازمة لتحليل الكفاءة (كما سنرى لاحقاً) .

الطريقة الثانية: وهي تطبق عندما يكون $q \leq p$ (أي عندما يكون عدد المتحولات في Y أقل أو يساوي عدد المتحولات في X وذلك لاختصار الحسابات اللازمة لذلك) .

وتهدف إلى حساب الشعاع b أولاً ثم a وتتلخص بما يلي:

1- نقوم بحساب القيم الذاتية λ_1^2 من المعادلة الذاتية :

$$C_{yy}^{-1} * C_{yx} * C_{xx}^{-1} * C_{xy} * b = \lambda^2 * b \quad (88)$$

وذلك باستخدام محدد المعادلة الذاتية:

$$[B - I\lambda^2] * b = 0 \quad |B - I\lambda^2| = 0 \quad (89)$$

فنحصل على الجذور λ_k وعلى المعاملات ρ_k^2 و ρ_k

2- نقوم بحساب عناصر الشعاع الأول b المقابل للقيمة الأولى λ_1^2 من المعادلة (88)، وذلك بتعويض

λ_1^2 فيها وحساب عناصر الشعاع الأول b^* ثم تعديله حتى يحقق الشرط المفروض عليه :

$$\text{var}(V) = b' * C_{yy} * b = 1 \quad (90)$$

3- نقوم بحساب الشعاع الأول a^* بعد حساب b^* من العلاقة :

$$a^* = \frac{C_{xx}^{-1} * C_{xy}}{\lambda} * b^* \quad (91)$$

ثم نقوم بتعديله ليحقق الشرط (25) وهو $\text{var}(U) = a' * C_{xx} * a = 1$ فنحصل على الشعاع a^*

4- نعوض عناصر الشعاعين a^* و b^* في الترتيبين (6) ، (7) فنحصل على نفس الترتيبين المحددين

في الطريقة الأولى أو على ترتيبين متناسبين معهما وهما:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= a_1^* X_1 + a_2^* X_2 + \dots + a_p^* X_p \\ \tilde{V}_1 &= b_1^* Y_1 + b_2^* Y_2 + \dots + b_q^* Y_q \end{aligned} \quad (92)$$

5- نقوم بحساب القيم النظرية للزوج $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$ ثم نرسم شكله البياني ونحسب معامل الارتباط القانوني الأول ρ_1 لتحديد إشارته .

6- نقوم بإجراء جميع الحسابات اللاحقة .

الطريقة الثالثة: وهي تطبق إذا كان $p = q$ كما يلي:

1- نقوم بحساب القيم الذاتية λ_k^2 من مفكوك المحدد :

$$|C_{xx}^{-1} * C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} - \lambda^2 * I| = 0 \quad (93)$$

2- ثم نقوم بترتيبها تنازلياً كما يلي:

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \lambda_3^2 \dots \dots \lambda_p^2 \geq 0 \quad (94)$$

وهي عبارة عن معاملات التحديد $\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \dots \dots \rho_p^2 \geq 0$ المقابلة للأزواج (U_k, V_k) المتنازلة،

ثم نحسب معاملات الارتباط القانونية $\rho_k = \pm \sqrt{\lambda_k^2}$ ويتم تحديد إشارتها حسب طبيعة العلاقة بين

V_k و U_k .

3- بعد حساب القيم الذاتية λ_k^2 نقوم بحساب الأشعة الذاتية a, b المقابلة على التوالي لكل قيمة ذاتية λ_k^2 من المعادلتين الذاتيتين على الترتيب

$$C_{xx} * C_{xy} * C_{yy} * C_{yx} a = \lambda^2 * a \quad (95) \text{ للشعاع } a :$$

$$C_{yy}^{-1} * C_{yx} * C_{xx}^{-1} * C_{xy} * b = \lambda^2 * b \quad (96) \text{ للشعاع } b :$$

ثم نقوم بتعديلهما ليحققان الشرطين (25) و (26) المفروضين عليهما وبذلك نحصل على الشعاعين a^*, b^* المقابلين لكل قيمة ذاتية λ_k^2 ، وبالتالي نحصل على التركيبات الخطية

$$U_k = a_{k1}^* X_1 + a_{k2}^* X_2 + \dots a_{kp}^* X_p \quad (97)$$

$$V_k = b_{k1}^* Y_1 + b_{k2}^* Y_2 + \dots b_{kp}^* Y_q \quad (98)$$

4- نقوم بحساب القيم النظرية للأزواج $(\tilde{U}_k, \tilde{V}_k)$ ونرسم شكله البياني ونحسب معامل الارتباط القانوني له ρ_k لتحديد إشارته .

5- ثم نقوم بإجراء جميع الحسابات اللاحقة .

الطريقة الرابعة: وتحويل (شوليسكي sholesky):

مما سبق لقد لاحظنا أنه يمكننا حساب الشعاعين a, b من خلال استخدام المعادلتين (34) , (62) أي من خلال المعادلتين التاليتين :

$$[C_{xy} * C_{yy}^{-1} * C_{yx} - \lambda^2 C_{xx}] * a = 0 \quad (99)$$

$$[C_{yx} * C_{xx}^{-1} * C_{xy} - \lambda^2 C_{yy}] * b = 0 \quad (100)$$

ولكن تطبيق هاتين المعادلتين يتطلب الكثير من الحسابات المعقدة والمتكررة، وهذا ما يضخم حجم الأخطاء خلال الحسابات ويجعلها تتجاوز مستويات الدقة المطلوبة، ويؤثر على دقة النتائج في تقدير الشعاعين a, b ، كما يخل في تناظر المصفوفة الذاتية. لذلك قبل أن نبدأ بحل هاتين المعادلتين بالطرق المعروفة .

سنقوم بتحويل مسألة القيم الذاتية العامة إلى مسألة القيمة الشاذة العامة. وذلك باستخدام تحويل (شوليسكي sholesky) للمصفوفتين المتناظرتين C_{xx} و C_{yy} كما يلي:

إن تحويل (شوليسكي sholesky) يمكن أن يطبق على المصفوفات المتناظرة والمحددة إيجابياً، مثل مصفوفات التباين المشترك C_{xx} و C_{yy} ويكون مستقراً جداً من الناحية العددية (Golub & vonloan 1996)، وهو يقتضى أن نفرع المصفوفتين C_{xx} و C_{yy} إلى جداء مصفوفتين مثلثتين كما يلي:

$$C_{xx} = U'_x * U_x \quad (101)$$

$$C_{yy} = V'_y * V_y \quad (102)$$

حيث أن U_x هي المصفوفة المثلثية العليا للمصفوفة C_{xx} فتكون U'_x السفلى .

وأن V_y هي المصفوفة المثلثية العليا للمصفوفة C_{yy} فتكون V'_y السفلى .

وأن كل منهما ذات عناصر قطرية موجبة

والآن نفترض أن K هي مقلوب U_x أي أن: $K = U_x^{-1}$

كما نفترض أن L هي مقلوب V_y أي أن: $L = V_y^{-1}$

وعندها نجد أن:

$$C_{xx}^{-1} = U_x^{-1}(U_x^{-1})' = K * K' \quad (103)$$

$$C_{yy}^{-1} = V_y^{-1}(V_y^{-1})' = L * L' \quad (104)$$

والآن لنأخذ C_{xx}^{-1} ونعوضها في المعادلة (100) فنجد أن:

$$\begin{aligned} [C_{yx} * K * K' * C_{xy} - \lambda^2 * V_y' * V_y] b &= 0 \\ [(K' C_{xy})' * (K' * C_{xy}) - \lambda^2 V_y' V_y] b &= 0 \end{aligned} \quad (105)$$

وإذا رمزنا بـ $A = K' C_{xy}$ و $B = V_y$ فإننا نحصل على معادلة من الشكل التالي :

$$(A' * A - \rho^2 B' * B) b = 0 \quad (106)$$

والتي يمكن حلها بدقة عالية بطريقة القيمة الشاذة العامة لفرعي المصفوفتين A , B أي بحساب الجذائين

المصفوفتين $A' * A$ و $B' * B$ (colub & vanloan 1996+ weenink 1999)

وهكذا سنحصل على المعادلة (95) من جداء مصفوفة من فرعي تشوليسكي K' في المصفوفة C_{xy}

وكذلك من جداء المصفوفتين المثلثيتين V_y' في V_y .

وهذا يسمح لنا في تقدير أفضل للقيم الذاتية مما كان تقديرها من المعادلتين (99) , (100)، وإن

الجذور التربيعية للقيم الذاتية المحسوبة من المعادلة (105) تساوي معاملات الارتباط القانوني ρ .

أما الأشعة الذاتية b فتعطينا كيف يتم توليف العمود b لنحصل على الارتباط القانوني الأمثل .

وكذلك الأمر بالنسبة للمعادلة (99) يمكن أن نحصل منها على المعادلة التالية:

$$[(L' C_{yx})' * (L C_{yx}) - \lambda^2 U_x' U_x] a = 0 \quad (107)$$

وهي تتمتع بنفس الخواص للمعادلة (96) وتكتبها أيضاً على الشكل :

$$[A' * A - \rho^2 B' * B] a = 0 \quad (108)$$

ومن المعادلتين (107) , (105) يمكننا حساب الأشعة الذاتية a , b

الطريقة الخامسة: وهي تعتمد على مصفوفتي البيانات الأولية المركزية للمتحولات X وللمتحولات Y

والتي نرمز لهما بـ A_x , A_y على الترتيب:

$$a_{yij} = (Y_{ij} - \bar{Y}_j) \quad a_{xij} = (X_{ij} - \bar{X}_j)$$

ونبدأ بتفريع هاتين المصفوفتين بطريقة تفريعات القيمة الشاذة كما يلي :

$$A_x = U_x * D_x * V_x' \quad (109)$$

$$A_y = U_y * D_y * V_y' \quad (110)$$

حيث أن U_x مصفوفة مثلثية عليا و V_y مصفوفة مثلثية سفلى أما D_x فهي مصفوفة قطرية .

ونستخدم هاتين التقريعتين لحساب مصفوفات التباينات المشتركة كما يلي:

$$C_{xx} = A'_x * A_x = (V_x * D'_x * U'_x) * U_x * D_x * V'_x = V_x * D_x^2 * V'_x \quad (111)$$

$$C_{yy} = A'_y * A_y = (V_y * D'_y * U'_y) * U_y * D_y * V'_y = V_y * D_y^2 * V'_y \quad (112)$$

$$C_{xy} = A'_x * A_y = (V_x * D'_x * U'_x) * U_y * D_y * V'_y = V_x * D'_x * U'_x * U_y * D_y * V'_y \quad (113)$$

وذلك بالاستفادة من خاصية التعامد حيث أن:

$$\begin{aligned} U'_x * U_x &= I & U'_y * U_y &= I \\ V'_x * V_x &= I & V'_y * V_y &= I \end{aligned} \quad (114)$$

وهكذا نجد أن:

$$C_{xx}^{-1} = V_x * D_x^{-2} * V'_x \quad \text{و} \quad C_{yy}^{-1} = V_y * D_y^{-2} * V'_y \quad (115)$$

وبتعويض ذلك في المعادلتين (99) , (100) نحصل من (100) على أن:

$$[V_y * D_y * U'_y * U_x * U'_x * U_y * D_y * V'_y - \rho^2 * V_y * D_y^2 * V'_y]b = 0 \quad (116)$$

وبعد ضرب العلاقة (116) من اليسار بالمصفوفة $D_y^{-1}V'_y$ نحصل على :

$$[U'_y * U_x * U'_x * U_y * D_y * V'_y - \rho^2 * D_y * V'_y]b = 0 \quad (117)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$[(U'_x * U_y)' * (U'_x * U_y) - \rho^2 I] D_y * V'_y * b = 0 \quad (118)$$

وهي معادلة من الشكل :

$$[A' * A - \rho^2 I]X = 0 \quad (119)$$

والتي يمكن حلها بسهولة بواسطة تعويض فرع القيمة الشاذة للمصفوفة A . حيث نقوم بتعويض فرع

القيمة الشاذة ($U'_x * U_y = U * D * V'$) في المعادلة (118) ونتوصل بعد الإصلاحات إلى أن:

$$(D^2 - \rho^2 I)V' * D_y * V'_y * b = 0 \quad (120)$$

وإن القيم الذاتية للمعادلة (120) تساوي D^2 أما الأشعة الذاتية لها فنحصل عليها من أعمدة المصفوفة

$$V'_y * D_y^{-1} * V$$

وبطريقة مشابهة نحصل من المعادلة (99) على أن:

$$(D^2 - \rho^2 I)U' * D_x * V'_x * a = 0 \quad (121)$$

وسيكون لها نفس القيم الذاتية D^2 أما الأشعة الذاتية لها فنحصل عليها من أعمدة المصفوفة

$U * D_x^{-1} * V'_x$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى عدد الجداءات الضرورية للحصول على القيم الذاتية. ولم

نعد بحاجة لحساب الجداءات المذكورة في العلاقة (99) بل يكفي بفرعين للقيمة الشاذة ومصفوفة الجداء

($U'_x * U_y$)، وإن الجداء الأخير هو مستقر جداً، وذلك لأن الأعمدة في كلتا المصفوفتين متعامدة فيما

بينها [David weenink 2003.p.83].

7- الارتباط القانوني المعياري:

وهو حالة خاصة من الارتباط القانوني العام، ويتم استخدامه للتخلص من المشكلات الحسابية التي تنجم عن وحدات القياس المختلفة للمتحويلات المستقلة X وللمتحويلات التابعة Y ، وهو يطبق على المتحويلات المعيارية المستخلصة من المتحويلات الأصلية (الخام) في كلتا المجموعتين X , Y .
لذلك نقوم بتحويل متحويلات المجموعة X إلى متحويلات معيارية وفق العلاقة :

$$Z_{xi} = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\sigma_{xi}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots p) \quad (122)$$

فيكون لدينا حكماً إن المتوسط والتباين يساويان:

$$\bar{Z}_{xi} = 0 \quad \text{var}(Z_{xi}) = 1 \quad (123)$$

كما نقوم بتحويل متحويلات المجموعة Y إلى متحويلات معيارية وفق العلاقة:

$$Z_{yj} = \frac{Y_j - \bar{Y}_j}{\sigma_{yj}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots q) \quad (124)$$

ويكون لدينا حكماً أن المتوسط والتباين يساويان:

$$\bar{Z}_{yj} = 0 \quad \text{var}(Z_{yj}) = 1 \quad (125)$$

وبذلك نحصل على مجموعتين من المتحويلات المعيارية هما:

$$\begin{aligned} Z_x &: Z_{x1}, Z_{x2}, Z_{x3}, \dots, Z_{xp} \\ Z_y &: Z_{y1}, Z_{y2}, Z_{y3}, \dots, Z_{yp} \end{aligned} \quad (126)$$

إن التعامل مع هذه المتحويلات المعيارية يعتبر أكثر سهولة وأفضل دقة من المتحويلات الأصلية X , Y ، لذلك سنقوم فيمايلي بتطبيق إجراءات الارتباط القانوني على متحويلات هاتين المجموعتين ثم نرجع إلى المتحويلات الأصلية X , Y ونستخلص منها النتائج الممكنة .

وبطريقة مشابهة لما فعلناه مع المتحويلات الأصلية X , Y نشكل تركيبين خطيين لهذه المتحويلات المعيارية Z_x , Z_y كما يلي:

$$U_{zx} = e_1 Z_{x1} + e_2 Z_{x2} + e_3 Z_{x3} + \dots + e_p Z_{xp} = e * Z_x \quad (127)$$

$$V_{zy} = f_1 Z_{y1} + f_2 Z_{y2} + f_3 Z_{y3} + \dots + f_q Z_{yq} = f' * Z_y \quad (128)$$

حيث أن e و f شعاعان عدديان مجهولان، وأن عدد متحويلات X هو p وعدد متحويلات Y هو q ، ولكن بما أن معامل الارتباط ρ للمركبين (U, V) المعرفين في العلاقتين (6) ، (7) لا يتأثر بواحدات القياس وبمركز المحاور فإنه لا يتأثر بهذه التحويلات المعيارية ويبقى مساوياً لنفسه ومساوياً لمعامل الارتباط القانوني الجديد للمركبين (U_{zx}, V_{zy}) ، وبناءً عليه يمكننا حساب قيمته من المركبين (U_{zx}, V_{zy}) وفق العلاقة التالية:

$$\rho(U_{zx}, V_{zy}) = \frac{\text{cov}(U_{zx}, V_{zy})}{\sqrt{\text{var}(U_{zx})} * \sqrt{\text{var}(V_{zy})}} \quad (129)$$

وينفس الأسلوب يمكننا البرهان على أن:

$$\text{var}(U_{zx}) = \text{cov}(e' * Z_x) = e' * \text{cov}(Z_x) * e \quad (130)$$

حيث أن $\text{cov}(Z_x)$ هي مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة للمجموعة Z_x وإن كل عنصر فيها يساوي التباين المشترك لمتحولين من Z_x ويساوي:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_{xi}, Z_{xj}) &= E[(Z_{xi} - 0)(Z_{xj} - 0)] \\ &= E\left[\left(\frac{X_i - \bar{X}_i}{\sigma_{xi}}\right)\left(\frac{X_j - \bar{X}_j}{\sigma_{xj}}\right)\right] = r_{xi xj} \end{aligned} \quad (131)$$

أي أن كل عنصر في المصفوفة $\text{cov}(Z_x)$ هو عبارة عن معامل الارتباط بين المتحولين الأصليين X_i, X_j المقابلين له، أي أن المصفوفة $\text{cov}(Z_x)$ ماهي إلا مصفوفة معاملات الارتباط الزوجية لمتحولات المجموعة X الأصلية والتي رمزنا لها بـ R_{xx} ، لأنه في الحقيقة إن عملية تحويل المتحولات X والمتحولات Y إلى متحولات معيارية Z_x, Z_y يؤدي إلى تحويل مصفوفات التباينات والتباينات المشتركة $C_{yx}, C_{xy}, C_{yy}, C_{xx}$ إلى المصفوفات الارتباطية $R_{yx}, R_{xy}, R_{yy}, R_{xx}$ على الترتيب: وبناءً على ذلك نجد أن العلاقة (130) تأخذ الشكل التالي:

$$\text{var}(U_{zx}) = e' * R_{xx} * e \quad (132)$$

وبطريقة مشابهة نجد أن:

$$\text{var}(V_{zy}) = f' * R_{yy} * f \quad (133)$$

كما يمكننا أن نجد أن:

$$\text{cov}(U_{zx}, V_{zy}) = e' * R_{xy} * f = f' * R_{yx} * e \quad (134)$$

وبتعويض (132), (133), (134) في العلاقة (129) نجد أن معامل الارتباط القانوني ρ يصبح في هذه الحالة مساوياً لما يلي:

$$\rho(U_{zx}, V_{zy}) = \frac{e' * R_{xy} * f}{\sqrt{e' * R_{xx} * e} * \sqrt{f' * R_{yy} * f}} \quad (135)$$

وحتى نحصل على التركيب الأول أو الزوج الأول (U_{1zx}, V_{1zy}) المقابل لـ ρ_1 علينا الآن أن نقوم بحساب عناصر الشعاعين e, f ، بحيث نجعل قيمة المعامل $\rho(U_{zx}, V_{zy})$ أكبر ما يمكن وحتى نستطيع حساب عناصر الشعاعين e, f بشكل محدد نضع عليهما الشرطين المشابهين للشرطين (26), (25) كما يلي:

$$\text{var}(U_{1zx}) = e' * R_{xx} * e = 1 \quad (136)$$

$$\text{var}(V_{1zy}) = f' * R_{yy} * f = 1 \quad (137)$$

وبذلك نجد أن العلاقة (135) تأخذ الشكل التالي:

$$\rho(U_{1zx}, V_{1zy}) = e' * R_{xy} * f = f' * R_{yx} * e \quad (138)$$

وللحصول على أكبر قيمة للمعامل ρ في العلاقة (138) تشكل منها مع الشرطين (136), (137) تابع لاغرانج كما يلي:

$$L = e' * R_{xy} * f - \frac{\lambda_x}{2} (e' * R_{xx} * e - 1) - \frac{\lambda_y}{2} (f' * R_{yy} * f - 1) \quad (139)$$

حيث : λ_x, λ_y هما عدداً وسيطان يسميان بمضروبي لاغرانج .
نشتق التابع L بالنسبة e ثم بالنسبة f ونضع هذين المشتقين مساويين للصفر (للحصول على القيمة العظمى لـ L) فنجد أن(*):

$$\frac{\partial L}{\partial e} = R_{xy} * f - \lambda_x R_{xx} * e = 0 \quad (140)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f} = R_{yx} * e - \lambda_y R_{yy} * f = 0 \quad (141)$$

نضرب الأولى بـ e' والثانية بـ f' فنحصل على المعادلتين:

$$e' * R_{xy} * f - \lambda_x e' * R_{xx} * e = 0 \quad (142)$$

$$f' * R_{yx} * e - \lambda_y f' * R_{yy} * f = 0 \quad (143)$$

ثم نطرح الثانية من الأولى فنحصل على أن:

$$e' * R_{xy} * f - \lambda_x e' * R_{xx} * e - f' * R_{yx} * e + \lambda_y f' * R_{yy} * f = 0 \quad (144)$$

وبما أنه لدينا من (136), (137), (138) أن:

$$e' * R_{xy} * f = f' * R_{yx} * e \quad \text{و} \quad e' * R_{xx} * e = 1, \quad f' * R_{yy} * f = 1$$

فإننا نحصل من (144) على أن:

$$-\lambda_x + \lambda_y = 0 \quad (145)$$

أي أن $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ ، لذلك نعوض قيمة λ الموحدة في العلاقتين (140) و (141)، ونفترض أن

المصفوفة المقلوبة R_{yy}^{-1} موجودة ثم نضرب العلاقة (141) من اليسار بـ R_{yy}^{-1} فنحصل على :

$$R_{yy}^{-1} * R_{yx} * e = \lambda R_{yy}^{-1} * R_{yy} * f = \lambda * f \quad (146)$$

ومن هنا نحصل على الشعاع f بدلالة الشعاع e من العلاقة:

$$f = \frac{R_{yy}^{-1} * R_{yx}}{\lambda} * e \quad (147)$$

وبتعويض قيمة f في العلاقة الأولى (140) نحصل على أن:

$$R_{xy} * \frac{R_{yy}^{-1} * R_{yx}}{\lambda} * e = \lambda * R_{xx} * e$$

وبإصلاحها نحصل على أن:

$$R_{xy} * R_{yy}^{-1} * R_{yx} * e = \lambda^2 * R_{xx} * e \quad (148)$$

(*) إن الاشتقاق تم حسب قواعد اشتقاق المصفوفات وهي:

$$\frac{\partial \hat{c}x}{\partial x} = C, \quad \frac{\partial (\hat{x}BX)}{\partial x} = 2BX$$

وبفرض أن المصفوفة المقلوبة R_{xx}^{-1} موجودة. نضرب (148) من اليسار بالمصفوفة R_{xx}^{-1} فنحصل على أن:

$$R_{xx}^{-1} * R_{xy} * R_{yy}^{-1} * R_{yx} * e = \lambda^2 * e \quad (149)$$

وهي المعادلة النموذجية للقيم الذاتية للمصفوفة R التي ترمز إلى :

$$R_{p*p} = R_{xx}^{-1} * R_{xy} * R_{yy}^{-1} * R_{yx} \quad (150)$$

وأخيراً نكتب (149) كما يلي:

$$[R - \lambda^2 I]e = 0 \quad (151)$$

وحتى نتجنب الحصول على الحل التافه وهو $e = 0$ نفترض أن المصفوفة $[R - \lambda^2 I]$ مصفوفة شاذة، وهذا يعني أن قيمة محددها يجب أن يساوي الصفر . أي أن :

$$|R - \lambda^2 I| = 0 \quad (152)$$

وبما أن المحدد (152) من المرتبة $p*p$ فإن مفكوكه سيعطينا كثير حدود من المرتبة p بالنسبة للمقادير λ^2 من الشكل :

$$(\lambda^2)^p + c_1(\lambda^2)^{p-1} + c_2(\lambda^2)^{p-2} + \dots + c_p = 0 \quad (153)$$

نقوم بإيجاد جذور هذه المعادلة بالنسبة لـ (λ^2) فنحصل على p جذراً لها، تسمى بالجذور الكامنة للمصفوفة R أو تسمى بالقيم الذاتية (eigenvalue) للمصفوفة R ، ثم نقوم بترتيب هذه الجذور تنازلياً كمايلي:

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \lambda_3^2 \geq \dots \geq \lambda_{1p}^2 \geq 0 \quad (154)$$

وهي تقابل مربعات معاملات الارتباط القانونية بين الأزواج (U_{zx}, V_{zy}) المرتبة تنازلياً :

$$\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \geq \dots \geq \rho_p^2 \geq 0 \quad (155)$$

وحتى نحصل على الشعاع الذاتي المعياري الأول e المصاحب للتركيب U_{1zx} نأخذ الجذر الأول λ_1^2 ونقوم بتعويضه في المعادلة (151) ثم نجري الحسابات اللازمة فنحصل على جملة من المعادلات غير المستقلة تعطينا لا نهاية من الحلول لـ e ، وحتى نستطيع الاستفادة منها في حساب عناصر الشعاع الذاتي الأول e المقابل للقيمة الذاتية λ^2 نضيف إليها معادلة الشرط المفروض على e في المعادلة (136) ثم نقوم بحل جملة المعادلات الجديدة فنحصل على حل وحيد لـ e وهو يعطينا العناصر الأساسية لذلك الشعاع $(e_1^* e_2^* e_3^* \dots)$. ويمكننا اتباع طريقة أخرى وهي نتلخص بأن نأخذ أي حل مقبول e للجملة في (151) ونضربه بمقدار ثابت k ثم نجعله يخضع للشرط (136) المفروض عليه فنحصل على أن :

$$\text{var}(U_{zx}) = ke' * R_{xx} * ke = k^2 e' * R_{xx} * e = 1 \quad (156)$$

ومنها نحصل على قيمة k^* التي تجعل الشعاع e يخضع للشرط (136) وبالتالي نحصل على عناصر الشعاع e^* ولتكن : $e_1^*, e_2^*, e_3^*, \dots, e_p^*$ ، وللحصول على عناصر الشعاع الأول f نستخدم العلاقة (156) فنجد أن:

$$f^* = \begin{bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \\ \vdots \\ f_q^* \end{bmatrix} = \frac{R_{yy}^{-1} * R_{yx}}{\lambda} * \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ \vdots \\ e_q^* \end{bmatrix} \quad (157)$$

ثم نعمل على تعديل عناصر f^* حتى تحقق الشرط المفروض عليها وهو الشرط (137) التالي:

$$\text{var}(V_{zy}) = f'^* * R_{yy} * f^* = 1 \quad (158)$$

وبعد ذلك نقوم بتعويض الشعاعين f^*, e^* في التربيين الخطيين المعرفين في (127) , (128) فنحصل على أن:

$$\tilde{U}_{1zx} = e_1^* * Z_{x1} + e_2^* * Z_{x2} + e_3^* * Z_{x3} + \dots + e_p^* * Z_{xp} \quad (159)$$

$$\tilde{V}_{1zy} = f_1^* * Z_{y1} + f_2^* * Z_{y2} + f_3^* * Z_{y3} + \dots + f_q^* * Z_{yq} \quad (160)$$

ثم نقوم بتحويل هذين التربيين من المتحولات المعيارية إلى المتحولات الأصلية (الخام Raw) وذلك باستبدال كل Z بما تساويه من العلاقتين (122) , (124) فنحصل على أن:

$$\tilde{U}_{1zx} = e_1^* \left(\frac{X_1 - \bar{X}_1}{\sigma_{x1}} \right) + e_2^* \left(\frac{X_2 - \bar{X}_2}{\sigma_{x2}} \right) + \dots + e_p^* \left(\frac{X_p - \bar{X}_p}{\sigma_{xp}} \right) \quad (161)$$

$$\tilde{V}_{1zx} = f_1^* \left(\frac{Y_1 - \bar{Y}_1}{\sigma_{y1}} \right) + f_2^* \left(\frac{Y_2 - \bar{Y}_2}{\sigma_{y2}} \right) + \dots + f_q^* \left(\frac{Y_q - \bar{Y}_q}{\sigma_{yq}} \right) \quad (162)$$

وبإجراء بعض الإصلاحات نجد أن:

$$\tilde{U}_{1zx} = \frac{e_1^*}{\sigma_{x1}} X_1 + \frac{e_2^*}{\sigma_{x2}} X_2 + \dots + \frac{e_p^*}{\sigma_{xp}} X_p - \left[\frac{e_1^*}{\sigma_{x1}} \bar{X}_1 + \frac{e_2^*}{\sigma_{x2}} \bar{X}_2 + \dots + \frac{e_p^*}{\sigma_{xp}} \bar{X}_p \right] \quad (163)$$

$$\tilde{V}_{1zx} = \frac{f_1^*}{\sigma_{y1}} Y_1 + \frac{f_2^*}{\sigma_{y2}} Y_2 + \dots + \frac{f_q^*}{\sigma_{yq}} Y_q - \left[\frac{f_1^*}{\sigma_{y1}} \bar{Y}_1 + \frac{f_2^*}{\sigma_{y2}} \bar{Y}_2 + \dots + \frac{f_q^*}{\sigma_{yq}} \bar{Y}_q \right] \quad (164)$$

وبفرض أن ما ضمن القوسين من (163) و(164) هو $\bar{U}$, $\bar{V}$ على الترتيب ونضع الناتج فيها. كما يلي:

$$\tilde{U}_1 = \tilde{U}_{1zx} + \bar{U} = \frac{e_1^*}{\sigma_{x1}} X_1 + \frac{e_2^*}{\sigma_{x2}} X_2 + \dots + \frac{e_p^*}{\sigma_{xp}} X_p \quad (165)$$

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{1zy} + \bar{V} = \frac{f_1^*}{\sigma_{y1}} Y_1 + \frac{f_2^*}{\sigma_{y2}} Y_2 + \dots + \frac{f_q^*}{\sigma_{yq}} Y_q \quad (166)$$

وهكذا نكون قد وصلنا على أمثال التركيبين (6) ، (7) من خلال أمثال التركيبين المعياريين ، (166) (165)، ومن المقارنة بينهما نجد أن:

$$a_1^* = \frac{e_1^*}{\sigma_{x1}} \quad a_2^* = \frac{e_2^*}{\sigma_{x2}} \quad \dots \quad a^* = \frac{e_p^*}{\sigma_{xp}} \quad (167)$$

$$b_1^* = \frac{f_1^*}{\sigma_{y1}} \quad b_2^* = \frac{f_2^*}{\sigma_{y2}} \quad \dots \quad b_q^* = \frac{f_q^*}{\sigma_{yq}} \quad (168)$$

وبعبارة أخرى نقول أنه يمكننا الحصول على عناصر الشعاعين الخام a^*, b^* من عناصر الشعاعين المعياريين e^*, f^* بتقسيمها على الانحرافات المعيارية للمتحويلات المصاحبة لها: كما يمكن كتابة ذلك على شكل مصفوفي كما يلي:

$$a^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_p^* \end{bmatrix} = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{x1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{x2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{xp}} \end{bmatrix} = (e^*)' * C_{\sigma_x}^{-\frac{1}{2}} \quad (169)$$

$$b^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_q^* \end{bmatrix} = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{y1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{y2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{yq}} \end{bmatrix} = (f^*)' * C_{\sigma_y}^{-\frac{1}{2}} \quad (170)$$

ملاحظة: كان يمكن معالجة هذا الموضوع بطريقة أخرى وحساب الشعاع f^* أولاً ثم حساب الشعاع e^* وذلك باستخدام المعادلتين:

$$R_{yy}^{-1} * R_{yx} * R_{xx}^{-1} * R_{xy} * f = \lambda^2 * f \quad (171)$$

$$e = \frac{R_{xx}^{-1} * R_{xy}}{\lambda} * f \quad (172)$$

وذلك بالإضافة للشرطين

$$e' * R_{xx} * e = 1 \quad (173)$$

$$f' * R_{yy} * f = 1 \quad (174)$$

ويتم تطبيق هذه الحالة عندما تكون $p > q$.

8- حساب التحييلات القانونية Canonical loadings

إن المقصود بالتحيلات القانونية هو جملة معاملات الارتباط الثنائية بين متحولات المجموعة X والمركبات القانونية الخاصة بها U ، ومعاملات الارتباط الثنائية بين متحولات المجموعة Y ومركباتها القانونية الخاصة بها V . وتسمى هذه المعاملات بالمعاملات الهيكلية المباشرة. وتشمل هذه التحييلات نوع آخر من المعاملات هو معاملات الارتباط الثنائية بين متحولات المجموعة X والمركبات القانونية المقابلة لها في الطرف الآخر V ، ومعاملات الارتباط الثنائية بين متحولات المجموعة Y والمركبات القانونية المقابلة لها في الطرف الآخر U ، وتسمى هذه المعاملات بالمعاملات الهيكلية العابرة (إلى الطرف الآخر) وسنعالج كل منها بفرض أن عدد الأزواج المركبة $(U_k V_k)$ يساوي p ، كما يلي:

أ- التحييلات القانونية المباشرة: وهو مؤلفة من نوعين هما:

أ-1- تحيلات كل من متحولات المجموعة X على المركبات القانونية الخاصة بها $U_1, U_2, U_3, \dots, U_p$ ، وهي عبارة عن جملة من الأشعة تعبر عن معاملات الارتباط الزوجية بين كل من المتحولات $X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$ مع كل من المركبات القانونية $U_1, U_2, U_3, \dots, U_p$ الخاصة بها. وتعطى على شكل جدول منظم كما يلي:

جدول (7): تحيلات X على U :

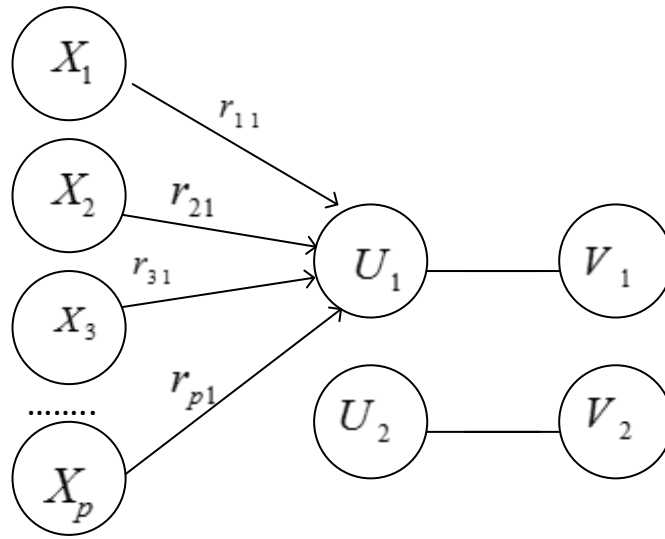
المركبات U المتحولات X	U_1	U_2	U_3	...	U_p
X_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	...	r_{1p}
X_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	...	r_{2p}
X_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	...	r_{3p}
...	...	...	...	...	...
X_p	r_{p1}	r_{p2}	r_{p3}	...	r_{pp}

ويتم حساب هذه المعاملات حاسوبياً من خلال معادلة (بيرسون) بين كل متحول من X مع كل مركب من U . ولكن عملية الحساب تتم بعد حساب القيم النظرية (التنبؤية) للمركبات $U_1, U_2, U_3, \dots, U_p$ من النماذج الخطية التي تم استخراجها لها، وذلك بالاعتماد على القيم الفعلية للمتحويلات X المعطية في جدول شبيه بالجدول (1)

كما يمكن حساب المعاملات r_{ij} في كل شعاع عمود j من جداء المصفوفة الارتباطية R_{xx} في الشعاع المعياري e المتعلق بالمركب الموافق له U_j . ونكتب ذلك كما يلي:

$$\begin{bmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \\ r_{3j} \\ \vdots \\ r_{pj} \end{bmatrix} = R_{xx} \begin{bmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ e_{3j} \\ \vdots \\ e_{pj} \end{bmatrix} \quad (175)$$

ويمكن تمثيل تحميلات المتحولات X على المركب القانوني الأول U_1 (مثلاً) كما في الشكل التالي :



الشكل (2) تمثيل تحميلات X على U_1 فقط

وكذلك يمكن أن نحصل على أشكال مشابهة لتحميلات X على U_2 ثم على U_3 ... الخ .
وإن هذه التحميلات تعبر عن شدة أو قوة العلاقة بين كل من المتحولات X مع كل من المركبات القانونية الخاصة بها U .

أ-2- تحميلات كل من متحولات المجموعة Y على مركباتها القانونية الخاصة بها $V_1, V_2, V_3, \dots, V_p$ وهي عبارة عن معاملات الارتباط الزوجية بين كل من المتحولات $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_q$ مع كل من المركبات القانونية الخاصة بها $V_1, V_2, V_3, \dots, V_p$ وتعطى على شكل جدول منظم كما يلي:
جدول (6): تحميلات المتحولات Y على المركبات V

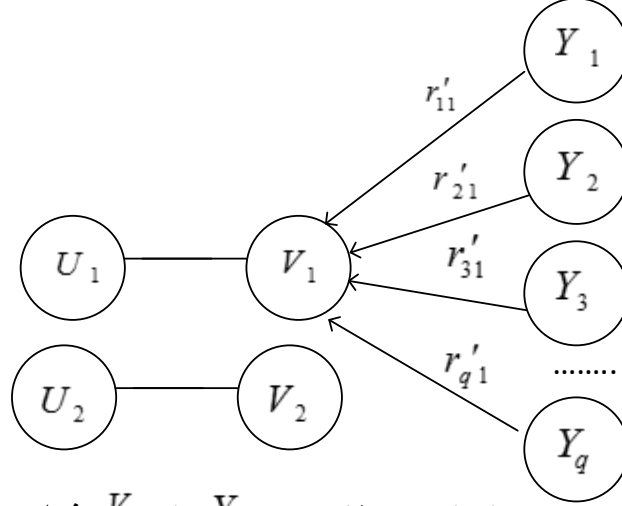
المركبات V المتحولات Y	V_1	V_2	V_3	...	V_p
Y_1	r'_{11}	r'_{12}	r'_{13}	...	r'_{1p}
Y_2	r'_{21}	r'_{22}	r'_{23}	...	r'_{2p}
Y_3	r'_{31}	r'_{32}	r'_{33}	...	r'_{3p}
...	...	...	...	...	...
Y_q	r'_{q1}	r'_{q2}	r'_{q3}	...	r'_{qp}

ويتم حساب هذه المعاملات حاسوبياً بعد إيجاد القيم النظرية للمركبات القانونية $V_1, V_2, V_3, \dots, V_p$ من النماذج الخطية التي تم استخراجها لها، وذلك بالاعتماد على القيم الفعلية للمتحولات Y المعطية في جدول شبيه بالجدول (1) .

كما يمكن حساب المعاملات r'_{ij} في كل شعاع j عمود من جداء المصفوفة الارتباطية R_{yy} في الشعاع المعياري f المتعلق بالمركب الموافق V_j ونكتب ذلك كما يلي:

$$\begin{bmatrix} r'_{1j} \\ r'_{2j} \\ r'_{3j} \\ \vdots \\ r'_{qj} \end{bmatrix} = R_{yy} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_q \end{bmatrix} \quad (176)$$

ويمكن تمثيل تحميلات المتحولات Y على المركب القانوني الأول V_1 (مثلاً) كما في الشكل التالي:



الشكل (3) تمثيل تحميلات Y على V_1 فقط

وإن هذه التحميلات تعبر عن شدة أو قوة العلاقة بين كل من المتحولات Y مع كل من المركبات القانونية الخاصة بها V .

ب- التحميلات القانونية العابرة: Cross canonical loadings

وهي أيضاً تتألف من نوعين هما:

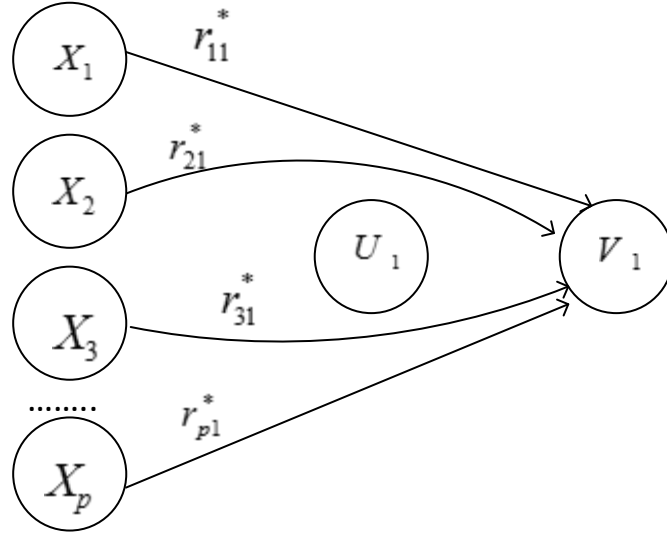
ب-1- تحميلات متحولات المجموعة X على المركبات القانونية المقابلة لها V في الطرف الآخر .

وهي عبارة عن معاملات الارتباط الزوجية بين كل من المتحولات $X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$ مع كل من المركبات القانونية المقابلة لها في الطرف الآخر وهي $V_1, V_2, V_3, \dots, V_p$ ، وتعطى على شكل جدول منظم كما يلي:

جدول (8): تحميلات X العابرة على المركبات V المقابلة لها في الطرف الآخر :

المركبات V المتحولات X	V_1	V_2	V_3	...	V_p
X_1	r_{11}^*	r_{12}^*	r_{13}^*	...	r_{1p}^*
X_2	r_{21}^*	r_{22}^*	r_{23}^*	...	r_{2p}^*
X_3	r_{31}^*	r_{32}^*	r_{33}^*	...	r_{3p}^*
...	...	...	...	...	...
X_p	r_{p1}^*	r_{p2}^*	r_{p3}^*	...	r_{pp}^*

ويمكن حساب هذه المعاملات من جراء ضرب معاملات التحييلات المباشرة على المركبات U_k في معامل الارتباط القانوني ρ_K المقابل للزوج (U_k, V_k) ، وهي تعبر عن حجم تأثير كل من المركبات القانونية V_K على المتحولات المستقلة X ، وبالعكس تعبر عن حجم تأثير كل من المتحولات X على المركبات القانونية المقابلة لها V_K ، ونحسب من العلاقة: $r_{ik}^* = \rho_k * r_{ik}$ كما يمكن تمثيل التحييلات العابرة للمجموعة X على أحد المركبات القانونية المقابلة لها (V_1 وليكن V_1) كما يلي:



الشكل (4): التحييلات العابرة لـ X على V_1 (مثلاً)

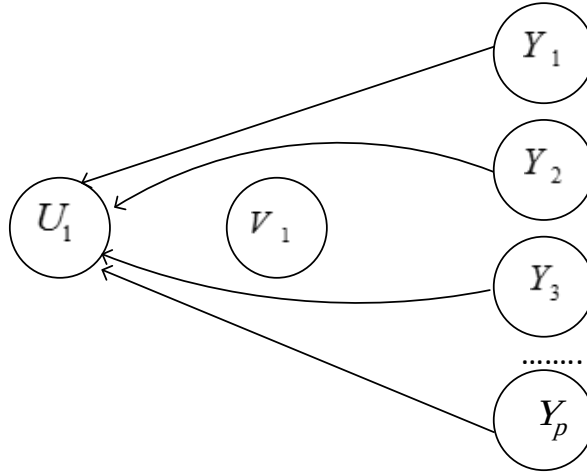
ب-2- تحييلات متحولات المجموعة Y على المركبات القانونية المقابلة لها U في الطرف الآخر. وهي أيضاً عبارة عن معاملات الارتباط الزوجية بين كل من المتحولات $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_q$ مع كل من المركبات القانونية المقابلة لها وهي $U_1, U_2, U_3, \dots, U_p$ وتعطى على شكل جدول منظم كما يلي:

جدول (9) تحييلات Y العابرة على المركبات المقابلة لها U في الطرف الآخر:

المركبات U المتحولات Y	U_1	U_2	U_3	...	U_p
Y_1	r_{11}^{**}	r_{12}^{**}	r_{13}^{**}	...	r_{1p}^{**}
Y_2	r_{21}^{**}	r_{22}^{**}	r_{23}^{**}	...	r_{2p}^{**}
Y_3	r_{31}^{**}	r_{32}^{**}	r_{33}^{**}	...	r_{3p}^{**}
...	...	...	...	...	...
Y_q	r_{q1}^{**}	r_{q2}^{**}	r_{q3}^{**}	...	r_{qp}^{**}

ويمكن حساب هذه المعاملات من جراء ضرب معاملات التحييلات المباشرة على المركبات V_k في معامل الارتباط القانوني ρ_k المقابل للزوج (U_k, V_k) ، وهي تعبر عن حجم تأثير كل من المركبات U_k على كل من المتحولات Y ، وبالعكس تعبر عن حجم تأثير كل من المتحولات Y على المركبات القانونية المقابلة لها، وتحسب من العلاقة: $r_{ik}^{**} = \rho_k * r'_{ik}$

ويمكن تمثيل التحييلات العابرة للمجموعة Y على أحد المركبات القانونية المقابلة لها (وليكن U_1) كمايلي:



الشكل (5) : التحييلات العابرة لـ Y على U_1 (مثلاً)

9-تقييم النماذج القانونية (U_k, V_k) من التحييلات المباشرة :

يتم تقييم النماذج القانونية حسب الأزواج القانونية (U_k, V_k) ولكل مركب U_k أو V_k على حدة . ونستخدم لذلك مربعات التحييلات المباشرة لحساب عدة مؤشرات هي: الكفاءة- التشاركية- الأهمية كمايلي:

أ- **حساب كفاءة النموذج (U_k, V_k) : Adequacy** : ويتم حساب هذه الكفاءة لكل مركب U_k أو V_k على حدة، وتعرف كفاءة المركب U_k بأنها متوسط مربعات التحييلات المباشرة للمتحولات X على U_k ونرمز لها بـ $AD(U_k)$ وتحسب في كل عمود U_k من العلاقة :

$$AD(U_k) = \frac{\sum_{i=1}^p r_{ik}^2}{p} \quad (178)$$

كما تعرف كفاءة المركب V_k بأنها متوسط مربعات التحييلات المباشرة للمتحولات Y على V_k ونرمز لها بـ $AD(V_k)$ وتحسب في كل عمود V_k من العلاقة:

$$AD(V_k) = \frac{\sum_{j=1}^q r_{jk}^2}{q} \quad (179)$$

ولهذا فإنه لحساب كفاءة المركبات القانونية U_k نربع معاملات الارتباط المباشرة للمتحولات X على U_k . وهي المعاملات الواردة في الجدول (6) السابق ونضعها في جدول منظم كالتالي:

جدول (10) : مربعات تحميلات X على U

المركبات U المتحولات X	U ₁	U ₂	U ₃	...	U _p	المجموع = التشاركية
X ₁	r ₁₁ ²	r ₁₂ ²	r ₁₃ ²	...	r _{1p} ²	$\sum_{k=1}^p r_{1k}^2$
X ₂	r ₂₁ ²	r ₂₂ ²	r ₂₃ ²	...	r _{2p} ²	$\sum_{k=1}^p r_{2k}^2$
X ₃	r ₃₁ ²	r ₃₂ ²	r ₃₃ ²	...	r _{3p} ²	$\sum_{k=1}^p r_{3k}^2$
...	...	...	...	...	...	...
X _p	r _{p1} ²	r _{p2} ²	r _{p3} ²	...	r _{pp} ²	$\sum_{k=1}^p r_{pk}^2$
المجموع	$\sum_{i=1}^p r_{i1}^2$	$\sum_{i=1}^p r_{i2}^2$	$\sum_{i=1}^p r_{i3}^2$	...	$\sum_{i=1}^p r_{ip}^2$	P
المتوسط = كفاءة U _k	$\frac{\sum r_{i1}^2}{p}$	$\frac{\sum r_{i2}^2}{p}$	$\frac{\sum r_{i3}^2}{p}$	...	$\frac{\sum r_{ip}^2}{p}$	1

ومن دراسة هذا الجدول نلاحظ أن كفاءة كل مركب U_k محسوبة وموجودة في السطر الأخير وتساوي متوسط مربعات معاملات ارتباطه مع جميع المتحولات X المعتمدة في الدراسة .
وفي الحالة العامة يكون مجموع كفاءات جميع المركبات U_k مساوياً للواحد (إذا لم يتم الاستغناء عن بعضها بسبب عدم معنوية الجذور الكامنة). ويستفاد منها في تحديد ومعرفة النسبة المئوية التي يفسرها المركب U_k من التباين الكلي للمتحولات الأصلية في المجموعة X. حيث أن كفاءة المركب U₁ تعني النسبة التي يفسرها U₁ من تغيرات مجموعة المتحولات X .
ولحساب كفاءة المركبات القانونية V_k نربع معاملات الارتباط المباشرة للمتحولات Y على V_k وهي المعاملات الواردة في الجدول (7) السابق ونضعها في جدول منظم كالتالي:

جدول (11) : مربعات تحميلات Y على V

المركبات U المتحولات Y	V ₁	V ₂	V ₃	...	V _p	المجموع = التشاركية
Y ₁	$\dot{r}_{11}^2$	$\dot{r}_{12}^2$	$\dot{r}_{13}^2$	...	$\dot{r}_{1p}^2$	$\sum_{k=1}^p \dot{r}_{1k}^2$
Y ₂	$\dot{r}_{21}^2$	$\dot{r}_{22}^2$	$\dot{r}_{23}^2$	...	r_{2p}^2	$\sum_{k=1}^p \dot{r}_{2k}^2$
...	...	...	...	...	...	...
Y _q	$\dot{r}_{q1}^2$	$\dot{r}_{q2}^2$	$\dot{r}_{q3}^2$	...	r_{qp}^2	$\sum_{k=1}^p \dot{r}_{qk}^2$
المجموع	$\sum_{j=1}^q \dot{r}_{j1}^2$	$\sum_{j=1}^q \dot{r}_{j2}^2$	$\sum_{j=1}^q \dot{r}_{j3}^2$	...	$\sum_{j=1}^q \dot{r}_{jq}^2$	q
المتوسط = كفاءة V _k	$\frac{\sum_{j=1}^q \dot{r}_{j1}^2}{q}$	$\frac{\sum_{j=1}^q \dot{r}_{j2}^2}{q}$	$\frac{\sum_{j=1}^q \dot{r}_{j3}^2}{q}$	...	$\frac{\sum_{j=1}^q \dot{r}_{jq}^2}{q}$	1

وعند دراسة هذا الجدول نلاحظ أن كفاءة كل مركب V_k محسوبة وموجودة في السطر الأخير وتساوي متوسط مربعات معاملات ارتباطه مع جميع المتحولات Y المعتمدة في الدراسة . وفي الحالة العامة يكون مجموع كفاءات جميع المركبات V_k مساوياً للواحد (إذا لم يكن قد تم الاستغناء عن بعضها)، ويستفاد من هذه الكفاءة في تحديد النسبة المئوية التي يفسرها المركب V_k من تباين المتحولات الأصلية للمجموعة Y . حيث أن كفاءة المركب V₁ تعني النسبة المئوية التي يفسرها V₁ من تغيرات مجموعة المتحولات Y .

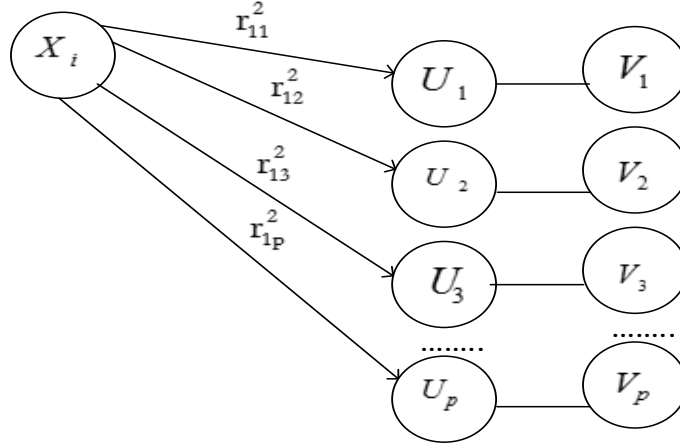
ب- حساب تشاركيه المتحولات X والمتحولات Y: communilty

ويتم حساب تشاركيه كل متحول من X على حدة وكل متحول من Y على حدة . وتعرف تشاركية المتحول X_i بأنها تساوي مجموع مربعات معاملات ارتباط المتحول المحدد X_i مع جميع المركبات U_k . ويرمز لها بالرمز com (X_i) وتحسب من العلاقة:

$$\text{com}(X_i) = \sum_{k=1}^p r_{ik}^2 \quad (180)$$

وهي المقادير المحسوبة على يسار الجدول (10) السابق، ويبرهن على أنه إذا كان التحليل القانوني يشمل جميع المركبات U_k (ولم يتم الاستغناء عن بعضها بسبب عدم معنوية الجذور) فإن تشاركية كل

متحول (X_i) تساوي الواحد، وأن مجموع تشاركيات المجموعة X يساوي p (مجموع العمود الأخير)، ويمكن تمثيل تشاركية المتحول X_i (مثلاً) بيانياً كما يلي:



الشكل (6): تشاركية X_i (مثلاً) على المركبات U_k

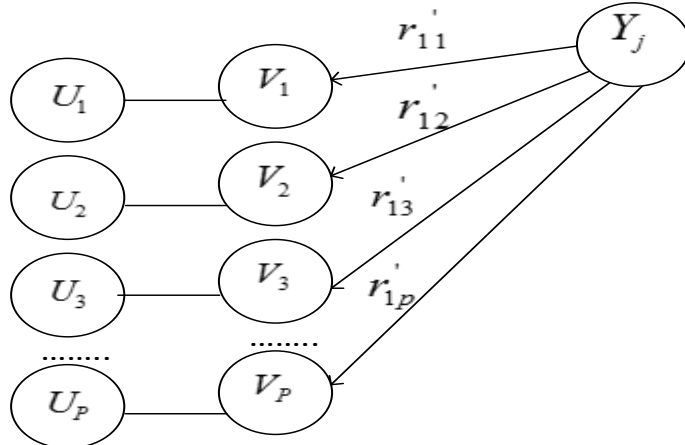
وهي تعبر عن نسبة مساهمة جميع المركبات القانونية $U_1, U_2, \dots, U_p$ وفي تغيرات المتحول الأصلي المحدد X_i وكم هو X_i مفيداً لنا في التحليل القانوني .

كما تعرف تشاركية المتحول Y_j بأنها تساوي مجموع مربعات معاملات ارتباط المتحول Y_j مع جميع المركبات V_k ويرمز لها بالرمز $\text{com}(Y_j)$ وتحسب من العلاقة :

$$\text{com}(Y_j) = \sum_{k=1}^q \dot{r}_{jk}^2 \quad (181)$$

وهي المقادير المحسوبة على يسار الجدول (11) السابق .

ويبرهن على أنه إذا كان التحليل القانوني يشمل جميع المركبات V_k (ولم يتم الاستغناء عن بعضها بسبب عدم معنوية الجذور الكامنة) فإن تشاركية كل متحول Y_j تساوي الواحد . ويمكن تمثيل تشاركية المتحول Y_j (مثلاً) بيانياً كما يلي :



الشكل (7): تشاركية Y_j على المركبات V_k

وهي تعبر عن نسبة مساهمة جميع المركبات القانونية $V_1, V_2, \dots, V_q$ في تغيرات المتحول الأصلي المحدد Y_j . وكم هو Y_j مفيداً لنا في التحليل القانوني .

ج- حساب الأهمية النسبية للمتحولات في النموذج (U_k, V_k) :

تعرف هذه الأهمية لكل متحول X على حدة ولكل متحول Y على حدة، بأنها نسبة مربع معامل الارتباط الخاص بالمتحول X_i أو Y_j على إجمالي التشاركية لذلك المتحول. وتحسب من العلاقات التالية:

$$R(X_{ik}) = \frac{r_{ik}^2}{\sum_{k=1}^p r_{ik}^2} \quad (i: 1, 2, 3, \dots, p) \quad (182)$$

$$R(Y_{jk}) = \frac{\dot{r}_{jk}^2}{\sum_{k=1}^q r_{jk}'^2} \quad (i: 1, 2, 3, \dots, q) \quad (183)$$

ويستفاد منها في تحديد نسبة مساهمة أو أهمية كل من X_i أو Y_j في تباين كل من المركبات V_k أو U_k .

10 - تقييم النماذج القانونية (V_k, U_k) من التحييلات العابرة :

يتم التقييم هنا لكل مركب V_k أو U_k من التحييلات العابرة إليه من الطرف الآخر، ومنها نحسب نفس المؤشرات السابقة: والكفاءة العابرة- التشاركية العابرة- الأهمية العابرة كما يلي:

أ- حساب الكفاءة العابرة للنموذج (V_k, U_k) Redundancy :

يتم حساب هذه الكفاءة لكل مركب V_k أو U_k على حدة، وتعرف الكفاءة العابرة للمركب U_k بأنها متوسط مربعات التحييلات العابرة للمتحولات Y على المركب U_k ، ونرمز لها بالرمز $Red(U_k)$ وتحسب من العلاقة :

$$Red(U_k) = \frac{\sum_{j=1}^q r_{jk}^{*2}}{q} \quad (184)$$

كما تعرف الكفاءة العابرة للمركب V_k بأنها متوسط مربعات التحييلات العابرة للمتحولات X على V_k ، ونرمز لها بالرمز $Red(V_k)$ وتحسب من العلاقة :

$$Red(V_k) = \frac{\sum_{j=1}^p r_{ik}^{**2}}{p} \quad (185)$$

ويمكن حسابها من جداول مشابهة للجدولين (10)، (11)، ومن جهة أخرى يمكن حساب الكفاءة العابرة للمركبين V_k أو U_k من خلال الجداء المتتالي للكفاءة المباشرة لـ V_k أو U_k في مربع معامل الارتباط القانوني ρ_k^2 ، أي يمكن حسابها من العلاقاتين :

$$Red(U_k) = AD(U_k) * \rho_k^2 \quad (186)$$

$$Red(V_k) = AD(V_k) * \rho_k^2 \quad (187)$$

ب- حساب التشاركية العابرة للمتحولات X و Y : وتعرف بأنها مجموع مربعات التحييلات العابرة لكل متحول على المركبات المقابلة له .

ويتم حسابها لكل متحول X_i على المركبات المقابلة له من الطرف الآخر $V_1, V_2, \dots, V_p$ من العلاقة:

$$\text{com}^*(X_i) = \sum_{k=1}^p r_{ik}^{*2} \quad i: 1, 2, 3, \dots, p \quad (188)$$

ويتم حسابها لكل متحول Y_j على المركبات المقابلة له من الطرف الآخر $U_1, U_2, \dots, U_p$ من العلاقة :

$$\text{com}^*(Y_j) = \sum_{k=1}^p r_{jk}^{*2} \quad j: 1, 2, 3, \dots, q \quad (189)$$

ج- حساب الأهمية النسبية العابرة للمتحولات X و Y

وهي تساوي نسبة مربع معامل الارتباط الخاص بالمتحول X_i أو Y_j على التشاركية العابرة الكلية له وتحسب من العلاقتين:

$$R^*(X_i) = \frac{r_{ik}^{*2}}{\sum_{k=1}^p r_{ik}^{*2}} \quad (190)$$

$i: 1, 2, 3, \dots, p$

$$R^*(Y_j) = \frac{r_{jk}^{**2}}{\sum_{k=1}^p r_{jk}^{**2}} \quad (191)$$

$j: 1, 2, 3, \dots, q$

وهي تتمتع بنفس المعاني ولها نفس التفسيرات المذكورة في مؤشرات التحميلات المباشرة، ولكنها أقل أهمية منها .

11 - مثال: ادرس الارتباط القانوني لمجموعة من المتحولات المستقلة X_1, X_2, X_3 مع مجموعة من

المتحولات التابعة Y_1, Y_2, Y_3 علماً بأن مصفوفات الارتباط بين متحولات كل مجموعة R_{yy}, R_{xx}

وكذلك R_{yx} و R_{xy} بين المتحولات X مع المتحولات Y هي في الجدول المنظم كما يلي:

جدول (1): مصفوفة معاملات الارتباط للمجموعتين Y, X

المتحولات	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	1	0.4036	-0.2438	0.2249	-0.3387	-0.0221
X_2	0.4036	1	-0.0819	0.0961	-0.1676	0.0754
X_3	-0.2438	-0.0819	1	-0.1312	0.0755	0.0872
Y_1	0.2249	0.0961	-0.1312	1	-0.1133	0.0570
Y_2	-0.3387	-0.1676	0.0755	-0.1133	1	0.0222
Y_3	-0.0221	0.0754	0.0872	-0.0570	0.0222	1

الحل: نقوم أولاً بإيجاد القيم المميزة λ_k^2 من معادلة المحدد $|R - \lambda^2 I| = 0$ حيث أن R هي المصفوفة

المعيارية للمجموعة Y, X المعرفين بالعلاقيتين: $R = R_{xx}^{-1} * R_{xy} * R_{yy}^{-1} * R_{yx}$ ، ثم نقوم بحساب الأشعة المعيارية المصاحبة لمركبين الخطيين

المعياريين للمجموعة Y, X المعرفين بالعلاقيتين:

$$U_{zx} = e_1 Z_{x1} + e_2 Z_{xe} + e_3 Z_{x3} \quad : \quad Z_{xi} = \frac{X_i - \bar{x}_i}{\sigma_{xi}} \quad (1)$$

$$V_{zy} = f_1 Z_{y1} + f_2 Z_{ye} + f_3 Z_{y3} \quad : \quad Z_{yj} = \frac{Y_j - \bar{y}_j}{\sigma_{yj}} \quad (2)$$

لذلك نقوم بحساب الجداء المصفوفي التالي: $R = R_{xx}^{-1} * R_{xy} * R_{yy}^{-1} * R_{yx}$ كما يلي:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.2438 \\ 0.4036 & 1 & -0.0819 \\ -0.2438 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.262 & -0.4874 & 0.26776 \\ -0.4874 & 1.195 & 0.02096 \\ 0.26776 & -0.02096 & 1.06356 \end{bmatrix}$$

$$R_{yy} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1133 & -0.0570 \\ -0.1133 & 1 & 0.0222 \\ -0.0570 & -0.0222 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_{yy}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.01606 & 0.11389 & 0.0553871 \\ 0.11389 & 1.01326 & -0.0160026 \\ 0.0553871 & -0.0160026 & 1.00351 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بحساب الجداء الأول ونرمز له بـ A فنجد أن:

$$A = R_{xx}^{-1} * R_{xy} = \begin{bmatrix} 1.262 & -0.4874 & 0.26776 \\ -0.4874 & 1.195 & 0.02096 \\ 0.26776 & -0.02096 & 1.06356 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.2249 & -0.3387 & -0.0221 \\ 0.0961 & -0.1676 & 0.0754 \\ -0.1312 & 0.0755 & 0.0872 \end{bmatrix}$$

وبعد الحساب نحصل على أن A تساوي:

$$A = R_{xx}^{-1} * R_{xy} = \begin{bmatrix} 0.2018535 & -0.3255330 & -0.0412928 \\ 0.00797055 & -0.0367781 & 0.0990473 \\ -0.0813353 & -0.0068771 & 0.0852448 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ثم نقوم بحساب الجداء الثاني ونرمز له بـ B فنجد أن:

$$B = R_{yy}^{-1} * R_{yx} = \begin{bmatrix} 1.01606 & 0.11389 & 0.0553871 \\ 0.11389 & 1.01326 & -0.0160026 \\ 0.0553871 & -0.0160026 & 1.00351 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.2249 & 0.0961 & -0.1312 \\ -0.3387 & -0.1676 & 0.0755 \\ 0.0221 & 0.0754 & 0.0872 \end{bmatrix}$$

وبعد الحساب نحصل على أن B تساوي:

$$B = R_{yy}^{-1} * R_{yx} = \begin{bmatrix} 0.188713 & 0.0827317 & -0.1198787 \\ -0.3172233 & -0.1600840 & 0.0601632 \\ -0.004301 & 0.0836696 & 0.0790313 \end{bmatrix} \quad (4)$$

وبعد ذلك نقوم بحساب الجداء الرباعي للمصفوفات الارتباطية فنجد أن:

$$R = R_{xx}^{-1} * R_{xy} * R_{yy}^{-1} * R_{yx} = A * B = \begin{bmatrix} 0.141537 & 0.0653574 & -0.0470465 \\ 0.012745 & 0.0148343 & 0.00465965 \\ -0.0135341 & 0.0015043 & 0.0160736 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ثم نقوم بحساب القيم الذاتية للمصفوفة النهائية R ولذلك نشكل المعادلة المميزة لهذه المسألة كمايلي:

$$[R - \lambda^2 I]e = 0 \quad (6)$$

ولإيجاد حلول مقبولة غير الصفرية لهذه المعادلة بالنسبة لـ e نفترض أن المصفوفة $[R - \lambda^2 I]$ شاذة

فيكون محددها معدوماً . لذلك نضع المحدد التالي مساوياً للصفر :

$$|R - \lambda^2 I| = \begin{vmatrix} (0.141537 - \lambda^2) & 0.0653574 & -0.0470465 \\ 0.012745 & (0.0148343 - \lambda^2) & 0.00465965 \\ -0.0135341 & 0.0015043 & (0.0160736 - \lambda^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

ثم نقوم بحساب مفكوك هذا المحدد حسب طريقة (سايروس) فنحصل على كثير حدود من الدرجة الثالثة

بالنسبة لـ λ^2 كما يلي :

$$\begin{aligned} |R - \lambda^2 I| &= (0.141537 - \lambda^2)(0.0148343 - \lambda^2)(0.0160736 - \lambda^2) \\ &\quad - (0.0653574)(0.00465965)(0.0135341) \\ &\quad - (0.0470465)(0.012745)(0.0015043) \\ &\quad - (0.0470465)(0.0148343 - \lambda^2)(0.0135341) \\ &\quad - (0.00465965)(0.0015043)(0.141537 - \lambda^2) \\ &\quad - (0.0160736 - \lambda^2)(0.0653574)(0.012745) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R - \lambda^2 I| &= 0.000033748 - 0.00461305\lambda^2 + 0.1724449\lambda^4 - \lambda^6 \\ &\quad - 0.00000489757 + 0.000636732\lambda^2 \\ &\quad - 0.00000944547 + 0.0000070095\lambda^2 \\ &\quad - 0.00000099211 + 0.00083298006\lambda^2 \\ &\quad - 0.00001338899 = 0 \end{aligned}$$

$$|R - \lambda^2 I| = 0.00000502386 - 0.003136328(\lambda^2) + 0.1724449(\lambda^2)^2 - (\lambda^2)^3 = 0 \quad (8)$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة بالنسبة للوسيط (λ^2) ولحلها وإيجاد جذورها نستخدم خوارزمية معادلات

الدرجة الثالثة المبرمجة في الحواسيب والآلات الحاسبة فنحصل على الجذور الثلاثة التالية (المرتبة

تنازلياً) :

$$\lambda_1^2 = 0.152033, \quad \lambda_2^2 = 0.018639, \quad \lambda_3^2 = 0.00177287$$

وهذه الجذور تسمى الجذور الكامنة أو القيم الذاتية eigenvalues للمصفوفة R وهي التي تقابل ثلاثة معاملات للارتباط القانوني للأزواج الثلاثة الممكنة وهي:

- الزوج الأول: (U_1, V_1) ومعامل ارتباطه القانوني: $\rho_1 = \sqrt{\lambda_1^2} = 0.3899$

- الزوج الأول: (U_2, V_2) ومعامل ارتباطه القانوني: $\rho_2 = \sqrt{\lambda_2^2} = 0.1365$

- الزوج الأول: (U_3, V_3) ومعامل ارتباطه القانوني: $\rho_3 = \sqrt{\lambda_3^2} = 0.0421$

وهنا نلاحظ أن الزوج الأول هو أهم من الزوجين الآخرين لأنه يقابل معامل الارتباط القانوني الأكبر .

ولاختبار معنوية هذه المعاملات (أو القيم) نستخدم اختباري $wilk's$ و X^2 للتحقق من فرضية العدم

التالية: إن معاملات الارتباط القانونية ρ_1, ρ_2, ρ_3 تساوي الصفر: $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

مقابل الطريقة البديلة: أحدهما غير معدوم: H_1 ونحصل على الجدول التالي:

جدول (2): نتيجة اختبار معنوية معاملات الارتباط القانونية :

الاختبار الجذور	Wilk's	Chi-SQ	د . ح DF	Sig = p	القرار
$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$	0.831	206.694	9	0.000	معنوي
$\rho_2 + \rho_3$	0.980	22.956	4	0.000	معنوي
ρ_3	0.998	1.926	1	0.165	غير معنوي

من خلال قراءة السطر الأول في هذا الجدول نلاحظ أن قيمة p أقل من مستوى الدلالة (0.05) . وبما

أن هذا السطر يدرس معنوية المعاملات الثلاثة من ρ_1 وحتى ρ_3 (ρ_1 وما يليه): لذلك نرفض H_0

ونستنتج أن بعض هذه المعاملات معنوي. أي أن بعضها يختلف عن الصفر .

ومن خلال قراءة السطر الثاني نلاحظ أن قيمة p أيضاً أقل من مستوى الدلالة (0.05) . وبما أن هذا

السطر يدرس معنوية المعاملين ρ_2 و ρ_3 (ρ_2 وما يليه). لذلك فإننا نرفض H_0 ونستنتج أن أحد هذين

المعاملين يختلف عن الصفر (معنوي) .

ومن خلال دراسة السطر الثالث نلاحظ أن قيمة p أكبر من مستوى الدلالة (0.05). ولكن بما أن هذا

السطر يدرس معنوية ρ_3 فقط، نستنتج أن قيمة ρ_3 لا تختلف جوهرياً عن الصفر . ونستنتج أن الارتباط

بين مركبي الزوج الثالث غير معنوي . ويمكن الاستغناء عنه. ولكننا سنحتفظ به حتى النهاية لأغراض

التحليل .

ومما سبق نستنتج أن المعاملين ρ_1 و ρ_2 هما المعاملان المعنويان وأن الزوجين (U_1, V_1) و

(U_2, V_2) هما الزوجان اللذان يعتمد عليهما في هذه الدراسة لتقدير العلاقة بين متحولات المجموعتين

Y, X أو بين مركباتها القانونية U, V .

وبعد ذلك ننتقل إلى حساب الأشعة e , f للتركيبين المعياريين (1), (2) المقابلين لكل قيمة من القيم الذاتية λ_1^2 ثم λ_2^2 ثم λ_3^2 وذلك من خلال المعادلة الذاتية (6) على التوالي:
 فعندما نأخذ القيمة الذاتية الأولى $\lambda_1^2 = 0.152033$ ونعوضها في المعادلة (6) وبعد أن نطرح قيمة λ_1^2 من عناصر القطر الرئيسي لـ R نحصل على أن:

$$[R - I\lambda_1^2]e = \begin{bmatrix} -0.010496 & 0.0653574 & -0.0470465 \\ 0.012745 & -0.1371987 & 0.00465965 \\ -0.0135341 & 0.0015043 & -0.1359594 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ومنها نحصل على ثلاث معادلات خطية متجانسة وغير مستقلة (لأن المصفوفة شاذة ومحددها يساوي الصفر) وهي:

$$\begin{aligned} -0.010496e_1 + 0.0653574e_2 - 0.0470465e_3 &= 0 \\ 0.012745e_1 - 0.1371987e_2 + 0.00465965e_3 &= 0 \\ -0.0135341e_1 + 0.0015043e_2 - 0.1359594e_3 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

وهي تعطينا لا نهاية من الحلول المقبولة للشعاع (e) وحتى نحصل على شعاع محدد منها نستخدم معادلة الشرط المفروض على ذلك الشعاع (e) وهو أن يكون تباين U_{1zx} مساوياً للواحد أي أن:

$$var(U_{1zx}) = e^T * R_{xx} * e = 1 \quad (11)$$

نعالج الشرط (11) فنجد أنه يساوي:

$$\begin{aligned} (e_1 e_2 e_3) * \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.2438 \\ 0.4036 & 1 & -0.0819 \\ -0.2438 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} &= 1 \\ (e_1 e_2 e_3) * \begin{bmatrix} e_1 & + & 0.4036e_2 & + & (-0.2438e_3) \\ 0.4036e_1 & + & e_2 & + & (-0.0819e_3) \\ -0.2438e_1 & + & (-0.0819e_2) & + & e_3 \end{bmatrix} &= 1 \\ e_1^2 + 0.4036e_1e_2 - 0.2438e_1e_3 + 0.4036e_2e_1 + e^2 - 0.0819e_2e_3 & \\ -0.2438e_1e_3 - 0.0819e_2e_3 + e_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

وبعد الاصلاح نجد أن الشرط (11) يأخذ الشكل التالي :

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2(0.4036)e_1e_2 - 2(0.2438)e_1e_3 - 2(0.0819)e_2e_3 = 1 \quad (12)$$

نعود الآن إلى المعادلات (10) ونحسب من الأولى العنصر e_1 فنحصل على أن:

$$e_1 = 6.2268864e_2 - 4.4823266e_3 \quad (13)$$

ثم نعوض ذلك في المعادلة الثانية (أو في الثالثة) فنحصل على أن:

$$-0.057837033e_2 - 0.0524676e_3 = 0 \quad (14)$$

ومنها نحصل على أن:

$$e_2 = -0.907162717e_3 \quad (15)$$

وبالتعويض في (13) نحصل على أن:

$$e_1 = -10.13112579e_3 \quad (16)$$

ثم نقوم بتعويض e_1 و e_2 في معادلة الشرط (12) فنحصل على أن:

$$102.6397098e_3^2 + 0.82294419e_3^2 + e_3^2 + 7.41863585e_3^2 + 0.4939936935e_3^2 + 0.148593253e_3^2 = 1$$

ومنها نحصل على أن:

$$116.96982 * e_3^2 = 1 \quad (17)$$

$$e_3^2 = \frac{1}{116.96982} = 0.008592$$

وأخيراً نجد أن العنصر e_3 يساوي (نأخذ الإشارة الموجبة)

$$e_3 = +\sqrt{0.008592} = 0.09246 \quad (18)$$

وبعد التعويض في (15) و (16) نحصل على أن:

$$e_2 = -0.083878 \quad (19)$$

$$e_1 = -0.936743$$

وهكذا نكون قد حصلنا على الشعاع (e) المصاحب للمركب القانوني المعياري U_{1zx} ونكتبه بعد التقريب على الشكل التالي:

$$e^* = \begin{bmatrix} -0.937 \\ -0.084 \\ 0.092 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ولحساب الشعاع (f) المصاحب للمركب القانوني المعياري V_{1zy} نطبق العلاقة:

$$f^* = \frac{R_{yy}^{-1} * R_{yx}}{\lambda_1} * e^*$$

ومن الحسابات السابقة نجد أن:

$$f^* = \frac{1}{\sqrt{0.152033}} * \begin{bmatrix} 0.188713 & 0.0827317 & -0.1198787 \\ -0.3172233 & -0.1600840 & 0.0601632 \\ -0.004301 & 0.0836696 & 0.0790313 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.937 \\ -0.084 \\ 0.092 \end{bmatrix}$$

$$f^* = \frac{1}{0.389914} \begin{bmatrix} -0.19480 \\ 0.31622 \\ 0.0042727 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.500 \\ -0.811 \\ 0.011 \end{bmatrix} \quad (21)$$

وهكذا نكون قد حصلنا على الشعاعين e^* و f^* المصاحبين للزوج الأول المعياري (U_{1zx}, V_{1zy}) وبذلك يمكننا كتابة هذين المركبين القانونيين المعياريين كما يلي:

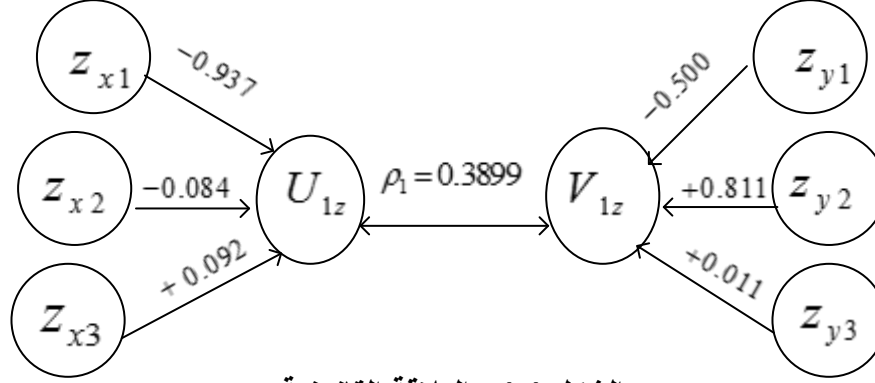
$$U_{1zx} = -0.937z_{x_1} - 0.084z_{x_2} + 0.092z_{x_3} \quad (22)$$

$$V_{1zy} = -0.500z_{y_1} - 0.811z_{y_2} + 0.011z_{y_3} \quad (23)$$

علماً بأن معامل الارتباط القانوني له يساوي:

$$\rho_1 = \sqrt{\lambda_1^2} = 0.3899$$

وبذلك يمكننا تمثيل العلاقة بين هذه المتحولات والمركبات كما يلي:



الشكل (1): العلاقة القانونية

وكما يمكننا حساب القيم النظرية لكل من $(\tilde{U}_{1z}, \tilde{V}_{1z})$ ثم رسم الشكل البياني لهما وتحديد إشارة معامل الارتباط بينهما .

ولمتابعة عمليات التحليل علينا حساب الشعاعين المعياريين (f , e) المصاحبين للزوج الثاني (U_{2zx}, V_{2zy}) وذلك بتعويض القيمة الذاتية الثانية $\lambda_2^2 = 0.018639$ في المعادلة الذاتية (6) وإجراء الحسابات اللازمة لذلك، كما فعلنا في حالة الزوج الأول، ثم علينا حساب الشعاعين المعياريين (f,e) المصاحبين للزوج الثالث (U_{3zx}, V_{3zy}) وذلك بتعويض القيمة الذاتية الثالثة $\lambda_3^2 = 0.00177287$ في المعادلة الذاتية (6) وإجراء الحسابات اللازمة لذلك .

وفي النهاية نحصل على الأشعة المصاحبة للأزواج المعيارية الثلاثة والتي يطلق عليها اسم المعاملات القانونية المعيارية *standart canonical coefficients* .

ويتم تصنيفها حسب كل مجموعة في جدولين منفصلين كما يلي:

جدول (3): المعاملات القانونية المعيارية للمجموعة X (الأشعة *e)

المركبات المتحولات	U_{1z}	U_{2z}	U_{3z}
Z_{x1}	-0.937	0.073	-0.161
Z_{x2}	-0.084	-0.699	0.836
Z_{x3}	0.092	-0.780	-0.668

جدول (4): المعاملات القانونية المعيارية للمجموعة Y (الأشعة *f)

المركبات المتحولات	V_{1z}	V_{2z}	V_{3z}
Z_{y1}	-0.500	0.362	0.797
Z_{y2}	0.811	0.306	0.512
Z_{y3}	0.011	-0.881	0.477

ولحساب المعاملات القانونية a^* و b^* المصاحبة للمتحويلات الأصلية X و Y نقوم بتقسيم كل عنصر من عناصر الأشعة e^* و f^* المصاحب للمتحويلات Z_{xi} على الانحراف المعياري للمتحويلات X_i وللمتحويلات Y_j المقابل له على التوالي، أي إننا نطبق العلاقتين التاليتين:

لكل سطر من الجدول (3)

$$a_{ik}^* = \frac{e_{ik}^*}{\sigma_{xi}^*} \quad i = 1,2,3 \quad (24)$$

لكل سطر من الجدول (4)

$$b_{jk}^* = \frac{f_{jk}^*}{\sigma_{yi}^*} \quad j = 1,2,3 \quad (25)$$

كما يمكننا حساب الأشعة a^* و b^* لجميع الأزواج القانونية الممكنة باتباع نفس الإجراءات المحددة في القسم النظري العام . وإجراء الحسابات المعقدة اللازمة لذلك .

وفي النهاية نحصل على المعاملات القانونية الخام للأزواج الثلاثة المصاحبة للمتحويلات الأصلية في المجموعتين Y, X كما يلي :

جدول (5): المعاملات القانونية للمتحويلات الأصلية X (Raw) للأشعة a^*

المركبات المتحويلات	U_1	U_2	U_3
X_1	-0.310	0.024	-0.204
X_2	-0.016	-0.131	0.156
X_3	0.082	0.690	-0.591

جدول (6): المعاملات القانونية للمتحويلات الأصلية Y (Raw) للأشعة b^*

المركبات المتحويلات	V_1	V_2	V_3
Y_1	-0.463	0.336	0.739
Y_2	0.662	0.250	0.418
Y_3	0.010	-0.803	0.435

بناءً على هذه النتائج يمكننا كتابة الزوج الأول (U_1, V_1) بدلالة المتحويلات الأصلية Y, X كما يلي:

$$U_1 = -0.310X_1 - 0.016X_2 + 0.082X_3 \quad (26)$$

$$V_1 = -0.463Y_1 + 0.662Y_2 + 0.010Y_3 \quad (27)$$

وإن قيمة معامل الارتباط القانوني بينهما تساوي نفس القيمة السابقة

$$\rho_1^* = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{0.152033} = 0.3866$$

ومن المعادلتين (26) و (27) يمكننا حساب القيم النظرية (التنبؤية) للمركبين القانونيين $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$ وذلك بتعويض قيم المتحولات Y, X المعلومة من البيانات المتوفرة فنحصل على عمودين نظريين $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$ مقابلين لبيانات Y, X .

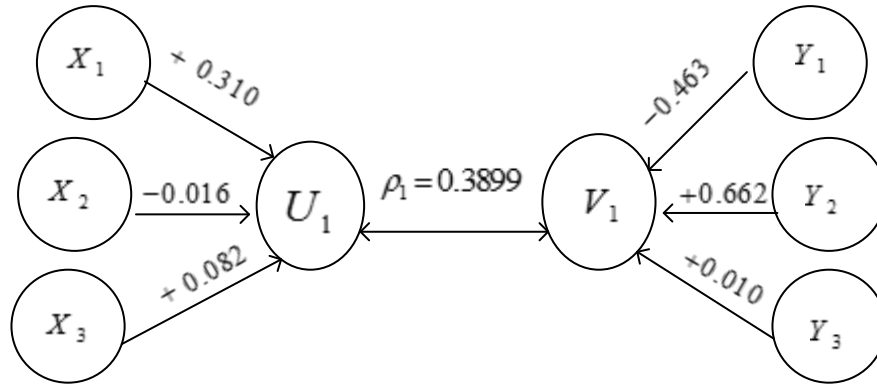
ثم نقوم برسم شكل الانتشار للزوج $(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)$ ونحسب قيمة معامل الارتباط القانوني النظري بينهما ونحدد إشارة ρ_1^* من تلك القيمة أو من شكل الانتشار.

وأخيراً يمكننا التعليق على المعادلتين (26) و (27) كمايلي:

- إنه إذا ازداد X_1 بمقدار الواحد فإن ذلك سيؤدي لانخفاض U_1 بمقدار (0.310)، وإذا ازداد X_2 بمقدار الواحد فإن U_1 ينخفض بمقدار (0.016)، أما إذا ازداد X_3 بمقدار الواحد فإن U_1 سيزداد بمقدار (0.082).

- إنه إذا ازداد Y_1 بمقدار الواحد فإن V_1 سينخفض بمقدار (0.463)، ولكن إذا ازداد Y_2 بمقدار الواحد فإن V_1 سيزداد بمقدار (0.662)، وإذا ازداد Y_3 بمقدار الواحد فإن V_1 سيزداد بمقدار (0.010) فقط.

- كما يمكننا تمثيل العلاقة بين U_1, V_1 على الشكل التالي :



الشكل (2): العلاقة القانونية بدلالة المتحولات الأصلية

وبطريقة مشابهة يمكننا معالجة الزوجين الآخرين (U_2, V_2) و (U_3, V_3) فنجد أنهما يكتبان كما يلي:

$$U_2 = 0.024X_1 - 0.131X_2 + 0.690X_3 \quad (28)$$

$$V_2 = 0.336Y_1 + 0.250Y_2 - 0.803Y_3 \quad (29)$$

وإن قيمة معامل الارتباط القانوني بينهما تساوي:

$$\rho_2^* = \sqrt{\lambda_2^2} = \sqrt{0.018639} = 0.1365 \quad (\text{وهو معنوي})$$

ولتحديد إشارة ρ_2^* علينا حساب القيم النظرية لـ $(\tilde{U}_2, \tilde{V}_2)$ ثم رسم شكل الانتشار لهما وحساب معامل الارتباط بينهما.

أما الزوج الثالث فيكتب كمايلي:

$$U_3 = -0.204X_1 + 0.156X_2 - 0.591X_3 \quad (30)$$

$$V_3 = 0.739Y_1 + 0.418Y_2 + 0.435Y_3 \quad (31)$$

وإن قيمة معامل الارتباط القانوني لهما تساوي:

$$\rho_3^* = \sqrt{\lambda_3^2} = \sqrt{0.00177287} = 0.0421 \quad (\text{وهو غير معنوي})$$

ولتحديد إشارة ρ_3^* علينا حساب القيم النظرية لـ $(\tilde{U}_3, \tilde{V}_3)$ ثم رسم شكل الانتشار لهما وحساب معامل الارتباط بينهما ويمكننا متابعة تحليل كل زوج على حدة كما فعلنا مع الزوج الأول (U_1, V_1) ونترك ذلك للقارئ .

وحتى نتأكد من صحة الحسابات ومن دقة النماذج القانونية السابقة، علينا أن نتأكد من تحقيق الشروط (76) و (77) المفروضة على المركبات (U_k, V_ℓ) بأشكالها المختلفة لذلك نقوم بحساب التباينات المشتركة لجميع الحالات الممكنة فنحصل على جدول كالجدول (6) السابق، الذي يتضمن 4 مصفوفات قطرية. ويتم حساب هذه التباينات المشتركة المختلفة اعتماداً على القيم النظرية للمركبات U_k و V_ℓ المحسوبة من النماذج القانونية المستخلصة .

ويمكن حسابها من علاقات مشابهة للعلاقة (22) والتي نصيغ أحدها كما يلي :

$$\text{cov}(U_k, V_\ell) = e'_k * R_{xy} * f_\ell \quad \begin{matrix} k: 1,2,3 \dots \dots \dots p \\ \ell: 1,2,3, \dots \dots \dots p \end{matrix}$$

وبناء على ذلك تم حساب عناصر المصفوفة القطرية الأولى فكانت كما يلي:

جدول (6'): التباينات المشتركة لـ U و V

المركبات	V_1	V_2	V_3
U_1	$\rho_1 = 0.3899$	0.0002	0.0001
U_2	0.0016	$\rho_2 = 0.1365$	0.0001
U_3	0.0045	0.0019	$\rho_3 = 0.0042$

وهي مصفوفة شبه قطرية تدل على تحقق الشروط (77) في الحالات المدروسة وإن عناصر قطرها الرئيسي تساوي معاملات الارتباط القانوني ρ_1, ρ_2, ρ_3 وذلك بسبب الشرط (76) .

حساب التحويلات المباشرة لمتحولات كل مجموعة:

أ- التحويلات المباشرة لمتحولات المجموعة X : هي عبارة عن معاملات الارتباط الزوجية بين تلك المتحولات X والمركبات القانونية الخاصة بها U_1, U_2, U_3 ولحساب هذه المعاملات لابد من حساب القيم النظرية للمركبات القانونية من العلاقات (26), (28), (30) وتنظيم جدول مناسب لهذه القيم النظرية مقابل القيم الفعلية لقيم المتحولات X_1, X_2, X_3 ثم القيام بحساب مصفوفة معاملات

الارتباط الزوجي بين كل متحول من X مع المركبات القانونية U_1, U_2, U_3 فنحصل في النهاية على جدول يسمى جدول احتمالات X على U .

ولكن من جهة أخرى يمكن حساب هذه المعاملات الارتباطية لكل من X_1, X_2, X_3 مع المركب U_1 على انفراد من خلال جداء المصفوفة R_{xx} في الشعاع e^* المقابل له. أي أنه يمكننا أن نحصل على شعاع المعاملات مع U_1 من تطبيق العلاقة :

$$U_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{x11} \\ r_{x21} \\ r_{x31} \end{bmatrix} = R_{xx} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

وكذلك الأمر بالنسبة للمركبين U_2 و U_3 وتطبق ذلك على بيانات هذا المثال نجد أن شعاع معاملات ارتباط U_1 مع المتحولات X_1, X_2, X_3 يساوي :

$$U_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{x11} \\ r_{x21} \\ r_{x31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.2438 \\ 0.4036 & 1 & -0.0819 \\ -0.2438 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.937 \\ -0.084 \\ 0.092 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9933 \\ -0.4696 \\ 0.3273 \end{bmatrix}$$

أما شعاع معاملات ارتباط U_2 مع X_1, X_2, X_3 فتحسب من العلاقة :

$$U_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{x11} \\ r_{x21} \\ r_{x31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.2438 \\ 0.4036 & 1 & -0.0819 \\ -0.2438 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.073 \\ -0.699 \\ 0.780 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01895 \\ -0.60566 \\ -0.74055 \end{bmatrix}$$

وكذلك فإن شعاع معاملات ارتباط U_3 مع X_1, X_2, X_3 فتحسب من العلاقة :

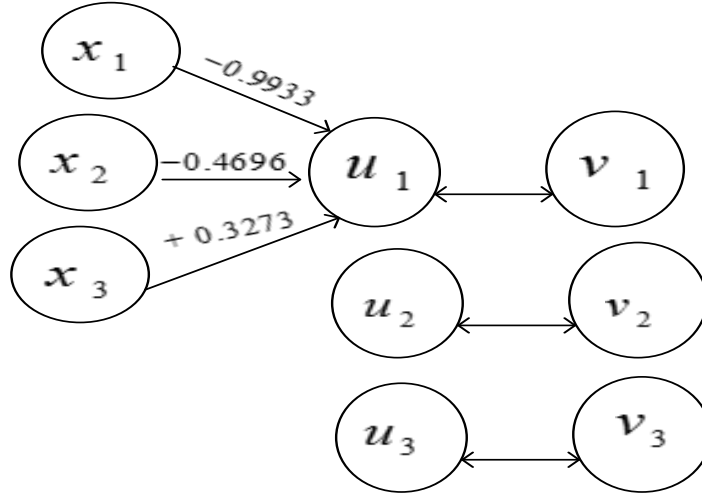
$$U_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{x11} \\ r_{x21} \\ r_{x31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.2438 \\ 0.4036 & 1 & -0.0819 \\ -0.2438 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.616 \\ 0.836 \\ -0.668 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.11573 \\ 0.64209 \\ -0.58641 \end{bmatrix}$$

وبعد تقريب هذه المعاملات نحصل على احتمالات X على U كالتالي:

جدول (7) احتمالات X على U :

المركبات U المتحولات X	U_1	U_2	U_3
X_1	-0.9933	-0.0190	-0.1157
X_2	-0.4696	-0.3057	0.6421
X_3	0.3273	-0.7406	-0.5864

وهكذا نجد أن المتحول الأكثر ارتباطاً بالمركب U_1 هو X_1 وبمعامل ارتباط سالب (-0.9933) وأكثرها ارتباطاً بـ U_2 هو X_3 وأكثرها ارتباطاً بـ U_3 هو X_2 ويمكن تمثيل احتمالات X على U_1 (فقط) كمايلي:



الشكل (3): تحميلات x على U_1 فقط

ب-التحليلات المباشرة لمتحولات المجموعة Y : وهي عبارة عن معاملات الارتباط الزوجية بين تلك المتحولات Y والمركبات القانونية الخاصة بها وهي V_1, V_2, V_3 ولحساب هذه المعاملات يجب حساب القيم النظرية للمركبات V_1, V_2, V_3 من العلاقات (27) , (29) , (31) وتنظيم جدول مناسب لها مقابل لقيم المتحولات Y ثم القيام بحساب مصفوفة معاملات الارتباط بينها فنحصل على جدول يسمى جدول تحميلات Y على V .

ولكن من جهة أخرى يمكن حساب هذه المعاملات الزوجية لكل من Y_1, Y_2, Y_3 مع المركب V_1 على حدة من خلال جداء المصفوفة R_{yy} في الشعاع f^* المقابل له . أي من خلال العلاقة :

$$V_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{y11} \\ r_{y21} \\ r_{y31} \end{bmatrix} = R_{yy} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

وكذلك الأمر بالنسبة للمعاملات مع المركبين V_2, V_3 وبتطبيق ذلك على بيانات هذا المثال نجد أن شعاع معاملات ارتباط V_1 مع المتحولات Y_1, Y_2, Y_3 يساوي :

$$V_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{y11} \\ r_{y21} \\ r_{y31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.0570 \\ -0.1133 & 1 & 0.0222 \\ -0.0570 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.500 \\ 0.811 \\ 0.011 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5925 \\ 0.8679 \\ 0.0575 \end{bmatrix}$$

أما شعاع معاملات ارتباط V_2 مع Y_1, Y_2, Y_3 فتحسب من العلاقة :

$$V_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{y11} \\ r_{y21} \\ r_{y31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.0570 \\ -0.1133 & 1 & 0.0222 \\ -0.0570 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.362 \\ 0.306 \\ -0.881 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3775 \\ 0.2454 \\ 0.8948 \end{bmatrix}$$

وإن شعاع معاملات ارتباط V_3 مع Y_1, Y_2, Y_3 فتحسب من العلاقة :

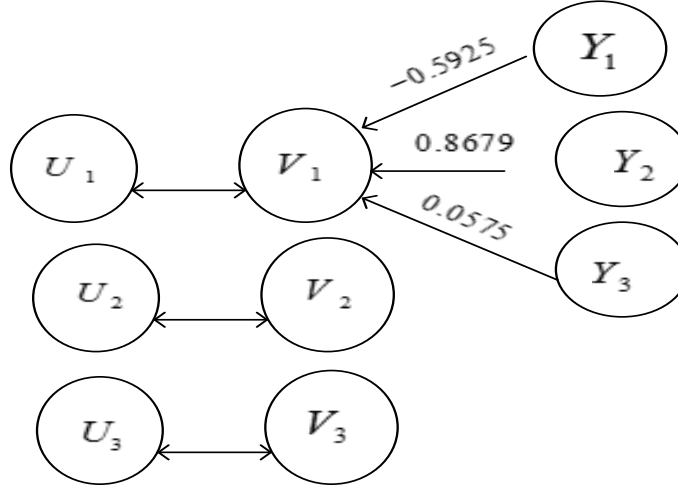
$$V_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{y11} \\ r_{y21} \\ r_{y31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4036 & -0.0570 \\ -0.1133 & 1 & 0.0222 \\ -0.0570 & -0.0819 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.797 \\ 0.512 \\ 0.477 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7118 \\ 0.4323 \\ 0.4429 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على تحميلات Y على V ونضعها في جدول كالتالي:

جدول (8): تحميلات Y على V :

المركبات V المتحولات Y	V_1	V_2	V_3
Y_1	-0.5925	0.3775	0.7118
Y_2	0.8679	0.2454	0.4323
Y_3	0.0575	-0.8948	0.4429

ويمكن تمثيل تحميلات Y على V_1 (فقط) كما يلي :



الشكل (4): تحميلات Y على V_1 فقط

ج- حساب التجميعات العابرة لـ X على V : وهي عبارة عن معاملات الارتباط الزوجية بين المتحولات

X مع كل من المركبات المقابلة لها من الطرف الآخر V_1, V_2, V_3 وهي تحسب بعدة طرق هي:

- بعد حساب القيم النظرية للمركبات لـ V, V_2, V_3 يتم حساب معاملات ارتباطها مع Y_1, Y_2, Y_3 وتوضع في جدول منظم .

- يمكن حسابها من خلال الجداء $[r_{xv}] = R_{xy} * f_v$.

- ولكن الطريقة الأسهل لحسابها هو ضرب كل شعاع $[r_{xv}]$ من التجميعات المباشرة لـ U في

معامل الارتباط القانوني ρ_k المقابل للزوج U_k, V_k وهكذا نجد أن تحميلات X على المركب

V_1 نحسب من العلاقة:

$$\begin{bmatrix} r_{x1V_1} \\ r_{x2V_1} \\ r_{x3V_1} \end{bmatrix} = \rho_1 * \begin{bmatrix} r_{x11} \\ r_{x21} \\ r_{x31} \end{bmatrix} = 0.3899 * \begin{bmatrix} -0.993 \\ -0.4696 \\ 0.3273 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3873 \\ -0.1831 \\ 0.1276 \end{bmatrix}$$

وكذلك نحصل على التحييلات العابرة لـ X على V_2 حيث نجد أن:

$$\begin{bmatrix} r_{x1}V_2 \\ r_{x2}V_2 \\ r_{x3}V_2 \end{bmatrix} = \rho_2 * \begin{bmatrix} r_{x12} \\ r_{x22} \\ r_{x32} \end{bmatrix} = 0.1365 * \begin{bmatrix} -0.0190 \\ -0.6057 \\ -0.7406 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0026 \\ -0.0827 \\ 0.1011 \end{bmatrix}$$

وكذلك نحصل على التحييلات العابرة لـ X على v_3 من العلاقة :

$$\begin{bmatrix} r_{x1}V_3 \\ r_{x2}V_3 \\ r_{x3}V_3 \end{bmatrix} = \rho_3 * \begin{bmatrix} r_{x13} \\ r_{x23} \\ r_{x33} \end{bmatrix} = 0.0421 * \begin{bmatrix} -0.1157 \\ 0.6421 \\ -0.5864 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0049 \\ 0.0270 \\ -0.0247 \end{bmatrix}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على التحييلات العابرة لـ X على V ونضعها في جدول مناسب كمايلي:

جدول (9): التحييلات العابرة لـ X على V

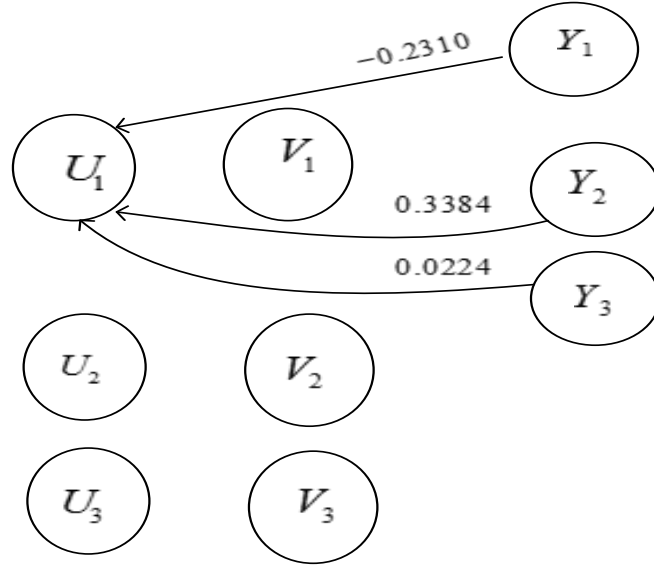
المركبات V المتحولات Y	V_1	V_2	V_3
Y_1	-0.4873	-0.0026	-0.0049
Y_2	-0.1831	-0.0827	0.0270
Y_3	0.1276	0.1011	-0.0247

د- التحييلات العابرة لـ Y على U ونحصل عليها بنفس الطريق السابقة وإذا ضربنا أشعة التحييلات المباشرة لـ V بمعاملات الارتباط القانوني الموافقة لها ρ_k نحصل على تحييلات Y على U وهي كما في الجدول التالي:

جدول (10): التحييلات العابرة لـ Y على U

المركبات V المتحولات Y	U_1	U_2	U_3
Y_1	-0.2310	0.0515	0.0300
Y_2	0.3384	0.0335	0.0182
Y_3	0.0224	-0.1221	0.0186

ويمكن تمثيل هذه التحييلات العابرة لـ Y على U_1 (فقط) كمايلي:



الشكل (5) تحميلات Y على U_1 فقط

تقييم نماذج الأزواج U_k, V_k من التحميلات المباشرة :

نستخدم التحميلات المباشرة لتقييم نماذج الأزواج القانونية U_k, V_k ، ويتم تقييم كل مركب U_k على حدة من خلال متوسط مربعات تحميلات هذه المركبات على المتحولات X . كما يتم تقييم كل مركب V_k على حدة من خلال متوسط مربعات تحميلات هذه المركبات على المتحولات Y . وهناك عدة مؤشرات لتقييم النموذج المركب وهي الكفاءة والتشاركية والأهمية .

أ- حساب كفاءة وأهمية المركبات U_k في النموذج U_k, V_k (Adequacy)

لحساب هذه الكفاءة نحسب مربعات تحميلات X على U من الجدول (7) ونضعها في جدول كالتالي :

جدول (11): مربعات التحميلات X على U

المركبات V المتحولات Y	U_1	U_2	U_3	المجموع = التشاركية
X_1	0.9866	0.00036	0.1339	1
X_2	0.2205	0.36687	0.41229	1
X_3	0.1071	0.54849	0.34386	1
المجموع = $\sum_{i=1}^2 r_{ik}^2$	1.3142	0.91572	0.76954	3
كفاءة U_k = $\frac{\sum r_{ik}^2}{3}$	0.4381	0.30524	0.25651	1

لقد حسبنا على هامش هذا الجدول كفاءات المركبات U_k ووضعناها في السطر الأخير حيث قمنا بحساب متوسط مربعات تحميلات كل U_k على حدة من العلاقة :

$$Ad(U_k) = \frac{\sum_{i=1}^3 r_{ik}^2}{3} \quad k: 1,2,3$$

وأخيراً نلاحظ أن مجموع كفاءات المركبات U_k يساوي الواحد (تقريباً) وإن مجموع مربعات التحميلات في كل سطر X_i يساوي الواحد (تقريباً) وهذا يعني أن تشاركية كل متحول X_i في المركبات U_1, U_2, U_3 هي تشاركية كاملة. وإن المركبات U_1, U_2, U_3 تفسر كامل التغيرات في تغيرات كل X_i ومن نفس الجدول يمكننا استخلاص الأهمية النسبية لكل متحول X_i بالنسبة لكل مركب U_k من العلاقة :

$$R(X_i, U_k) = \frac{r_{ik}^2 u_k}{\sum_{k=1}^3 r_{ik}^2} = r_{X_i U_k}^2 \quad (\text{لأن } \sum r_{ik}^2 = 1)$$

أي أن الأهمية النسبية للمتحوّل X_1 تساوي (0.9866) على U_1 وتساوي (0.00036) على U_2 وتساوي (0.01339) على U_3 .

أما الأهمية النسبية لـ X_2 فهي تساوي (0.2205) على U_1 وتساوي (0.36688) على U_2 وتساوي (0.41229) على U_3 .

ولكن الأهمية النسبية لـ X_3 فهي تساوي (0.1071) على U_1 وتساوي (0.54849) على U_2 وتساوي (0.34386) على U_3 .

نلاحظ: إذا كان مجموع مربعات المعاملات في الأسطر X_i لا يساوي الواحد. فيجب عند حساب الأهمية النسبية لـ X_i تطبيق العلاقة السابقة وتقسيم مربع كل معامل $r_{X_i U_k}^2$ على مجموع مربعات المعاملات $(\sum_{k=1}^p r_{ik}^2)$ في سطر X_i . ولكننا في هذا المثال لم نحتاج إلى ذلك لأن مجموع مربعات معاملات كل سطر X_i كان يساوي الواحد، لأننا لم نستغنى عن الزوج الثالث بسبب عدم معنوية وتركنا حتى الأخير لادخاله في عمليات التحليل.

ب- حساب كفاءة وأهمية المركبات V في النموذج U_k, V_k (Adequacy)

لحساب هذه الكفاءة نحسب مربعات تحميلات Y على V من الجدول (8) ونضعها في جدول كالتالي:

جدول (12): مربعات التحميلات Y على V

المركبات V المتحولات Y	V_1	V_2	V_3	المجموع = التشاركية
Y_1	0.3511	0.1425	0.5067	1
Y_2	0.7533	0.0602	0.1869	1
Y_3	0.0033	0.8007	0.1962	1

$\sum r_{jk}^2$ المجموع	1.1077	1.0034	0.8898	3
كفاءة V_k $= \frac{\sum r_{jk}^2}{3}$	0.3692	0.3345	0.2966	1

ولقد حسبنا على هامش هذا الجدول كفاءات المركبات V_k ووضعناها في السطر الأخير. حيث قمنا بحساب متوسط مربعات تحميلات كل V_k على حدة من العلاقة :

$$Ad(V_k) = \frac{\sum_{j=1}^3 r_{jk}^2}{3} \quad k: 1,2,3$$

وأخيراً نلاحظ أن مجموع كفاءات المركبات V_k يساوي الواحد وأن مجموع مربعات التحميلات في كل سطر Y_j يساوي الواحد . وهذا يعني أن تشاركية كل متحول Y_j في المركبات V_1, V_2, V_3 هي تشاركية كاملة . وأن المركبات V_1, V_2, V_3 تفسر كامل التغيرات في كل متحول Y_j .

ومن نفس الجدول يمكننا استخلاص الأهمية النسبية لكل متحول Y_j بالنسبة V_k من العلاقة :

$$R(Y_i, V_k) = \frac{r_{yj}^2 v_k}{\sum r_{jk}^2} = r_{yj}^2 v_k \quad (\text{لأن } \sum_{k=1}^2 r_{jk}^2 = 1)$$

أي أن الأهمية النسبية للمتحوّل Y_1 تساوي (0.3511) على V_1 وتساوي (0.1425) على V_2 وتساوي (0.5067) على V_3 . وهكذا بالنسبة للمتحوّلين Y_2 و Y_3 ، كما في السطرين الثاني والثالث . وختاماً يمكننا استخلاص كفاءات الأزواج المركبة (U_k, V_k) ووضعها في جدول خاص كالتالي:

جدول (13): كفاءات المركبات في الأزواج (U_k, V_k)

رقم الزوج k	كفاءة U_k	كفاءة V_k
1	0.4381	0.3692
2	0.3524	0.3345
3	0.25651	0.2966
المجموع	1	1

إن العمود الأول يعبر عن نسبة التباين المفسر للمجموعة الأولى حسب المركبات U الخاصة بها أما العمود الثاني فيعبر عن نسبة التباين المفسر للمجموعة الثانية حسب المركبات V الخاصة بها . وهكذا نجد أن كفاءة الزوج الأول (U_1, V_1) هو الأفضل وأن كفاءة U_1 أفضل من كفاءة V_1 ، ويليه الزوج الثاني (U_2, V_2) الذي فيه كفاءة U_2 أقل كفاءة من V_2 ، ثم الزوج الثالث الذي فيه كفاءة U_3 أقل كفاءة من V_3 . علماً أن الزوج الثالث كان يجب الاستغناء عنه من البداية، لأن عملية اختبار الجذور الكامنة أو القيم الذاتية λ_k^2 اعطينا أن القيمة الثالثة المقابلة له غير معنوية، ولكننا احتفظنا به حتى النهاية لتوضيح بعض جوانب التحليل القانوني .

تقييم نماذج الأزواج (U_k, V_k) من التحميلات العابرة **cross loadings**

لتقييم هذه النماذج من التحميلات العابرة يمكننا اتباع نفس الأسلوب الذي اتبعناه في التحميلات المباشرة والحصول على جدول يتضمن مربعات تلك التحميلات لكل مجموعة على مركباتها .
ولكننا هنا سنقوم بحساب الكفاءات العابرة (Redundancy) للمركبات في الأزواج القانونية (U, V_k) مباشرة من الكفاءات المباشرة السابقة باستخدام العلاقتين التاليتين :

$$Red(U_k) = Ad(U_k) * \rho_k^2 \quad \text{الكفاءة العابرة لـ } U_k$$

$$Red(V_k) = Ad(V_k) * \rho_k^2 \quad \text{الكفاءة العابرة لـ } V_k$$

وبما أنه لدينا مما سبق أن قيم ρ_k^2 تساوي:

$$\rho_3^2 = \lambda_3^2 = 0.00177287, \quad \rho_2^2 = \lambda_2^2 = 0.018639, \quad \rho_1^2 = \lambda_1^2 = 0.152033$$

واعتماداً على الجدول (13) السابق نحصل على أن الكفاءات العابرة لـ (U_k, V_k)

جدول (14) الكفاءات العابرة للمركبات V_k, U_k في الأزواج (U_k, V_k)

رقم الزوج k	U_k	V_k
1	0.0666	0.05613
2	0.0057	0.00623
3	0.00045	0.00053
المجموع	$\neq 1$	$\neq 1$

وهنا نلاحظ أن مجموع كل منها لا يساوي الواحد. وهي تعبر عن كفاءات عابرة ضعيفة للمتحويلات X أو Y على المركبات المقابلة لها في الطرف الآخر، أي تعبر عن نسبة التباين المفسر في كل مجموعة X أو Y حسب المركبات القانونية المقابلة لها .

المراجع

- 1- ANDERSON T.W. An Introduction to multivariate statistical Analysis. Sec. Edu. John Wiley and sous- New York 2002.
- 2- Richard J. Harris. A primer of multivariate statictics edu.3- 2001 L.E.A London.
- 3- David R. Hardoon+ Sandor Szedmak+ John shawetoylar : canonical correlation; An overview with application to learning mothods department of computer Science- University of London Technical Report. CSD- TR- 03- 08/2003.
- 4- David weenink: Canonical correlation Analysis, Institute of phontic science, university of Amsterdam, IFA Proceeding 25- 2003.
- 5- Magnus Borga: Canonical correlation a Tutorial January 12, 2001- LU- Sweden.
- 6- Francis R. Bach, Michael I. Jordan: A probabilistic Interpretation of canonical correlation. Analysis, computer science division, university California, Berkeley CA 9444 USA.
- 7- Mons Thalin; Analysis of Factors and canonical correlation; Department of mathematics, uppsal university thalin @. Math. Uu.Se.-2011.

ملحق (1)

مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات⁽¹⁾

1 - مقدمة:

لقد ظهرت مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات عند معالجة المعادلات الخطية المتجانسة. ولكي نوضح جوهر هذه القضية دعنا ننطلق من المعادلة الخطية التالية:

$$a * x = \lambda * x \quad (1)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$(a - \lambda) * x = 0 \quad (2)$$

ومن الواضح أن الحل البسيط لهذه المعادلة بالنسبة لـ x هو الحل الذي يكون فيه $x = 0$. ويسمى هذا الحل بالحل التافه (Trivial solution). لأنه لا يفيدنا في معالجة المسائل العلمية المختلفة. ويجعلنا نخسر جميع المعلومات المتوفرة في العلاقة (1) أو في العلاقة (2).

وحتى نمنع هذا الحل التافه ($x = 0$) من الحدوث، نفترض أو نشترط أن يكون المضروب الأول $(a - \lambda)$ معدوماً، وعندها نجد أن λ تأخذ قيمة معينة هي a لأن:

$$(a - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = a \quad (3)$$

وتسمى هذه القيمة لـ λ بالقيمة الذاتية (الكامنة) للمعادلة (2) (eigenvalue).

وعندها فإن المعادلة (2) تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة (المحدودة وغير المعدومة) بالنسبة للمتحول المجهول x . وذلك لأن جداء أية قيمة محدودة لـ x في $(a - \lambda)$ يساوي الصفر. وكذلك الأمر في حالة المصفوفات المربعة، حيث نجد أنه لو كانت لدينا جملة من المعادلات الخطية كمايلي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned} \quad (4)$$

فإنه يمكننا كتابتها بدلالة المصفوفات والأشعة كمايلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

(1) - لقد تم استخلاص هذا الملحق من المصدرين التاليين (بتصرف وإضافة)

1 - مجدي الطويل: المصفوفات (النظرية والتطبيق) - الباب الثالث - جامعة القاهرة - كلية الهندسة - عام

2- Lancaster, k. mathematical econ- omics- mac. Comb.London, New York- educ.- Moscow- cof. Pad. 1972

والتي يمكن كتابتها باختصار على الشكل التالي:

$$A_{33} * X_{31} = \lambda * X_{31} \quad (6)$$

وهذه العلاقة تعبر عن عملية تحويل الشعاع X إلى شعاع آخر هو λX . وهذه العملية تصادفنا كثيراً في الدراسات والبحوث العلمية.

وبصورة عامة إذا كان لدينا n معادلة خطية وتتضمن n متحولاً ومثابرة للمعادلات (4) فإنه يمكننا كتابتها بدلالة مصفوفة A وشعاع X كما يلي:

$$A_{n,n} X_{n,1} = \lambda X_{n,1} \quad (7)$$

حيث أن: A هي مصفوفة مربعة من المرتبة n, n (وتسمى بمصفوفة التحويل)، وتتضمن الأمثال العددية a_{ij} المصاحبة للمتحويل X_j في المعادلة الخطية i وإن $X_{n,1}$ هو الشعاع العمود المؤلف من المتحولات X_j ، أي أن $X_{n,1}$ هو الشعاع العمود الذي يرمز للمتحولات X_j نفسها، أما λ فهو عدد حقيقي (سلمي) يستخدم في عملية التحويل من X إلى λX ، ويسمى شكل المعادلة (7) بالشكل النموذجي لمشكلة القيم الذاتية للمصفوفة A . (standard eigenvalue problem). وذلك لتمييزها عن الشكل العام المشكلة لقيم الذاتية للمصفوفة A (Generalized eigenvalue problem) والذي تكون على الشكل التالي:

$$A_{n,n} X_{n,1} = \lambda B_{n,n} X_{n,1} \quad (8)$$

حيث أن B هي مصفوفة مربعة من المرتبة n, n أيضاً وموجبة تحديداً (positive definite) وأن A مصفوفة متناظرة، ويمكن تحويل المشكلة العامة للقيم الذاتية المبينة في (8) إلى المشكلة النموذجية المعروضة في العلاقة (7) وذلك باستخدام تحويل وتحليل تشوليسكي (cholesky) [انظر ذلك في الطويل - المصفوفات - ص 138]. لذلك فإننا سنركز اهتمامنا في هذه الورقة على المشكلة النموذجية للقيم الذاتية وسنعرضها من خلال الفقرة التالية.

2- المشكلة النموذجية للقيم الذاتية:

إن الشكل العام لهذه المشكلة يكون من شكل المعادلة (7) السابقة وهي:

$$A * X = \lambda * X \quad (9)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$[A - \lambda I] * X = 0 \quad (10)$$

حيث أن: I هي مصفوفة أحادية من المرتبة n .

وتسمى المعادلة (10) بالمعادلة المميزة للمصفوفة A (characteristic equation) وإن حلها بالنسبة للشعاع X يصطدم بالحل التافه (الذي هو $X = 0$).

وحتى نمنع حدوث هذا الحل التافه. فإننا نفترض أو نشترط أن تكون المصفوفة اليسارية $[A - \lambda I]$ شاذة. وهذا يعني أنه يجب أن يكون محددها معدوماً. أي نشترط أن يحقق المحدد الشرطي التالي.

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (11)$$

وبما أن هذا المحدد هو من المرتبة $n \times n$ وان عناصر قطره الرئيسي تساوي $(a_{ii} - \lambda)$ فإن العلاقة (11) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

وعندما نقوم بحساب منشور أو مفكوك هذا المحدد فإننا سنحصل منه على كثير حدود من المرتبة n بالنسبة للوسيط λ ويكون له الشكل التالي:

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots + a_n\lambda^n = 0 \quad (13)$$

وتسمى المعادلة (13) بمعادلة القيم الذاتية للمصفوفة A (Eigenvalue equation)، وعندما نقوم بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ فإننا سنحصل على n جذراً لها: أي إننا سنحصل منها على n قيمة لـ λ وسنرمز لها بالرموز :

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \dots \dots \lambda_n \quad (14)$$

وتسمى هذه الجذور بالقيم الذاتية أو المميّزة كما تسمى بالجذور الكامنة للمصفوفة A ، وهي تستخدم كثيراً في المسائل العلمية. وإن هذه القيم الذاتية قد لا تكون مختلفة عن بعضها البعض بل قد يكون بعضها مكرراً عدة مرات (عدة جذور مضاعفة). كما يمكنها أن تكون حقيقية أو عقدية (مركبة). ولكن إذا ظهرت جذور عقدية فإنها تكون على شكل أزواج مترافقة .

والآن نعود إلى مسألة إيجاد الشعاع X الذي يحقق العلاقة (10) مقابل كل قيمة من القيم الذاتية λ_k . ولذلك نأخذ أحد القيم الذاتية وليكن $\lambda = \lambda_k$ ونعوضها في المعادلة (10) فإننا سنحصل على المعادلة المحددة التالية:

$$[A - \lambda_k I] * X = 0 \quad (15)$$

وبما أن قيمة λ_k تجعل المصفوفة $[A - \lambda_k I]$ مصفوفة شاذة فإنه يمكننا الحصول من (15) على عدد لانهائي من الحلول المقبولة لـ X . وإذا أخذنا أحد تلك الحلول وليكن X_k المقابل للقيمة الذاتية λ_k فإنه سيكون على شكل شعاع عمود كمايلي:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_k \quad (16)$$

ويسمى هذا الشعاع X_k بالشعاع الذاتي (المميز) للمصفوفة A والمقابلة للقيمة الذاتية λ_k ولكن بما أن جملة المعادلات (10) هي جملة معادلات خطية متجانسة فإن أي حل مقبول لها مثل X_k يشكل مع مضاعفاته حزمة من الحلول المقبولة (غير التافهة) ونرمز لها بالرموز:

$$X_k, C_1 X_k, C_2 X_k, C_3 X_k, \dots \dots \quad (17)$$

حيث C_i أي عدد حقيقي (غير الصفر) يضاعف أو يقلل الحل X_k

وبذلك نحصل على لانهاية أخرى من الحلول المرتبطة بالحل X_k المقابل للقيمة الذاتية λ_k وحدها .
ولكن هذه الحلول المتضاعفة تحدد لنا فقط الاتجاه العام للحل X_k ، ولا تحدد لنا عناصر الحل المطلوب (مركبات X_k). ولذلك تبقى أطوال هذه الحلول كيفية (غير محددة). وهذا أمر لا يساعدنا على التوصل إلى حلول محددة الطول بل محددة الاتجاه فقط .
وللتخلص من هذه المشكلة يمكن أن نقوم بتحويل هذه الأشعة المتضاعفة إلى أشعة واحدة بحيث يكون طول كل منها مساوياً للواحد الصحيح .

لذلك نأخذ أي شعاع منها مثل X_k ونحسب طوله ℓ_k كمايلي:

$$\|X_k\|^2 = X'_k * X_k = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots = \ell_k^2 = \text{مربع الطول} \quad (18)$$

$$\|X_k\|_k = \sqrt{\ell_k^2} = +\ell_k$$

ثم نقسم عناصر ذلك الشعاع على طوله $(+\ell_k)$ فنحصل على الشعاع الواحدى للشعاع X_k ونرمز له بـ V_k وهو يساوي

$$V_k = \frac{X_k}{\|X_k\|} = \frac{X_k}{\ell_k} \quad (19)$$

وبالتالي نحصل على شعاع جديد يكون له نفس الاتجاه ويكون طوله الجديد مساوياً للواحد لأن:
 $V'_k * V_k = 1$ ، ويسمى هذا الشعاع V_k بالشعاع الذاتى الواحدى المقابل للقيمة الذاتية λ_k ، ونحصل على نفس النتيجة إذا حولنا الأشعة الأخرى إلى أشعة واحدة . وإذا كان للمصفوفة n قيمة ذاتية مختلفة (جذراً مختلفاً) فإنه سيكون لها n شعاعاً ذاتياً واحدياً مختلفاً مقابلاً لها. وللحصول على هذه الأشعة نعود ونعوض كل من القيم الذاتية التي حصلنا عليها في (14) في المعادلة (10)، واحدة تلو الأخرى حتى نحصل على جميع الأشعة الذاتية الواحدية المقابل لكل منها.

مثال: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المقابلة لها للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

الحل: نكتب المعادلة المميزة لـ A كما يلي:

$$AX = \lambda X \Rightarrow [A - \lambda I] * X = 0$$

ثم نضع محدد المصفوفة اليسرى مساوياً للصفر فنحصل على أن :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ثم نقوم بحساب مفكوكه فنحصل على كثير حدود من المرتبة الثانية بالنسبة لـ λ وهو:

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 3 * 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

ويحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ λ نحصل على الجذرين التاليين:

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -2$$

ولإيجاد الأشعة الذاتية المقابلة لهما، نأخذ كل قيمة على حدة، فنجد أنه عندما نأخذ $\lambda_1 = 4$ فإن مصفوفة المعادلة المميزة تساوي :

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لهذه القيمة نكتب المعادلة المميزة كما يلي :

$$[A - \lambda_1 I] * X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين غير المستقلتين التاليتين:

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

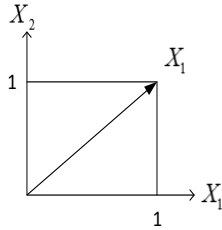
وهما عبارة عن معادلة واحدة (الثانية تنتج من الأولى بصربها ب (-1))

$$-3x_1 + 3x_2 = 0 \quad \text{نأخذ أحدهما ولتكن الأولى:}$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{فنحصل منها على أن:}$$

أي أن العنصر x_1 يساوي x_2 وله نفس الإشارة

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية . يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة ويكون لها نفس الاتجاه .



$$x_1 = 1 \quad \text{وحتى نحدد أحد هذه الحلول نضع كيفياً}$$

$$x_2 = 1 \quad \text{فنحصل على أن:}$$

وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الأول والذي نرمز له بـ X_1 وهو $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ وهو يقابل $\lambda_1 = 4$.

ومنه نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس الذاتية $\lambda_1 = 4$ وذلك بأخذ مضاعفات X_1 كما يلي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{c_2} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots$$

حيث c_i أي عدد حقيقي (غير الصفر)

أما عندما نأخذ القيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ فإننا نجد أن المصفوفة:

$$[A - \lambda_2 I] = \begin{bmatrix} 1+2 & 3 \\ 3 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم نكتب المعادلة الذاتية كمايلي:

$$[A - \lambda_2 I]X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين غير المستقلتين التاليتين:

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

وهما عبارة عن معادلة واحدة، وإذا أخذنا أحدهما نجد أن:

$$x_1 = -x_2$$

أي أن العنصر x_1 يساوي $(-x_2)$ وأن العنصرين مختلفان بالإشارة .

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية، فإنه يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة كمايلي:

نضع بشكل كفي $x_1 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -1$ ، وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الأول X_2

المقابل للقيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ وهو $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ومنه نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس القيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_c = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots \dots \dots$$

حيث c_i أي عدد حقيقي (غير الصفر)

وللتحقق من أن هذه الأشعة تشكل حلول مقبولة للمعادلة (9) أو (10) نقوم بتعويضها في المعادلة الذاتية $AX = \lambda X$ لتتأكد من تحققها:

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 X_1$$

$$AX_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2 X_2$$

أي أن الشعاعين الذاتيتين X_2, X_1 يحققان المعادلة الذاتية، وبذلك يشكلان حلين مقبولين لها. علماً بأن مضاعفات كل منهما تشكل حلول مقبولة لها أيضاً، ونشير هنا أيضاً إلى أن الحلين X_2 و X_1 متعامدان لأنهما يحققان شرط التعامد وهو أن يكون الجداء السلمي لها يساوي الصفر:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = X_1^* * X_2 = (1, 1) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

ولكن هذين الحلين محددان بالاتجاه فقط ، وغير محددتين بالطول لأن جميع مضاعفاتهما تشكل حلول مقبولة أيضاً .

لذلك يفضل أن نقوم بحساب الأشعة الذاتية الواحدة لها، ولهذا نقوم بحساب طول كل منها فنجد أن:

$$\|X_1\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = \ell_1^2 \Rightarrow \ell_1 = \sqrt{2}$$

$$\|X_2\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 = \ell_2^2 \Rightarrow \ell_2 = \sqrt{2}$$

وبذلك نجد أن الأشعة الذاتية الواحدة هي:

$$V_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{X_1}{\ell_1} = \frac{X_1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{X_2}{\ell_2} = \frac{X_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ويمكننا التأكد من أن هذين الشعاعين يحققان المعادلة المميزة (9) أو (10) فنجد أن:

$$A * V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_1 V_1$$

$$A * V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_2 V_2$$

أي أن الشعاعين V_2, V_1 يحققان المعادلة الذاتية المفروضة .

3- نظريات مختلفة حول القيم والأشعة الذاتية : (أنظر المصفوفات)

ن1: إن مجموع القيم الذاتية للمصفوفة A يساوي أثر trace تلك المصفوفة أي أن:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{tr}(A)$$

ن2: إن قيمة محدد المصفوفة A يساوي جداء قيمها الذاتية أي أن:

$$|A| = \prod_{k=1}^n \lambda_k$$

وكتطبيق على ذلك نأخذ القيم الذاتية للمصفوفة A في المثال السابق فنجد أن:

$$\left| \begin{array}{l} \sum \lambda_k = 4 + (-2) = 2 \\ \text{tr}(A) = 1 + 1 = 2 \end{array} \right| \Rightarrow \sum \lambda_i = \text{tr}(A)$$

$$\left| \begin{array}{l} |A| = 1 - 9 = -8 \\ \prod \lambda_k = 4(-2) = -8 \end{array} \right| \Rightarrow |A| = \prod \lambda_k$$

ن3: إذا كانت المصفوفة A مصفوفة صفرية فإن جميع قيمها الذاتية تكون أصفاراً أي أن:

$$A = [0] \Rightarrow \lambda_k = 0: \forall i = 1, 2, \dots, n$$

ن4: إذا كان المصفوفة A هي المصفوفة الأحادية I فإن جميع قيمها الذاتية تكون متساوية وتساوي

الواحد الصحيح أي أن:

$$A = I \Rightarrow \lambda_k = 1 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

ن5: إذا كانت المصفوفة A مصفوفة قطرية D فإن قيمها الذاتية تساوي عناصرها القطرية. أي أن:

$$A = D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_k = a_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

ويستفاد من هذه النظرية في إيجاد القيم الذاتية λ_k لأي مصفوفة وذلك بتحويلها إلى مصفوفة قطرية.

ن6: تكون أي مصفوفة A مصفوفة شاذة ($|A| = 0$) إذا وفقط إذا كانت إحدى قيمها الذاتية مساوية للصفر (لأن قيمة $|A| = \prod \lambda_k$).

أما إذا كانت المصفوفة قطرية D فإنها تكون شاذة إذا وفقط إذا كان أحد عناصرها القطرية معدوماً .

ن7: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة أي: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_n$ فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مختلفة (من حيث الاتجاه) .

ن8: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مستقلة خطياً

ن9: يمكن أن يكون لمصفوفتين مختلفتين A , B ولهما نفس المرتبة $n.n$ نفس القيم الذاتية: وعندها تكون A و B متشابهتان. (يستفاد منها في التعرف على المصفوفات) .

ن10: إن للمصفوفة A ولمنقولها A' نفس القيم الذاتية وذلك لأن لهما نفس كثير الحدود بالنسبة لـ λ .

ن11: إذا كانت المصفوفة A حقيقية ومتناظرة فإن قيمها الذاتية تكون حقيقية. وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة أي يكون الجداء السلمي لأي شعاعين يساوي الصفر $U_k * U_n = U'_k * U_n = 0$ ، أما إذا لم تكن مختلفة فيمكن تحويل الأشعة الذاتية المقابلة لها إلى أشعة متعامدة (حسب نظرية غرام).

ن12: إذا كانت المصفوفة A حقيقية ومتناظرة سلبياً فإن قيمها الذاتية تكون تخيلية صرفة (الجزء الحقيقي معدوم). وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة. أو يمكن تحويلها إلى متعامدة (نظرية غرام) .

ن13: إذا كان الشعاع U هو الشعاع الذاتي للمصفوفة A والمقابل للقيمة الذاتية λ ، وكان a أي عدد حقيقي غير الصفر فإن الشعاع $(\alpha * u)$ يكون أيضاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها .

ن14: إذا كانت A مصفوفة مربعة ومتناظرة وكانت L أي أن مصفوفة نظامية ($|L| \neq 0$) ومن مرتبة A ، فإن المصفوفة B المعرفة بالعلاقة $B = L^{-1} * A * L$ تكون مشابهة لـ A ويكون لها نفس القيم الذاتية التي لـ A (ولكن الأشعة الذاتية تبقى غير متطابقة) .

وإن الأشعة الذاتية لـ B تساوي حاصل ضرب L^{-1} في الأشعة الذاتية لـ A . أي أن: $V = L^{-1} * U$

حيث: U هي الأشعة الذاتية لـ A و V هي الأشعة الذاتية لـ B

وبالتالي فإن A, B تكونان متشابهتين. وتسمى المصفوفة $B = L^{-1} * A * L$ بتحويلة التشابه .

ن15: إذا شكلنا من أعمدة الأشعة الذاتية للمصفوفة A بحسب ترتيبها مصفوفة T فإننا سنحصل على مصفوفة مربعة من مرتبة A (وتسمى المصفوفة T بالمصفوفة الظاهرية لـ A (medal malrix)، وإذا كانت المصفوفة T نظامية ($|T| \neq 0$) فإن المصفوفة D المعرفة بالعلاقة:

$$D = T^{-1} * A * T$$

تكون مصفوفة قطرية وإن عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية لـ D وتساوي القيم الذاتية لـ A حسب الترتيب السابق . أي أن:

$$D = T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

أي أن المصفوفتين D, A تكونان متشابهتين وتسمى المصفوفة $D = T^{-1} * A * T$ بتحويلة الاستقطار والتشابه $\text{Similarity diagonalization transformation}$ ، ويستفاد من هذه النظرية في عملية تحويل المصفوفات إلى مصفوفات قطرية، وفي عمليات التحقق من صحة الأشعة الذاتية. وهناك شكل آخر لهذه النظرية وهو أن يكون:

$$A * T = T * \Lambda \quad (\text{وتطبق عندما } T^{-1} \text{ غير موجود})$$

حيث Λ : هي مصفوفة قطرية مؤلفة من القيم الذاتية λ_k على القطر الرئيسي .

ن16: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ومكررة m مرة وكانت الأشعة $U_1, U_2, U_3 \dots U_m$ هي الأشعة الذاتية المقابلة لـ λ المكررة . فإن التركيب الخطي لها $\sum_{i=1}^m \alpha_i * U_i$ يكون أيضاً شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها حيث أن أية أعداد حقيقية غير الصفر

ن17: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة النظامية A ($|A| \neq 0$) ويقابلها الشعاع الذاتي U فإن λ^n تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^n ويقابلها نفس الشعاع الذاتي U . حيث أن n عدد صحيح بشكل عام

نتيجة هامة: إذا كان $n=-1$ فإنه يكون لدينا المصفوفة A^{-1} ويكون λ^{-1} قيمة ذاتية لها، أما شعاعها الذاتي فيبقى U هو نفسه الذي لـ A .

ن18: إذا كان للمصفوفة A القيمة والشعاع الذاتيين (λ, U) وكان $f(A) = \sum_{i=1}^m \alpha_i * A^i$ فإن $f(A)$ يكون له القيمة والشعاع الذاتيين $[f(\lambda), u]$.

ن19: نظرية (كايلي - هاملتون) .

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكانت معادلتها الذاتية بالنسبة لـ λ هي :

$$|A - \lambda I| = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots a_n \lambda^n = 0$$

فإن A نفسها تحقق تلك المعادلة الذاتية أي يكون لدينا:

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots a_n A^n = 0$$

ن20: يمكن الحصول على المقلوب A^{-1} من العلاقة $\sum_{i=0}^n \alpha_i * A^i = 0$ وذلك بضرب تلك الصيغة بـ A^{-1} من اليسار فنجد أن :

$$a_0 A^{-1} + a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \dots a_n A^{n-1} = 0$$

وبالتالي نحصل على المقلوب A^{-1} من العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0} [a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \dots a_n A^{n-1}]$$

ن21: تكن فك أو نشر أي مصفوفة $A_{n \times n}^k$ (حيث $k \geq n$) على شكل متسلسلة قوى من A حتى القوة $(n-1)$ أي يمكن كتابة A_n^k على الشكل التالي:

$$A_n^k = B_0 + B_1 A + B_2 A^2 + \dots B_{n-1} A^{n-1}$$

ن22: يمكن فك واقتطاع أي دالة مصفوفة $f(A)$ إلى الحد A^{n-1} كحد أعلى. أي يمكن كتابتها كمايلي:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \quad \text{بشرط تقارب المتسلسلة}$$

وهناك نظريات أخرى يمكن البحث عنها في المراجع المختصة .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{مثال آخر: لنأخذ المصفوفة المتناظرة التالية :}$$

والمطلوب: إيجاد القيم والأشعة الذاتية لـ A

ثم حساب المصفوفة T والجداء $T^{-1} * A * T$

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{ثم التأكد من أن:}$$

الحل: لإيجاد القيم الذاتية لهذه المصفوفة نشكل المعادلة الذاتية لها وهي:

$$A * X = \lambda X$$

$$[A - \lambda I] * X = 0$$

وحتى لا نحصل على الحل التافه للشعاع العمودي ($X=0$) نضع محدد المصفوفة مساوياً للصفر أي

$$\text{نجعل: } |A - \lambda I| = 0 \quad \text{فنجد أن:}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبأخذ مفكوك هذا المحدد حسب الأقطار نجد أن:

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda)(5 - \lambda) + 16 + 16 - 16(2 - \lambda) - 4(5 - \lambda) - 4(5 - \lambda) = 0$$

$$(10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2)(5 - \lambda) + 32 - 32 + 16\lambda - 20 + 4\lambda - 20 + 4\lambda$$

$$50 - 35\lambda + 5\lambda^2 - 10\lambda + 7\lambda^2 + \lambda^3 + 24\lambda - 40 = 0$$

$$10 - 21\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

ومنه نحصل على المعادلة :

نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ حسب خوارزمية معادلات الدرجة الثالثة فنحصل على (3) جذور كامنة

أو على (3) قيم ذاتية للمصفوفة السابقة A وهي: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = 10$

وهنا نلاحظ أن: مجموع هذه القيم لذاتية = مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $\text{trac}(A) = A$

$$1+1+10=5+2+5=12$$

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لكل من هذه القيم الذاتية نعوض قيم λ على التوالي في مصفوفة

المعادلة المميزة: فعندما نضع $\lambda_1 = 1$ فإنه يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 5-1 & -2 & -4 \\ -2 & 2-1 & 2 \\ -4 & 2 & 5-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض بل هي عبارة عن معادلة واحدة (لأن الثانية تنتج من

الأولى بضربها بـ $(-\frac{1}{2})$ والثالثة من الأولى بضربها بـ (-1) .

ولذلك نأخذ معادلة واحدة منها ولتكن المعادلة الثانية فنجد أن:

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad (1)$$

وهي تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة لذلك نبدأ بالحل البسيط الذي يكون فيه $x_3 = 0$ فنحصل على

أن: $x_2 = 2x_1$ ثم نضع $x_1 = -1$ فنحصل على أن $x_2 = -2$

وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الأول وهو: $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

ومنها نحصل على حزمة الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية: $\lambda = 1$ من العلاقة: $U_1 = C * \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

حيث C هو أي عدد حقيقي (غير الصفر) .

ولكن إذا وضعنا $x_2 = 0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن $x_3 = x_1$ ، لذلك نضع $x_1 = 1$

فنحصل على $x_3 = 1$ وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الآخر المقابل أيضاً للقيمة الذاتية $\lambda = 1$

وهو: $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ومنها نحصل على حزمة أخرى من الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ من العلاقة الآتية :

$$U_2 = C * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولكن إذا وضعنا $x_1 = 0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن : $x_2 = -2x_3$ وعندها نضع $x_3 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -2$ وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الثالث المقابل أيضاً لـ $\lambda_2 = 1$ وهو :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على حزمة ثلاثة من الأشعة المقابلة أيضاً للجذر الذاتي $\lambda = 1$ من العلاقة الآتية :

وحسب النظرية (16) نلاحظ أن: $U_3 = U_1 + U_2$ أي أن U_3 غير مستقل عن U_1, U_2 وللتحقق من أن هذه الأشعة U_1, U_2, U_3 صحيحة نتأكد من أن قيمها تحقق المعادلة الذاتية التالية:

$$AU = \lambda * U$$

وكمثال على ذلك نأخذ أحد أشعة لحزمة الثالثة فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 * \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}'$$

وأخيراً لنأخذ القيمة الذاتية الثالثة $\lambda_2 = 10$ ونعوضها في المعادلة $(A - \lambda I)X = 0$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix} (5-10) & -2 & -4 \\ -2 & (2-10) & 2 \\ -4 & 2 & (5-10) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض (لأن محددها معدوم) ولحلها نقوم بضرب الثانية بـ (2)، ثم نطرحها من الثالثة فنحصل على المعادلة التالية:

$$0 + 18x_2 - 9x_3 \Rightarrow x_3 = 2x_2$$

فإذا وضعنا $x_2 = 1$ فإن $x_3 = 2$ ، وبالتعويض في المعادلة الثالثة أو غيرها نجد أن $x_1 = -2$ وبذلك نحصل على الشعاع الأول المقابل للقيمة الذاتية: $\lambda_3 = 10$ وهو:

$$U_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow U_4 = C \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحته نعوضه في المعادلة $A * U = \lambda U$ فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بتشكيل المصفوفة T من الأشعة الأولى المقابلة للقيم الذاتية وهي: U_1, U_2, U_4

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & +2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن:

$$T^{-1} * A * T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

وإذا أردنا أن نحصل على الأشعة الذاتية الواحدية فإننا نقوم بحساب أطوال الأشعة الذاتية السابقة ونقسم عناصر كل شعاع على طوله كما يلي:

$$\|u_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 0^2 = 5 \Rightarrow \|u_1\| = \sqrt{5} = \ell_1$$

$$\|u_2\| = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \|u_2\| = \sqrt{2} = \ell_2$$

$$\|u_3\| = (-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \Rightarrow \|u_3\| = \sqrt{9} = 3 = \ell_2$$

وهكذا نجد أن الأشعة الذاتية الواحدية هي:

$$V_1 = \frac{U_1}{\ell_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهو يقابل $\lambda_1 = 1$

$$V_2 = \frac{U_2}{\ell_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

وهو يقابل $\lambda_2 = 1$

$$V_3 = \frac{U_3}{\ell_3} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

وهو يقابل $\lambda_3 = 10$

وهي تحقق العلاقة السابقة:

$$T^{-1} * A * T = \Lambda$$

كما أنها تحقق المعادلة الذاتية :

$$A * U = \lambda * U$$