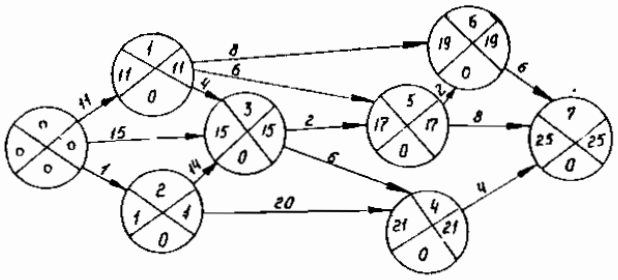
الجمهورية العربية السورية
جامعة تشرين
كلية الاقتصاد

الرياضيات الاقتصادية

الجزء الثاني

(المالية والإدارية)



الدكتور
ابراهيم محمد العلي
أستاذ في كلية الاقتصاد
(عميد الكلية)

السنة الثانية

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٩٩٢ - ١٩٩٣

المقدمة

كان للرياضيات دور بارز في تقدم العلوم على مر العصور، ولقد بلغ دورها في العصر الحديث مالم يبلغه من قبل ، فهي الآن تستخدم في جميع العلوم لحل مشكلاتها المعقدة . وعندما دخلت الرياضيات الى الاقتصاد انتقلت به من مصاف العلوم التنظيرية الى مصاف العلوم القياسية وأصبحت الرياضيات الأداة الأولى والأخيرة في حل جميع المشكلات الاقتصادية المعقدة .

واننا في هذا الكتاب تناول عددا من الأدوات الرياضية المستخدمة في عمليات التحليل الاقتصادي(المالي والاداري والتخطيطي).

ففي الفصل الاول تناولنا المتواليات والسلاسل ، فعالجنا المتواليات الحسابية والهندسية والحسابية-الهندسية ،ثم السلاسل العددية ومؤشرات تقاربها والسلاسل التابعية وتطبيقاتها.

أما الفصل الثاني فخصصناه للحسابات المالية حيث شمل الفائدة البسيطة والفائدة المركبة وتطبيقاتهما كما تضمن الادخار المنتظم والاستهلاك المنتظم والقروض وطرق تسديدها.

وفي الفصل الثالث استعرضنا التوابع لمتحولين ولعدة

متحولات وبحثنا في مسألة ايجاد النقاط الحرجة الموضعية والشرطية لهذه التوابع وأتبعنا به فقرة عن التكامل الثنائي والمتعدد وتطبيقاته .

كما بحثنا في الفصل الرابع التوابع الانتاجية لمتحول و حد ولعدة متحولات فعرّفنا المؤشرات الاقتصادية المستخدمة في تحليل هذه التوابع واستعرضنا أهم التوابع الانتاجية المستخدمة في الاقتصاد .

وخصصنا الفصل الخامس لجداول المدخلات والمخرجات حيث تعرضنا لمختلف أنواع هذه الجداول من مستوى الدولة والقطاع و لمنشأة .

وعالجنا في الفصل السادس مسائل البرمجة الخطية وقدمنا عرضا مبسطا لخوارزمية (السمبلكس) ، كما تعرضنا للعقبات التي تعترض الحل وطرائق التخلص منها .

واستعرضنا في الفصل السابع أهم نماذج البرمجة الخطية المستخدمة في الاقتصاد ، كخطط القطاعات والمؤسسات ومسألة النقل و لتوزيع الأمثل للتكوين الرأسمالي والاستغلال الامثل للاراضي الزراعية وتركيب الوجبات الغذائية .

وتناولنا في الفصل الثامن نظام التخطيط الشبكي وعالجنا هذه المخططات على مستوى أقصر زمن ثم على مستوى أقل تكلفه وذلك بواسطة نماذج البرمجة الخطية .

واني اذ أضع هذا الكتاب بين أيدي طلابنا وزملائنا أرغب

أن أنـوّه بأني لاأدعي فيه كمالا ولا شمولا ، ولكني أمل أن أكـــــون قد وفقت في استدراج موضوعاته وعرض البراهين فيه ، فإذالم يتحقـق أملنا هذا نأمل من القارئ الكريم أن يوافينا بكل مامن شأنـــــه اصلاح وتطوير ماعرض فيـــه .

ط١ : اللاذقية في ١٢/٥/١٩٨٨

المؤلـــــف

الفصل الأول

المتواليات والسلاسل

I ـ المتواليـــــــــات :

(I ـ 1) ـ تعريـــف : نقول عن كل كميـات عددية من الشكل

$$a_1 , a_2 , a_3 \cdots a_k \cdots a_n$$

أنها متوالية اذا كانت حدودها تنشأ عن بعضها بعضا وفق علاقـــــه أو قانون معين . ونسمي a_1 حدها الاول و a_n حدها الأخير و a_k حدها العام و n عدد حدودها .

وعندما يكون عدد الحدود n محدودا نسمى المتوالـة متواليـه منتهية ، أما عندما يكون عدد الحدود n غير محدود فنسمى المتواليـه متوالية غير منتهية . واذا كانت الحدود متزايده ، أي اذا كان :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant \cdots a_k \cdots \leqslant a_n$$

فاننا نسمي المتوالية متوالية متزايده .

أما اذا كانت الحدود متناقصة أي اذا كان

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant \cdots a_k \geqslant \cdots a_n$$

فاننا نسمي المتوالية متوالية متناقصة .

وسنميز هنا بين عدد من أنواع المتواليات المنتهية وهي :

(I – 2) – المتوالية الحسابية :

(I – 2 – 1) **تعريـــف** : نقول عن المتوالية :

$$a_1, a_2, a_3 \ldots a_k \ldots a_n$$

أنها متوالية حسابية اذا كان الفرق بين أي حد وسابقه يساوي دائما مقدارا ثابتا r $(r \neq o)$ ويسمى r أساس المتوالية الحسابية . أي أنه حتى تكون المتوالية حسابية يجب أن يكون :

$$a_k - a_{k-1} = r \qquad (1,1,1)$$

وذلك مهما تكن k وحيث $(k : 2\ 3 \ldots n)$.

ومن العلاقة $(1\ ,\ 1,\ 1)$ نلاحظ أنه بمكننا كتابة جميع حدود المتوالية بدلالة حدها الاول a_1 وأساسها r كمايلي :

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_k = a_{k-1} + r = a_1 + (k - 1)r$$

$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r$$

وبذلك تأخذ حدود المتوالية الحسابية الشكل التالي :

$$a_1, (a_1 + r), (a_1 + 2r), (a_1 + 3r) \ldots (a_1 + (k-1)r), \ldots (a_1 + (n-1)r)$$

(I – 2 – 2) خواص حدود المتوالية الحسابية :

١ – من التعريف يتضح أن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي مقدارا ثابتا r أي أن

$$a_k - a_{k-1} = r$$

٢ – ان مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقدارا ثابتا وذلك لأن :

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2)r = 2a_1 + (n-1)r$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + (n-3)r = 2a_1 + (n-1)r$$

.....

وهكذا يتضح أن مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقدارا ثابتا هو $2a_1 + (n-1)r$ ويساوي مجموع أي حدين متقابلين آخرين .

(I – 2 – 3) مجموع حدود المتوالية الحسابية :

اذا رمزنا لمجموع حدود المتوالية الحسابية بـ P_n فيكون :

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

لحساب هذا المجموع نكتب حدود المتوالية مرتين وبشكل متعاكس على

النحو التالي :

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \cdots \qquad a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2} \cdots\cdot \quad a_3\ ,\ a_2\ ,\ a_1$$

ثم نأخذ مجموع كل حدين متقابلين ولجميع الحدود فنحصل على العلاقة التالية :

$$(a_1 + a_n)+(a_2 + a_{n-1})+(a_3 + a_{n-2})+ \cdots$$

$$\cdots (a_{n-2} + a_3)+(a_{n-1} + a_2)+(a_n + a_1) = 2P_n$$

وبالاستفادة من الخاصة الثانية السابقة حول مجموع الحدود المتقابلة وبملاحظة أن جميع الازواج في الطرف الايسر متساوية وتساوي $[2a_1+(n - 1)r]$ وان عدد هذه الازواج يساوي n زوجا ، فان العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$n[2a_1 +(n - 1)r] = 2P_n$$

ومنها نجد أن المجموع P_n يساوي :

$$P_n = \frac{n}{2}[2a_1 +(n - 1)r] \qquad (2,1,1)$$

وبما أن المقدار $[2a_1 +(n - 1)r]$ يساوي مجموع أي حدين متقابلين مثل الحدين $(a_1 + a_n)$ ، وبالتعويض في (2, 1, 1) نجد أن مجموع حدود المتوالية الحسابية يمكن أن يحسب من العلاقة التالية :

$$P_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (3,1,1)$$

مثـــال (1 – 1) أوجد نوع وأساس ومجموع حدود المتوالية التالية :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

الحل :نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية حسابية لأن الفرق بيـــن أي حدين متواليين يساوي 2 وأن حدها الاول 2 وحدها الاخيـــر 20 وأن عدد حدودها 10 = n وبذلك نجد أن مجموع حدودها يساوي :

$$P_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(2 + 20) = 110$$

مثال(1 – 2) : أوجد مجموع المتوالية التالية :

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38

الحـل : نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية حسابية أساسها 5 = r وحدها الاول 3 = a_1 والاخير 38 = a_n وعدد حدودها 8 = n وبذلك نجد أن :

$$P_8 = \frac{8}{2}(3 + 38) = 164$$

مثـــال (1 – 3) أوجد مجموع العشرة حدود الاولى لمتوالية حسابية حدها الاول 5 = a_1 وأساسها 6 = r :

الحـل : من العلاقة (1 ,1, 2) نجد أن :

$$P_{10} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)r]$$

$$= \frac{10}{2}[2.5 + 9.6] = 320$$

(I – 2 – 4) مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية التالية:

1, 2, 3, 4, 5, 6 ... (n - 2), (n - 1), n

لحساب مجموع حدود هذه المتوالية نلاحظ أنها متوالية حسابية لأن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي مقدارا ثابتا r (هنا r =1) وأن حدها الأول $a_1 = 1$ وأن حدها الاخير $a_n = n$ وعدد حدودها n لذلك فان مجموعها حسب العلاقة (1 , 1, 3):

$$P_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + n) \qquad (4,1,1)$$

وهي علاقة هامة تستخدم كثيرا في حساب مجموع الاعداد الطبيعية من 1 حتى أي عدد n .

ومن الواضح أنه يمكننا حساب مجموع حدود هذه المتوالية باستخدام العلاقة (1 ,1 , 2) فيكون :

$$P_n = \frac{n}{2}[2.1 + (n - 1).1] = \frac{n}{2}(n + 1)$$

وهي نفس العلاقة (1 , 1 , 4) السابقة .

(I – 2 – 5) مجموع حدود متوالية الاعداد الفردية ومتوالية الاعداد الزوجية الطبيعية:

أوجد العلاقة التي تعطينا مجموع الاعداد الفردية ،من 1 حتى (2n - 1) أي مجموع الـ n حدا الاولى منها، ثم العلاقة التي تعطينا مجموع الاعداد الزوجية من 2 حتى الحد 2n .

الحل : ان متوالية الاعداد الفردية هي :

$$1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots (2n - 1)$$

لحساب مجموعها نلاحظ أنها متوالية حسابية أساسها r=2 وحدها الاول $a_1 = 1$ وحدها الاخير $a_n = (2n - 1)$ وعدد حدودها n حدا

وبذلك يكون :

$$P_n = \frac{n}{2}[1 + (2n - 1)] = n^2 \qquad (5,1,1)$$

وبطريقة مشابهة نجد أن مجموع الاعداد الزوجية من 2 حتى 2n يعطى بالعلاقة :

$$P_n = n(n + 1) \qquad (6,1,1)$$

(I – 2 – 6) مجموع حدود متوالية مربعات الاعداد الطبيعية : وهي المتوالية التي حدودها :

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots k^2, \ldots n^2$$

نرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز S_n فيكون :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$$

ولحساب هذا المجموع نأخذ المتطابقة التالية :

$$k^3 - (k - 1)^3 \equiv 3k^2 - 3k + 1$$

ثم نعطي k القيم المختلفة من 1 حتى n فنجد أنه :

عندما k = 1 يكون	$1^3 - 0^3 \equiv 3.1^2 - 3.1 + 1$
وعندما k = 2 يكون	$2^3 - 1^3 \equiv 3.2^2 - 3.2 + 1$
وعندما k = 3 يكون	$3^3 - 2^3 \equiv 3.3^2 - 3.3 + 1$
وعندما k = 4 يكون	$4^3 - 3^3 \equiv 3.4^2 - 3.4 + 1$
وعندما k = 5 يكون	$5^3 - 4^3 \equiv 3.5^2 - 3.5 + 1$
.....	.....
وعندما k = n يكون	$n^3 - (n - 1)^3 \equiv 3.n^2 - 2n + 1$

نجمع شاقوليا حدود كل طرف على حدة فنحصل على :

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots n^2) - 3(1+2+3+4+5+..+n) + n$$

$$n^3 = 3S_n - 3\frac{n}{2}(1 + n) + n$$

ومنها نجد أن :

$$3S_n = n^3 + \frac{3}{2}n(n + 1) - n$$

$$S_n = \frac{n}{3}[n^2 + \frac{3}{2}(n + 1) - 1]$$

$$S_n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

وبتحليل القوس الذي في الصورة الى عوامله نجد أن مجموع مربعات n عدداً طبيعياً يعطى بالعلاقة :

$$S_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \qquad (16,1,1)$$

مثال (1 – 4) أوجد مجموع مربعات الاعداد الطبيعية من 1 حتى 20

الحل : ان متوالية المربعات العشرين هي :

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots 20^2$$

وان مجموعها S_n يساوي :

$$S_n = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

(I – 2 – 7) مجموع حدود متوالية مكعبات الاعداد الطبيعية :وهي المتوالية :

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3 \ldots k^3 \ldots n^3$$

واذا رمزنا لمجموع حدودها بـ σ_n فيكون :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

ولحساب هذا المجموع ننطلق من المتطابقة :

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

يمكننا التوصل الى مانريد باتباع الاسلوب الذي اتبعناه في متوالية المربعات،ولكننا هنا سنتبع أسلوبا آخر للبرهان، فنأخذ المجموع النوني لكلا الطرفين فيكون :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^4 \equiv 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - n$$

وبملاحظة أن الطرف الايسر يساوي n^4 يكون لدينا :

$$n^4 = 4\sigma_n - 6\Sigma k^2 + 4\Sigma k - n$$

وبالاستفادة من العلاقتين (1 , 1 , 16) و(1 , 1 , 4) يكون:

$$n^4 = 4\sigma_n - 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n}{2}(1+n) - n$$

ومنه يكون لدينا :

$$4\sigma_n = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

وباجراء بعض الاصلاحات نجد أن :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (17,1,1)$$

مثال (1 – 5) أوجد مجموع مكعبات الاعداد الطبيعية من 1

الحل : ان متوالية المكعبات هي :

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3\ \ldots\ 20^3$$

ومجموع حدودها هو :

$$\sigma_n = [\frac{20.21}{2}]^2 = 44100$$

(I – 3) المتوالية الهندسية :

(I – 3 – 1) **تعريف** : نقول عن المتوالية :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ \ldots\ a_k\ \ldots\ a_n$$

انها متوالية هندسية اذا كانت نسبة كل حد على سابقه تساوي دائما مقدارا ثابتا q (بشرط $q \neq 1$)،ويسمى q أساس المتوالية الهندسية . أي أنه في المتوالية الهندسية يكون لدينا :

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \qquad (18,1,1)$$

وذلك مهما تكن k حيث (k : 2 3 ... n)

ومن العلاقة (18, 1, 1) يتضح لنا أنه يمكننا كتابة الحد العام للمتوالية الهندسية على الشكل :

$$a_k = q\ a_{k-1}$$

ومنه نجد أن :

$$a_2 = qa_1$$

$$a_3 = a_2q = a_1q^2$$

.....

$$a_k = a_{k-1}q = a_1q^{k-1}$$

.....

$$a_n = a_{n-1}q = a_1q^{n-1}$$

كما يمكن كتابة الحدود كما يلي :

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3 \ldots a_1q^{k-1} \ldots a_1q^{n-1} \quad (19,1,1)$$

(I – 3 – 3) مجموع حدود المتوالية الهندسية :

لنرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز G_n فيكون :

$$G_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots a_1q^{k-1} \ldots + a_1q^{n-1} \quad (20,1,1)$$

ولحساب هذا المجموع نضرب طرفي العلاقة (20, 1, 1) بالاساس فنحصل على العلاقة :

$$qG_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots a_1q^k + \ldots a_1q^n \quad (21,1,1)$$

ثم نطرح المجموع (20, 1, 1) من المجموع (21, 1, 1) فنجد أن

$$qG_n - G_n = a_1q^n - a_1$$

$$G_n(q - 1) = a_1(q^n - 1)$$

وبذلك نجد أن المجموع G_n يساوي :

$$G_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (q \neq 1) \qquad (22,1,1)$$

مثال (1 – 6) أوجد أساس ومجموع المتوالية :

2, 6, 18, 54, 162, 486

الحل : نلاحظ أن نسبة أي حد على سابقه تساوي 3 أي أن $q = 3$ ،

وبذلك يكون مجموع هذه الحدود لهذه المتوالية الهندسية مساويا :

$$G_6 = 2\,\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728$$

مثـــال(1 – 7): يحكى أن مخترع الشطرنج طلب مقابل اختراعـــــه أن يضعوا له حبة قمح في المربع الاول ثم ضعفها في الثاني ثـــــم ضعفها في الثالث ... الخ.فلم يتمكن السلطان من أداء هذه الجائزة .

فما هو مجموع عدد حبات القمح اللازمة لذلك ؟

الحـل : ان متوالية عدد حبات القمح هي :

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ldots,\ a_{64}$$

وهي عبارة عن متوالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الاول وعـــدد حدودها $n = 64$ (عدد المربعات) وبذلك نجد أن مجموع حبات القمح اللازمة يساوي :

$$G_{64} = 1.\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 184467{,}44.10^{15}$$

مثـــال(1 – 8) : اذا كان مجموع حدود متوالية هندسية يساوي 242 وكان أساسها $q=3$ وعدد حدودها $n = 5$ فما هو حدها الاول .

الحـل : من العلاقة (1, 1, 22) نجد أن :

$$242 = a_1\,\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121\ a_1$$

$$a_1 = \frac{242}{121} = 2$$

مثـــال (1 ـ 9) : اذا علمنا أن مجموع حدود متوالية هندسيه يساوي 728 ، وأن أساسها 3 = q وأن حدها الاول $a_1=2$ فما هو عدد حدودها ؟

الحـل : من العلاقة (1 , 1 , 22) نجد أن :

$$728 = 2\,\frac{3^n - 1}{3 - 1} = 3^n - 1$$

$$729 = 3^n$$

لحسـاب n نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن :

$$\lg(729) = n \lg(3)$$

$$n = \frac{\lg(729)}{\lg(3)} = 6$$

(I ـ 4) المتوالية الحسابية ـ الهندسيـــة :

لقد رأينا أن الحد العام للمتوالية الحسابية يعطـــى بالعلاقـــة :

$$a_k = a_1 + (k - 1)r$$

وأن الحد العام للمتوالية الهندسية يعطى بالعلاقة :

$$a_k = a_1 q^{k-1}$$

(I ـ 3 ـ 1) تعريف الحد العام :

ان الحد العام للمتوالية الحسابية الهندسية يعطى بالعلاقة :

$$a_k = [a_1 + (k - 1)r]q^{k-1} \qquad (23,1,1)$$

فهو اذن حد مركب من جزء حسابي أساســـه $r\,(r \neq o)$ وجـزء هندسي

أساسه $q(1 \neq q)$ أما k فهو رقم الحد العام . وبذلك يمكننا كتابة حدود المتوالية الحسابية الهندسية كمايلي :

$$a_1, (a_1 + r)q, (a_1 + 2r)q^2, (a_1 + 3r)q^3 \ldots [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}$$

(I - 3 - 2) مجموع حدود المتوالية الحسابية الهندسية :

لنرمز لهذا المجموع بـ Q_n فيكون لدينا :

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)r]q^{k-1}$$

لايجاد هذا المجموع نفرقه كمايلي :

$$Q_n = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + r \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} - r \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \qquad (24,1,1)$$

لنأخذ كل مجموع على حدى فنجد أن :

$$a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$r \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

وذلك لأن كليهما يعبر عن مجموع حدود متوالية هندسية أساسها q وحدها الاول a_1 و r على الترتيب .

أما المجموع الاوسط فنرمز له بـ D_n ونعالجه كمايلي :

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + nq^{n-1}$$

نضرب الطرفين بـ q فيكون :

$$qD_n = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots (n-1)q^{n-1} + nq^n$$

نطرح المجموع الثاني من الاول فنجد أن :

$$D_n - qD_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \quad q^{n-2} + q^{n-1} - nq^n$$

$$D_n - qD_n + nq^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \; q^{n-1}$$

وبملاحظة أن الطرف الايمن هو مجموع حدود متوالية هندسية أساسها q وحدها الاول $a_1 = 1$ وبذلك يكون لدينا :

$$D_n - qD_n + nq^n = 1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$D_n(1 - q) = \frac{q^n - 1}{q - 1} - nq^n$$

وبذلك نجد أن المجموع الاوسط يساوي :

$$D_n = \frac{nq^n}{(q - 1)} - \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2}$$

وبالتعويض في (1 , 1 , 24) نجد أن :

$$Q_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + r\left[\frac{nq^n}{q - 1} - \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2}\right] - r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$Q_n = \frac{a_1 q^n - a_1 + rnq^n - rq^n + r}{q - 1} - r \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2}$$

$$Q_n = \frac{q^n[a_1 + r(n - 1)] - a_1}{q - 1} + \frac{r}{q - 1} - r \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2}$$

$$Q_n = \frac{q^n[a_1 + r(n-1)] - a_1}{q - 1} + \frac{r(q-1) - r(q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

$$Q_n = \frac{a_1 - q^n[a_1 + r(n-1)]}{1 - q} + \frac{r(q - q^n)}{(1-q)^2} \qquad (25,1,1)$$

وهي العلاقة التي تعطينا مجموع n حدا للمتوالية الحسابية الهندسية التي حدها الاول a_1 وأساسها الحسابي r وأساسها الهندسي q .

مثال (1-10) : أوجد مجموع حدود المتوالية:

4, 14, 40, 104, 256

بعد قليل من التفكير نجد أن المتوالية هي متوالية حسابية هندسية أساسها الحسابي r = 3 وأساسها الهندسي q = 2 وحدها الاول يساوي $a_1 = 4$

وبتطبيق العلاقة (25, 1 , 1) نجد أن مجموع حدودها الخمسة يساوي :

$$Q_5 = \frac{4 - 2^5[4 + 3(4)]}{1 - 2} + \frac{3(2 - 2^5)}{(1-2)^2} =$$

$$= \frac{4 - 32.16}{-1} + \frac{3(-30)}{1} = 418$$

(I - 5) المتوالبات غير المنتهية :

ان المتوالبات غير المنتهية هي التي تتصف لانها تستمر الى الحدود ونكتب على الشكل التالي

$$a_1, a_2, a_3 \cdots a_k \cdots a_n \cdots$$

وعند حساب مجموع حدود هذه المتواليات يجب أن نلاحظ أن هذا المجموع قد يكون لانهائيا ، لذلك فمن المهم جدا أن ندرس هذه الحالات وأن نبحث عن قيمة مجموع حدود المتواليات غير المنتهية اذا كانت موجودة .

وهنا نشير الى أن مجموع المتوالية الحسابية وغير المنتهية يكون لانهائيا مهما يكن أساسها وحدها الاول (انظر العلاقتين (1 ,1 ,2) و(1 ,1 ,3) أما بالنسبة للمتواليات الهندسية غير المنتهية فاننا نلاحظ من العلاقة (1 , 1 , 22) أن مجموعها G_n يكون معينا فقط عندما يكون أساسها $|q| < 1$ ، أما عندما يكون $|q| \geq 1$ فان ذلك المجموع G_n يصبح لانهائيا أوغير معين ، وسنصادف مثل هذه الحالات في فقرة السلاسل التالية :

II- السلاسل العددية :

(II - 1) **تعريف السلسلة** : ان السلسلة هي المجموع اللانهائي لحدود متوالية غير منتهية .

فاذا كانت لدينا المتوالية غير المنتهية التالية :

$$a_1, a_2, a_3 \cdots, a_k \cdots a_n \cdots$$

فان السلسله هي المجموع S حيث ان :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1,2,1)$$

وحيث ان a_k هو الحد العام للمتوالية غير المنتهية السابقة .

وسنصطلح على أن نرمز للسلسله التي حدها a_k بالرمز $\{a_k\}$.

وهنا نميز بين نوعين من السلاسل هما :

١ ـ السلاسل المتقاربة :

وهي السلاسل التي يكون فيها للمجموع السابق S قيمة معينة ، ونسمي هذه القيمه بنهاية السلسلة المفروضة .

٢ ـ السلاسل المتباعدة :

وهي السلاسل التي يكون فيها للمجموع السابق S قيمة غير معينة أو لانهائية .

ونلاحظ أن حساب قيمة المجموع S (وحتى في السلاسل المتقاربة) يعتبر أمرا مستحيلا وذلك لأنه يتضمن لانهاية من الحدود ، لذلك فاننا نقوم بأخذ الـ n حدا الاولى من حدود المتوالية ونحسب مجموعها (اذا أمكن) بدلالة n ، ثم ننهي n الى اللانهاية فنحصل على قيمة المجموع اللانهائي S ،أو على نهاية السلسلة عندما تنتهي n الى اللانهاية .

فاذا رمزنا الى الـ n حدا الاولى من حدود المتوالية بالرموز :

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_k \dots a_n$$

ولمجموعها بالرمز S_n فيكون :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (2,2,1)$$

ومن الواضح أن نهاية S_n عندما تنتهي n الى اللانهاية (اذا كانت

هذه النهاية موجودة) يساوي المجموع الحقيقي S أو نهاية السلسلة المفروضة . أي أن :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \qquad (3,2,1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

ويمكن أن نكتب ذلك على الشكل :

$$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} S \qquad (4,2,1)$$

وهنا نشير الى أن الكلام عن مجموع لانهائي لحدود متوالية ما لن يكون له معنى الآ عندما تكون السلسله متقاربة .

وعندما يكون n كبيرا بشكل كاف وتكون السلسلة متقاربة فان المجموع S_n يعتبر قيمة تقريبية مقبولة للمجموع S . وان الخطأ R_n المرتكب من جراء ذلك التقريب يساوي :

$$R_n = S - S_n \qquad (5,2,1)$$

ويسمى R_n بباقي السلسلة وهو عبارة عن مجموع لانهائي أيضا نحصل عليه من السلسلة الاصلية بعد حذف الـ n حدا الاولى منها ،أي أن :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (6,2,1)$$

وان قيمة الخطأ R_n تبقى في أغلب الاحيان مجهولة وتستبدل (اذا كانت السلسلة متقاربة) بقيمة تقريبية لها .

(II - 2) السلسلة الهندسيـــــة :

لتكن لدينا المتوالية الهندسية غير المنتهية التالية :

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots aq^n,\ aq^{n+1} \ldots$$

ومجموعها S يساوي :

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + aq^{n+1} \ldots .$$

ويطلق عليه اسم السلسلة الهندسيـــــة .

ولايجاد قيمة S هذه نأخذ مجموع الـ n حدا الاولى منهـــا S_n فيكون :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots aq^{n-1}$$

واعتمادا على العلاقة (1 , 1 , 22) نجد أن S_n يساوي :

$$S_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (7,2,1)$$

لحساب قيمة S ننهي n الى اللانهاية ونبحث عن نهايـــــة S_n

وهنا نميز الحالات التالية :

ا)- عندما يكون $|q| < 1$: في هذه الحالة يكون :

$$\lim_{n \to \infty} q^n = o$$

$$|q| < 1$$

وتكون نهاية S_n تساوي :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = a\,\frac{-1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}$$

اي أن :

$$S = \frac{a}{1 - q} \qquad (8,2,1)$$

وهي قيمة معينة .

اذن السلسلة تكون متقاربة في هذه الحالة .

٢)ـ عندما $|q| > 1$ فان :

$$q^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

أي أن السلسلة الهندسية في هذه الحالة تكون متباعدة .

٣)ـ عندما $q = 1$ فاننا نجد أن :

$$S_n = \underbrace{a + a + a \ldots . + a}_{\text{مرة } n} = na$$

$$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

وتكون السلسلة متباعدة أيضا .

٤)ـ عندما $q = -1$ فانه يكون لدينا

$$S_n = \underbrace{a - a + a - a + \ldots + a}_{\text{مرة } n}$$

وبذلك يكون :

$$S_n = \begin{cases} a & \text{اذا كان } n \text{ فرديا} \\ o & \text{اذا كان } n \text{ زوجيا} \end{cases} \qquad (9,2,1)$$

أي أن نهاية S_n غير معينة لانها تتناوب بين أحد القيمتين . a و o

لذلك نعتبر السلسلة متباعدة .

ولتقدير الخطأ المرتكب من جراء تقريب S بواسطة S_n عندما تكون السلسلة متقاربة ($|q| < 1$) (لامعنى للبحث عن الخطأ في حالة السلاسل المتباعدة) نجد أن :

$$R_n = S - S_n = \frac{a}{1-q} - a\,\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q} \qquad (10,2,1)$$

وبما أن $|q| < 1$ لأن السلسلة متقاربة فرضا يكون لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} a\,\frac{q^n}{1-q} = 0 \qquad (11,2,1)$$

أي أن الخطأ المرتكب R_n يقترب من الصفر كلما ازداد عدد الحدود n .

مثال (١-٥): كتطبيق على ماسبق مجموع حدود المتوالية غير المنتهية التالية :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \cdots\cdots \frac{1}{2^{n-1}} \cdots$$

الحل : نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية هندسية غير منتهية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الاول $a = 1$.

وبذلك يكون مجموعها S هو السلسلة التالية :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

ملاحظة : مما سبق نلاحظ أن عملية التعبير عن المجموع S_n بواسطة علاقة رياضية ليست بالامر السهل ، لا بل انها عملية متعذرة في

كثير من الاحيان،لذلك فان دراسة تقارب السلاسل عن طريق ايجاد تلك العلاقة بدلالة n ثم انهاء n الى اللانهاية ليست طريقة عملية وقد لاتؤدي بنا الى نتيجة محددة، عدا عن أن حساب S_n بدلالة n لايعتبر ضروريا في كثير من الحالات ، وحيث يكون همنا الاول معرفة فيما اذا كانت السلسلة متقاربة ،وبعدها نأخذ عددا محدودا من المجموع ونعتبره قيمة تقريبية لـ S . ولهذا فاننا سنبحث عن طرق أخرى لدراسة تقارب السلاسل وذلك بدون الاهتمام بقيمة نهاية S_n عندما تنتهي n الى اللانهاية . وقبل أن نستعرض بعض وأهم هذه الطرق التي سنسميها (بمؤشرات تقارب السلاسل) نذكّر بأهم خواص السلاسل المتقاربة .

* خواص السلاسل المتقاربة :

١- ان مجموع (أو طرح) سلسلتين متقاربتين هو سلسلة متقاربة .

٢- ان جداء أي سلسلة متقاربة بعدد ثابت ومحدود هو سلسلة متقاربة .

٣- ان حذف (أو اضافة) عدد محدود من حدود سلسلة متقاربة لايؤثر على تقاربها .

٤- ان الحد العام للسلسلة المتقاربة ينتهي الى الصفر أي أن:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

ان البرهان على هذه الخواص سهل جدا ، وخاصة اذا علمنا أن قيمة

المجموع اللانهائي تبقى محدودة ومعينة في كل الحالات السابقة ، ويجب أن نشير الى أن الخاصة الرابعة هي شرط لازم وغير كاف للتقارب .

III – مؤشرات تقارب السلاسل العددية :

(III – 1) مؤشر نهاية المجموع S_n :

ان هذا المؤشر هو نفسه الوارد في تعريف تقارب السلاسل فاذاكانت نهاية S_n محدودة ومعينة فان السلسلة تكون متقاربة ، أي أن السلسلة تكون متقاربة اذا كانت :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \qquad (1,3,1)$$

حيث S عددا محدودا معينا .

ولقد أوردنا بعض الامثلة عن هذا المؤشر من خلال الفقرة II

مثال (1 – 11) : ادرس تقارب السلسلة التوافقية الشهيرة التالية :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad (2,3,1)$$

لدراسة تقارب هذه السلسلة نأخذ S_n فنجد أن :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ان حساب هذا المجموع بدلالة n يعتبر أمرا في غاية الصعوبة .

لذلك فانه لدراسة تقارب السلسلة $\{\frac{1}{k}\}$ نعود الى المجموع اللانهائي (1 , 3 , 2) ونفرد حدوده على الشكل التالي :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

ولنحاول البحث عما اذا كان لهذا المجموع قيمة محدودة ومعينة أم لا ؟ لذلك نقوم بتجميع حدوده ضمن أقواس متتالية بحيث تحوي كل قوس 2^{m-1} حدا من حدوده، حيث m هو الرقم المتتالي للقوس ، فنجد أن :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) +$$

$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{17} + \quad + \frac{1}{32}) + \ldots$$

وهنا نلاحظ أن عدد الاقواس لابد وأن يكون لانهائيا لأن عدد الحدود لانهائي .

فاذا استبدلنا عناصر كل قوس بأصغرها فاننا سنحصل على مجموع جديد أصغر من المجموع السابق نرمز له بـ S´ ويساوي :

$$S' = 1 + \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + 8.\frac{1}{16} + 16.\frac{1}{32} + \ldots < S$$

ونلاحظ أن S´ أصبح يساوي :

$$S' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

$$S' = 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} 1 = 1 + \infty$$

أي أن قيمة S' هي لانهائية .

ولكن بما أن $S < S'$ اذن المجموع S يأخذ قيمة لانهائية أيضا وهذا مايبرهن على تباعد السلسلة $\{ \frac{1}{k} \}$.

(III – 2) **مؤشر المقارنة** : ويعتمد على النظرية التالية :

* نظريـــــة : اذا كانت لدينا السلسلتان التاليتان :

$$\{a_k\} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots a_n + \ldots$$

$$\{b_k\} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_k + \ldots b_n + \ldots$$

وكانت جميع حدودهما موجبة ، أي كان $a_k > o$ و $b_k > o$ وذلك مهما نكن k ، وكان كل حد من حدود السلسلة الاولى أصغر أو يساوي مقابله من السلسله الثانية وذلك اعتبارا من قيمة محدودة لـ k مثل m . أي أن :

$$a_k \leqslant b_k \qquad \forall : k \geqslant m$$

فان السلسلة $\{ a_k \}$ تكون متقاربة اذا كانت $\{ b_k \}$ متقاربة .

وان السلسلة $\{ b_k \}$ تكون متباعدة اذا كانت $\{ a_k \}$ متباعدة .

البرهـــان : من الواضح أن حذف عدد محدود من حدود أية سلسلـــة موجبة لايؤثر على تقاربها لأن مجموع تلك الحدود سيكون محـــدودا ومعينا ، ومع أن قيمة مجموعها S تنقص بمقدار ذلك المجمـــوع ،

فاذا كانت قيمة S محدودة فان المجموع اللانهائي للسلسلة الجديدة سيكون محدودا ومعينا وبالتالي تبقى السلسلة الجديدة متقاربة .

لذلك نحذف من السلسلتين $\{ a_k \}$ و $\{ b_k \}$ الحدود الاولى التي لاتحقق المتراجحة $a_k \leq b_k$ ونرمز للسلسلتين الجديدتين بالرمزين $\{ a'_k \}$ و $\{ b'_k \}$ فيكون لدينا :

$$\{a'_k\} = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$$

$$\{b'_k\} = b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \dots$$

ولنرمز لمجموع الاولى بـ S' ولمجموع الثانية بـ σ' فيكون :

$$S' \leq \sigma'$$

وبما أن الحدود موجبة اذن فلابد وأن يكون مايلي :

اذا كانت $\{ b'_k \}$ متقاربة فان $\{a'_k\}$ تكون متقاربة أيضا لأنه اذا كان المجموع σ' محدودا فان S' يكون محدودا أيضا . واذا كانت $\{ a'_k \}$ متباعدة فان $\{ b'_k \}$ تكون متباعدة أيضا،لأنه اذا كان المجموع S' لانهائيا فان المجموع σ' يكون لانهائيا أيضا . وبما أن $\{ a'_k \}$ هي ناتجه عن $\{ a_k \}$ بحذف عدد محدود من الحدود الاولى ، فان $\{a_k\}$ تكون متقاربة عندما تكون $\{ b_k \}$ متقاربة .

وأن $\{ b_k \}$ تكون متباعدة عندما تكون $\{ a_k \}$ متباعدة .

مثـــال (1 – 12) : ادرس تقارب السلسلتين :

$$\{a_k\} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{k^k} + \ldots$$

$$\{b_k\} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots$$

وبملاحظة أن حدود كل من السلسلتين موجبة وأن السلسله $\{b_k\}$ هي متقاربة كما برهنا في مثال سابق لأنها سلسلة هندسه أساسها $q = \frac{1}{2}$ وهو أصغر من الواحد .

وبما أنه لدينا : $a_k \leq b_k$ وذلك مهما تكن k .

اذن السلسلة $\{a_k\}$ هي سلسلة متقاربة اي أن سلسلة مقلـــــوب القوى الزائيه للاعداد الطبيعية هي سلسلة متقاربة .

مثـــال (1 – 13) ادرس تقارب السلسلتين :

$$\{a_k\} = 1 + 1 + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} + \ldots$$

$$\{b_k\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots$$

نلاحظ أولا أن جميع حدود هاتين السلسلتين موجبة ، ولسهوله المقارنـة نحذف من $\{a_k\}$ الحدين الاول والثاني فنحصل على السلسلة :

$$\{a'_k\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} + \ldots$$

وبملاحظة أن كل $a'_k \leq b_k$ وبما أن السلسلة $\{b_k\}$ متقاربه

(لانها سلسلة هندسية أساسها $q = \frac{1}{2} < 1$) فان السلسله $\{a'_k\}$ متقاربة وبالتالي تكون $\{a_k\}$ متقاربة أيضا .

(III – 3) **مؤشر التقارب بالقيمة المطلقة** : ونعتمد على النظريـــه التاليـــة :

* **نظريـــة** : تكون السلسلة (a_k) متقاربه اذا كانت سلسله القيم المطلقة $\{|a_k|\}$ متقاربة .

البرهان : لنفترض أن $\{|a_k|\}$ متقاربه ، ثم نأخذ السلسلـــــه $\{a_k + |a_k|\}$ فنجد أن :

$$\{a_k + |a_k|\} = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \ldots + (a_k + |a_k|) + \ldots$$

ثم نأخذ السلسله $\{2|a_k|\}$ فتكون متقاربه حسب الفرض ويساوي:

$$\{2|a_k|\} = 2|a_1| + 2|a_2| + 2|a_3| \ldots 2|a_k| + \ldots$$

وبما أنه لدينا بشكل عام العلاقة التالية :

$$a_k \leq |a_k|$$

وباضافة $|a_k|$ الى الطرفين يمكننا أن نستنتج أن :

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$$

وهذا يعني أن حدود السلسلة الاولى $\{a_k + |a_k|\}$ أصغر أو تساوي حدود السلسلة المتقاربة $\{2|a_k|\}$ ، واعتمادا على مؤشر المقارنـــــه تكون السلسلة $\{a_k + |a_k|\}$ متقاربه .

واذا قمنا بطرح السلسلة المتقاربة فرضنا $\{|a_k|\}$ من السلسلة المتقاربة برهانا $\{|a_k| + a_k\}$ نحصل على سلسلة متقاربة هي $\{a_k\}$.

اذن $\{a_k\}$ متقاربة اذا كانت $\{|a_k|\}$ متقاربة.

(III – 4) مؤشر (دالاسبير d'Alamber):

ويعتمد على النظرية التالية :

نظرية : اذا كانت القيمة المطلقة لنسبة الحدين a_{k+1} على a_k من السلسلة $\{a_k\}$ لاتتجاوز مقدارا موجبا وأصغر من الواحد q وذلك اعتبارا من قيمة ما لـ k مثل k_o فان السلسلة $\{a_k\}$ تكون متقاربة.

وبعبارة أخرى تكون $\{a_k\}$ متقاربة اذا كانت :

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant q < 1 \qquad (3,3,1)$$

وذلك مهما تكن $k \geqslant k_o$.

وبعبارة ثالثة تكون السلسلة $\{a_k\}$ متقاربة اذا كانت :

$$\lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1 \qquad (3,3,2)$$

البرهان : لنفترض أن شروط الفرض محققة ولنبرهن على تقارب

السلسلة $\{a_k\}$ لذلك نأخذ سلسلة الحدود المطلقة $\{|a_k|\}$ وذلك اعتبارا من الحد $|a_{k_o}|$، وذلك لأن حذف عدد محدود من حدود السلسلة لا يؤثر على تقاربها وبالتالي نحصل على الحدود التالية.

$$|a_{k_o}| , |a_{k_{o+1}}|, |a_{k_{o+2}}| \dots |a_{k_{o+r}}|$$

وبما أنه لدينا اعتبارا من k_o العلاقة التالية

$$\left|\frac{a_{k_{o+r+1}}}{a_{k_{o+r}}}\right| = \frac{|a_{k_{o+r+1}}|}{|a_{k_{o+r}}|} < q < 1$$

فاننا نحصل على أن

$$|a_{k_{o+1}}| < q|a_{k_o}|$$

وكذلك نجد أن :

$$|a_{k_{o+2}}| < q|a_{k_{o+1}}| < q^2|a_{k_o}|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$|a_{k_{o+r}}| < q\,a_{k_{o+r-1}} < q^r|a_{k_o}|$$

أي أن كل حد من حدود سلسلة القيم المطلقة أصغر أو يساوي الحد المرافق من السلسلة :

$$|a_{k_o}| + q|a_{k_o}| + q^2|a_{k_o}| + \dots + q^r|a_{k_o}| + \dots$$

ويملاحظة أن هذه السلسلة هي سلسلة هندسية حدها الاول $|a_{k_o}|$ وأساسها $0 < q < 1$ (فرضا) هي كما رأينا سابقا، سلسلة متقاربة، اذن سلسلة القيم المطلقة $\{|a_{k_o}|\}$ هي سلسلة متقاربة ويكون a_{k_o}

متقاربة وبالتالي فان سلسلة القيم الاطلية $\{a_k\}$ متقاربة .

* ملاحظة : عندما يكون :

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

فان السلسلة $\{a_k\}$ تكون متباعدة حتما . أما عندما يكون :

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$$

فهناك حالة شك بتقارب السلسلة ونزيله بالعودة الى المؤشـــــرات الاخرى .

مثـــال(1 - 14) : ادرس تقارب السلسلة $\{\frac{1}{k(k+1)}\}$:

لدراسة تقارب هذه السلسلة نلاحظ أن الحدين a_k و a_{k+1} هما :

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} \quad , \quad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

وأن :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\frac{1}{k(k+1)}} \right| = \left| \frac{k}{k+2} \right|$$

وأن :

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{k}{k+2} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{2}{k}} \right| = 1$$

وهذا يعني أن هناك حاله شك حول تقارب هذه السلسلة ، للتخلص من هذه الحالة نعود الى أصل السلسلة ونكتبها على الشكل التالي :

$$\{a_k\} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \ldots$$

ولنحاول كتابه كل حد على الشكل التالي :

$$\{a_k\} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \ldots$$

وادا أخذ المجموع S_n نجد أن :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

وبذلك نجد أن :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$$

وهو عدد محدود . اذن السلسلة $\frac{1}{k(k+1)}$ متقاربة .

■ ملاحظه يجب الانتباه الى الفرق بين نهاية S_n التي تساوي المجموع الكلي S وبين نهاية النسبة $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ التي تشير الى نسبه حدين فقط من حدود السلسلة .

(III - 5) مؤشر (ليبنيز Labniz):

ونستخدم هذا المؤشر للسلاسل المتناوبة فقط ، ونعرضه من خلال النظريه التاليه :

* نظريـــــة : اذا كانت لدينا سلسلة متناوبة بانتظام ،كالتالية :

$$\{(-1)^{k+1}a_k\} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots\ (-1)^{k+1}a_k + \ldots$$

وكانت حدود سلسلة القيم المطلقة متناقصة باستمرار ، أي أن (مـــع الانتباه الى أن $a_k = |-a_k|$).

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \ldots \geq a_k \qquad (4,3,1)$$

وكان الحد العام a_k ينتهي الى الصفر،أي أن:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = o$$

فان السلسلة المتناوبة تكون متقاربة .

البرهـــان : للبرهان نأخذ المجموع S_n وبما أن السلسلة متناوبة فاننا سنميز بين حالة n زوجيا وحالة n فرديا ،

ا)- حالة n زوجيا : لنأخذ مجموع الـ 2n حدا الاولى منها فنجد أن :

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

ويمكن كتابة هذا المجموع كمايلي :

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_6 - a_7) \ldots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

وبما أن كل حد ضمن الاقواس أكبر من الذي يليه ،اذن فـان جميع المقادير التي ضمن الاقواس هي مقادير موجبـــــه ، وبالتالي فان قيمة المجموع S_{2n} لابد وأن تكون أصغـــر من الحد الاول a_1 واذا رمزنا لنهاية S_{2n} بالرمز S فلا بد أن يكون :

$$\lim_{k \to \infty} S_{2n} = S < a_1$$

ومن جهة أخرى نجد أيضا أن :

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})$$

وبما أنه لدينا حسب الفرض $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ اذن نجد أن:
المجموعين S_{2n+1} و S_{2n} ينتهيان الى نفس المعينة لأن:

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+2} = \lim_{n \to \infty} S_{2n} = S < a_1$$

اذن السلسلة المتناوبة متقاربة لأن نهاية المجموع S_{2n} محدودة ومعينة .

٢) – حالة n فرديا : يتم البرهان على هذه الحالة بطريقة مشابهه وذلك لأن $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ ومع ملاحظة أن:
$\lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = 0$ ، فان المجموعين S_{2n} و S_{2n+1} ينتهيان الى نفس النهاية S . اذن السلسلة متقاربة في الحالتين لأن لها نفس النهاية S .

مثال (1 – 15) : ادرس تقارب السلسلة $\{(-1)^{k+1} \frac{1}{k}\}$

الحل : نلاحظ أن حدود هذه السلسلة هي متناوبه بانتظام وهي:

$$\{(-1)^{k+1} \frac{1}{k}\} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \quad (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \ldots$$

ونلاحظ أن القيم المطلقة لحدودها متناقصة وتحقق العلاقة :

$$1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{5} \geq \ldots$$

كما نلاحظ أيضا أن :

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

اذن السلسلة $\{ (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \}$ هي سلسلة متقاربة حسب مؤشـــــر (ليبنيز) .

ملاحظة هامـة : لايجوز تطبيق مؤشر (ليبنيز) الاّ على الســـــلاسل المتناوبة بانتظام وان تطبيقه على السلاسل الموجبة يعطينا نتائج خاطئة ،كما أن تطبيقه على السلاسل غير المتناوبه بانتظام مخالـــف للشروط النظرية ولايعطينا نتائج مؤكدة، وخير مثال على السلا ســـل الموجبة التي تحقق جميع شروط مؤشر (ليبنيز) (ماعد شرط التناوب طبعا) هي السلسلة الشهيرة .

$$\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots$$

وهي سلسلة متباعدة كما برهنا سابقـــا .

(III ـ 6) مؤشر (كوشـــي Cauchy):

وسنعرضه من خلال النظرية التالية :

* نظريـــة : اذا كان الجذر من المرتبة k للقيمة المطلقة للحد العام a_k للسلسلة $\{ a_k \}$ لايتجاوز عددا موجبا وأصغر من الواحـــد q وذلك اعتبارا من قيمة لـ k مثل k_o ،فان السلسلة $\{ a_k \}$ تكون متقاربة : أي أنه اذا كان :

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad : \forall \ k \geq k_o$$

أو اذا كان $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$

فـــــــان السلسلـــة $\{ a_k \}$ تكون متقاربة .

البرهـــــان : لنقتصر في البرهان على الحدود :

$$a_{k_o} , a_{k_o+1}, a_{k_o+2}, a_{k_o+3} \cdots a_{k_o+r} \cdots\cdots$$

وذلك لأن حذف عدد محدود من حدود السلسلة لايؤثر على تقاربها، وبنا ء على الفرض يكون لدينا :

$$\sqrt[k_o]{|a_{k_o}|} \leq q \ , \quad \sqrt[k_o+1]{|a_{k_o+1}|} \leq q \cdots \quad \sqrt[k_o+r]{|a_{k_o+r}|} \leq q \cdots$$

حيث أن $0 < q < 1$.

نرفع طرفي كل متراجحة الى أس يساوي دليل الجذر فيهـــــا فنحصل على المتراجحات التالية :

$$|a_{k_o}| \leq q^{k_o} \ , \ |a_{k_o+1}| \leq q^{k_o+1}, \cdots |a_{k_o+r}| \leq q^{k_o+r} \cdots$$

وبملاحظة أن حدود سلسلة القيم المطلقة أصغر أو تساوي من الحـــــدود المقابلة لها في السلسلة الهندسية $\{q^{k_o+r}\}$ والتي حدها الاول q^{k_o}

وأساسها $0 < q < 1$ ولهذا فهي سلسلة متقاربة (كما برهنا سابقا).

وبذلك تكون السلسلة $\{|a_{k_{o+r}}|\}$ متقاربة (حسب مؤشر المقارنة)

ثم تكون السلسلة $\{|a_{k_o}|\}$ متقاربة وتكون السلسلة $\{a_k\}$ متقاربة .

مثال (1 – 16) : ادرس تقارب السلسلة $\{(\frac{k+1}{2k+1})^k\}$

لدراسة تقارب هذه السلسلة نطبق عليها مؤشر (كوشي) فنجد أن :

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{(\frac{k+1}{2k+1})^k} = \frac{k}{2k+1}$$

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

اذن السلسلة المفروضة متقاربة .

* ملاحظة : اذا كانت $\lim \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ فالسلسلة متباعدة .

أما اذا كانت : $\lim \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ فهناك شك حول حالة السلسلة ويجب اتباع أساليب أخرى للكشف عن وضعها .

IV – السلاسل التابعية :

ان السلاسل التابعية تختلف عن السلاسل العددية بوجود

متحول x ضمن حدودها ، ونرمز للسلسلة التابعية بالرمز $\{u_k(x)\}$ ولمجموع حدودها بالرمز $S(x)$ ونكتب السلسلة على الشكل التالي :

$$\{u_k(x)\} : u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots = S(x)$$

ومن الواضح أن جميع حدود هذه السلسلة مرتبطة بالمتحول x وبالتالي فان مجموعها سيكون تابعا لـ x لذلك رمزنا له بـ $S(x)$ ،ونستخلص من هذا أنه لايمكننا التحدث عن تقارب السلاسل التابعية بمعزل عن المتحول x . فاذا أعطينا x قيما معينة مثل x_o أو x_1 ...الخ.

فاننا سنحصل على سلسلة عددية مقابل كل قيمة من قيم x وهي :

$$\{u_k(x_o)\} : u_1(x_o) + u_2(x_o) + u_3(x_o) + .. + u_k(x) + .. = S(x_o)$$

$$\{u_k(x_1)\} : u_1(x_1) + u_2(x_1) + u_3(x_1) + .. + u_k(x_1) + .. = S(x_1)$$

.....

.....

وان تقارب كل من هذه السلاسل العددية مرتبط بالقيمة التي أخذها المتحول x ، ولهذا فاننا نعرف مجال أو منطقة تقارب السلسلة التابعية كمايلي :

$\{ u_k(x) \}$ هو جملة قيم المتحول x التي تجعل السلسلة التابعية متقاربة .

وبتعبير آخر ان مجال تقارب السلسلة التابعية هو نفسه مجال تعريف تابع مجموعها $S(x)$ باعتباره تابعا عدديا لـ x له مجال تعريف وخواص أخرى مثل قابلية الاشتقاق والتكامل .

وبالعكس فاذا كانت x_o نقطة من مجال تقارب السلسلة التابعية $\{ u_k(x) \}$ فان السلسلة العددية .

$$u_1(x_o) + u_2(x_o) + u_3(x_o) + \ldots + u_k(x_o) + \ldots = S(x_o)$$

تكون متقاربة . ونسمي المجموع $S(x_o)$ بمجموع السلسلة التابعية $\{ u_k(x) \}$ في النقطة $x = x_o$ وهو مرتبط بالقيمة x_o نفسها .

مثال (1 ـ 17) أوجد مجال تقارب السلسلة التابعية :

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots + \frac{x^k}{2^k} + \ldots$$

الحل : نلاحظ أن هذه السلسلة هي مجموع حدود متوالية هندسية غير منتهية ، حدها الاول $a = 1$ وأساسها $q = \frac{x}{2}$. ومن دراستنا السابقة نعلم أن مثل هذه السلاسل تكون متقاربة فقط عندما يكون $|q| < 1$. أي أن السلسلة المفروضة تكون متقاربة عندما $|\frac{x}{2}| < 1$ أي عندما $|x| < 2$ ، وبالتالي فان مجال تقارب

السلسلة هو المجال] 2,2- [.

مثـــال (1 – 18) أوجد مجال تقارب السلسلة التابعية :

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

الحـــل : لدراسة تقارب هذه السلسلة نطبق مؤشر (دالامبير) فنجد أن :

$$\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \frac{|x|}{k+1}$$

ومن الواضح أنه اذا بقي x محدودا فان :

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$$

وبالتالي فان السلسلة التابعية السابقة تكون متقاربة من أجل جميع قيم x المحدودة .

أي أن مجال تقارب السلسلة المذكورة هو المجال]∞+, ∞- [وهنا نشير الى أن السلسلة السابقة ماهي الا منشور التابع الأسي e^x في جوار الصفر (حسب ماك لوران) أي أن :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

وبما أنها سلسلة متقاربة اذن يمكننا الاعتماد عليها في حســـاب

قيمة تقريبية لـ e حيث نضع x = 1 فنجد أن :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots$$

واذا أخذنا الخمسة حدود الاولى فقط نحصل على :

$$S_5 \approx e = 2,728$$

مثـــال (1 – 19) : أوجد مجال تقارب السلسلة الناتجة عن نشر التابع $\sin x$ **حسب (ماك لوران) ثم أوجد السلسلة التي تعطينا التكامـــل** $\int_0^x \frac{\sin x}{x} a_x$ **وادرس تقاربها :**

الحـــل : نعلم أن منشور التابع $\sin x$ حسب (ماك لوران) هو:

$$\sin x = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

حيث $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

لدراسة تقارب هذه السلسلة التابعية نطبق مؤشر (دالامبير) :

$$\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}\right| = \frac{-x^2}{(2k+3)(2k+2)}$$

ومن الواضح أنه عندما تبقى قيم x محدودة فان :

$$\lim_{k \to \infty} \left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \lim_{k \to \infty} \frac{-x^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0$$

وهذا يعني أن السلسلة السابقة تكون متقاربة من أجل جميع قيـــم x المحدودة ، أي أن مجال تقاربها هو المجال $]-\infty , +\infty[$.

لايجاد السلسلة التي تعطينا التكامل المذكور نلاحظ أن:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + .. + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + ..$$

وهي سلسلة متقاربة أيضا من أجل جميع قيم x المحدودة ،وهذا شـــرط أساسي لاجراء التكامل عليها.

ولايجاد التكامل المطلوب نكامل حدود السلسلة الاخيرة حـــدا حدا فنجد أن :

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} + \frac{x^7}{7.7!} + ..$$

$$.. (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} + ...$$

وهي سلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x لأن :

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1} x^{2k+3}}{(2k+3)(2k+3)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}} \right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{-x^2(2k+1)}{(2k+3)^2(2k+2)} = 0$$

وبذلك يمكننا بثقة تامة حساب قيمة التكامل السابق من أجل أية قيمـــة x وذلك بتعويضها في الطرف الايمن واجراء الحسابات اللازمة.

ولكن بما أن عدد الحدود لانهائيا ، فاننا نكتفي بعدد من الحدود الاولى لحساب قيمة تقريبية لذلك التكامل .

ويتم تحديد عدد الحدود اللازمة حسب الدقة المطلوبة .

وأخيرا نشير الى أننا لانعرف تابعا أصليا للتابع المكامل $\frac{\sin x}{x}$ ولايمكن مكاملته الاّ بهذه الطريقة ، وان التكامل $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ هو من التكاملات الخاصة .

مثال (1 – 20) ادرس تقارب السلسلة الناجمة عن منشور (ماك لوران) للتابع $e^{-x^2/2}$ وأوجد السلسلة التي تعطينا التكامل الاحتمالي الشهير $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$ ثم أدرس تقاربها :

الحل : من المعلوم أن منشور (ماك لوران) للتابع e^x هو :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

ولايجاد منشور $e^{-x^2/2}$ نعوض كل x بـ $\frac{-x^2}{2}$ في المنشور السابق فنجد أن :

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2.1!} + (\frac{x^2}{2})^2 \frac{1}{2!} - (\frac{x^2}{2})^3 \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k (\frac{x^2}{2})^k \frac{1}{k!} + \ldots$$

ولدراسة تقاربها نطبق مؤشر (دالامبير) فنجد أن :

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} (\frac{x^2}{2})^{k+1} \frac{1}{(k+1)!}}{(-1)^k (\frac{x^2}{2})^k \frac{1}{k!}} \right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{-x^2}{2(k+1)} = 0$$

وذلك من أجل جميع قيم x المحدودة . أي أن مجال تقارب السلسلة

الناتجة عن نشر $e^{-x^2/2}$ هو المجال $]\infty+ , \infty-[$ وهي بشكل خاص متقاربة في المجال $[o , x]$ المحدد في التكامـــــل .

ولهذا فان عملية التكامل على التابع $e^{-x^2/2}$ هي اجـــراء قانوني .

أما بالنسبة للسلسلة التي تعطينا التكامل المطلوب فنحصل عليهـــــا بمكاملة الطرف الايمن حدا حدا فنجد أن:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_o^x e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[x - \frac{x^3}{1!.2.3} + \frac{x^5}{2!.2^2.5} - \ldots . (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!.2^k.(2k+1)} + \ldots]$$

وهنا نشير الى أن التكامل الاخير ماهو الا تابع التوزيع الاحتمالـي الطبيعي المعياري الذي مرّ ذكره في الاحصـــاء .

ولحساب أية قيمة لهذا التكامل مقابلة لقيمة معينةلـ x مثل x_o نعوض هذه القيمة في الطرف الايمن ونأخذ عددا معينا مـــن الحدود (حسب الدقة المطلوبة) ونحسب الناتج فنحصل على قيمـــــة تقريبية للتكامل المذكور .

وان القيم المرتبة في جدول تابع التوزيع الطبيعي المعياري تـــم حسابها باستخدام السلسلة السابقة وذلك لأننا لانعرف تابعا أصليا للتابـــع $e^{-x^2/2}$.

وكمثال على ذلك نحسب قيمة التكامل من o حتى 1 فنجد أن:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_o^1 e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[1 - \frac{1}{2.1!.3} + \frac{1}{2^2.2!.5} - \frac{1}{2^3.3!.7} - \ldots] = 0.3413$$

تمرينـــــــــــــات

١ ـ أوجد نوع وأساس ومجموع المتتاليات التالية :

أ ـ متتالية الاعداد الفردية من 1 حتى 99 .

ب ـ المتتالية 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

جـ ـ المتتالية التي حدها الاول $a_1 = 5$ وأساسها $r = 2$ وعـــــدد حدودها $n = 15$.

د ـ المتتالية التالية :

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$$

هـ ـ المتتالية التي حدها الاول $a = 4$ وأساسها $q = 2$ وعـــــدد حدودها $n = 10$.

و ـ المتتالية التي حدودها :

$$1, 2x, 3x^2, 4x^3, 5x^4, \ldots nx^{n-1}$$

ز ـ المتتالية :

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

٢ـ أوجد الحد العام للسلاسل التالية :

أ ـ السلسلة :

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 +$$

ب ـ السلسلة :

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \ldots$$

جـ ـ السلسلة :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \frac{6}{26} + \ldots$$

٣ ـ ادرس تقارب السلاسل التالية :

أ ـ السلسلة

$$\{ (\frac{2}{3})^{k-1} \}$$

ب ـ السلسلة

$$\{ \frac{1}{k^2 - \frac{k}{2}} \}$$

جـ ـ السلسلة

$$\{ \sin \frac{1}{k^2} \}$$

د ـ السلسلة

$$\{ \frac{1}{3^{k+1}} \}$$

هـ ـ السلسلة

$$\frac{1}{3^4 - 4^3} + \frac{1}{3^5 - 5^3} + \ldots + \frac{1}{3^{n+3} - (n+3)^3}$$

و ـ السلسلة

$$1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2.3^2} + \frac{1}{2^3.3^3} + \ldots + \frac{1}{2^k.3^k}$$

٤ ـ ادرس تقارب السلاسل التابعية التالية :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots (-1)^{k-1} x^k + \ldots$$

ب ـ $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^k \frac{x^k}{k} \ldots$

د ـ السلسله النابحه عن منسور (ماك لوران) للتابع $\cos x$

د ـ السلسله النابحه عن منسور (ماك لوران) للتابع $\operatorname{tg} x$

هـ ـ السلسله النابحه عن منسور (ماك لوران) للتابع $\ln(1 + x)$.

الفصل الثاني

الحسابات المالية

I - الايداع العام :

عندما نودع مبلغا من المال في أحد المصارف ، فاننا نستحق على ذلك فائدة سنوية (أو نصف سنوية) معينة ، ولهذا فان ذلك المبلغ سيزداد سنة بعد سنة ، وان مقدار الزيادة يتأثر بمقدار المبلغ المودع ، وبعدد السنين وبسعر الفائدة وطريقة حسابها .

وهناك طريقتان لحساب الفائدة هما :

(I - 1) طريقة الفائدة البسيطة :

ان هذه الطريقة تشترط أن تكون الفائدة الحاصلة على المبلغ مع مرور الزمن منفصلة عن المبلغ نفسه ، أي لاتحسب لها فائدة جديده (أي أن هذه الطريقة لاتضيف الفائدة المستحقة الى أساس المبلغ المودع لتحصل على فائدة جديدة).

(I – 1 – 1) **حصيلة المبلغ المودع** : وهي القيمة التي يبلغها المبلغ المودع بعد n سنة .

لنفرض أن المبلغ المودع هو K وان سعر الفائدة السنوية هو P فان ذلك المبلغ ، حسب هذه الطريقة ، سيبلغ بعد سنة كاملة من ايداعه مقدارا قدره K_1 والذي يساوي :

$$K_1 = K + PK = K(1 + P)$$

وبعد مرور سنتين على ايداع المبلغ K سيبلغ المقدار K_2 والذي يساوي :

$$K_2 = K + KP + KP = K(1 + 2P)$$

وبعد مرور ثلاث سنوات سيبلغ المقدار K_3 والذي يساوي :

$$K_3 = K + KP + KP + KP = K(1 + 3P)$$

.....

وبعد مرور n سنة سيكون لدينا المبلغ K_n والذي يساوي :

$$K_n = K(1 + nP) \qquad (1.1.2)$$

وهو الدستور الذي يعطينا حصيلة ايداع المبلغ K لمدة n سنة وبفائدة بسيطة P .

(I – 1 – 2) **القيمة الحالية لمبلغ أودع لمدة n سنة** :

لنرمز للمبلغ الذي يستحق بعد مرور n سنة بالرمز K_n وان القيمة الحالية لـ K_n هي مقدار المبلغ الذي نحد ايداعه في

بداية الزمن بفائدة بسيطة قدرها P لمبلغ بعد مرور n سنة المبلغ المعلوم K_n .

لحساب هذه القيمة الحالية نستفيد من العلاقة (2 , 1 , 1) فنجد أن القيمة الحالية K تساوي:

$$K = \frac{K_n}{1 + nP} \qquad (2,1,2)$$

ويستفاد من دستور القيمة الحالية في عمليات خصم السندات المؤجلة

* ملاحظة (1) :

ان العلاقة (2 , 1 , 1) أو (1 , 1 , 2) تحتوي على أربعة مجاهيل هي : K_n و K و n و P فاذا علمنا ثلاثة منها أمكننا حساب المجهول الرابع .

* ملاحظة (2) :

ان العمل في نظام الفائدة البسيطة أصبح نادرا ،ويقتصر تطبيقه في حساب الفائدة الناجمة عن ايداع المبالغ لفترات قصيرة لاتتجاوز العام (عدة أيام أو أشهر) ، وذلك لأنه يحقق أكبر ربح ممكن للمستثمر اذا كانت الفترة لاتتجاوز العام .

مثال (2 – 1) : ماهي حصيلة ايداع مبلغ (15000) ل.س بفائدة بسيطة سنوية 6% (P=0,06) لمدة 72 يوما ؟

الحل : من العلاقة (2 , 1 , 1) نجد أن :

$$K_n = 15000[1 + \frac{72}{360}(0,06)] = 15180 \text{ L.S}$$

مثال (2 – 2) : ماهو مقدار المبلغ الذي يجب ايداعه لمده (5) أشهر وبفائدة سنوية بسيطة قدرها5% (P=0,05) لنحصل على20000 لس

الحل: من العلاقه (2, 1,2) نجد أن :

$$K = \frac{20000}{1 + \frac{5}{12}(0,05)} = 19591,84 \text{ L.S}$$

مثال (2 – 3): ماهو احمالي الفائدة الناجم عن ايداع 0000الس لمدة (9) أشهر بفائدة بسيطة قدرها8% (P = 0,08) .

الحل : ان حصله المبلغ المودع يساوي :

$$K_n = 10000[1 + \frac{9}{12}(0,08)] = 10600 \text{ L.S}$$

وان احمالي الفائدة يساوي:

$$10600 - 10000 = 600 \text{ L.S}$$

مثال (2 – 4): ماهو سعر الفائدة السنوية البسيطة التي أودع حسبها مبلغ (12000) ل.س لمدة سنة وثلاثة أشهر وكانت حصيلته (13800) ل.س .

الحل: من العلاقه (1,1,2) نجد أن :

$$13800 = 12000(1 + 1\frac{3}{12} P)$$

$$\frac{13800}{12000} - 1 = \frac{15}{12} P$$

$$P = \frac{1800}{12000} \times \frac{12}{15} = 0,12 \quad 12\%$$

مثـــال (2 ـ 5): ماهي المدة التي يجب أن نودع بها مبلغ (7000) ل.س بفائدة سنوية بسيطة قدرها8% (P=0,08) لنحصل على (10000) ل.س

الحـــــل: من العلاقة (2 ,1 ,1) نجد أن :

$$10000 = 7000[1 + n(0,08)]$$

$$\frac{10000}{7000} - 1 = 0,08\ n$$

$$n = \frac{3000}{7000(0,08)} = 5,357 = 5\ \frac{129}{360}$$

مثـــال (2 ـ6) : أراد أحد التجار بيع سند قيمته (1500) ل.س ويستحق الدفع بعد(110)أيام علما بأن سعر الفائدة البسيطـــــة السنوية يساوي (P = 0,09) فماهي قيمته الحالية ؟

الحـــل : ان القيمة الحالية لهذا السند تعطى من العلاقة(2 ,1 ,2) فنجد أن :

$$K = \frac{K_n}{1 + nP} = \frac{1500}{1 + \frac{110}{360}(0,09)} = 1459,85\ L.S$$

(I ـ 2): طريقة الفائدة المركبة :

ان طريقة الفائدة المركبة تشترط أن تضاف الفائدة الحاصلة سنويا (أو عدة مرات في السنة) الى المبلغ الاساسي لتحسب لهـــا فائدة جديدة .

(I- 2 - 1) حصيلة ايداع مبلغ K :

وهي القيمة التي يبلغها المبلغ المودع بعد مرور n سنة على ايداعه وفق طريقة الفائدة المركبة .

ولايجاد العلاقة التي تعطينا هذه الحصيلة نفترض أن المبلغ المودع هو K وان سعر الفائدة هو P وان الفائدة مركبة وسنوية، فبعد مرور سنة كاملة على ايداع ذلك المبلغ K سيصبح مساويا للمقدار K_1 حيث :

$$K_1 = K + KP = K(1 + P)$$

وبعد مرور سنتين سيصبح مساويا للمقدار K_2 حيث :

$$K_2 = K_1 + PK_1 = K_1(1 + P) = K(1 + P)^2$$

وبعد مرور ثلاث سنوات سيصبح مساويا للمقدار K_3 حيث :

$$K_3 = K_2 + PK_2 = K_2(1 + P) = K(1 + P)^3$$

.....

وبعد مرور n سنة على ايداعه سيصبح مساويا لـ K_n حيث :

$$K_n = K_{n-1} + PK_{n-1} = K(1 + P)^n$$

وبذلك نجد أن حصيلة ايداع المبلغ K لمدة n سنة وبفائدة سنوية مركبة P يساوي :

$$K_n = K(1 + P)^n \qquad (3,1,2)$$

واذا رمزنا للمقدار P+1 بالرمز r (أي نضع $r = 1 + P$) نجد أن :

$$K_n = Kr^n \qquad (4,1,2)$$

ويسمى r بعامل الفائدة وهو يساوي دائما $r = 1 + P$.

نلاحظ أن هذه العلاقة تحتوي على أربعة مجاهيل هي K_n و K و n و r (أو P) فاذا علمنا ثلاثة منها نستطيع حساب الرابع .

(I - 2 - ٤) القيمة الحالية لمبلغ أودع مدة n سنة :

وهي مقدار المبلغ الذي يجب ايداعه لمدة n سنة وبفائدة مركبة P لنحصل على المبلغ المذكور، ومن العلاقة (4, 1,2) نجد أن القيمة الحالية للمبلغ K_n الذي أودع لمدة n سنة وبفائدة مركبة P $(r = 1 + P)$ تحسب من العلاقة :

$$K = \frac{K_n}{r^n} = K_n . v^n \qquad (5,1,2)$$

حيث :
$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1 + P}$$

(I- 2 - 3) حالات خاصة لطريقة الفائدة المركبة :

اذا كانت طريقة الفائدة المركبة تقتضي اضافتها الى المبلغ الاساسي عدة مرات خلال السنة الواحدة فان العلاقات (2 ,1 ,3)و (2 ,1 ,4) و (5,1,2) تأخذ شكلا آخر نحصل عليه كمايلي :

لنفترض أن عدد المرا ت التي تضاف الفائدة المركبة الى المبلغ الاساسي هو m مرة . فاذا كانت الفائدة نصف سنوية فان $m = 2$ واذا كانت شهرية فان $m = 12$ ...الخ.

أي أنه في هذه الحالة تضاف الفائدة بعد مرور كل $\frac{1}{m}$ من السنة

وان سعر الفائدة الجديد $\grave{P}$ يحسب من العلاقة *

$$\grave{P} = \frac{P}{m} \qquad (6,1,2)$$

وبذلك نجد أن المبلغ الاساسي K سيصبح بعد مرور $\frac{1}{m}$ من السنة مساويا :

$$K_{1/m} = K + \grave{P}K = K(1 + \frac{P}{m})$$

وبعد مرور $\frac{2}{m}$ من السنة يصبح المبلغ K مساويا لـ:

$$K_{2/m} = K_{1/m} + \grave{P}K_{1/m} = K_{1/m}(1 + \frac{P}{m}) = K(1 + \frac{P}{m})^2$$

وبعد مرور $\frac{3}{m}$ من السنة يصبح المبلغ K مساويا لـ:

$$K_{3/m} = K_{2/m} + \grave{P}K_{2/m} = K_{2/m}(1 + \frac{P}{m}) = K(1 + \frac{P}{m})^3$$

وهكذا نجد أنه بعد مرور سنة أي $\frac{m}{m}$ من السنة فان K يبلغ :

$$K_{m/m} = K(1 + \frac{P}{m})^m$$

وبعد مرور n سنة ، أي بعد اجراء n.m اضافة فان المبلغ K يصبح مساويا مايلي :

$$K_{\frac{n.m}{m}} = K(1 + \frac{P}{m})^{n.m}$$

---

* ان حساب سعر الفائدة للفترات الجزئية $\grave{P}$ يمكن أن يحسب من العلاقة :

$$\grave{P} = (1 + P)^{1/m} - 1 = \sqrt[m]{r} - 1$$

وان قيمته المحسوبة من هذه العلاقة تختلف قليلا عن قيمته المحسوبة من العلاقة (6,1,2) واننا سنرى تطبيقات عديدة لهذه العلاقة الاخيرة في الفقرات اللاحقة

والذي نكتبه على شكله النهائي التالي :

$$K_n = K(1 + \frac{P}{m})^{n.m} \qquad (7,1,2)$$

أو على الشكل :

$$K_n = K.r^{n.m} \qquad (8,1,2)$$

حيث أن : $r = 1 + \frac{P}{m}$

ويمكننا تعميم فكـــرة تكرار اضافة الفائدة خلال السنة الواحدة بأن نفترض أن اضافتها تجري باستمرار طيلة أيام السنة ، وهذه الفكرة تعني أن نجعل عدد مرات اضافة الفائدة ينتهي الـــى اللانهاية . أي نجعل $m \to \infty$ في العلاقة (7, 1, 2) وفـــــي هذه الحالة نجد أن العلاقـــة (7, 1, 2) السابقة تأخـــذ الشكـــل التالي :

$$\lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{m \to \infty} K(1+\frac{P}{m})^{n.m} = K \lim_{m \to \infty} (1+\frac{1}{\frac{m}{P}})^{\frac{m}{P}.Pn} = Ke^{Pn}$$

أى أن :

$$\lim_{m \to \infty} K_n = K.e^{P.n} \qquad (9,1,2)$$

وبمقارنة العلاقة (9 , 1,2) مع العلاقات (2 , 1 , 2)و(4 , 1, 2) و (7, 1, 2) و (8, 1,2) نحصل على العلاقة الهامة التالية :

$$K_n \leq K.e^{P.n} \qquad (10,1,2)$$

أي أن المقدار $Ke^{P\,n}$ هو الحد الاقصى الذي لايمكن أن يتجاوزه حصيلة المبلغ K عندما يزداد عدد المرات التي يضاف بها العائده الى المبلغ الاساسي بشكل كبير جدا .

أما القيمة الحالية لمبلغ أودع لمدة n سنه حسب طريقة العائده المركبة والتي يضاف m مره خلال العام الواحد فنحسب من العلاقه (8, 1, 2) فنجد أن :

$$K = \frac{K_n}{r`^{m.n}} = K_n . v`^{m.n} \qquad (11,1,2)$$

حيث أن :

$$v` = \frac{1}{r`} = \frac{1}{1 + \frac{P}{m}}$$

كما يمكننا أن نستنتج من العلاقه (10,1,2)أن القيمة الحالية K تحقق المتراجحه :

$$K \geqslant \frac{K_n}{e^{P.n}} \qquad (12,1,2)$$

* ملاحظة : ان حساب K_n في العلاقات(2, 2,1) و (2 , 1, 4) و (2 ,1, 7) و (2 , 1, 8) يقتضي حساب r^n أو $r`^{nm}$ أو $(1 + P)^n$ أو $[1+ \frac{P}{m}]^{nm}$، وان حساب هذه الكمية لايعتبر أمر سهلا وخاصة عندما تكون n كبيرة نسبيا .

لاجراء مثل هذا الحساب فاننا نستخدم الآلات الحاسبة أو جداول خاصة معدة لذلك أو جداول اللوغاريتمات ، لأنه يمكننا تحويل

العلاقات السابقة الى شكل لوغاريتمي بعد أن نأخذ لوغاريتم الطرفين كمايلي :

$$\lg K_n = \lg K + n \lg r \qquad (13,1,2)$$

ومن هذه العلاقة يمكننا حساب أي من المجاهيل الاربعة اذا علمنا ثلاثة منها .كمايمكن الاستعانة بالجدول رقم (٥) الملحق بآخر الكتاب .

مثال (2 - 7): اذا أودعنا في مصرف مبلغا قدره (100000)ل.س بفائدة مركبة قدرها 3% (P = 0,03). فماهي حصيلة رصيدنا بعد مرور عشر سنوات .

الحل : ان الرصيد الحاصل هو K_{10} ويعطى من العلاقة :

$$K_{10} = (100000)(1 + 0,03)^{10} = 100000(1,03)^{10}$$

ولاجراء مثل هذه الحسابات نستخدم الآلة الحاسبة فنجد أن :

$$K_{10} = (100000)(1,34392) = 134392 \text{ L.S}$$

ويمكننا حساب هذه الحصيلة باستخدام جداول اللوغاريتمات وبتطبيق العلاقة (2 , 1 , 13) فنجد أن:

$$\lg K_n = \lg(100000) + 10 \lg(1,03)$$

$$\lg K_n = 5 + 10(0,01284) = 5,128373$$

ولايجاد K_n نبحث عن العدد الذي لوغاريتمه 5,128373 فنجد أن:

$$K_n = \text{intlg}(5,128373) = 134391$$

ان اختلاف هذه النتيجة عن الاولى يعود الى تقريب الارقام في حساب اللوغاريتمات .

مثـــال (2 ـ 8) : أودع شخص (25000) ل.س بفـائدة مركبـــــة قدرها 4% (P = 0,04) ولمدة عشر سنوات ، والمطلوب :

١ ـ احسب حصيلة هذا المبلغ بعد هذه المدة .

٢ ـ أوجد المدة التي كان يجب أن يترك مبلغه مودعا طيلتها ليحصل على نفس الحصيلة السابقة وذلك اذا كانت الفائدة بسيطة وقدرهـا 4% أيضـا .

الحـــل : ان الرصيد بعد عشر سنوات يحسب من العلاقة المركبة :

$$K_{10} = 25000(1,04)^{10} = 37000$$

٢ ـ لحساب المدة بالسنوات نحسب n من العلاقة البسيطة :

$$K_n = K(1 + nP)$$

$$37000 = 25000[1 + n(0,04)]$$

$$(0,04)n = \frac{37000}{25000} - 1$$

$$n = \frac{37000 - 25000}{0,04(25000)} = 12$$

أي يلزمه 12 سنة للحصول على نفس المبلغ الذي حصل عليه خـــــلال عشر سنوات .

مثـــال (2 ـ 9) : اتفق شخص مدين مع دائنه أن يستبدل السندين التاليين :

السند الاول وقيمته 5000 ل.س ويستحق بعد 3 سنوات .

السند الثاني وقيمته 6000 ل.س ويستحق بعد 5 سنوات .

بسند جديد يستحق بعد 7 سنوات . فاذا كانت الفائدة مركبة وقدرها 6 % (P = 0,06) فماهي قيمة السند الجديد؟

الحـــل :لنرمز بـ K_7 لقيمة السند الجديد وبـ K_1 للقيمة الجديـــدة للسند الاول وبـ K_2 للقيمة الجديدة للسند الثاني وبذلك يكون :

$$K_7 = K_1 + K_2$$

ولكن القيمة الجديدة للسند الاول K_1 تنتج عن المبلـــغ (5000) المستحق بعد 3 سنوات نتيجة تأجيل تسديده لمدة أربع سنـــــوات ، أخرى وبذلك يكون :

$$K_1 = 5000(1 + 0,06)^4 = 6312,38 \text{ L.S}$$

وكذلك القيمة الجديدة للسند الثاني K_2 تنتج عن تأجيل تاريـــــخ استحقاق السند الثاني لمدة سنتين أخريتين فيكون :

$$K_2 = 6000(1,06)^2 = 6741,6 \text{ L.S}$$

وبذلك نجد أن قيمة السند الجديد البديل هي :

$$K_7 = K_1 + K_2 = 6312,38 + 6741,6 = 13054 \text{ L.S}$$

مثـــال (2 -10) : قرر مجلس التخطيط الاعلى أن يعمل على زيـــادة الانتاج خلال الخطة الخمسية القادمة بمقدار 85 % فماهو معـــدل التزايد السنوي لحجم الانتاج الذي يجب اتباعه لتنفيذ هذا القرار .

الحـــل : لنفترض أن حجم الانتاج في بداية الخطة الخمسية هو K وأن حجم الانتاج في نهاية الخطة الخمسية هو K_5 وحسب القـــرار المفروض يجب أن يكون :

$$K_5 = K + (0,85)K = (1,85)K$$

ومن الواضح أن عملية الانتاج شبيهة جدا بعملية الايداع بفائـــدة مركبة ، لأن الانتاج في كل عام يساهم في الانتاج خلال العام التالـي

له ، وبذلك تضاف الفوائد الانتاجية الى الرصيد الاجتماعي لتساهم في عملية الانتاج من جديد .

ولهذا فانه يمكننا كتابة العلاقة بين K_5 و K على الشكل التالي :

$$K_5 = K(1 + P)^5$$

حيث P هو معدل التزايد السنوي (وهو مايقابل الفائدة المركبة).

وبالاستفادة من [illegible] نحصل على :

$$(1,85)K = K(1 + P)^5$$

$$1,85 = (1 + P)^5$$

$$P = \sqrt[5]{1,85} - 1 = 1,1309 - 1 = 0,1309$$

أي أن معدل التزايد السنوي يجب أن يكون 13,09 % حتى نتمكن من تنفيذ قرار المجلس القاضي بزيادة الانتاج بمقدار 0,85 خلال كامل الخطة الخمسية .

مثال (2 – 11) : أودع أحدهم (100000) ل.س بفائدة مركبة سنوية قدرها 6% (P = 0,06) ثم سحبه بعد ثلاث سنوات و 90 يوما فماهي حصيلته عند السحب اذا كانت الفائدة تضاف سنويا ؟
وماهي حصيلته اذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة ؟

الحل : ان حصيلته عند السحب اذا كانت الفائدة تضاف سنويا هي:

$$K_n = 100000(1,06)^{3+\frac{90}{300}} = 121438 \quad L.S$$

أما حصيلته عند السحب اذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة فتحسب على أساس أن سعر الفائدة نصف السنوية تساوي نصف الفائدة السنوية أي :

$$P' = \frac{P}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03$$

وبذلك نجد أن المدة تصبح 6 أنصاف سنة +90 يوما ويكون :

$$K_n = 100000(1,03)^{6+\frac{90}{180}} = 121542$$

ومن الواضح أن نظام الفائدة نصف السنوي أفضل للمودع من النظام السنوي .

* ملاحظة : بعد هذه الامثلة المتعددة نشير الى أن لقانون الفائدة المركبة تطبيقات كثيرة في المجالات الاقتصادية (كمسائل الانتاج) وفي المجالات الاجتماعية (كتزايد السكان)،وان عملية تطبيقه في المصارف قد تكون أعقد من ذلك ،لأن هناك كثيرا من الامور التنظيمية تتحكم في طريقة حساب الفائدة ومواعيدها .

II - الاستثمار المنتظم :

ان الاستثمار المنتظم هو عبارة عن ايداع دفعات متساوية خلال فترات متساوية لقاء فائدة معينة . وهناك اسلوبان لهذا الايداع هما :

١ ـ اسلوب الدفعات الفورية : وفيه يتم ايداع الدفعه الاولى في بداية الفترة الزمنية الاولى والثانية في بداية الفترة الزمنية الثانيه .... الخ . ولهذا السبب تسمى هذه الدفعات بالدفعات الفورية ، لأنها تدفع فورا في بداية الزمن، كما تسمى بالدفعات الاستثمارية .

٢ ـ أسلوب الدفعات العادية : وفيه يتم ايداع الدفعة الاولى في نهاية الفترة الزمنية الاولى (أو بعد مرور وحدة زمنية كاملة) والثانية في نهاية الفتره الثانية والثالثة في نهاية الفترة الثالثة ... وتسمى هذه الدفعات بالدفعات العادية ، كما تسمى بدفعات التسديد .

(I - II) حصيلة n دفعة فورية :

نفترض أن مقدار حجم كل دفعة من الدفعات المتساوية هو Q ، وأن المودع يقوم في بداية كل عام بايداع دفعاته ، فبعد مرور n سنة على الدفعة الاولى ستصبح حصيلتها حسب العلاقة (4,1,2) السابقة مساوية لـ Q_1 حيث :

$$Q_1 = Q r^n \qquad (r = 1 + P)$$

أما الدفعة الثانيه والتي دفعت بعد سنه كاملة من الدفعة الاولى فان حصيلتها ستصبح مساويه بعد مرور (n - 1) سنة لـ Q ، حيث :

$$Q_2 = Q r^{n-1}$$

وحصيلة الثالثة ستصبح :

$$Q_3 = Q r^{n-2}$$

.....

وتصيله الدفعه الاخيره التي لم تستمر غير سنة واحده تساوي

$$Q_n = Qr$$

وتصبح الحصيله الاجمالية S_n الناتجه عن جميع الدفعات المتساوية والمتتالية مساوية لـ

$$S_n = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n$$

$$S_n = Q[r^n + r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r^2 + r]$$

نعكس ترتيب الحدود داخل القوس فنحصل على :

$$S_n = Qr[1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1}]$$

وبملاحظة أن ماداخل القوس ماهو الاّ مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول $a=1$ وأساسها $q = r$، وبالاستفادة من العلاقة (1,1,1) نجد أن :

$$S_n = Qr \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad (1,2,2)$$

وهي العلاقة التي تعطينا الحصيلة الناتجة عن ايداع دفعات سوية متساوية قدرها Q ولمدة n سنة وبفائدة مركبة P ($r = 1 + P$) وذلك بعد مرور سنة كاملة على تسديد الدفعة الاخيرة منها .

حالة خاصة :

- اذا كان الايداع يتم على شكل دفعات جزئية عددها m دفعة في العام وكانت الدفعة الاولى تدفع في بداية الفترة الاولى والتي مدتها $\frac{1}{m}$ من السنة وهكذا تتوالى الدفعات الاخرى ، وكانت الفائدة سنوية ،واذا رمزنا لمقدار الدفعة الجزئية بالرمز Q^*

فاننا نجد :

أن حصيلة الدفعة الاولى التي تدفع في بداية الزمن وتستغرق n عاما تساوي :

$$Q\, r^{n}$$

وأن حصيلة الدفعة الثانية التي تدفع في بداية الفترة الثانية وتستغرق ($n - \frac{1}{m}$) عاما تساوي :

$$Q\, r^{n-\frac{1}{m}}$$

وأن حصيلة الدفعة الثالثة التي تدفع في بداية الفترة الثالثة وتستغرق ($n - \frac{2}{m}$) عاما تساوي

$$Q\, r^{n-\frac{2}{m}}$$

وأن حصيلة الدفعة الاخيرة التي تدفع في بداية فترة الاخيرة وتستغرق $\frac{1}{m}$ عاما تساوي $Q\, r^{\frac{1}{m}}$

وبذلك تكون حصيلة هذه الدفعات الجزئية بعد n عاما مساوية لـ :

$$S_n = Q[r^{n} + r^{n-1/m} + r^{n-2/m} + \ldots + r^{2/m} + r^{1/m}]$$

نعكس ترتيب الحدود داخل القوس فنجد أن :

$$S_n = Q[r^{1/m} + r^{2/m} + r^{3/m} + \ldots + r^{n-1/m} + r^{n.m/m}]$$

وبملاحظة أن ما داخل القوس هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول $a = r^{1/m}$ وأساسها $q = r^{1/m}$ وعدد حدودها n.m حدا لذلك نجد أن :

$$S_n = Q[r^{1/m} \frac{(r^{1/m})^{n.m} - 1}{r^{1/m} - 1}]$$

وبعد الاصلاح نحصل على العلاقة التالية :

$$S_n = Q' r^{1/m} \frac{r^n - 1}{r^{1/m} - 1} \qquad (2,2,2)$$

مثـــال (2 - 12) : يودع أحدهم في مطلع كل عام (3000) ل.س فاذا علمت أنه أودع أول دفعة في 1 / 1 / 1971 وأن الفائـــدة السنوية المركبة هي (P = 0,05) . فما هي حصيلة دفعاته بتاريـــخ 12/31 / 1980 .

الحـــــل: ان الدفعات سنوية والفائدة سنوية وعدد الدفعات قبل عام من التاريخ المذكور هي عشر دفعات،ومن العلاقة (2 ,2 ,1) نجـــد أن الحصيلة تساوي :

$$S_n = 3000(1,05) \frac{(1,05)^{10} - 1}{1,05 - 1} = 39620,36 \text{ L.S}$$

مثـــال (2 - 13): يريد أحدهم توفير (40000) ل.س خلال ثـلاث سنوات على شكل دفعات استثمارية ، فما هو مقدار الدفعة الشهريـــة اذا علمت أن سعر الفائدة (P = 0,06)؟

الحـــل : من العلاقة (2 ,2 ,2) نجد أن :

$$40000 = Q'(1,06)^{1/12} \frac{(1,06)^3 - 1}{(1,06)^{1/12} - 1}$$

ومنها نجد أن :

$$Q' = 1014,37 \text{ L.S}$$

مثـال (2 – 14): وظف شخص 15 دفعة سنوية بمقدار(1000)ل.س لكل منها ، بفائدة مركبة (P = 0,0475). احسب حصيلة دفعاته بعد سنة من ايداع الدفعة الاخيرة ، ثم بعد خمسة أشهر من ايـــداع الدفعة الاخيرة ثم بعد ايداع الدفعة الاخيرة مباشرة.

الحـــل : ان حصيلة دفعاته بعد سنة من الدفعة الاخيرة تساوي:

$$S_n = 1000(1,0475).\frac{(1,0475)^{15} - 1}{1,0475 - 1} = 22182,86$$

وان حصيلة دفعاته بعد خمسة أشهر فقط تساوي .

$$S_n = 1000(1,0475)^{5/12}\ \frac{(1,0475)^{15} - 1}{0,0475.} = 21590,42$$

وان حصيلة دفعاته بعد الدفعة الاخيرة مباشرة تساوي :

$$S_n = 1000.\frac{(1,0475)^{15} - 1}{0,0475} = 21176,95 \quad L.S$$

* حساب سعر الفائدة P :وهي فضة لها طابع خاص سنعرضها مـــن خلال المثال التالـــي

مثـال (2 – 15) : كان أحدهم يودع في بداية كل عام مبلـــــغ (1000)ل.س ولمدة 10 سنوات فكانت حصيلته بعد عام من ايـــداع الدفعة الاخيرة تساوي (15000)ل.س ،فماهو سعر الفائدة؟

الحـــل : من العلاقة (1, 2, 2) نجد أن

$$15000 = 1000\ r\ \frac{r^{10} - 1}{r - 1}$$

ان حساب r من هذه العلاقة يعتبر أمراً غير سهل ، لذلك نستعين بجداول خاصة نعطينا قيمة المقدار $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ وهو الجدول رقم (1) الملحق بآخر الكتاب .

ولكن قبل الانتقال الى ذلك الجدول نحول الطرف الايمن الى الشكل النموذجي $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ فنجد أن المعادلة السابقة تساوي:

$$15 = \frac{r^{11} - r + 1 - 1}{r - 1} = \frac{r^{11} - 1}{r - 1} - 1$$

$$16 = \frac{r^{11} - 1}{r - 1}$$

ومن الجدول رقم (1) نجد أن قيمة $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ عندما $n = 11$ والمساوية للمقدار 16 تماما غير موجودة في ذلك الجدول ، ولكنها محصورة بين القيمتين 15,783599 و 16,208119 المقابلتين لسعري الفائدة 7% و7,5% على الترتيب .

ولايجاد قيمة P المقابلة للعدد 16 نستخدم علاقة التناسب الخطي فنجد أنه :

(a) $P_1 = 0,07$ فان $\frac{r^{11} - 1}{r - 1} = 15,783599$ عندما يكون

(b) $P_2 = 0,075$ فان $\frac{r^{11} - 1}{r - 1} = 16,208119$ وعندما

(c) $P = ?$ فان $\frac{r^{11} - 1}{r - 1} = 16$ أما عندما يكون

وبطرح (a) من (b) نحصل على العلاقة التناسبية التالية :

ان الفرق 0,42452 يتقابـــل فرقا في قيمة P يساوي 0,005

ثم نطرح (a) من (c) فنجد أن :

وان الفرق 0,216401 يقابل فرقا في قيمة P يساوي P - 0,07

وبذلك نجد أن :

$$P - 0,07 = \frac{(0,005)(0,216401)}{0,42452} = 0,002549$$

وهكذا نجد أن سعر الفائدة المقابل للمقدار 16 يساوي :

$$P = 0,072549$$

وللتحقق من ذلك نعوض في العلاقة الاولى فنجد أن :

$$1\ 000(1,072549)\frac{(1,072549)^{10} - 1}{1,072549 - 1} = 14998,44\ L.S$$

وهو مقـدار قريب من (15,000) وان الاختلاف ناجم عن تقريب الارقام أثناء حساب r .

* حساب عدد الدفعات n : وهي قضية لها طابع خاص نستعرضها مـــن خلال المثال التالي :

مثـال (2 - 16): يريد أحدهم أن يوفر مبلغ (40000) ل.س عن طريق دفعات سنوية استثمارية فورية مقدار كل منها (30000) ل.س وبفائدة قدرها 5% فماهو عدد الدفعات التي دفعهاذلك الشخص؟

الحـــل : ان هذه الدفعات هي دفعات استثمارية فورية لذلك نعـود

الى العلاقة (2 , 2, 1) فنجد أن :

$$40000 = 3000(1,05)\ \frac{(1,05)^n - 1}{1,05 - 1}$$

$$\frac{40(0,05)}{3(1,05)} = \frac{(1,05)^n - 1}{0,05}$$

$$0,634920 = (1,05)^n - 1$$

$$(1,05)^n = 1,634920$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$n\lg(1,05) = \lg(1,634920)$$

$$n = \frac{\lg(1,634920)}{\lg(1,05)} = \frac{0,2134965}{0,0211893} = 10,0757$$

أي أنه للحصول على (40000) يجب أن نقوم بايداع عشرا أو أكثر من عشر دفعات ، وبما أن عدد الدفعات n يجب أن يكون عددا صحيحا اذن لابد وأن نجعل عدد الدفعات مساويا $n = 10$ أو لـ $n = 11$

وهنا تميز بين هاتين الحالتين : فاما أن نجعل $n = 10$ أو نجعل $n = 11$.

ا ـ اذا أردنا أن يكون عدد الدفعات $n = 10$. في هذه الحالة يجب أن نزيد قيمة الدفعة الاخيرة (العاشرة) عن القيمة الثابتة

(3000)ل.س وذلك حتى نغطي الجزء الذي يزيد عن عشر دفعات وهو (0,0757) . ولحساب مقدار الزيادة التي يجب اضافتها الى الدفعة العاشرة نلاحظ أن حصيلة عشر دفعات متساوية تساوي:

$$S_{10} = 3000(1,05)\frac{(1,05)^{10} - 1}{1,05 - 1} = 39620,36 \text{ L.S}$$

اذن المبلغ الباقي لتبلغ الحصيلة (40000)ل.س يساوي :

$$40000 - 39620,36 = 379,64 \text{ L.S}$$

وبما أن الدفعات استثمارية فورية فان الدفعة الاخيرة تبقى لمدة عام واحد بعد ايداعها ، لذلك فان المبلغ الباقي (379,64) ل.س وستكون نتيجة ايداع مبلغ a لمدة عام واحد وبذلك يكون :

$$379,64 = a.r = a(1,05)$$

$$a = 361,56 \text{ L.S}$$

وباضافة هذا المبلغ الى الدفعة الاخيرة (العاشرة) تبلغ قيمتها (3361,56)ل.س . وبذلك تبلغ حصيلة الايداع (40000) . ل.س تماما .

٢- اذا أردنا أن يكون عدد الدفعات $n = 11$. في هذه الحالة لابد وأن تكون الدفعة الاخيرة أقل من الدفعات الاعتيادية بمقدار ما ، لذلك نحسب حصيلة احدى عشر دفعة متساوية فنجد أن :

$$S_{11} = 3000(1,05)\frac{(1,05)^{11} - 1}{1,05 - 1} = 44751,38 \text{ L.S}$$

وان المبلغ الزائد هو نتيجة ايداع الدفعة الحاديه عشرة وفوائد المبلغ السابق ويساوي :

$$44751,38 - 40000 = 4751,38 \quad L.S$$

وهذا يعني أن المبلغ الزائد أكبر من قيمة الدفعة (3000) لذلك لانجد مبرراً لدفع دفعة حادية عشرة . كما أن تأجيل المبلغ S_{10} لمدة سنة أخرى يعطينا (بدون دفعة حادية عشرة) فائدة .

$$39620,30(1,05) = 41601,38 \quad L.S$$

وهو مبلغ أكبر من المبلغ المطلوب توفيره ولهذا يكتفي في هذه الحالة بتحديد عدد الدفعات بعشر دفعات دون اللجوء الى الحالة الثانية .

(II – 2) : القيمة الحالية لـ n دفعة استثمارية فورية :

ان القيمة الحالية لـ n دفعة استثمارية هي المبلغ المكافئ الذي اذا أودعناه في المصرف بنفس الفائدة ولنفس المدة كانت حصيلته تساوي اجمالي حصيلة جميع هذه الدفعات الاستثمارية .

ولايجاد العلاقة التي تعطينا هذه القيمة الحالية نلاحظ أنه اذا رمزنا للقيمة الحالية للدفعة الاولى في بداية الزمن بـ K_1 ، فاننا نجد أن K_1 تساوي مقدار الدفعة الاولى نفسه . وذلك لأن الدفعة الاولى تدفع في بداية الزمن ونكتب ذلك كمايلي :

$$Q = $$

وان القيمة الحالية للدفعة الثانية والتي سنرمز لها بـ K_2 تساوي:

$$K_2 = \frac{Q}{r}$$

وذلك لأن الدفعة الثانية لن تدفع الاّ بعد مرور عام من بداية الزمن.

كماوأن القيمة الحالية للدفعة الثالثة والتي سنرمز لها بـ K_3 تساوي :

$$K_3 = \frac{Q}{r^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وأن القيمة الحالية لكل هذه الدفعات والتي سنرمز لها بـ V_n تساوي مجموع القيم الحالية لكل منها وتساوي:

$$V_n = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n$$

$$V_n = Q\left[1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right]$$

وبملاحظة أن ماداخل القوس هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول $a = 1$ وأساسها $q = \frac{1}{r}$ نجد أن :

$$V_n = Q\,\frac{(\frac{1}{r})^n - 1}{\frac{1}{r} - 1} = Qr\,\frac{r^{-n} - 1}{1 - r}$$

والتي نكتبها على الشكل التالي :

$$V_n = Qr\,\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (5,2,2)$$

وللتأكد من أن هذه القيمة الحالية تكافئ المبلغ الذي أودع بكامله لمدة n سنة لبلغت حصيلته نفس حصيلة الدفعات الاستثمارية الفورية

نلاحظ أن حصيلة المبلغ V_n فيما لو أودع بكامله لمدة n سنة نساوي K_n حيث :

$$K_n = V_n r^n$$

وبتعويض V_n من العلاقة (2 , 2 , 4) نجد أن :

$$K_n = Qr \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} r^n$$

$$K_n = Qr \frac{r^n - 1}{r - 1} = S_n$$

وهي نفس العلاقة (2 , 2 , 1) التي تعطينا اجمالي الحصيلة الناتجة عن ايداع n دفعة اسثمارية فورية.

***حالة خاصة :**

- اذا كانت الدفعات الاستثمارية الفورية تتم على شكل دفعات جزئية متساوية قيمة كل منها Q' وعددها m دفعة خلال العام الواحدوكانت الفائدة سنوية، فان القيمة الحالية لها تحسب كمايلي :

ان القيمة الحالية للدفعة الاولى التي تدفع في بداية الفترة الاولى تساوي نفسها Q' وان القيمة الحالية للدفعة الثانية التي تدفع في بداية الفترة الثانية تساوي $\frac{Q'}{r^{1/m}}$

وان القيمة الحالية للدفعة الثالثة التي تدفع في بداية الفترة الثالثة تساوي $\frac{Q'}{r^{2/m}}$

وان القيمة الحالية للدفعة الاخيرة التي تدفع في بداية الفترة الاخيرة تساوي $\frac{Q}{r^{n-1/m}}$

وان القيمة الحالية لجميع هذه الدفعات تساوي:

$$V_n = Q\left[1 + \frac{1}{r^{1/m}} + \frac{1}{r^{2/m}} + \frac{1}{r^{3/m}} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1/m}}\right]$$

وبملاحظة أن ما داخل القوس ما هو الاّ مجموع متوالية هندسية حدها الاول $a_1 = 1$ وأساسها $\frac{1}{r^{1/m}}$ (أو $r^{-1/m}$) وعدد حدودها $n.m$ حدا وبذلك نجد أن :

$$V_n = Q\,\frac{(r^{-1/m})^{n.m} - 1}{r^{-1/m} - 1} = Q\,\frac{r^{-n} - 1}{1 - r^{1/m}}\,r^{1/m}$$

وبذلك نجد أن:

$$V_n = Q\,r^{1/m}\,\frac{1 - r^{-n}}{r^{1/m} - 1} \qquad (6,2,2)$$

وهي العلاقة التي تعطينا القيمة الحالية لدفعات جزيئة عددها m دفعة في السنة وخلال n سنة ضمن نظام فائدة سنوية .

(II – 3) حصيلة n دفعة عادية وقيمتها الحالية :

– اذا كانت الدفعة الاولى تدفع في نهاية العام الاول من بداية الزمن وكانت الدفعات سنوية ومتتالية فان العلاقة التي تعطينا حصيلة n دفعة عادية وسنوية ومقدار كل منها Q يساوي :

$$s_n = Q\,\frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad (6a,2,2)$$

أما القيمة الحالية لهذه الدفعات العادية فتساوي :

$$v_n = Q\,\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (7,2,2)$$

أما اذا كانت الدفعات جزئية ومتتالية وعددها m دفعة في العام وكانت الدفعة الاولى تدفع بعد كل $\frac{1}{m}$ من السنة من بداية الزمن فان العلاقتين اللتين تعطيان حصيلة هذه العادية الجزئية وقيمتها الحالية هما على الترتيب :

$$s`_n = Q \frac{r^n - 1}{r^{1/m} - 1} \qquad (7a,2,2)$$

$$V`_n = Q \frac{1 - r^{-n}}{r^{1/m} - 1} \qquad (8,2,2)$$

مثال(2 – 17) : أوجد القيمة الحالية لدفعات شهرية تدفع في بداية كل شهر اعتبارا من أول العام ولمدة 5 سنوات وقيمة كل منها تساوي (100) ل.س علما بأن سعر الفائدة السنوية يساوي(P = 0,08)

الحل : من العلاقة (5,2,2) نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات الشهرية المتساوية تساوي :

$$V_n = 100(1,08)^{1/12} \frac{1 - (1,08)^{-5}}{(1,08)^{1/12} - 1} =$$

$$= 100(1,006434)\frac{0,3194168}{0,006434} = 4996,455 \text{ L.S}$$

* **حساب عدد الدفعات العادية n : وهي قضية لها طابع خاص سنعرضها من خلال المثال التالي :**

مثال(2 – 18) : لنفترض أننا نريد تسديد ثمن أرض قيمتها الحالية (56000)ل.س بواسطة دفعات سنوية متساوية قيمة كل منها (5000) ل.س على أن يتم تسديد الدفعة الاولى بعد عام من تاريخ الشراء فما هو عدد الدفعات اللازمة لتسديد هذا الثمن اذا

علمت أن سعر الفائدة هو $P = 0,08$.

الحـــل : من الملاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات عادية لأنها دفعات تسديد وتدفع بعد عام من بداية الزمن ، لذلك نستخدم العلاقـــة (7, 2, 2) فنجد أن :

$$56000 = 5000 \frac{1 - (1,08)^{-n}}{1,08 - 1}$$

$$\frac{56(0,08)}{5} - 1 = -(1,08)^{-n}$$

$$+ 0,104 = +(1,08)^{-n}$$

$$\lg(0,104) = n\lg(1,08)$$

$$-0,98296666 = -n(0,033423755)$$

ومنها نجد أن :

$$n = 29,409 \quad \text{سنة}$$

وبما أن عدد الدفعات لايمكن أن يكون الا عددا صحيحا فاننا سنكون مضطرين الى اعتبار عدد الدفعات مساويا اما $n = 29$ أو $n = 30$ وسنبين فيمايلي بعضا من الحالات المختلفة التي يمكن الاتفاق عليها وهـــي :

ا- عندما يتم الاتفاق على أن يكون عدد الدفعات $n = 29$ وأن تكـــون جميع الدفعات متساوية .

ضمن هذا الشرط يجب أن نزيد قيمة كل من الدفعات الشهرية التسعة والعشرين بمقدار معين بحيث تصبح جميعها متساوية وبالاعتماد على العلاقة (2 ,2 ,7)، نجد أنه عندما تكون $n = 29$ فان :

$$56000 = Q \frac{1 - (1,08)^{-29}}{1,08 - 1} = Q(11,158406)$$

ومنها نجد أن قيمة الدفعة الواحدة تساوي :

$$Q = 5018,64 \quad L.S$$

٢- عندما يتفق على أن يكون عدد الدفعات $n = 29$ وقيمة كل منها (5000)ل.س ماعدا الدفعة الاخيرة (التاسعة والعشرين) التي يجب أن تكون أكبر من الدفعات المتساوية السابقة لها وذلك حتى تعوض الجزء الزمني الذي يزيد عن الـ (29) وقدره (0,409)سنة .

ولحساب مقدار الزيادة التي يجب اضافتها الى الدفعة الاخيرة ، نحسب القيمة الحالية للدفعات التسع والعشرين العادية المتساوية ، فنجد أن :

$$v_{29} = 5000 \frac{1 - (1,08)^{-29}}{1,08 - 1} = 55792,03$$

وهو مقدار أقل من القيمة الحالية لثمن الأرض(56000) لذلك نفترض أننا نريد أن نضيف الى الدفعة الاخيرة (التاسعة والعشرين) مقدارا قدره x لتصبح القيمة الحالية الاجمالية

مساوية لثمن الارض ، ومن هنا نجد أن :

$$56000 = 5000 \frac{1 - (1,08)^{-29}}{1,08 - 1} + x(1,08)^{-29}$$

حيث أن $x(1,08)^{-29}$ هو القيمة الحالية للمقدار x الـــذي سيضاف الى الدفعة الاخيرة وبذلك يكون لدينا :

$$56000 = 55792,03 + x(0,10732752)$$

ومنها نجد أن قيمة x تساوي :

$$x = \frac{56000 - 55792,03}{0,10732752} = 1937,71$$

وبذلك نجد أن قيمة الدفعة الاخيرة يجب أن تساوي :

$$5000 + 1937,71 = 6937,71 \quad L.S$$

٣- عندما يتفق على أن يكون عدد الدفعات $n = 29$ وأن تكون قيمة كل من الدفعات العشرين الاولى (كمثال) تساوي (5000) أما بقية التسع دفعـــات فيضاف الى كل منها مقدار ثابت قدره y .

وضمن هذا الشرط يجب أن تكون القيمة الحالية للدفعـــــات العشرين الاولى + القيمة الحالية للتسع دفعـــات المزادة بمقدار y تساوي القيمة الحالية لثمن الارض .

أي يجب أن يكون .

$$56000 = 5000 \frac{1 - (1,08)^{-20}}{1,08 - 1} + (5000+y) \frac{1 - (1,08)^{-9}}{1,08 - 1} (1,08)^{-20}$$

وحيث أن:

$(5000+y)\frac{1-(1,08)^{-9}}{1,08-1}$ هي القيمه الحاليه للدفعات $(5000 + y)$

عند تسديد العشرين دفعه الاولى ، وحيث أن

$$(5000 + y)\frac{1-(1,08)^{-9}}{1,08-1}(1,08)^{-20}$$

هي القيمة الحالية لجميع الدفعات التسع الاخيره في بدايه الزمن من العلاقه السابقه نجد أن.

$$56000=49090,74 +(5000 + y)(6,24689)(0,214548)$$

$$5000 + y = \frac{56000 - 49090,74}{1,340259067} = 5155,17 \quad L.S$$

وهو مقدار كل من الدفعات التسع الاخيره.

٤- عندما يتم الاتفاق على أن يكون عدد الدفعات 30 دفعه مؤلفه من 29دفعة متساويه ومقدار كل منها يساوي (5000) ل.س + دفعه اضافيه هي الدفعة الثلاثين وقدرها Z ويدفع بعدانيها، آخر دفعة برمن قدره t .

ضمن هذه الشرط نجد أن القيمه الحالية للدفعات المتساويه وللدفعه الاضافية يجب أن تساوي ثمن الارض ، أي يجب أن تكون :

$$56000 = 5000\ \frac{1-(1,08)^{-29}}{1,08-1} + Z(1,08)^{-(29+t)}$$

ومنها نجد أن :

$$Z = \frac{56000 - 55792,03}{(1,08)^{-(29+t)}} = 207,97(1,08)^{+(29+t)}$$

ومن هذه العلاقة يمكننا أن نحسب قيمه الدفعة الاخيرة (الثلاثين)

عندما نحدد قيمة t الزمنية .

فاذا كان t = 0 فان ذلك يعني أن الدفعه الاخيره تدفع مباشرة مع الدفعة التاسعة والعشرين وهي تساوي:

$$Z = (207,97)(1,08)^{29} = 1937,71$$

وهذا ماحصلنا عليه في الحالة (٢) السابقة .

أما اذا كان t = 1 فان ذلك يعني أن الدفعه الاخيره (الثلاثين) ستدفع بعد مرور عام على أداء الدفعه التاسعه والعشرين وهي تساوي :

$$Z = (207,97)(1,08)^{29+1} = 2092,73 \quad L.S$$

وهي قيمة الدفعة الثلاثين .

وهكذا يمكننا تحديد قيمة الدفعة بما يتناسب مع الزمن t . زمن تأجيل الدفعة الاخيرة عن آخر دفعة من الدفعات المتساوية .

مثال (2 - 19) باع تاجر لزبونه جهاز تلفزيون ب (1700) ل.س واتفقا على أن يسدد قيمته على شكل دفعات شهرية تستحق الاولى بعد شهر من تاريخ البيع ، كما اتفقا ، أن تكون قيمة كل من الدفعات الاثنتي عشرة الاولى مساوية بالقيمة لـ(100) ل.س في الشهر الاول وأن تكون الدفعات الباقية متساوية بالقيمة ، فما هو عدد الدفعات الشهرية ، اذا كان سعر الفائدة السنوية هو 7% ؟ ماهي قيمة الدفعات المتبقية (بعد الثانية عشرة) حتى يتم تسديد المبلغ ضمن نفس العدد من الدفعات ؟

الحـــل : نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات عادية (تسديد) لأن أولها تستحق بعد شهر من تاريخ البيع ، ولحساب عدد الدفعات نطبق العلاقة (8, 2, 2) فنجد أن :

$$1700 = 100\,\frac{1 - r^{-n}}{r^{1/m} - 1} = 100\,\frac{1 - (1,07)^{-n}}{(1,07)^{1/12} - 1}$$

$$17(0,0056541) - 1 = -(1,07)^{-n}$$

$$-0,9038803 = -(1,07)^{-n}$$

$$0,9038803 = (1,07)^{-n}$$

$$\lg(0,9038803) = -n\lg(1,07)$$

$$-0,043889079 = -n(0,029383778)$$

ومنها نجد أن :

$$n = 1,4936 \quad \text{سنة}$$

وبتحويل هذه القيمة (1,4936) الى أشهر ، نجد أن عـــــــدد الدفعات الشهرية يجب أن يكون :

$$L = 12(1,4936) = 17,9232$$

وهذا يعني أن عدد الدفعات الشهرية اما أن يكون 17 دفعة أو أن يكون 18 دفعة شهرية .

وبما أن L أقرب الى (18) لذلك نعتبر عدد الدفعـات $L = 18$ دفعة ولنبحث عن قيمة كل من الدفعات المتبقية x التـي

تلي الدفعات الاثنتي عشرة الاولى والمساوية لـ(100)ل.س والتي يبلغ عددها (6) دفعات، وهي تشكل نصف عام . وبتطبيق العلاقة (8, 2,2) على الدفعات (12) الاولى وعلى الدفعات المتبقية مع الانتباه الى أن القيمة الحالية للدفعات الستة المتبقية في بداية الزمن تساوي قيمتها الحالية عند انتهاء الدفعات الاولى مضروبة بـ $(1,07)^{-1}$. وبذلك نجد أن :

$$1700=100\frac{1-(1,07)^{-1}}{(1,07)^{1/12}-1}+x(1,07)^{-1}\frac{1-(1,07)^{-\frac{1}{2}}}{(1,07)^{1/12}-1}$$

$$1700=100\ \frac{0,06542056}{0,0056541}+x(0,93457944)\frac{0,0332635}{0,0056541}$$

$$1700 = 1157,046 + x(5,49820187)$$

$$x = \frac{542,954}{5,49820187} = 98,76 \quad L.S$$

وهو مقدار الدفعة الشهرية لكل من الست دفعات الأخيرة التي يجب أن يدفعها المشتري للبائع شهريا حتى يسدد كامل قيمة التلفزيون مع فوائد التأجيل ، وتبلغ بمجموعها :

$$12.100 + 6.(98,76) = 1792,56 \quad L.S$$

III ـ **الاستهلاك المنظم** : ان أفضل مثال على الاستهلاك المنتظم هو رواتب المتقاعدين ، فعندما يتقاعد الموظف يكون قد دفع أقساطا شهرية أو سنوية ، وبلغت مع فوائدها مبلغا معينا نرمز له بـ K .

وبعد عام من بداية التقاعد (أو بعد شهر) تبدأ شركة التأمينات بدفع رواتب سنوية (أو شهرية) له ، لمدة n سنة (ما بقي على قيد الحياة) . وبغض النظر عن مثل هذه الحالات الخاصة سنناقش الموضوع بشكل عام .

لنفترض أن شخصا أودع في المصرف مبلغا مقداره K على أن يستهلكه على شكل n دفعة سنوية كل منها يساوي مقدارا ثابتا D ، علما بأن سعر الفائدة في المصرف هو P (r=P+1) وأن المودع سيبدأ بسحب دفعة بعد عام من ايداع المبلغ المذكور .

لايجاد العلاقة التي تربط بين متحولات هذه المسألة نقوم بمايلي

نفترض أن المبلغ K قد أودع في بداية الزمن ، وأن المودع يستحق الدفعة الاولى بعد مرور عام على تاريخ الايداع ، اذن فان المبلغ المودع K سيصبح بعد عام مساويا لـ K_1 حيث :

$$K_1 = Kr$$

وفي بداية العام التالي يسحب المودع الدفعة الاولى فتبقى في المصرف المبلغ $(K_1 - D)$ ، وبعد مرور عام آخر فان المبلغ الاخير سيصبح مساويا لـ K_2 حيث :

$$K_2 = (K_1 - D)r = (Kr - D)r = Kr^2 - Dr$$

وعندما يسحب المودع الدفعة الثانية يبقى في المصرف $(K_2 - D)$ وبعد مرور عام آخر (ثالث) سيصبح المبلغ مساويا لـ K_3 حيث :

$$K_3 = (K_2 - D)r = (Kr^2 - Dr - D)r = Kr^3 - Dr^2 - Dr$$

وهكذا يمكننا أن نجد أن المبلغ سيبلغ بعد نهاية السنة الرابعة K_4 حيث :

$$K_4 = Kr^4 - Dr^3 - Dr^2 - Dr$$

وانه بعد مرور n سنة على الايداع سيبقى في المصرف المبلغ K_n حيث:

$$K_n = Kr^n - Dr^{n-1} - Dr^{n-2} - \ldots - Dr^2 - Dr$$

ولكن الدفعة الاخيرة ستكون بعد n سنة أيضا . وحتى يستهلك المودع كامل المبلغ الذي أودعه (مع فوائده) يجب أن يكون مابقي في المصرف بعد n سنة يطابق مقدار الدفعة الاخيرة D .

اي يجب أن يكون :

$$K_n = D$$

$$Kr^n - Dr^{n-1} - Dr^{n-2} - Dr^{n-3} - \ldots - Dr^2 - Dr = D$$

وبذلك نجد أن :

$$Kr^n = D + Dr + Dr^2 + \ldots + Dr^{n-2} + Dr^{n-1}$$

وبما أن الطرف الايمن هو مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول $a = D$ وأساسها $q = r$ وعدد حدودها n وبالاستفادة من العلاقة (11, 1, 1) نجد أن :

$$Kr^n = D.\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$K = D.\frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1}$$

$$K = D.\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (1,3,2)$$

وهي العلاقة التي تربط بين المبلغ المودع K ومقدار الدفعة D ومعامل الفائدة r وعدد السنوات n .

واذا علمنا ثلاثة من هذه المجاهيل يمكننا حساب الرابع .

* ملاحظة : نلاحظ أن العلاقة (1, 3,2) تشبه تماما العلاقة (7, 2, 2) للقيمة الحالية للدفعات العادية لأن عملية الاستهلاك المنتظم هي عملية مشابهة للايداع المنتظم العادي من حيث القيمة الحالية لكل منهما .

* حالات أخرى :

١ ـ اذا أراد المودع أن يستلم الدفعة الاولى مباشرة (بدون أن ينتظر مرور عام على ايداع المبلغ) فان العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$K = D.\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}.r \qquad (2,3,2)$$

٢ـ اذا أراد المودع أن يؤجل استلام الدفعة الاولى الى مابعد مرور ℓ سنة فان العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي (وهو الشكل العام) .

$$K = D\ \frac{1 - r^{-n}}{r - 1}\ r^{-\ell+1} \qquad (3,3,2)$$

٣ـ اذا كانت الدفعات الاستهلاكية تسحب جزئيا m مره في العام فان العلاقة (2, 3, 1) تأخذ الشكل التالي .

$$K = D' \frac{1 - r^{-n}}{r^{1/m} - 1} \qquad (4,3,2)$$

حيث D' هي مقدار الدفعه الجزئية و r هو معامل الفائـــــدة البسيطه ويساوي $r = 1 + P$.

مثـــال (2 – 20) : **ماهو المبلغ الذي يجب ايداعه ليمول دفعـــات عادية سنوية قدرها** (2000) ل.س **ولمدة عشرســـنوات علما بـــأن** الفائدة $P = 0,05$ **سنويا** .

الحـــل : من العلاقه (2 ,3 ,1) نجد أن :

$$K = D\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} = 2000 \frac{1 - (1,05)^{-10}}{1,05 - 1} = 15443,47 \quad L.S$$

أما اذا كان المودع يريد تأجيل استلام الدفعة الاولى الى مابعـــد سنتين من تاريخ الايداع فان القيمه الحالية للمبلغ الذي يجب ايداعه هي

$$K' = \frac{K}{r} = 2000 \frac{1 - (1,05)^{-10}}{1,05 - 1} (1,05)^{-1} = 14708,07 \quad L.S$$

مثـــال (2 – 21): **ماهو مقدار الدفعه السنوية التي يجب توظيفهـــا لمدة ثلاثين عاما حتى نتمكن من الحصول على مبلغ ليدفع لنا بعـــد** انقضاء عام على الدفعة الاخيرة . على شكل دفعات سنوية قدرهـــا (3320) ل.س ولمده عشرين عاما . علما بأن **سعر الفائـــدة** ($P = 0,05$).

الحـــل: ان حصيلة الدفعات الثلاثين بعد مرور عام على الدفعـــة

الاخيرة يعطى بالعلاقة (2 ,2 ,1) ويساوي :

$$K_n = Qr\ \frac{r^n - 1}{r - 1} = Q(1,05)\ \frac{(1,05)^{30} - 1}{0,05}$$

وان ذلك المبلغ سيكون هو المبلغ المعد للاستهلاك مباشرة ولمدة عشرين عاما وذلك لأن الدفعة الاستهلاكية الاولى تسحب بعد مرور عام على الدفعة الاخيرة .

واعتماد على العلاقة (2 , 3 , 2) نضع المعادلة التالية :

$$Q(1,05)\frac{(1,05)^{30} - 1}{0,05} = 3320\ \frac{1 - (1,05)^{-20}}{0,05}\ (1,05)$$

$$Q(69,76) = 43443,26$$

ومنها نجد أن :

$$Q = 622,75 \quad L.S$$

مثال (2 - 22) : وظف أحدهم في بداية كل عام دفعة مقدارها (1000)ل.س بفائدة (P = 0,06) ولمدة عشرين عاما ، فماهي حصيلته بعد 5 سنوات على ايداع الدفعة الاخيرة؟ وما هو عدد الدفعات التي قيمة كل منها تساوي (3500)ل.س والتي تسحب أولها بعد ست سنوات من تاريخ الدفعة الاخيرة وبحيث تستهلك كامل المبلغ .

الحل : ان حصيلة المودع بعد مرور سنة على الدفعة الاخيرة يساوي :

$$K_n = Dr\ \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1000(1,06)\frac{(1,06)^{20} - 1}{1,06 - 1} = 38992,73 \quad L.S$$

وان ذلك الرصيد بعد مرور 4 سنوات أخرى يساوي حسب(2 ,1 ,2)

$$K_n = 38992,73(1,06)^4 = 49227,42 \text{ L.S}$$

وان عملية استهلاك المبلغ الاخير التي تبدأ بعد عام من تكوينه من خلال دفعات متساوية تعطى بالعلاقة (2 ,3 ,1) حيث نجد أن:

$$49227,42 = 3500 \frac{1-(1,06)^{-n}}{0,06}$$

$$\frac{49227,42(0,06)}{3500} = 1-(1,06)^{-n}$$

$$0,843898 - 1 = -(1,06)^{-n}$$

$$+0,15610 = (1,06)^{-n}$$

$$\lg(0,15610) = -n\lg(1,06)$$

$$-0,80659328 = -n(0,025305865)$$

$$n = 31,87376$$

أي أن عدد الدفعات يجب أن يساوي $n = 31$ أو $n = 32$.

لنعتبر أن عدد الدفعات $n = 32$ دفعة منهم 31 دفعة متساويه وتساوي (3500) أما الدفعة الثانية والثلاثين فنحسب قيمتها بحيث تستهلك كامل المبلغ المتبقى ، ولحساب المبلغ الذي استهلكته الدفعات الاولى نجد أن

$$K = 3500 \frac{1-(1,06)^{-31}}{1,06-1} = 48751,80 \text{ L.S}$$

وبذلك يكون المبلغ المتبقي مساويا لـ:

$$49227,42 - 48751,80 = 475,62 \text{ L.S}$$

وان هذا المبلغ المتبقى من الرصيد سيبلغ بعد 32 سنه مايلي:

$$475,62(1,06)^{32} = 3069,36 \text{ L.S}$$

وهو مقدار الدفعة الاخيرة الثانية والثلاثين .

IV – القروض طويلة الأجـــل :

من المعروف أن المصارف تقدم العديد من القروض طويلة الأجل ، وان تسديدها يتم عن طريق أقساط أو دفعات متساويه منتظمة شهرية أو سنوية لذلك فانه يتوجب على المصرف أن يحدد قيمة كل من هذه الدفعات وأن ينظم طريقه دفعها حتى يتم تسديد قيمه القروض كامله مع فوائده في نهايه الفترة المحدده .

(IV – 1) : ايجاد العلاقة العامة :

لنفترض أن حجم القرض المقدم من المصرف هو S وان مدة القرض هي n سنه وان سعر الفائدة المركبه هو P وان معاملها $r = 1 + P$ ، وان مقدار القسط السنوي هو R* ، وان القسط الاول يستحق الدفع بعد عام من تاريخ القرض ، وهكذا تتوالى الاقساط حتى

---

* يشترط أن يكون مقدار القسط السنوي R أكبر من اجمالي الفائدة السنويه المتربه على قيمه القرض والتي تساوي S.r .

اذن يجب أن يكون $R > S.r$

وذلك حتى يتم اطفاء القرض أو استهلاكه .

لايجاد العلاقة الرياضية التي تربط بين S و R و n و r

نلاحظ أولا أنه حتى يتم تسديد القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع القيم الحالية لجميع الاقساط السنوية مساويا لقيمة القرض S .

وهكذا فاننا نفترض أن القيمة الحالية للقسط الاول تساوي S_1 فيكون:

$$S_1 = \frac{R}{r}$$

وان القيمة الحالية للقسط الثاني تساوي S_2 فيكون :

$$S_2 = \frac{R}{r^2}$$

وان القيمة الحالية للقسط الثالث تساوي S_3 فيكون :

$$S_3 = \frac{R}{r^3}$$

.....

وبذلك تكون القيمة الحالية للقسط الاخير الذي يدفع بعد n سنة تساوي S_n فيكون :

$$S_n = \frac{R}{r^n}$$

وحتى يتم تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع هذه القيم الحالية مساويا لقيمة القرض ، أي يجب أن يكون :

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = S$$

$$R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots \frac{1}{r^n}\right) = S$$

وبملاحظة أن ماداخل القوس هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول $\frac{1}{r}$ وأساسها $\frac{1}{r}$ أيضا نجد أن :

$$S = R \frac{1}{r} \cdot \frac{(\frac{1}{r})^n - 1}{\frac{1}{r} - 1}$$

ومنها نجد أن العلاقة المطلوبة هي :

$$S = R \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (1,4,2)$$

وهي مشابهة للعلاقة (2 ,3 ,1) وللعلاقة (2 ,2 ,7)

ومنها يمكننا أن نحسب مقدار القسط السنوي R فنجد أن :

$$R = S.\frac{r - 1}{1 - r^{-n}} \qquad (2,4,2)$$

ويسمى المقدار $\frac{(r - 1)}{1 - r^{-n}}$ بمعامل التسديد وتحسب قيمته مباشرة أو تعطى بواسطة جداول خاصة ملحقة في آخر الكتاب (الجدول رقم ٣) ، أما اجمالي المبلغ المترتب على المقترض تسديده فيساوي:

$$K_n = n.R = n.S \frac{(r - 1)}{1 - r^{-n}} \qquad (3,4,2)$$

واجمالي الفائدة المترتبة على القرض P_n يساوي :

$$P_n = K_n - S = S \frac{(nr - n - 1) + r^{-n}}{1 - r^{-n}} \qquad (4,4,2)$$

* **حالة خاصة** : عندما يتم الاتفاق على تسديد القرض على شكل أقساط أو دفعات جزئية (فصلية أو شهرية) ، متساوية عددها m دفعة خلال كل عام ولمدة n عاما ، فان العلاقة التي تعطينا مقدار القسط الجزئي $\grave{R}$ هي :

$$\grave{R} = S \frac{(r^{1/m} - 1)}{1 - r^{-n}} \qquad (5,4,2)$$

وعندها فان اجمالي المبلغ المترتب على المقترض يساوي:

$$K_n = n.m.R^{`} = n.m.S \frac{(r^{\cdots} - 1)}{1 - r^{-n}} \qquad (6,4,2)$$

وان اجمالي الفائدة المترتبة على المقترض يساوي

$$P^{`}_n = K^{`}_n - S = S \frac{[nmr^{1/m} - nm - 1] + r^{-n}}{1 - r^{-n}} \qquad (7,4,2)$$

مثال (2 - 23) : أراد أحدهم اقتراض (40000)ل.س من المصرف ... فما هو مقدار القسط السنوي الذي يمكنه من تسديد القرض مع فوائده خلال 15 سنة اذا علمت أن سعر الفائدة 0,08؟ وماهو اجمالي المبلغ الذي سيدفعه المقترض للمصرف ؟ وماهو مقدار الفائدة المترتبة على القرض؟؟

اذا أراد المقترض أن يكون القسط شهريا فماهو مقدار القسط الشهري واجمالي ماسيدفعه واجمالي الفائدة؟

الحل : نحسب مقدار القسط السنوي من العلاقة (2 , 4 , 2)فنجد أن:

$$R = 40000 \frac{1,08 - 1}{1 - (1,08)^{-15}} = 4673,18 \quad L.S$$

ونحسب اجمالي ماسيدفعه المقترض من (2 , 4 , 3) فنجد أن:

$$K_n = 15.4673,18 = 70097,70 \quad L.S$$

وأن اجمالي الفائدة المترتبة على القرض يساوي :

$$P_n = K_n - S = 70097,70 - 40000 = 30097,70 \ L.S$$

أما اذا أراد المقترض أن يسدد قرضه على شكل دفعات شهرية فاننا نحسب مقدار القسط الشهري من العلاقة (2 , 4 , 5) فنجد أن:

$$R = 40000 \frac{[(1,08)^{1/12} - 1]}{1 - (1,08)^{-15}} = 375,84 \quad L.S$$

وأن اجمالي ماسيدفعه المقترض للمصرف يساوي :

$$K_n = 15.12.375,84 = 67651,2 \quad L.S$$

وان اجمالي الفائدة المترتبة على القرض تساوي :

$$P_n = 67651,2 - 40000 = 27651,2 \quad L.S$$

مثـال (2 – 24) : ماهو سعر الفائدة لقرض قيمته (100000)ل.س وقسطه السنوي (16000)ل.س ومدته (10) سنوات .

الحـــل : من العلاقة (2 , 4 , 1) نجد أن :

$$16000 = 100000 \frac{r - 1}{1 - r^{-10}}$$

$$\frac{r - 1}{1 - r^{-10}} = 0,16$$

ومن الجدول رقم (٣) في آخر الكتاب نجد أن قيمة P (وليـــس r) الموافقة لأن يكون المقدار $\frac{r - 1}{1 - r^{-10}}$ مساويا لـ 0,16 عندما تكون 10 = n تساوي 9,5%تقريبا .

(IV – 2) تسديد القروض :

هناك عدة طرائق لتسديد القروض أشهرهـــا :

ا – الطريقة الاولى : التي نعتمد على تسديد القرض عن طريـــق دفعات أو أقساط متساوية دورية ونشترط أن تتضمن الفســـط

الدوري مايلي :

١ ـ كامل الفائدة المستحقة على القرض أو على باقي القرض .

٢ ـ جزء من القرض الاساسي يسمى بالجزء المستهلك.

فاذا رمزنا لمقدار القرض بـ S ولمقدار القسط الدوري بـ R ولمقدار الجزء المستهلك من القرض المتضمن في القسط ذي الرقم i بالرمز D_i فاننا نجد أن القسط الاول يتألف من عنصرين :

ـ الفائدة المترتبة على القرض خلال العام الاول وتساوي S.P

ـ الجزء المستهلك من القرض ومقداره D_1 . ومنه نجد أن:

$$R_1 = S.P + D_1$$

حيث P هو سعر الفائدة المركبة السنوي .

وبعد هذه الدفعة يبقى من أصل القرض ($S - D_1$).

وبعد مرور عام آخر (سنتين) على تاريخ القرض فان مقدار القسط الثاني سيشمل فائدة ماتبقى من القرض وجزءا مستهلكا نرمز له بـ D_2 فيكون :

$$R_2 = (S - D_1)P + D_2$$

وبعد مرور ثلاث سنوات فان مقدار القسط الثالث سيشمل فائده ماتبقى من القرض وجزءا مستهلكا آخر نرمز له بـ D_3 ويكون لدينا .

$$R_3 = (S - D_1 - D_2)P + D_3$$

وهكذا نجد أن القسط الاخير يساوي:

$$R_n = (S - D_1 - D_2 - D_3 - \ldots - D_{n-1})P + D_n \quad (8,1,2)$$

علما بأن الاقساط R_1 ، R_2 ، R_3 ، ... R_n متساويـــــه ويساوى R ، ويتم سداد هذه القسائط عبر جدول خاص بذلك يسمى جدول الاستهلاك ، ويتضمن المدفوعات والاستهلاكات خـــلال أعوام مدة القرض ، ويأخذ هذا الجدول الشكل التالى

العام (١)	المتبقى من القرض فى مطلع العام (٢)	الفائدة المدينة فى نهاية العام (٣)	القسط السنوى (٤)	الاستهلاك السنوى (٥)	مجموع ما استهلك من القرض فـــى نهاية العام (٦)
1	S	S.P	R	D_1	D_1
2	$S - D_1$	$(S - D_1).P$	R	D_2	$D_1 + D_2$
3	$S - D_1 - D_2$	$(S - D_1 - D_2).P$	R	D_3	$D_1 + D_2 + D_3$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	$S-D_1-D_2..-D_{n-1}$	$(S-D_1-D_2..D_{n-1})P$	R	D_n	$D_i+D_2+D_3+..D_n$
∑		P_n	n.R	S	

لحساب عناصر هذا الجدول نتبع نفس طريقة المتتابعة الهندسية بعد أن

مقدار القسط السنوي R من العلاقة (2, 4, 2) نقوم بحساب D_1 من العلاقة :

$$D_1 = R - S.P \qquad (9,4,2)$$

وذلك بطرح عنصر العمود (٣) من عنصر العمود (٤) .ثمنقومبحساب المتبقي من القرض ($S - D_1$) وفائدته $P.(S - D_1)$.

وبعدها نقوم بحساب D_2 انطلاقا من عناصر العمودين(٣) و (٤) واعتمادا على العلاقة :

$$D_2 = R - (S - D_1).P$$

وهكذا نتابع العمل حتى نصل الى نهاية جدول ، وبعدها نتحقق من أن مجموع الاستهلاكات يساوي مقدار القرض S .

وهناك طريقة اخرى لحساب عناصر الجدول السابق تعتمد على العلاقة التي تربط بين D_i و D_{i+1} والتي سنستخرجها كمايلي:

بما أن الاقساط متساوية اذن القسط R_i يساوي R_{i+1} وبذلك يكون:

$$R_i = R_{i+1}$$

$$(S - D_1 - D_2 - D_3 \ldots - D_{i-1}).P + D_i = (S - D_1 - D_2 \ldots - D_i)P + D_{i+1}$$

ومنها نجد أن :

$$D_i = -D_i.P + D_{i+1}$$

$$D_{i+1} = D_i(1 + P) = D_i.r \qquad (10,4,2)$$

وهكذا نجد أن الجزء المستهلك من القرض في نهاية العام (i + 1) يساوي الجزء المستهلك منه في نهاية العام (i) مضروبا بمعامل الفائدة r ،وسنستخدم العلاقة (10, 4, 2) لحساب عناصر العمود (٥) وعناصر جدول الاستهلاك السابق بعد حساب R ثم D_1 من العلاقتين

(2 ,4 ,2) و(2 ,4 ,9) على الترتيب . حيث أنه بعد حساب عناصر العمود (٥) يمكننا بسرعة حساب عناصر بقيه الاعمده .

*** حالات خاصة للطريقة الاولى :**

١- اذا اتفق الطرفان على أن يتم تسديد القرض مع فوائده دفعة واحدة في نهاية المدة ، فان هذا يعني أن :

$$R_1 = R_2 = R_3 = \dots \quad R_{n-1} = 0$$

$$R_n = Sr^n$$

وهذه الحالة عالجناها في فقرة الفائدة المركبة .

٢ - اذا اتفق الطرفان على أن يتم تسديد أقساط سنوية متساوية تساوي مقدار الفائدة المترتبة على القرض S. فان هذا يعني أن الاقساط الاولى تساوي :

$$R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_{n-1} = S.P$$

أما القسط الاخير فيساوي :

$$R_n = S.P + S$$

ونشير هنا الى أن الاستهلاكات السنوية ضمن هذه الشروط تكون معدومة ماعدا الاستهلاك الاخير حيث يساوي مبلغ القرض . أي أن :

$$D_1 = D_2 = D_3 = \dots D_{n-1} = 0$$

وأن :

$$D_n = S$$

مثـــال(2 – 24): اقترض أحدهم مبلغ (40000)ل.س من المصـــــــرف العقاري بفائدة 7% ولمدة 15 سنة ، احسب جدول الاستهلاك لهذا القرض .

الحـــــل : قبل كل شيء نحسب مقدار القسط السنوي فنجد أن:

$$R = 40000 \frac{(1,07) - 1}{1 - (1,07)^{-15}} = 4391,79$$

ثم نحسب الاستهلاك الاول D_1 فنجد أن :

$$D_1 = R - S.P = 4391,78 - 2800 = 1591,79$$

ثم نقوم باعداد الجدول المطلوب التالي :

العـام	المتبقي من القرض في مطلع العـام	الفائـدة المترتبة	القسط السنوي R	الاستهلاك السنوي D_i	مجموع ما استهلك في نهاية العام
1	4000	2800	4391,79	1591,79	1591,79
2	38408,21	2688,5	4391,79	1703,22	3295,01
3	36704,99	2569,35	4391,79	1822,44	5117,45
4	34882,55	2441,78	4391,79	1950,01	7067,45
5	32932,55	2305,28	4391,79	2086,51	9153,96
6	.....	.....	.....	.....	.....
7					
:					
15					

ونترك الأسطر الاخرى المتبقية للطالب ليتممها بنفسه .

٢ ـ الطريقة الثانية : وهي الطريقة التي يتعهد فيها المقترض أن يسدد

وفي نهاية كل عام، الفائدة المترتبة على القرض أو على باقي القـــرض اضافة الى مبلغ ثابت لاستهلاك القرض يساوي $\frac{S}{n}$.

ضمن هذه الشروط ، فان مقدار الدفعة الاولى يساوي لـ:

$$R_1 = SP + \frac{S}{n} \qquad (11,4,2)$$

ومقدار الدفعة الثانية بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي :

$$R_2 = (S - \frac{S}{n})P + \frac{S}{n}$$

ومقدار الدفعة الثالثة بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي :

$$R_3 = (S - \frac{2S}{n})P + \frac{S}{n}$$

.....

ومقدار الدفعة n بعد حذف كل ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_n = (S - \frac{(n-1)S}{n})P + \frac{S}{n} \qquad (12,4,2)$$

وهنا نلاحظ أن الدفعات غير متساوية وان مقدار الاستهلاك السنـوي ثابت ويساوي $\frac{S}{n}$.

ويمكن تنظيم هذه العمليات في جدول استهلاك القرض كمايلي :

العام	المتبقي من القرض في مطلع العام	الفائدة المترتبة في نهاية العام	الاستهلاك السنوي	الدفعات السنوية R_i	مجموع ما استهلك من القرض في نهاية العام
1	S	SP	$\frac{S}{n}$	$SP + \frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}$
2	$S - \frac{S}{n}$	$(S - \frac{S}{n})P$	$\frac{S}{n}$	$(S - \frac{S}{n})P + \frac{S}{n}$	$\frac{2S}{n}$
3	$S - \frac{2S}{n}$	$(S - \frac{2S}{n})P$	$\frac{S}{n}$	$(S - \frac{2S}{n})P + \frac{S}{n}$	$\frac{3S}{n}$
4	.....	.....	.....	.....	.....
	.....	.....	.....	.....	.....
	.....	.....	.....	.....	.....

مثال (2 – 25) اقترض أحدهم مبلغ (10000)ل.س من مصرف التسليف الشعبي وتعهد بسدادها خلال أربع سنوات على أن يتضمن كل قسط كامل الفائدة المترتبة على القرض (أو باقي القرض) اضافة الى مبلغ ثابت قدره $\frac{10000}{4}$ = 2500 ل.س سنويا ، علما بأن الفائدة السنوية تساوي 4 % ،وان القسط الاول يستحق بعد مرور عام على تاريخ القرض ، والثاني بعد عامين.. والمطلوب حساب جدول استهلاك هذا القرض .

الحل : اعتمادا على العلاقات السابقة نجد أن الجدول المطلوب هو:

العام	المتبقي من القرض في مطلع العام	الفائدة المدفوعة في نهاية العام	الاستهلاكات السنوية	الدفعات السنوية	مجموع ما استهلك من القرض في نهاية العام
1	10000	10000 (0,04) = 400	2500	2500+400=2900	2500
2	7500	7500 (0,04) = 300	2500	2800	5000
3	5000	5000 (0,04) = 200	2500	2700	7500
4	2500	2500 (0,04) = 100	2500	2600	10000
∑		1000	10000	11000	

٢ ـ الطريقة الثالثة : وهي الطريقة التي فيها يتفق الطرفان على أن يسدد المقترض كامل القرض مع فوائده في نهاية المدة (بعد n سنة) دفعة واحدة ، ولكن المقترض يقوم بايداع دفعات عادية في مصرف آخر بفائدة معينة p' حيث ($p' \neq p$) وذلك لتأمين المبلغ المطلوب لتسديد كامل القرض مع فوائده بعد n عاما من تاريخ الـ

اذن على المقترض أن يودع دفعات عادية سنوية لتصبح قيمتها مساوية للمبلغ المطلوب لتسديد القرض مع فوائده والذي يساوي

اذن يجب أن يكون :

$$s_n = S.r^n \qquad (13,4,2)$$

حيث أن S هو مقدار القرض وأن $r = 1 + P$ وأن P هو سعر فائدة الاقتراض .

وبالعودة الى العلاقة (6a, 2, 2) نجد أن حصيلة n دفعة عادية تساوي :

$$s_n = Q \frac{r'^n - 1}{r' - 1}$$

حيث أن Q هو مقدار الدفعة السنوية وأن $r' = 1 + P'$ وأن P' هو سعر فائدة الايداع التي ليس بالضرورة أن تساوي P،ومن الشرط السابق نجدأنه يجب أن يكون لدينا :

$$Q \frac{r'^n - 1}{r' - 1} = Sr^n$$

ومنها نجد أن مقدار الدفعة السنوية اللازمة لتأمين المبلغ المطلوب يحسب من العلاقة :

$$Q = Sr^n \frac{r' - 1}{r'^n - 1} \qquad (14,4,2)$$

وبعد تحديد قيمة الدفعة يقوم المقترض بايداع دفعاته العادية في المصرف وسيحصل بعد مرور n عاما على المبلغ المطلوب وهو Sr^n .

مثـــال (2 - 26): اقترض أحدهم مبلغ (70000)ل.س لمده خمس سنوات بفائدة قدرها 7 % . وحتى يتمكن من تأمين المبلغ في موعده أراد ايداع دفعات عادية سنوية بفائدة سنوية قدرها 8 % . فماهو مقدار الدفعة السنوية التي يجب أن يدفعها لتأمين المبلغ المطلوب ؟ .

الحـــل : من العلاقه (2 , 4 , 14) نجد أن :

$$Q = 70000(1,07)^5 \frac{(1,08) - 1}{(1,08)^5 - 1} = 16735,18 \text{ L.S}$$

V - طرائق حساب الاهتلاك :

من المعلوم أن الاصول الثابته (وسائل الانتاج + الاثاث ... الخ) تتعرض الى اهتلاك مستمر حتى تصل الى مرحله تصبح عنـــد صالحة للاستعمال ، ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي لهذه الاصول نفترض أن قيمتها الاساسه في بدايه المده K_o وأن قيمتها بعد مرور i عاما على استعمالها تساوي K_i وأن قيمتها بعد مرور n عاما علـــى استعمالها تساوي K_n .

وسنستعرض بسرعة أهم الطرائق المستخدمه في حساب مقدار الاهتـــلاك السنوي وهي :

1 - الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك : وتعتمد هذه الطريقه على افتراض أن الاهتلاك يجري بشكل ثابت ، ففي كل عام تستهلك جزء ثابت مـــن الاصول الثابته وبذلك يكون مقدار الاهتلاك السنوي يساوي A وان :

$$A = \frac{K_o - K_n}{n} \qquad (1,5,2)$$

وأن مقدار الاهتلاك الاجمالي في نهاية العام i تساوي S_i وتساوي

$$S_i = i.A$$

وأن قيمة الاصول الثابتة بعد مرور i عاما على استعمالها تصبح مساوية لـ K_i حيث أن :

$$K_i = K_o - i.A \qquad (2,5,2)$$

٢ ـ الطريقة التراجعية : وتعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري على شكل نسبة ثابتة من القيمة المتبقية من الاصول الثابتة . وتسمى هذه النسبة بمعامل الاهتلاك ونرمز لها بـ P .

وهكذا نجد أن مقدار الاهتلاك في العام i تساوي

$$A_i = K_{i-1}.P \qquad (3,5,2)$$

وان قيمة الاصول الثابتة في نهاية العام i تساوي K_i وتساوي

$$K_i = K_{i-1} - A_i = K_{i-1} - K_{i-1}.P$$

$$K_i = K_{i-1}.(1 - P) \qquad (4,5,2)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن :

$$K_1 = K_o(1 - P)$$

وبطريقة مشابهة نجد أن :

$$K_2 = K_1(1 - P) = K_o(1 - P)^2$$

$$K_3 = K_2(1 - P) = K_o(1 - P)^3$$

.....

$$K_n = K_o(1 - P)^n \qquad (5,5,2)$$

وبذلك نجد أن معامل الاهتلاك يحسب من العلاقة التالية :

$$1 - P = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_o}}$$

$$P = 1 - \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_o}} \qquad (6,5,2)$$

ويمكننا التعبير عن مقدار الاهتلاك في العام i بدلالة P و K_o فنجد أن :

$$A_i = K_{i-1}.P = K_o(1 - P)^{i-1}.P \qquad (7,5,2)$$

وأن اجمالي الاهتلاك في الاصول الثابتة في نهاية العام i يساوي S_i ويساوي : $S_i = \Sigma A_i$ ويساوي:

$$S_i = K_o - K_i = K_o - K_o(1 - P)^i$$

$$S_i = K_o[1 - (1 - P)^i] \qquad (8,5,2)$$

* ملاحظة : يمكن استخدام الطريقتين معا في حساب الاهتلاك السنوي للاصول الثابتة ، ففي التطبيقات العملية تستخدم الطريقة التراجعية في حساب الاهتلاك في بداية المدة حيث تكون نسبة الاهتلاك كبيرة وتستخدم الطريقة الخطية في حساب الاهتلاك في الفترة الاخيرة حيث يعتبر مقدار الاهتلاك ثابتا، وهذا مايساعد على تصفية حسابات تلك الاصول في نهاية المدة .

مثال (2 - 27) : تقدر مدة اهتلاك أحد أنواع الاصول الثابتة بعشر سنوات ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي تستخدم الطريقة التراجعية خلال خمس السنوات الاولى ، وبمعامل اهتلاك قدره 25 % . وتستخدم الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك خلال خمس السنوات المتبقية .

والمطلوب : حساب مقدار الاهتلاك السنوي خلال السنوات العشرة .

الحـــل : لحساب الاهتلاك السنوي نعد الجدول التالي :

ونفترض أن قيمة هذه الاصول تساوي 100ل.س

	العام	مقدار الاهتلاك في نهاية العام $A_i = K_{i-1}P$	القيمة المتبقية في نهاية العام $K_i = K_{i-1} - A_i$	اجمالي الاهتلاك في نهاية العام $S_i = K_o - K_i = \Sigma A_i$
حسب الطريقة التراجعية	1	$A_1=(100)\frac{25}{100}= 25$	$K_1=100-25=75$	$S_1 =100 - 75=25$
	2	$A_2=75.\frac{25}{100}= 18,75$	$K_2=75-18,75= 56,25$	$S_2 = 43,75$
	3	$A_3=(56,25)\frac{25}{100}=14,06$	$K_3 = 42,19$	$S_3 = 57,81$
	4	$A_4=(42,19)\frac{25}{100}=10,55$	$K_4 = 31,64$	$S_4 = 68,36$
	5	$A_5=(31,64)\frac{25}{100}=7,91$	$K_5 = 23,73$	$S_5 = 76,27$
حسب الطريقة الخطية		مقدار الاهتلاك ثابت $A = \frac{K_o - K_n}{n}$	$K_i = K_5 - iA$	$S_i = i.A = \Sigma A_i$
	1	$A=\frac{23,73-0}{5}=4,746$	$K_6=23,73 - 4,746=18,984$	$S_6 = 81,016$
	2	$A = 4,746$	$K_7=18,984 - 4,746=14,238$	$S_7 = 85,762$
	3	$A = 4,746$	$K_8 = 9,492$	$S_8 = 90,508$
	4	$A = 4,746$	$K_9 = 4,746$	$S_9 = 95,254$
	5	$A = 4,746$	$K_{10} = 0$	$S_{10}= 100$

تمرينـــــــــات

١ ـ ماهو مقدار الفائدة التي تنجم عن ايداع مبلـغ (15000) ل.س لمدة 72 يوما بفائدة سنوية بسيطة قدرها 6 % ؟ (تعتبر السنة 360 يوما).

٢ ـ ما هو المبلغ الذي يجب ايداعه لمدة 40 يوما وبفائدة سنوية بسيطة 7% لنحصل على 1000 ل.س ؟

٣ ـ ماهي القيمة الحالية لسند قيمته (5000) ل.س ويستحـــــق التحصيل بعد 5 سنوات علما بأن سعر الفائدة هو 7 %.

٤ ـ أراد أحدهم استبدال سنـد قيمته (5000) ل.س ويستحـــق التحصيل بعد 4 سنوات بسند آخر يستحق الدفع بعد 8 سنوات. فماهي قيمة السند الجديد علما بأن سعر الفائدة هو 9 % .

٥ ـ لكم سنة يجب أن نودع مبلغ (10000) ل.س حتى نحصل علـــى (15000) ل.س علما بأن سعر الفائدة هو 8 % .

٦ ـ ماهو سعر الفائدة التي أودع حسبها مبلغ (10000) ل.س لمدة 5 سنوات وبلغ (12000) ل.س .

٧ ـ ماهي القيمة الحالية لسند قيمته (5000) ل.س ويستحق الدفـــع بعد أربع سنوات علما بأن وحدة الزمن هي الشهر وسعر الفائـدة الشهرية 0,75%.

٨ ـ ما هي حصيلة مبلغ قدره (1000)ل.س أودع لمدة ثلاث سنوات وخمسة أشهر بفائدة 5 % سنويا .

٩ ـ أوجدالقيمة الحالية لعشر دفعات سنوية عادية قيمة كل منها (200)ل.س اذا علمت أن سعر الفائدةالسنوية 5 % .

١٠ ـ أوجد حصيلة 15 دفعة استثمارية أودعت بفائدة 7% وقيمة كل منها (3000)ل.س

١١ ـ أوجد حصيلة 10 دفعات عادية قيمة كل منها (2000)ل.س أودعت بفائدة 8 % .

١٢ ـ أوجدالقيمة الحالية لـ 12 دفعة استثمارية قيمة كل منها (500) ل.س وأودعت بفائدة 8% .

١٣ ـ أوجد القيمةالحالية لـ 24 دفعة قيمة كل منها (300)ل.س وتستحق الدفعة الأولى بعدخمسة أشهرمن بدء الزمن ، أما الدفعات الاخرى فتتوالى كل ثلاثة أشهر ، علما بأن سعرالفائدةهو 6,5%.

١٤ ـ أودع أحدهم (30000) ل.س في مطلع عام1960 وبعد عام بدأ يدفع دفعات سنوية متساوية فبلغ رصيده في نهاية 1970 مبلغ (60000)ل.س فما هي قيمة كل من الدفعات المتساوية اذا كانت الفائدة 5 % سنويا .

١٥ ـ كان أحدهم يدفع في بداية كل عام واعتبارا من 1970حتى عام1981دفعات متساوية ،فماهي حصيلةايداعه اذا علمنا أن:

أ ـ قيمة كل من الدفعات الخمس الاولى تساوي (1000)ل.س

ب ـ قيمة كل من الدفعات الباقية تنقص عن قيمة الدفعة الاولى بمقدار (100) ل.س .

ج ـ ان سعر الفائدة كان 4% في بحر خمس السنوات الاولى وأصبح 5 % في السنوات المتبقية .

١٦ ـ أوجدالقيمة الحالية لـ 70 دفعة شهرية قيمة كل منها (100) ل.س تستحق الاولى بعد خمسة أشهر ، علما بأن سعر الفائدة 6%

١٧ ـ ماهو عدد الدفعات السنوية العادية التي قيمة كل منها (600) ل.س لتكوين رأسمال قدره (3000)ل.س ؟وماهو مقدار المبلغ الاضافي الذي يجب اضافته للدفعة الاخيرة ؟ علما بأن سعر الفائدة 5 % .

١٨ ـ يريد أحدهم تكوين رأسمال (100000)ل.س بواسطة ايداع دفعات جزئية فورية تدفع كل ثلاثة أشهر ولمدة 15 عاما ، وبعد الانتهاء من عملية الايداع اتفق مع المصرف أن يستهلك المبلغ على شكل دفعات نصف سنوية ومتساوية لمدة عشرة سنوات وتستحق الاول منها الاداء بعد سنة من تاريخ انتهاء عملية الايداع.

فماهي قيمةالدفعات في كل من حالتي الايداع والاستهلاك اذا علمت أن سعر الفائدة هو 5% .

١٩ ـ شخص عمره (30)سنة أودع مبلغ (10000)ل.س بسعر

فائدة 6 % ،وعندما بلغ سن الستين بدأ يسحب في مطلع كل سنة من سنين حياته مبلغ (1000)ل.س فما هو المبلغ الذي يبقى لورثته اذا علمت أنه توفي عندما بلغ 75 عاما .

٢٠ – قرض قيمته (100000)ل.س يسترد على شكل دفعات سنوية خلال 15 عاما ويستحق القسط الاول بعد عام من تاريخ القرض .

– أوجد مقدار القسط السنوي اذا علمت أن الفائدة هي 7 % .

– أوجد جدول الاستهلاك الخاص بهذا القرض .

٢١ – قرض قيمته (2000)ل.س يسترد على شكل دفعات شهرية ولمدة أربعة أعوام ويستحق القسط الاول بعد شهر من تاريخ القرض .

١ – أوجد مقدار القسط الشهري اذا علمت أن سعر الفائدة هو 8 % .

٢ – أوجد جدول الاستهلاك .

٢٢ – اقترض أحدهم مبلغ (9600)ل.س وتعهد بسداده على شكل أقساط شهرية وخلال عام واحد ،واشترط عليه أن يدفع كل شهر مبلغا ثابتا قدره (800)ل.س شهريا اضافة الى مقدار الفائدة المترتبة على القرض أو باقي القرض .

– أوجد جدول استهلاك هذا القرض اذا علمت أن سعر الفائدة هو 7% وأن القسط الاول يستحق بعد شهر من تاريخ القرض .

الفصل الثالث

التوابع لمتحولين ولعدة متحولات

I - تعاريـــــــف :

تعريف التابع لمتحوليـــن :

اذا كان كل من x و y متحولين مستقلين وكان z مرتبطا بهما وكان مقابل كل (x , y) يوجد قيمة وحيدة لـ z فاننا نسمي z تابع لـ (x , y) ونكتب ذلك على الشكل التالي :

$$z = f(x , y)$$

وكمثال على هذه التوابع نورد التوابع التالية :

$$z = 2x + 9y + 5$$

$$z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$$

$$z = x.y + 10$$

يوجد في الحياة الاقتصادية عدد كبير من التوابع المرتبطة بعـــدة متحولات نذكر منها التوابع التالية :

- مقدار منتجات سلعة ما z يرتبط بمقادير المواد الاولـــــة

الداخله في الانتاج .

- تكلفه احدى السلع ترتبط بمقادير وأسعار المواد الداخله فيهـــا .
- مساحة المثلث ترتبط بطول قاعدته وارتفاعه .

*** منطقة تعريف التابع لمتحولين :**

بما أن التابع z مترابط بالمتحولين (x , y) وفق علاقة معينة هي :

$$z = f(x , y)$$

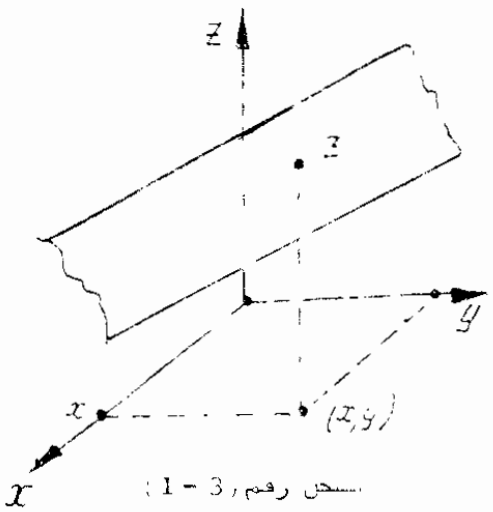
وبما أن كل من المتحولين x و y يعتبر متحولا مستقلا فان كل منهما يمثل على محور مستقل ، وان منطقة تعريف التابع z هي مجموعة القيم (x , y) التي تجعل التابع z معينا .

وان هذه المجموعه تشكل منطقه في المستوى XOY أما قيم التابع z فتمثل على المحور الثالث oz، وهي تأخذ شكل سطح معين في الفضاء R^3 ويختلف شكله من علاقة لأخرى .

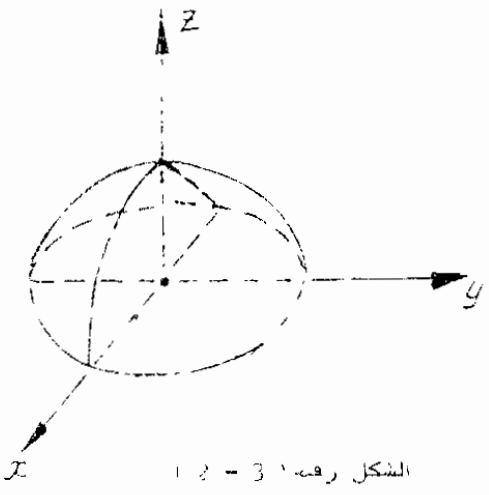
فاذا كانت العلاقة بين z والمتحولين x و y خطيه من الشكل:

$$z = ax + by + C \qquad (1,1,3)$$

فان منطقة تعريف z تشمل جميع قيم المستوي XOY وان السطح الذي تشكله قيم z هو سطح مستو معرف على كامل XOY . كما هو في الشكل (3-1) .



الشكل رقم (3 - 1)



الشكل رقم (3 - 2)

أما اذا كانت العلاقة غير خطية فان قيم z تأخذ شكل سطح انسيابي غير مستو فوق منطقة تعريف z فقط ، فمثلا اذا كانت :

$$z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)} \qquad (2,1,3)$$

فان منطقة تعريف z هي المنطقة من XOY التي تحقق الشرط :

$$25 - (x^2 + y^2) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

وهي تمثل كامل الدائرة التي مركزها (0 , 0) ونصف قطرها يساوي (5) في XOY ، أما قيم z فتشكل سطح نصف كرة فوق تلك الدائرة (لاننا أخذنا الاشارة الموجبة للجذر) كما هو موضحا على الشكل رقم (3 - 2) .

أما (كانت العلاقة من الشكل :

$$z = \frac{x}{y - 1} + 10$$

فان منطقة تعريف z هي المستوى XOY ماعدا النقاط التي يكون فيها $y = 1$ ، وان هذه النقاط تشكل مستويا موازيا لـ XOZ ويمر من النقطة $(1 , 0)$،وان مجموعة قيم z تشكل سطحين يفصل بينهما المستوى $y = 1$.وللحصول على قيم z المقابلة لقيم (x , y) المختلفة والمنتمية لمنطقة التعريف يجب علينا أن نعد جدولا خاصا بذلك كالجدول التالي المعد للتابع $z = x.y$.

y \ x	1	2	3	4	5	6	7	.....
1	1	2	3	4	5	6	7	.....
2	2	4	6	8	10	12	14	.....
3	3	6	9	12	15	18	21	.....
4	4	8	12	16	20	24	28	.....
.								
.	.....							
.								
.								

* نهاية التابع لمتحولين :

ان نهاية التابع z عندما ينتهي x الى x_0 وينتهي y الى y_0 من حيث التعريف شبيهة بنهاية التابع لمتحول واحد ونعرفها كما يلـــي .

نقول عن z_o انها نهاية التابع $z = f(x , y)$ عندما تنتهي الثنائية (x , y) الى النقطة (x_o , y_o) اذا كان مقابل كل متوالية (x_n , y_n) تختلف عن (x_o , y_o) وتنتهي الى (x_o , y_o) نفسها يوجد متوالية $f(x_n , y_n)$ تنتهي الى القيمة z_o عندما تنتهي n الى اللانهاية . ونكتب ذلك كمايلي :

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x , y) = z_o \qquad (3,1,3)$$

أو على الشكل التالي :

$$f(x , y) \longrightarrow z_o$$

عندما : $(x , y) \longrightarrow (x_o \; y_o)$

فمثلا نجد أن :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2x^2 - y^2) = -2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to o}} \frac{5 - xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{1} = 5$$

وهنا نشير الى أن جميع النظريات التي تخص التوابع لمتحول واحد حول نهاية مجموع أو فرق أو جداء وقيمة تابعين هي صحيحة للتوابع لمتحولين أي اذا كان :

$$g(x , y) \longrightarrow b \qquad f(x,y) \longrightarrow a$$

$$x \longrightarrow x_o \qquad x \longrightarrow x_o$$

$$y \longrightarrow y_o \qquad y \longrightarrow y_o$$

فان هذه النهايات تحقق العلاقات التالية :

$$f(x , y) \pm g(x , y) \longrightarrow a \pm b \qquad (4,1,3)$$

$$f(x , y) \cdot g(x , y) \longrightarrow a.b \qquad (5,1,3)$$

$$\frac{f(x , y)}{g(x , y)} \longrightarrow \frac{a}{b} \qquad (6,1,3)$$

حيث أن $g(x , y) \neq o$ وأن $b \neq o$

* الاستمـــــرار :

نقول عن التابع $z = f(x , y)$ انه مستمر في النقطـــة (x_o,y_o) اذا كان z معرفا في هذه النقطة واذا كانت نهايتـــــه تساوي قيمته فيها . أي اذا كان معـ ـكان :

$$f(x , y) \longrightarrow f(x_o , y_o) \qquad (7,1,3)$$

$$x \longrightarrow x_o$$

$$y \longrightarrow y_o$$

وكمثال على ذلك نأخذ التابع :

$$z = \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} = f(x , y)$$

ولنبحث عما اذا كان مستمرا في النقطة (1 , 0) لذلك نحسب نهايته وقيمته عند هذه النقطة فنجد أنه معين فيها وأن :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} = 1 = f(0 , 1)$$

اذن فهو مستمر في (0, 1) .

* المشتقات الجزئية ذات المرتبة الاولى :

بما أن z تابع لمتحولين فان تزايد أحدهما أو كلاهما يؤدي الى تزايد z ، وحتى نستطيع معرفة مقدار تزايد z المقابل لأحد المتحولين نعتبر المتحول الآخر ثابتا ونحسب مقدار تزايد z عندما يتزايد ذلك المتحول .

فاذا اعتبرنا y ثابتا و x هو الذي يتغير فان تزايد z عندما يتزايد x بمقدار Δx يساوي :

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x , y) - f(x , y)$$

واذا أخذنا النسبة $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ وبحثنا عن نهايتها عندما تنتهي Δx الى الصفر فاننا نحصل على المشتق الجزئي (النسبي) لـ z بالنسبة للمتحول x . واذا رمزنا لهذا المشتق بـ z'_x فيكون :

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to \neq 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \neq 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = f'_x \quad (8,1,3)$$

أما اذا اعتبرنا x ثابتا و y هو الذي يتغير فان تزايد z

عندما يتزايد y بمقدار Δy يساوي :

$$\Delta z_y = \frac{f(x,y + \Delta y) - f(x , y)}{\Delta x}$$

واذا أخذنا النسبة $\frac{\Delta z_y}{\Delta y}$ وبحثنا عن نهايتها عندما تنتهي Δy الى الصفر فاننا نحصل على المشتق الجزئي (النسبي) لـ z بالنسبة لـ y .

واذا رمزنا لهذا المشتق بـ z_y فيكون :

$$z_y^{`} = \lim_{\Delta y \to \neq o} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to \neq o} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = f_y^{`} \quad (9,1,3)$$

كما يرمز عادة لهذين المشتقين $z_x^{`}$ و $z_y^{`}$ بالرمزين $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ على الترتيب .

مثـــال (3 , 1) : اذا كان لدينا التابع :

$$z = x^2y + 4x - 2y + 5$$

فلحساب مشتقه الجزئي بالنسبة لـ x نعتبر y ثابتا ونحسب مشتقه بالنسبة لـ x كتابع لمتحول واحد x فنجد أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x^{`} = 2xy + 4 - o + o$$

ولحساب مشتقه الجزئي بالنسبة لـ y نعتبر x ثابتا ونحســـــب المشتق بالنسبة لـ x كتابع لمتحول واحد y فنجد أن:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y^{`} = x^2 - 2$$

مثـــال (3 - 2) : اذا كان لدينا التابع :

$$z = \frac{xy}{x + y} \qquad x + y \neq o$$

كان :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x^{`} = \frac{y(x + y) - xy}{(x + y)^2} = \frac{y^2}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y^{`} = \frac{x(x + y) - xy}{(x + y)^2} = \frac{x^2}{(x + y)^2}$$

مثـــال (3 - 3) : اذا كان التابع :

$$z = a_o x^{a_1} y^{a_2}$$

فـــان :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a_o a_1 x^{a_1 - 1} . y^{a_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a_o a_2 x^{a_1} . y^{a_2 - 1}$$

* **المشتقات الجزئية للتوابع الضمنيـة :**

نعلم أن التابع الضمني لمنحول واحد يكتب على الشكـــــل التالي :

$$F(x , y) = o$$

كما نعلم أن :

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (10,1,3)$$

حيث أن $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ وأن $\frac{\partial F}{\partial x}$ و $\frac{\partial F}{\partial y}$ مشتقان موجودان.

أما التابع الضمني لمتحولين فنكتب على الشكل التالي .

$$F(x , y , z) = 0$$

فاذا كان F قابلا للاشتقاق بالنسبة لكل من x و y و z في منطقة تعريفه فان المشتقين الجزئيين $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ يحسبان من العلاقتين التاليتين المشابهتين لـ (10,1,3) .

$$-\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (11,1,3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (12,1,3)$$

حيث أن $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

مثال (3 - 4) : اذا كان لدينا التابع الضمني التالي :

$$F(x,y,z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$$

وهنا نلاحظ أن التابع z لا يمكن قدره وحسابه بدلالة x و y فقط، لذلك نعتبر هذا التابع تابعا ضمنيا وان مشتقاته الجزئية تساوي:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(2x + 3y + 3z)}{3x + 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(3x - 4y)}{3x + 2z}$$

* المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية :

ان المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x ولـ y للتابع z هي مشتقات المشتقين الجزئيين $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$

فاذا كان z قابلا للاشتقاق مرتين وكان $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ قابلا للاشتقاق مرة واحدة في مجال تعريف كل منها، فان المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x وبالنسبة لـ y تحسب من العلاقات التالية :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \grave{\grave{f}}_{xx} \qquad (13,1,3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \grave{\grave{f}}_{yx} \qquad (14,1,3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \grave{\grave{f}}_{xy} \qquad (15,1,3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \grave{\grave{f}}_{yy} \qquad (16,1,3)$$

اذن هناك أربعة مشتقات من المرتبة الثانية للتابع z المرتبط بـ

x و y هي : $f_{xx}^{``}$ و $f_{yx}^{``}$ و $f_{xy}^{``}$ و $f_{yy}^{``}$

وهنا يجب أن نلاحظ أن المشتقين $f_{xy}^{``}$ و $f_{yx}^{``}$ متساويـــان

أي أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad (17,1,3)$$

وذلك لأن عملية الاشتقاق عملية تبديلية .

مثـال (3 - 5) : لنأخذ التابع :

$$z = x^4 - 5x^2y^2 + 3xy^2 + 7 = f(x , y)$$

نقوم أولا بحساب المشتقين الجزئيين من المرتبة الأولى فنجد أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -10x^2y + 6xy$$

أما المشتقات من المرتبة الثانية فتساوي :

$$f_{xx}^{``} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2$$

$$f_{xy}^{``} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -20xy + 6y$$

$$f_{yx}^{``} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -20xy + 6y$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10x^2 + 6x$$

وهنا نلاحظ أن :

$$f''_{xy} = f''_{yx} = -20xy + 6y$$

مثـــال (3 - 6) : نـأخذ التـابع :

$$z = x \cos y - y \cos x = f(x , y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin y - \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin y + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\sin y + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \cos y$$

* **ملاحظـــــة** : ان حساب المشتقات من المرتبة الثالثة أو الرابعة لايختلف كثيرا عما فعلناه في حالة المرتبه الثانيه حيث نقوم باشتقاق كـــــــل

مشتقات المرتبة الثانية بالنسبة لـ x و لـ y فنحصل على مشتقات المرتبة الثالثة ، وهكذا الامر بالنسبة للمشتقات الرابعة أو ذات المراتب الاعلى .

* التفاضل الكلي من المرتبة الاولى لتابع ذي متحولين :

لنرمز الى التزايد الكلي لتابع ذي متحولين الذي ينشأ عن تزايد كل من المتحولين x و y بمقدار Δx و Δy بالرمز Δz فيكون :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x , y)$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) +$$

$$+ f(x, y + \Delta y) - f(x , y)$$

وحسب العلاقتين (3 ,1 ,8) و (3 ,1 ,9) نجد أن :

$$\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y \qquad (18,3)$$

ويمكننا كتابة العلاقة السابقة على الشكل التالي :

$$\Delta z = \frac{\Delta z_x}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{\Delta z_y}{\Delta y} \cdot \Delta y \qquad (19,3)$$

وعندما $\Delta x \longrightarrow \neq o$ و $\Delta y \longrightarrow \neq o$ فان $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ وان $\Delta z = dz$ كما أن z'_x وان $\frac{\Delta z_x}{\Delta x} \underset{\Delta x \to \neq o}{\longrightarrow}$

z'_y $\frac{\Delta z_y}{\Delta y} \underset{y \to \neq o}{\longrightarrow}$ وبذلك نجد أن العلاقة (3 ,1 ,19) تأخذ الشكل التالي .

$$dz = \grave{z}_x dx + \grave{z}_y dy \qquad (20,1,3)$$

كما يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (21,1,3)$$

ويسمى المقدار dz بالتفاضل الكلي للتابع z من المرتبة الاولى .

مثـــال (3 - 7) :

لنفترض أنه لدينا مخروط ارتفاعه h يساوي (30) سم، ونصف قطر قاعدته r يساوي10 سم، فما هو مقدار تغير حجمـــــه اذا ازداد ارتفاعه بمقدار 3 مم ونقص نصف قطر قاعدته بمقدار 1 مم؟.

الحـــل : نعلم أن حجم المخروط V يعطى بدلالة ارتفاعه ونصـــف قطر قاعدته بالعلاقة :

$$V = \frac{\pi}{3} hr^2$$

ولحساب مقدار تغير الحجم نحسب التفاضـــل الكلي لـ V ولذلك نجـــب أن نحسب المشتقين الجزئيين لـ V فنجد أن :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi hr}{3}$$

وبذلك نجد أن مقدار تغير الحجم يقارب :

$$\Delta V \approx dV = (\frac{\pi}{3} r^2) dh + (\frac{2\pi hr}{3}) dr =$$

$$= \frac{\pi}{3} [r^2 dh + 2hr\, dr]$$

$$= \frac{\pi}{3}[(10)^2(0,3) + 3(30)(10)(-0,1)] = -31,42 \text{ cm}^3$$

اذن سينقص الحجم V بمقدار $-31,42$ سم^3 تقريبا .

*** التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع ذي متحولين :**

ان التفاضل الكلي من المرتبة الثانية هو التفاضل الكلي للتفاضل الكلي من المرتبة الاولى ، واذا رمزنا له بـ d^2z فان:

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}.dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}\,dy$$

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dx +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

وبما أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

فاننا نجد أن:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (22,1,3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا عبارة التفاضل الكلي من المرتبة الثانية

مثـال (3 - 8) : لنأخذ التابع :

$$z = 2x^2y + 2y^2x + 3xy + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy + 2y^2 + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 4yx + 3x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x + 4y + 3$$

وبذلك نجد أن :

$$d^2z = (4y)dx^2 + 2(4x + 4y + 3)dxdy + (yx)dy^2$$

* المشتقات الجزئية للتوابع المركبة :

لنفترض أن z تابعا لمتحولين u و v وفق العلاقة :

$$z = f(u , v)$$

وان كل من u و v تابع للمتحولين x و y وفق العلاقتين

$$u = g(x , y) \qquad v = h(x , y)$$

والمطلوب : حساب المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى للتابع z بالنسبة للمتحولين x و y .

من العلاقة (3 ,1 ,21) نلاحظ أن التفاضل الكلي لـ z كتابع لـ u و v يساوي :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv$$

وبتقسيم الطرفين على ∂x ثم ∂y نحصل على المشتقين الجزئيين للتابع المركب Z بالنسبة لـ x و y التاليين وذلك بعد استبدال $dz \to \partial z$ و $du \to \partial u$ و $dv \to \partial v$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (23,1,3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (24,1,3)$$

مثـال (3 - 9) : نأخذ التابع :

$$z = u \ln v$$

حيث أن $u = 5x - y$ وأن $v = x^2 + y^2$

ومن العلاقتين (23, 1, 3) و (24, 1, 3) نجد أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln v(5) + \frac{u}{v}.(2x) = 5 \ln(x^2 + y^2) + 2x \frac{5x - y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln v(-1) + \frac{u}{v}(2y) = -\ln(x^2 + y^2) + 2y \frac{5x - y}{x^2 + y^2}$$

■ **ملاحظـــــة** : عندما تكون كل من u و v تابعا لأحد المتحولين فقط (x مثلا) فان مشتقه الجزئي بالنسبه لـ y تساوي الصفر وبذلك نأخذ العلاقه (3, 1 ,23) الشكل التالي :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad (25,1,3)$$

أما المشتق $\frac{\partial z}{\partial y}$ فتساوي الصفر لأنه في هذه الحالة تكون لدينا :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = o \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = o$$

II ـ النقاط الحرجة لتابع ذي متحولين :

ان النقاط الحرجة هي مجموعة النقاط المنتمية الى منطقة التعريف والتي تقابل القيم العظمى والصغرى والشاذة للتابع z .

وسنبحث عن هذه النقاط في الحالتين التاليتين :

١ ـ الحالة التي يكون فيها كل من x و y غير مقيد بـ ي شرط، وفي هذه الحالة نسمى النقاط الحرجة بالنقاط الحرجـــة الموضعية (الحرة) .

٢ ـ الحالة التي يكون فيها المتحولان x و y مرتبطـــان بعلاقة أو شرط يقيد تحولاتهما وفي هذه الحالة نسمـــــى النقاط الحرجة بالنقـاط الحرجة المقيدة أو الشرطية .

(II - 1) النقاط الحرجة الموضعية (الحرة) :

نحن نعلم أنه اذا كانت x_o نقطة حرجة للتابع $f(x)$ ذي المتحول الواحد فانها يجب أن تحقق شروط معينة وذلك حسب نوعها .

١ - اذا كانت النقطة x_o تقابل قيمة عظمى لـ $f(x)$ فهي تحقق الشرطين :

$$\grave{f}(x_o) = o \quad , \quad \grave{\grave{f}}(x_o) < o \qquad (1,2,3)$$

٢ - اذا كانت النقطة x_o تقابل قيمة صغرى لـ $f(x)$ فهي تحقق الشرطين :

$$\grave{f}(x_o) = o \quad , \quad \grave{\grave{f}}(x_o) > o \qquad (2,2,3)$$

٣ - اذا كانت النقطة x_o شاذة، أي تقابل قيمة شاذة لـ $f(x)$ فهي تحقق الشرطين :

$$\grave{f}(x_o) = o \qquad \grave{\grave{f}}(x_o) = o \qquad (3,2,3)$$

أما عندما يكون التابع ذا متحولين فان الشروط التي يجب أن تحققها المشتقات الجزئية للتابع $z = f(x,y)$ حسب أنواع النقاط الحرجة هي الشروط التالية :

١ - اذا كانت النقطة $(x_o\ y_o)$ تقابل قيمة عظمى للتابع z فهي تحقق الشروط التاليه :

$$d^2 f(x_o,y_o) < o \ , \ f'_y(x_o\ y_o) = o \ , \ f'_x(x_o\ y_o) = o \qquad (4,2,3)$$

وكمثال على هذه النقطة وأمثالها أوردنا الشكل رقم (3 - 3).

٢ - اذا كانت النقطة (x_o, y_o) تقابل قيمة صغرى للتابع z فهي تحقق الشروط التالية :

$$d^2f(x_o\ y_o) > o,\ f'_y(x_o,y_o) = o\ ,\ f'_x(x_o,y_o) = o \qquad (5,2,3)$$

وكمثال على هذه النقطة وأمثالها أوردنا الشكل رقم (3 - 4).

٣ - اذا كانت النقطة (x_o, y_o) تقابل قيمة شاذة للتابع z فهي تحقق الشروط التالية :

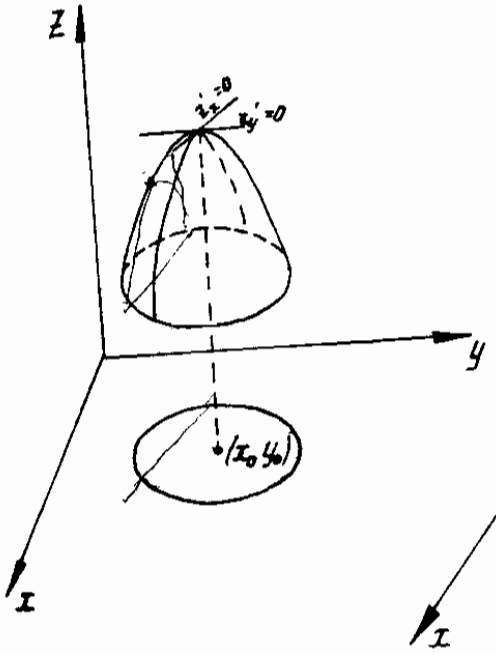
$$d^2f(x_o,y_o) = o,\ f'_y(x_o,y_o) = o,\ f'_x(x_o,y_o) = o \qquad (6,2,3)$$

وكمثال على هذه النقطة وأمثالها أوردنا الشكل رقم (3 - 5) الذي يشير الى النقطة (x_o,y_o) المقابلة للنقطة $A\ (x_o\ y_o\ z_o)$ والتي تسمى بالنقطة السرجية لأنها تشبه مركز سرج الحصان .

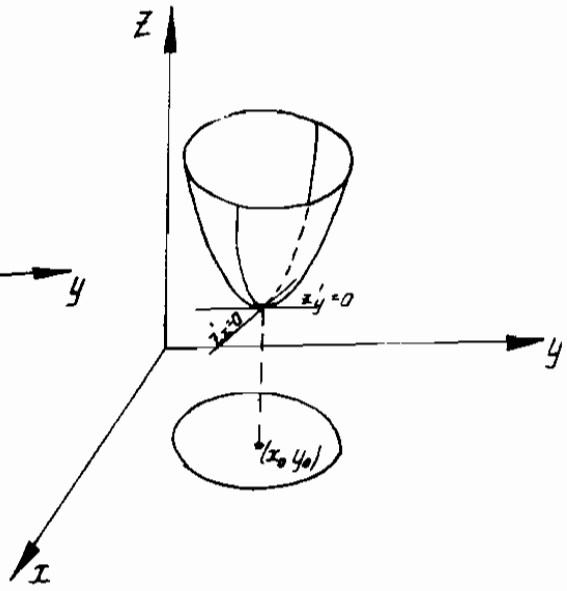
وبذلك يمكننا أن نعبر عن ذلك من خلال النظرية التالية :

* نظرية : اذا كان $f(x\ ,\ y)$ قابلا للاشتقاق ، وكانت $(x_o\ y_o)$ نقطة حرجة من منطقة تعريفه فانه يجب أن يكون (شرط لازم) .

$$f'_y(x_o\ y_o) = o \qquad f'_x(x_o\ y_o) = o \qquad (7,2,3)$$



الشكل رقم (3 - 3)

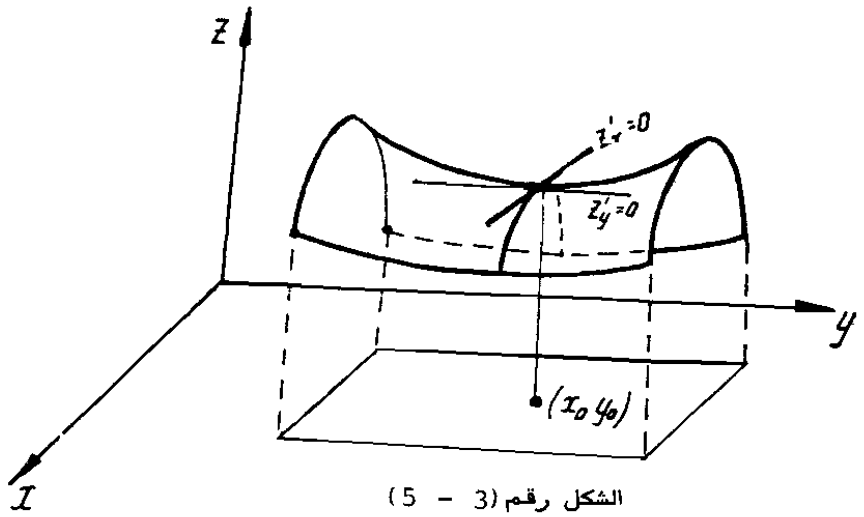


الشكل رقم (3-4)

وتكون هذه النقطة ($x_o\ y_o$) مقابلة لقيمة عظمى لـ z اذا كان:
$d^2f(x_o\ y_o) < o$ ومقابلة لقيمة صغرى لـz اذا كان $d^2f(x_o\ y_o) > o$
ومقابلة لقيمة شاذة لـ z اذا كان $d^2f(x_o\ y_o) = o$

وسنترك هذه النظرية بدون برهان ، ولكننا سنحاول أن نستبدل الشرط الثالث $d^2f(x_o\ y_o)$ بشرط مكافئ لذلك نحسب قيمة d^2f من العلاقة (3 , 1 , 22) فنجد أن :

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \qquad (8,2,3)$$



الشكل رقم (3 - 5)

وبفرض أن :

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad , \quad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

فان العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$d^2f = Adx^2 + 2Cdxdy + Bdy^2$$

لنكمل الطرف الايمن الى مربع كامل بالنسبة لـ dx نضيف ونطرح $(\frac{C^2}{A}\ dy^2)$ فنحصل على :

$$d^2f = Adx^2 + 2Cdxdy + \frac{C^2}{A}\ dy^2 + (B - \frac{C^2}{A})dy^2$$

$$d^2f = A[dx + \frac{C}{A}\ dy]^2 + (\frac{AB - C^2}{A})dy^2 \qquad (9,2,3)$$

وبما أن dx و dy غير معدومين اذن فان التفاضل الكلي d^2f يكون سالبا عندما تتحقق الشروط التالية :

$$A < o \quad \text{و} \quad AB - C^2 > o \qquad (10,2,3)$$

وبطريقة مشابهة نجد أن d^2f يكون موجبا اذا كانت :

$$A > o \quad \text{و} \quad AB - C^2 > o \qquad (11,2,3)$$

ويكتابه العباره الاخيره على شكل معين وبدلالة الرموز الاصلية نجد أن

$$AB - C^2 = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = H_2$$

ان هذا المعين يسمى معين (هيسان) من المرتبة الثانية لذلك رمزنا له بالرمز H_2 ، واذا رمزنا للمقدار A بالرمز H_1 (معين هيسان من المرتبه الاولى) ، فاننا نجد أنه يمكننا التعبير عن الشروط التي يجب أن تحققها النقاط الحرجة من خلال النظرية التالية :

* **نظرية :** اذا كان $f(x, y)$ قابلا للاشتقاق وكانت النقطة $(x_o\ y_o)$ أحد حلول المعادلتين .

$$f'_x = o \qquad f'_y = o \qquad (12,2,3)$$

فان النقطة $(x_o\ y_o)$ تقابل قيمة عظمى موضعية للتابع f اذا كانت قيمتي المعينين H_1 و H_2 عند النقطة $(x_o\ y_o)$ تحققان مايلي.

$$H_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_o\ y_o)} < o \ , \ H_2 = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{matrix} \right|_{(x_o\ y_o)} > o$$

(13,2,3)

وان النقطة $(x_o\ y_o)$ تقابل قيمة صغرى موضعية للتابع f اذا كانت

قيمتي المعينين H_1 و H_2 عند النقطة $(x_o\ y_o)$ تحققان مايلي:

$$H_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_o\ y_o)} > o \qquad H_2 = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{matrix} \right|_{(x_o\ y_o)} > o$$

(14,2,3)

وتكون $(x_o\ y_o)$ مقابلة لنقطة شاذة اذا كانت غير ذلك .

* **ملاحظـــــة** : يجب أن نطبق هـذه النظرية على جميع حلول المعادلتين (12, 2, 3) والتي تمثل مجموعة النقاط الحرجة للتابع z وذلك بتعويض احداثيات كل نقطة حرجة على انفراد في المعينين H_1 و H_2 حيث يتم تحديد نوع كل النقاط الحرجة ، نقطة نقطة حسب الشـــــروط الواردة في النظرية السابقة .

مثـــال (3 -10): أوجد النقاط الحرجة للتابع :

$$z = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4 = f(x\ ,\ y)$$

ثم حدد نوعها وأوجد قيمة التابع عند كل منها .

الحـــل: لايجاد النقاط الحرجة يجب حساب f'_x و f'_y ثم وضعهما مساويان للصفر فنجد أن :

$$?x - y = o \qquad (1)$$

$$2y = o \qquad (2)$$

لايجاد الحلول المشتركه لهاتين المعادلتين نحسب x من الثانيه

ونعوضه في الاولى $(x = 2y)$ فنحصل على المعادله التاليه :

$$3(2y)^2 + 2(2y) - y = 0$$

$$12y^2 + 3y = 0$$

$$y(12y + 3) = 0$$

ولها حلان هما : $y = 0 \qquad y = -\frac{1}{4}$

ويقابلهما قيمتان لـ x : $x = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$

اذن نوجد لدينا نقطتان حرجتان هما $(0 , 0)$ و$(-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4})$

ولدراسة نوعية كل من هاتين النقطتين نحسب المشتقات الثانية :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

ثم نقوم بايجاد المعين H_1 و H_2 فنجد أن :

$$H_1 = [6x + 2] \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 6x + 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بتبديل احداثيات كل نقطة في H_1 و H_2 فنجد بالنسبة للنقطة $(0 , 0)$ أن :

$$H_1 = [6x + 2]_{(0,0)} = 2 > 0$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 6x + 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{(o,o)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > o$$

وبما أن $H_1 > o$ و $H_2 > o$ اذن النقطة (o,o) تقابل قيمةصغرى للتابع z وان هذه القيمة تساوي $z = 4$.

ثم نقوم بتبديل احداثيات $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ في H_1 و H_2 فنجد أن:

$$H_1 = [6x + 2]_{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})} = -1 < o$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 6x + 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -3 < o$$

وبما أن $H_1 < o$ و $H_2 < o$ (وهي حالة غير واردة في النظريةالسابقة)

اذن النقطة$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ لاتقابل قيمة صغرى ولاقيمة عظمى بل هي تقابل نقطة شاذة للتابع z وأن هذه القيمة تساوي :

$$z = 3(-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{4}) - (-\frac{1}{4})^2 +$$

$$+ 4 = 3,8125$$

(II – 2) : النقاط الحرجةالمقيدة (الشرطية) :

وهي مجموعة النقاط الحرجة للتابع z عندما يكـــــــون المتحولان x و y مرتبطين بشرط أو أكثر ، وكمثال على ذلك نأخذ التابع :

$$Z = xy + 2x + 2$$

علما بأن x و y يرتبطان بالشرط:

$$2x + y = 30$$

وسنناقش هذه القضية في حالة وجود شرط واحد ثم في حالة وجود شرطين على المتحوليين x و y .

أ ـ النقاط الحرجة للتابع z مع وجود شرط واحد فقط .

لنفترض أن $z = f(x,y)$ قابلا للاشتقاق مرتين على الاقل في كل نقطة من منطقة تعريفه ، ونريد ايجاد النقاط الحرجة لهذا التابع مع وجود شرط على x و y معطى بالعلاقة :

$$g(x , y) = C$$

يمكننا معالجة هذه المسألة بطريقتين .

الطريقة الاولى : وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون $g(x,y)=C$ قابلا للفصل حيث يمكننا حساب y منه ، ولنفترض أنه أمكننا حساب y وكانت $y = h(x)$ ، عندها نقوم بتعويض y في عبارة التابع z فنحصل على :

$$z = f(x, h(x)) = F(x)$$

وهو تابع لـ x فقط ، وفي هذه الحالة نتحول عملية البحث عن النقاط الحرجة لتابع ذي متحول واحد ، وهذا أمر سهل ومعروف .

الطريقة الثانية : طريقة ضارب (لاغرانج Lagrange)

نفترض أن التابع هو $z = f(x , y)$ وان الشرط المفروض على x و y هو :

$$g(x , y) = C$$.

مما سبق نعلم أنه حتى تكون النقطة $(x_o\ y_o)$ نقطة حرجة فانه يجب أن نحقق: $f'_x = o$ و $f'_y = o$ وهذا يعني أن .

$$dz_{(x_o\ y_o)} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = o$$

ومنها نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (15,2,3)$$

ومن جهة أخرى نجد أن الشرط المفروض $g(x\ ,\ y) = C$ يعطينا أن تفاضله الكلي يساوي:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\ dx + \frac{\partial g}{\partial y}\ dy = o$$

ومنها نجد أن :

$$\frac{dy}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \qquad (16,2,3)$$

وبمقارنة العلاقتين (3 , 2, 15) و (3, 2 , 16) نجد أن :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \qquad (17,2,3)$$

والذي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \qquad (18,2,3)$$

وهذا هو الشرط اللازم الذي يجب أن تحققه النقاط الحرجة ،واذاوضعنا :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\lambda$$

حيث λ هو عدد ثابت يسمى بضارب لاغرانج .

ومن العلاقة الاخيرة نجد أن الشروط التي يجب أن تحققها النقـــاط الحرجة تتألف من الشروط التالية :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= o \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= o \\ g(x\ ,\ y) - C &= o \end{aligned}\right\} \qquad (20,2,3)$$

وان الحل المشترك لهذه المعادلات الثلاث يعطينا النقاط الحرجـــة للتابع $z=f(x\ ,y)$ ضمن الشروط $g(x,y) = C$.

واذا أمعنا النظر في المعادلتين الاولى والثانية مـــن (20,2,3) نجد أنهما ما هما الا عبارة عن المشتقين الجزئيين لتابع مركـــب من التابعين السابقين بواسطة ضارب لاغرانج λ ويأخذ الشكل التالي:

$$L = f(x,y) + \lambda[g(x , y)- C] \qquad (21,2.3)$$

واننا نحصل على المعادلات الثلاثه (20, 2, 3) من جراء حساب المشتقات الجزئية للتابع L بالنسبة لـ x و y وλ ثم وضع هذه المشتقات مساوية للصفر . وهكذا نستخلص طريقة جديدة لايجاد النقاط الحرجة للتابع z مع وجود شرط $g(x,y)=C$ نتلخص بمايلي:

١ ـ نشكل تابعا جديدا L مؤلف من التابع $f(x,y)$ ومن التابع $[g(x,y)-C]$ مضروبا بـ λ فنحصل على :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[g(x,y)- C] \qquad (22,2,3)$$

٢ ـ نأخذ المشتقات الجزئيه للتابع $L(x, y, \lambda)$ بالنسبه لـ x و y و λ ونضعها مساوية للصفر فنحصل على المعادلات (20, 2, 3).

٣ ـ نحل المعادلات (20,2,3) فنحصل على النقاط الحرجه مثل ($x_o\ y_o\ \lambda_o$) الموافقه للنقاط الحرجه من ($x_o\ y_o$) والتي تحقق الشرط المفروض $g(x, y) = C$.

٤ ـ لدراسة نوعية هذه النقاط نشكل ما يسمى بمحدد (هسان) الموسع والذي يكتب على الشكل التالي

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix} \qquad (23,2,3)$$

٥ – نعوض احداثيات كل نقطه حرجه (x_0, y_0) على حده في المعين D فاذا كان

$D_{(x_0,y_0)} > 0$ فان النقطه (x_0, y_0) تكون مقابلة لقيمه عظمى لـ z .

$D_{(x_0,y_0)} < 0$ فان النقطه (x_0, y_0) تكون مقابلة لقيمه صغرى لـ z .

مثـــال (3 -11) : اذا كان

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + 5x$$

وكان الشرط المعروض هو

$$g(x,y) = x - 2y - 1$$

فأوجد النقاط الحرجه لـ z وحدد نوع كل منها .

الحـــل : نشكل التابع L حيث

$$L = x^2 - y^2 + xy + 5x + \lambda[x - 2y - 1]$$

ثم نشتق بالنسبة لـ x ثم y ثم λ ونضع هذه المشتقات مساوية للصفر فنحصل على المعادلات التالية :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + y + 5 + \lambda = o \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x - 2\lambda = o \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x - 2y - 1 = o \qquad (3)$$

وبطرح (3) من (2) ينتج لدينا أن $\lambda = \frac{1}{2}$:

ومن (3) نجد أن $x = 2y + 1$ نعوض في (1) فنجد أن :

$$2(2y + 1) + y + 5,5 = o$$

$$5y + 7,5 = o$$

$$y = -1,5$$

ومنها نجد أن :

$$x = -2$$

وبذلك نجد أن النقطة الحرجة الوحيدة هي $\left(-2, -1,5, \frac{1}{2}\right)$.

لدراسة نوعها نحسب عناصر المعين D فنجد أن :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2$$

والمعين D يساوي .

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

وبما أن $D < 0$ اذن النقطه $(-1,5 \; ; -2)$ تقابل قيمه صغرى لـ z وتساوي $z = -5,25$

ب ـ النقطة الحرجه مع وجود شرطين على x و y.

في الحقيقة ان هذه الحاله ماهي الا تعميم للحاله السابقه لذلك نفترض أنه لدينا التابع $z = f(x,y)$ وان x و y مرتبطان بالشرطين التاليين .

$$g_1(x , y) = C_1$$

$$g_2(x , y) = C_2$$

لايجاد النقاط الحرجه لـ z نشكل التابع المركب لـ L والذي له الشكل التالي .

$$L = f(x,y) + \lambda_1 [g_1(x,y) - C] + \lambda_2 [g_1(x,y) - C] \qquad (23,2,3)$$

ثم نحسب المشتقات الجزئيه لـ L بالنسبه لـ x و y و λ_1 و λ_2 ونضعها مساويه للصفر فنحصل على المعادلات الاربعه التاليه

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = o \\
\frac{L}{\partial y} &= \frac{f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} = o \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= g_1(x\ ,\ y) - C_1 = o \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= g_2(x\ ,\ y) - C_2 = o
\end{aligned}\right\} \qquad (25,2,3)$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على النقاط الحرجه مثل $(x_o, y_o, \lambda_{o1}, \lambda_{o2})$

ولدراسة نوعية هذه النقاط نحسب عناصر المعين D حيث

$$D = \begin{vmatrix}
o & o & \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\
o & o & \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\
\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}
\end{vmatrix}$$

ثم نحسب قيمته عند النقطة $(x_o\ ,\ y_o\ ,\ \lambda_{o1},\ \lambda_{o2})$ فاذا كان

$D_{(x_o,y_o)} > o$ فان النقطة (x_o, y_o) تقابل قيمة عظمى لـ z

$D_{(x_o,y_o)} < o$ فان النقطة (x_o, y_o) تقابل قيمةصغرى لـ z

مثـــال (3 ـ 12) : أوجد النقاط الحرجةللتابع :

$$z = x^2 - y^2 + xy + 5x$$

مع وجود الشرطين :

$$g_1(x , y) = x - 2y = o$$

$$g_2(x , y) = x + y = 3$$

الحـــــل : نشكل التابع L فنجد أن :

$$L = x^2 - y^2 + xy + 5x + \lambda_1(x - 2y) + \lambda_2(x + y - 3)$$

ونحسب المشتقات الجزئية ثم نضعها مساوية للصفر فنحصل على:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + y + 5 + \lambda_1 + \lambda_2 = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x - 2y = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x + y - 3 = o$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على النقطة $(2, 1 , \frac{-10}{3}, \frac{-20}{3})$

ولمعرفة طبيعة هذه النقطه نشكل المعين D لذلك نحسب عناصره فنجد أن :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -2$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2$$

والمعين D يساوي :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

اذن النقطة الحرجة (2,1) تقابل قيمة عظمى للتابع z .

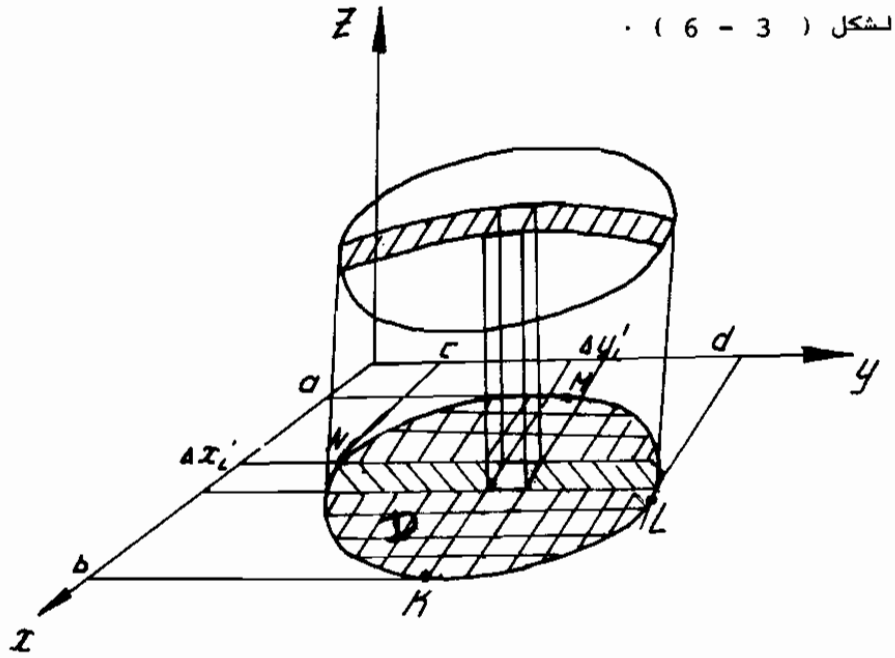
III - التكامل الثنائي المحدود :

ان فكرة التكامل الثنائي المحدود هي تعميم لفكرة التكامل الاحادي ، فالتكامل الاحادي يمثل المساحة التي تقع بين المحور OX ومنحنى التابع f(x) .

أما التكامل الثنائي المحدود فيمثل الحجم المحصور بين المستوى XOY

والسطح الذي يرسمه التابع f(x , y) والمقابل لمنطقة تعريف f(x,y) أو لمنطقة التكامل D. وسنوضح ذلك كما يلي :

لنفترض أنه لدينا تابعا f(x,y) = z معرف على منطقة محدودة ومغلقة D وان z و D لهما الوضعية المبينة على الشكل (3 - 6) .



الشكل رقم(3- 6)

ولنفترض أن x = a و x = b هما المماسان لـ D ، الموازيان للمحور oy في النقطتين M و K على الترتيب (a < b) وان y = c و y = d هما المماسان لـ D الموازيان للمحور ox في النقطتين N و L على الترتيب (c < d)

وان معادلة القوس MNK هي $y = g_1(x)$

وان معادلة القـــوس KLN هـــي $y = g_2(x)$

ثم نقوم بتقسيم مجال تحول x المجال المغلق [a,b] الى n مجالاً جزئيـــاً أطوالها على الترتيب هي $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \ldots \Delta x_n$

كما نقوم بتقسيم مجال تحـــــــــول y المجال المغلق [c,d] الى m مجالاً جزئياً أطوالها على الترتيب هي $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3 \ldots \Delta y_m$.

وكما نقوم بانشاء مستقيمات عند طرفي كل مجال جزئي عمودية علـــى المحورين OX و OY مما يقسم المنطقة D الى مستطيلات جزئية كما هو موضح على الشكل رقم(3 - 4) . واذا رمزنا الى مساحـــة المستطيل الداخلي الناجم عن المجالين Δx_i و Δy_j بالرمـــز R_{ij} فاننا نجد أن :

$$R_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_i$$

واذا رمزنا بـ (x_i, y_i) لأية نقطة داخلية في المستطيل السابـــق فاننا نجد أن حجم العمود الواقع فوق هذا المستطيل والمحصور بيـــن OXY والسطح $f(x,y)$ يساوي تقريبا جداء القاعدة R_{ij} فـــي الارتفاع $f(x_i, y_j)$ أي يساوي :

$$f(x_i, y_j).\Delta x_i . \Delta y_j$$

واذا تجاهلنا النقص في بعض المستطيلات التي تقع على محيط المنطقـة D فاننا نجد أن احمالي الحجم الواقع بين السطـــح $f(x , y)$ والمستوي XOY يساوي مجموع حجوم الاعمدة الناجمة عن التجزئـــــه السابقة وهو يساوي :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta x_i . \Delta y_j \qquad (1,3,3)$$

ولنبحث عن نهاية هذا المجموع عندما $n \longrightarrow \infty$ و $m \longrightarrow \infty$ أي

عندما $\Delta y_j \longrightarrow \neq o, \Delta x_i \longrightarrow \neq o$ فنجد أنه لو قمنا بتثبيت Δx_i وانهاء Δy_j فاننا نجد أن المجموع الداخلي ينتهي الى

$$\lim_{\Delta y_j \to \neq o} \sum_{j=1}^{m} f(x_i\ y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \lim_{\Delta y_j \to \neq o} [\sum_{j=1}^{m} f(x_i y_j)\Delta y_j]\Delta x_i$$

$$= [\int_{y=g_1(x_i)}^{y=g_2(x_i)} f(x,y)dy]\ \Delta x_i = \varphi(x_i)\Delta x_i$$

حيث $\varphi(x_i)$ هي نتيجه التكامل الذى داخل القوس .

نأخذ الآن المجموع الثنائى ونبحث عن نهايته عندما $\Delta x_i \longrightarrow \neq o$ و $\Delta y_j \longrightarrow \neq o$ فنجد أن.

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to \neq o \\ \Delta y_j \to \neq o}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \lim_{\Delta x \to} \sum_{i=1}^{n} \lim_{\Delta y_j \to \neq o} [\Sigma f(x_i\ y_j)\Delta y_i]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to \neq o} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Delta x_i = \int_a^b (x)dx$$

$$= \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)dydx \qquad (2,3,3)$$

وهذا يعني أنه علينا أن نقوم بتكامل $f(x\ ,\ y)$ بالنسبة لـ

وبحـــــدود من $g_1(x)$ الى $g_2(x)$ ثم نعود ونكامل الناتـــج بالنسبة لـ x من a الى b .

وهنا نشير الى أن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ هما معادلتا القوسيـــن MNK و KLM اللذين يحيطان منطقة التعريف أو منطقة التكامل .

* **ملاحظـــة** : يمكننا أن نقوم باجراء التكامل بالنسبـــة لـ x أولا وبحدود من $h_1(y)$ الى $h_2(y)$ ثم بالنسبة لـ y من c الـى d كمايلي :

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x , y)\,dxdy \qquad (3,3,3)$$

حيث ان $h_1(y)$ هي معادلة القوس NML

وأن $h_2(y)$ هي معادلة القوس NKL

* **طرائـق المكاملـــة** : يمكن أن نقوم باجراء التكاملات الثنائيـة بعدة طرائق منهـــا :

١ ـ الطريقة المباشرة : وهي تعتمد على ايجاد التابع الاصلي بالنسبة لـ y ثم التابع الاصلي بالنسبة لـ x (أو بالعكس) وهي لاتحتـــاج الا الى معرفة في التوابع ومشتقاتها وتوابعها الاصلية .

ويمكن فصل المتحولات عند التكامل اذا كان التابـــــع المكامل يسمح بذلك .

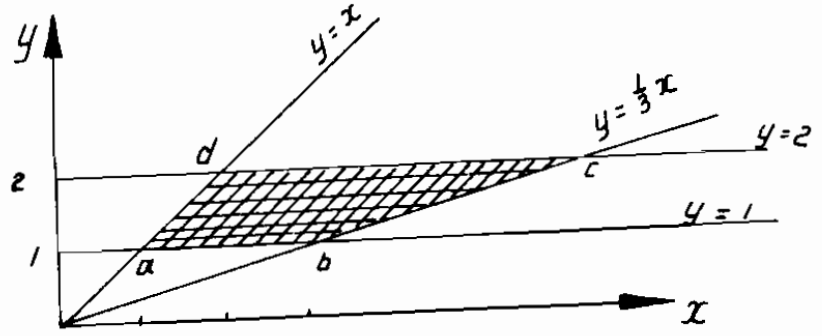
مثـــال (3 – 4) : أوجد التكامل :

$$\iint_D (x + y)\,dxdy$$

حيث D هي المنطقة المغلقة والمحددة بالمستقيمات :

$$y = 1 \quad و \quad y = 2 \quad x = y \quad و \quad x = 3y$$

الحـــل : نقوم برسم المنطقه D على XOY فنحصل على الشكل رقـم (3 – 7) التالي :



الشكل رقـم(3 – 7)

والشكل يبين أن المنطقة D هي abcd وان التكامل السابـــق يأخذ الشكل التالي :

$$I = \iint_D (x + y)\,dxdy = \int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)\,dxdy = \int_2^1 \int_{3y}^{y} (x+y)\,dxdy$$

وذلك لأن موضع الحدود يختلف حسب اتجاه الدوران في السير علـــــى محيط D .

لاجراء التكامل تكامل بالنسبة لـ(x) أولا فنحصل على أن :

$$I = \int_{2}^{1} [\frac{x^2}{2} + xy]_{3y}^{y} \cdot dy = \int_{2}^{1} [\frac{y^2}{2} + y^2 - (9\frac{y^2}{2} + 3y^2)]dy$$

ثم نكامل بالنسبة لـ y فنجد أن :

$$I = \int_{2}^{1} -6y^2 dy = -[\frac{6}{3} y^3]_{2}^{1} = -[2 - 16] = 14$$

٢ ـ طريقة تغير المتحولات :

وتعتمد هذه الطريقة على اجراء تغير في المتحولات يهدف الى تبسيط عمليات المكاملة وتحويلها الى تكاملات بسيطة ومعروفة .

لذلك نفترض أن التكامل المطلوب حسابه هو التكامل التالي :

$$\int_{a}^{b} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x , y)dxdx \qquad (4,3,3)$$

نرمز بـ $ds = dxdy$ ويسمى ds بعنصر المساحة في الاحداثيات القائمة .

فاذا أجرينا تغير في المتحولات على الشكل التالي :

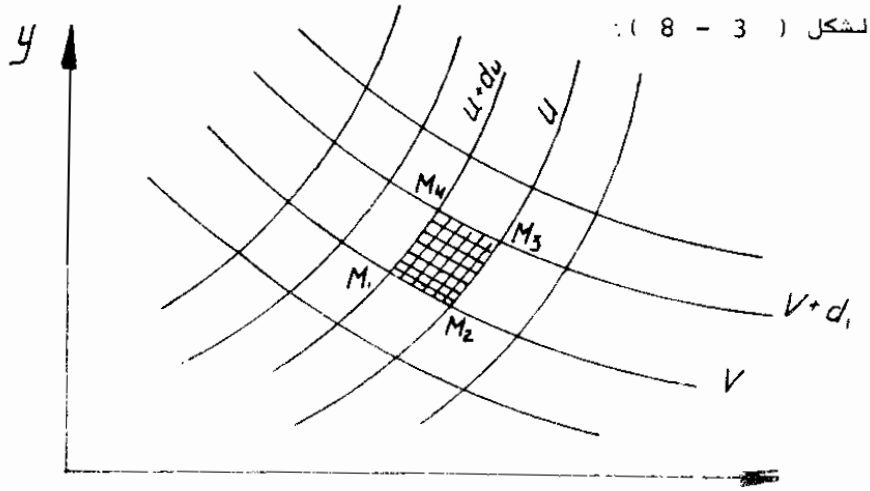
$$\left.\begin{array}{l} u = u(x , y) \\ V = V(x , y) \end{array}\right\} \qquad (5,3,3)$$

حيث أن : $u(x , y)$ و $V(x , y)$ هما تابعان قابلان للعكس، أي يمكننا أن نوجد منهما بشكل وحيد علاقتين لـ X و Y من الشكل:

$$\left.\begin{aligned} X &= X(u , V) \\ Y &= Y(u , V) \end{aligned}\right\} \qquad (6,3,3)$$

فاننا نجد أنه مقابل كل نقطة (x , y) يوجد نقطة من الشكل (u , V) ولذلك فان المتحولين الجديدين يسميان بالاحداثيين الجديدين ويكون لهما شكلا منحنيا اذا كانت العلاقتان (6, 3, 3) منحنيتين .

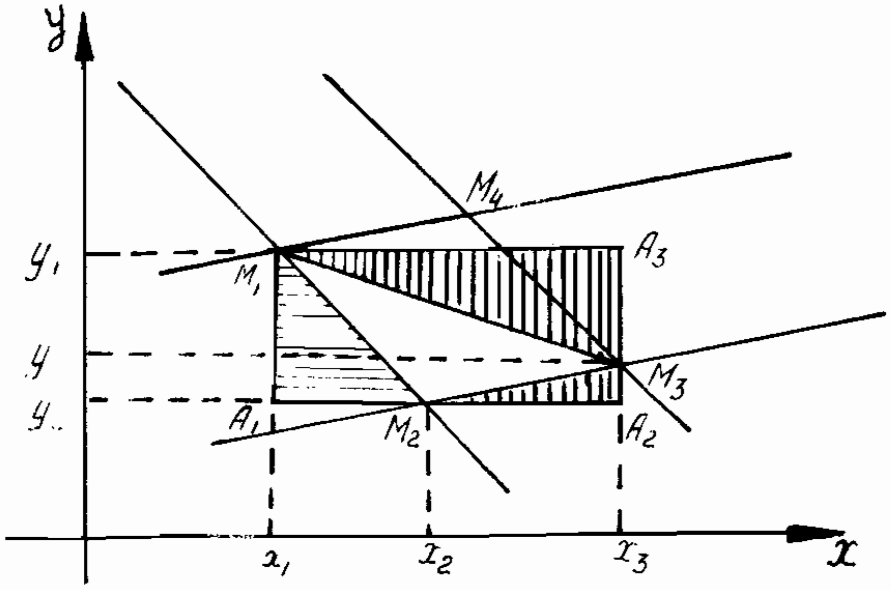
فاذا ثبتنا المتحول u وتركنا V يتغير فان العلاقتين (6, 3, 3) تعطيانا حزمة من الخطوط المنحنية في المستوي XOY ، نسميها منحنيات المتحول V ، وكذلك الامر اذا ثبتنا V وتركنا u يتغير فان العلاقتين المذكورتين تعطيانا أيضا حزمة من الخطوط المنحنية في المستوى XOY نسميها منحنيات المتحول u كما هو موضح على الشكل (3 - 8):



الشكل رقم (3 - 8)

لتحديد مقدار عنصر المساحة $d\sigma$ في الاحداثيات الجديدة المنحنية :

نأخذ عنصر المساحة $M_1 M_2 M_3 M_4$ المبين على الشكل (3 - 8) والناتج عن تقاطع زوجين متقاربين حداً من منحنيات u و V ونكبره على رسم خاص كما في الشكل (3 - 9) حيث يمكن اعتبار كل منحنيين لـ u و V متوازيين وبدرجة عالية من الدقة .



الشكل رقم (3 - 9)

من الشكل نلاحظ أن مساحة العنصر $M_1 M_2 M_3 M_4$ المطلوب تساوى ضعف مساحة المثلث $M_1 M_2 M_3$ ولحساب مساحة هذا المثلث ننشئ المستطيل $M_1 A_1 A_2 A_3$ ومن الشكل نجد أن مساحة المثلث المطلوب تساوي :

$$\overset{\Delta}{M_1M_2M_3} = \overset{\square}{M_1A_1A_2A_3} - \overset{\Delta}{M_1A_1M_2} - \overset{\Delta}{M_2A_2M_3} - \overset{\Delta}{M_3A_3M_1}$$

وبالتعبير عن هذه المساحات بواسطة الاحداثيات القائمة نجد أن:

$$\overset{\Delta}{M_1M_2M_3} = \left| (x_3-x_1)(y_1-y_2) - \frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1-y_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(x_3-x_2)(y_3-y_2) - \frac{1}{2}(x_3-x_1)(y_1-y_3) \right|$$

$$\overset{\Delta}{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\left| [x_1(y_2-y_3) - y_1(x_2-x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)] \right|$$

أي أن مساحة عنصر المساحة $d\sigma$ في الاحداثيات المنحنية تساوي

$$d\sigma = 2\overset{\Delta}{M_1M_2M_3}$$

وبذلك نجد أن :

$$d\sigma = \left| x_1(y_2-y_3) - y_1(x_2-x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) \right| \qquad (7,3,3)$$

ولحساب هذه الاحداثيات بدلالة u و V نستفيد من علاقات المشتقات الجزئية والتفاضل الكلي فنجد أن :

$$x_1 = X(u , V)$$

$$y_1 = Y(u , V)$$

$$x_2 = X(u + du, V) = X(u , V) + \frac{\partial X}{\partial u}.du \qquad (8,3,3)$$

$$y_2 = Y(u + du, V) = Y(u,V) + \frac{\partial Y}{\partial u}\, du$$

$$x_3 = X(u + du, V + dV) = X(u,V) + \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial V}\, dV$$

$$y_3 = Y(u + du, V + dV) = Y(u,V) + \frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial V}\, dV$$

وبتعويض هذه القيم في العلاقة (7, 3, 3) نحصل على أن :

$$d\sigma = \left|\frac{\partial X}{\partial u}.\frac{\partial Y}{\partial V} - \frac{\partial X}{\partial V}.\frac{\partial Y}{\partial u}\right|.dudV \qquad (9,3,3)$$

وبكتابة ماداخل القيمة المطلقة على شكل معين J نجد أن :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} \qquad (10,3,3)$$

ويسمى هذا المعين بمعين التحويل أو بمعين (جاكوبي) وبذلك يكون عنصر المساحة $d\sigma$ مساوياً

$$d\sigma = |J|.dudV$$

وبتعويض ذلك في التكامل الاساسي نجد أن

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dxdy = \int_A^B \int_{G_1(V)}^{G_2(V)} F(u,V).|J|.dudv \qquad (11,3,3)$$

حيث اننا رمزنا بـ $F(u , V)$ الى التابع الجديد الناتج عـــــــــر $f(x , y)$ ، بعـد تبديل كل من x و y بما يساويه مـــــــن العلاقتين (3 ,3 ,6) .

ورمزنا بـ α و B لحدود u الجديده وبـ $G_1(u)$ و $G_2(u)$ حدود V الجديدة المعبرة عن محيط منطقه التكامل الجديـــــده ، يحسب هذه الحدود اعتمادا على العلاقتين (3 ,3 ,5) ومعادلـــــه محيط منطقه التكامل الجديده .

مثـال (3 – 13): أوجد التكامل :

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)/2}.dx.dy$$

حيث D هي الدائرة $x^2+y^2< 25$.

لاجراء هذا التكامل نقوم باجراء التحويـلين التاليين (الاحداثيات القطبية) :

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \sin\theta$$

وذلك لأن طبيعة الدائره تسمح لنا بذلك ، وبحساب معين التحويـــل J نجد أن :

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{y}{r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

وبملاحظة أن $x^2 + y^2 = r^2$ فان التكامل السابق :

$$\int_0^5 \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}.|r|drd\theta = \int_0^5 re^{-r^2/2}[\theta]_0^{2\pi}dr =$$

$$= 2\pi \int_0^5 re^{-r^2/2}dr = 2\pi[e^{-r^2/2}]_0^5 = 2\pi[e^{-25/2} - 1]$$

حيث تم تحديد حدود التكامل اعتمادا على شكل المنطقة D الممثـــل بدائرة نصف قطرها 5 .

V _ التوابع لعدة متحولات :

* تعريـــف : نقول ان z تابعا لـ n متحولا هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وفق العلاقة :

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

اذا كان مقابل كل جملة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يوجد قيمة وحيـــدة لـ z كما نسمي مجموعة النقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ التي تجعل z معينا بمنطقة تعريف التابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وهي تشكل حيزا في الفضاء R^n.

وبمكننا اعادة نفس الكلام حول النهايات والاستمرار، فنقـول ان $f(x_1, x_2 .. x_n)$ مستمر في النقطة $(x_{o1}, x_{o2} .. x_{on})$ اذا كـــان معرفا في تلك النقطة وكانت نهايته اليها تساوي قيمته فيها. أي اذا كان :

$$\lim_{x_i \to \neq x_{oi}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{on}) \quad (1,4,3)$$

ويكون $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ مستمرا في منطقة تعريفه اذا كان مستمـــرا في كل نقطة من نقاطها .

■ المشتقات الجزئية لـ $z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$:

بما أن z تابع لـ $x_1\ x_2 \ldots\ x_n$ اذن فمشتقاتـــه الجزئية من المرتبة الاولى (بفرض أنه قابلا للاشتقاق)بالنسبـــة لـ x_i تساوي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\ ,\ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (2,4,3)$$

وتفاضله الكلي من المرتبة الاولى يساوي :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (3,4,3)$$

أما مشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية فهي تنتج عن اشتقاق مشتقات المرتبة الاولى بالنسبة لكل من x_i .

وهكذا نجد أن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x_1 هي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \qquad (4,4,3)$$

والمشتقات الجزئية المرتبة الثانية بالنسبة لـ x_2 هي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ومشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x_n هي .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

وتفاضله الكلي من المرتبة الثانية يساوي :

$$d^2 z = \frac{\partial (dz)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial (dz)}{\partial x_2} dx_2 \cdots \frac{\partial (dz)}{\partial x_n} dx_n \qquad (5,4,3)$$

مثـــال (3 ـ 14) أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع :

$$z = x_1^3 + 2x_1 x_2^2 + x_2 x_3^3 - 2x_3^3 + 10 = f(x_1, x_2, x_3)$$

الحـــل : أولا المشتقات الاولى :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1 x_2 + x_3^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 3x_2 x_3^2 - 6x_3^2$$

ثم نقوم باشتقاق كل من هذه المشتقات بالنسبة لـ x_1 ثم لـ x_2 ثم لـ x_3 فنحصل على المشتقات الثانية التاليه :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 3x_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 4x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 4x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4x_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 3x_3^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 3x_3^2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 6x_2x_3 - 12x_3$$

■ **النقاط الحرجة لـ** $z = f(x_1, x_2 \ \ldots \ x_n)$

أ ـ النقاط الحرجه الموضعيه (الحره): وهي النقاط التي تحقق المعادلات :

$$f_{x_1} = 0 \ , \quad f_{x_2} = 0 \ , \quad f_{x_3} = 0 \ \ldots \ f_{x_n} = 0 \qquad (6,4,3)$$

فاذا كانت النقطه x_o ($x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{on}$) نقطه حرجه (تحقق المعادلات السابقة) فانها قد تقابل قيمه عظمى أو صغرى أو سـادد للتابع z .

وللكشف عن طبيعة هذه النقطه نشكل المحدد H من المرتبه n (محدد هيسان) والذي يساوي :

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \qquad (7,4,3)$$

ومنه نحسب قيم المحددات المتعاقبه $H_1 \ , \ H_2 \ , \ H_3 \ \ldots \ H_n$ عند النقطة x_o حيث ان :

$$H_1 = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{x_o} \qquad H_2 = \left|\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{matrix}\right|_{(x_o)}$$

$$H_3 = \left|\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{matrix}\right|_{(x_o)} \qquad (8,4,3)$$

$H_y \cdots H_n$,

فاذا كانت قيمة المعينات $H_1 < o$ و $H_2 > o$ و $H_3 < o \ldots$ $H_n \gtrless o$

(الاشارات متناوبة) فان النقطة $x_o(x_{o1}, x_{o2} \cdots x_{on})$ تكون مقابلة لقيمة عظمى للتابع z .

أما اذا كانت قيمة المعينات $H_1 > o$ و $H_2 > o$ و $H_3 > o, \ldots H_n > o$

(الاشارات موجبة) فان النقطة $x_o(x_{o1}, x_{o2}, \cdots x_{on})$ تكون مقابلة لقيمة صغرى للتابع z . أما اذا كانت قيمة المعينات غير ذلك فالنقطة (x_o y_o) تكون نقطة شاذة .

ب ـ النقاط الحرجة المقيدة (الشرطية) لـ $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

اذا كانت المتحولات($x_1, x_2, \ldots, x_n$) مقيدة بشـــرط واحد من الشكل :

$$g(x_1, x_2, \ldots x_n) - C = o \qquad (9,4,3)$$

حتى نحصل على النقاط الحرجة نشكل التابع التالي:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda [g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C] \qquad (10,4,3)$$

ثم نأخذ مشتقاته الجزئية بالنسبة لـ($x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$) ونضع هـــذه المشتقات مساوية للصفر فنحصل على المعادلات :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = o \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = o \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = o \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C = o
\end{aligned}\right\} \qquad (11,4,3)$$

نحل هذه المعادلات فنحصل على النقاط الحرجة المطلوبة .

ولنفترض أن $x_o(x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{on})$ احدى هذه النقاط وهي قد تكون مقابلة لقيمة عظمى أو صغرى أو شاذة للتابع z .

وللكشف عن طبيعة هذه النقطة x_o وأمثالها نشكل معين (هيسان) الموسع D حيث :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \qquad (12,4,3)$$

ومنه نحسب المعينات المتصاعدة اعتبارا من D_2 حتى D_n حيث ان :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} (x_o) \qquad (13,4,3)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} (x_o)$$

.....

فاذا كانت قيم هذه المعينات عن النقطة x_o اعتبارا من D_2 متناوبة في الاشارة وكان D_2 موجبا أي اذا كان :

$$D_2 > 0 \quad , D_3 < 0 \ldots (-1)^n D_n \gtrless 0 \qquad (14,4,3)$$

فان النقطة x_o تكون مقابلة لقيمة عظمى (مقيدة) للتابع z .

أما اذا كانت جميع قيم هذه المعينات سالبة اعتبارا من D_2 أي اذا كانت :

$$D_2 < 0 \ , D_3 < 0 \ldots \quad D_n < 0 \qquad (15,4,3)$$

فان النقطة x_o تكون مقابلة لقيمة صغرى (مقيدة) للتابع z .

* ملاحظـــة : عندما يكون لدينا شرطان يقيدان المتحـــــــــولات ($x_1, x_2, \ldots x_n$) فاننا نشكل معين (هيسان) الموسع والـــذي

فنه أربعه أصفار في الزاويه اليساريه العليا وعمودان وسطـــــران للسرطس g_1 و g_2 ثم نعالج الموضوع كما هو في الحالة السابقة .

مثـــال (3 - 15) أوجد النقاط الحرجة للتابع :

$$f = x.y.z = f(x, y, z)$$

وحدد نوعها علما بأن المتحولات (x , y, z) مقيدة بالشرط :

$$g(x, y, z) = x + y + z - 3$$

الحـــــل : لنشكل التابع L المعرف بالعلاقة (10, 4, 3) التالي:

$$L = x.y.z + \lambda(x + y + z - 3)$$

ثم نحسب مشتقاته الجزئية بالنسبة لـ z و y و z و λ ونضع هذه المشتقات تساوي الصفر فنحصل على المعالات التالية :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 3 = o$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على النقطة الحرجة التالية :

$$x = 1 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad z = 1 \quad , \quad \lambda = -1$$

ولتحديد نوعها (عظمى أم صغرى) نحسب معين (هيسان) الموســـع التالـــي :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

وبايجاد قيم المعينات D_2 و D_3 عند النقطة الحرجة $x_0(1,1,1,-1)$

نعوض الاحداثيات في D فنحصل على مايلي :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

اذن لدينا $D_3 < 0, D_2 > 0$ وهذا يعني أن النقطة $x_0(1, 1, 1)$ تقابل قيمة عظمى للتابع z .

* **التكامل المتعدد** : ان التكامل المتعدد للتابع $z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ هو تعميم للتكامل الثنائي ويعرف بالعلاقة التالية

$$I = \int_D \int \ldots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \qquad (16,4,3)$$

حيث D هي منطقة من R^n وهي تنتمي الى منطقة التعريف .

ويتم اجراء التكاملات واحدا تلو الآخر وحسب المتحولات .

ولكن عندما نقوم باجراء تغير في المتحول من الشكل :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(u_1\ u_2 \ldots u_n) \\ x_2 &= X_2(u_1\ u_2 \ldots u_n) \\ x_3 &= X_3(u_1\ u_2 \ldots u_n) \\ x_n &= X_3(u_1\ u_2 \ldots u_n) \end{aligned} \qquad (17,4,3)$$

حيث أن هذه العلاقة قابلة للعكس .

فان معين التحويل (معين جاكوبي) يساوي :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} & \frac{\partial X_1}{\partial u_3} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial u_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial u_1} & \frac{\partial X_n}{\partial u_2} & \frac{\partial X_n}{\partial u_3} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \qquad (18,4,3)$$

وان التكامل السابق يأخذ الشكل التالي :

$$I = \iint_{D'} \cdots \int F(u_1\ u_2 \ldots u_n)\,|J|\,du_1 du_2 \ldots du_n$$

وحيثأن D' هي منطقة التكامل الجديدة الناتجة عن D من خلال العلاقات (17, 4, 3) .

مثـــال (3 - 16) أوجد التكامل :

$$I = \iiint_V x^3 y^2 z\,dx\,dy\,dz$$

حيث V هي المنطقة المحددة بالمتراجحات :

$$0 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq y \leq x \qquad 0 \leq z \leq xy$$

الحـــل : نقوم باجراء التكامل بالنسبة لـ z ثم بالنسبة لـ y ثـم بالنسبة لـ x فنجد أن :

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[x^3 y^2 \frac{z^2}{2}\right]_0^{xy}$$

$$= \int_0^1 dx \iint_0^x \left(\frac{x^5 y^4}{2}\right) dy = \int_0^1 dx \left|\frac{x^5 y^5}{10}\right|_0^x$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\, dx = \frac{x^{11}}{110}\Big|_0^1 = \frac{1}{110}$$

* تجانس التوابـــع : نقول عن التابع $z = f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ انه متجانس من المرتبة K اذا كان :

$$f(tx_1\ tx_2 \ldots tx_n) = t^K f(x_1\ x_2 \ldots\ x_n) = t^K z \qquad (19,4,3)$$

أي أنه اذا بدلنا كل x_i بـ tx_i حيث t أي عدد ثابت فاننا نحصل على $t^K z$ أي أن z يزداد t^K مرة.

وتتميز التوابع المتجانسة بالخاصة التالية :

اذا كان $f(x_1\ x_2 \ldots\ x_n)$ تابعا متجانسا من المرتبة K فانـــــه يحقق العلاقة التالية :

$$x_1 . f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \ldots + x_n f'_{x_n} = Kf(x_1\ x_2 \ldots\ x_n) \qquad (20,4,3)$$

وللبرهان على ذلك نأخذ مشتق الطرفين للعلاقة (19, 4, 3) بالنسبـــة لـ t فنجد أنه لو فرضنا أن $u_i = tx_i$ فان :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \ldots \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t} = Kt^{k-1} f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$$

وبملاحظة أن $\frac{\partial u_i}{\partial t} = x_i$ ثم بوضع $t = 1$ فاننا نحصل على أن :

$$f_{x_1}.x_1 + f_{x_2}.x_2 + \ldots f_{x_n}.x_n = Kf(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$$

وهو المطلوب .

مثال (3 – 17) لناخذ التابع :

$$z = x^2 + y^2 + u^2 = f(x, y, u)$$

ومنه نجد أن :

$$f(tx, ty, tu) = t^2x^2 + t^2y^2 + t^2u^2 = t^2z$$

أي أنه متجانس من المرتبة الثانية ($K = 2$) وللتأكد من أن يحقق العلاقة (3, 4, 20) نجد أن :

$$x(2x) + y(2y) + u(2u) = 2x^2 + 2y^2 + 2u^2 = 2f(x, y, u)$$

تمرينـــــــــــــــات

١ ـ أوجد المشتقات الجزئية لكل من التوابع التالية :

$$z = x^2 + y^2 - 3axy$$

$$z = \frac{x - y}{x + y}$$

$$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z = x^y$$

$$z = (xy)^4$$

٢ ـ أوجد التفاضل الكلي من المرتبتين الاولى والثانية للتوابـــع التالية :

$$z = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$$

$$z = \sin^2 x + \cos^2 y$$

$$z = yx^y$$

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}$$

$$z = (xy + \frac{x}{y})^4$$

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

٣ ـ أوجد $\frac{dz}{dx}$ اذا كان $z = u^v$

حيث $u = \sin x \quad v = \cos x$

- أوجـــد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كان :

$$z = x^y$$

- أوجد المشتقات الثانية للتوابع :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = \ln(x + y)$$

$$z = \sqrt{2xy + y^2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}$$

$$z = xy + yu + ux$$

$$z = x^{\alpha}.y^{\beta}.u^{\gamma}$$

٦ ـ أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى للتوابع الضمنيـــة التالية :

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = o$$

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$$

$$x^2 + y^2 - z - xy = o$$

٧ ـ أوجد النقاط الحرجة وحدد نوعها للتوابع التالية :

$$z = (x - 1)^2 + 2y^2$$

$$z = (x - 1)^2 - 2y^2$$

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$z = x^3y^2(6 - x - y) \qquad x > o \ , \ y > o$$

٨ ـ أوجد التكاملات التالية :

$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, dxdy$$

حيث D هي المثلث الذي رؤوسه (o , o)و(1 , 1)و (o, 1) .

$$\iint_D e^{x/y}\, dxdy$$

حيث D هي المنطقة المحصورة بين المنحني $y^2 = x$ والمستقيمين $x = o$ $y = 1$:

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2}\, dxdy$$

حيث D هي المنطقة المحصورة بين المنحني $y = \frac{x^2}{2}$ والمستقيم $y = x$:

$$\int_o^a \iint_o^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_o^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}\, dxdydz$$

الفصل الرابع

التوابع الإنتاجية

ان التابع الانتاجي هو علاقة رياضيه اقتصاديه تربط بين أحد نواتج النشاط الاقتصادي (في منشأة أو قطاع أودولة) وبين العوامل أو المؤشرات المؤثرة في هذه المنتجات .

وكمثال على نواتج النشاط الاقتصادي نذكر :

- حجم اجمالي المنتجات
- حجم الدخل الصافي
- مستوى انتاجية العمل
- تكلفه واحده المنتج

ويسمي كل من هذه النواتج ومن في ... بالتابع ويرمز له بـ Y

وكمثال على العوامل أو المؤشرات المؤثره نذكر

- مقدار نفقات العمل

- مقدار نفقات المواد الاولية المختلفه .
- مقدار نفقات المواد الوسيطه .
- مستوى التقنيـــة .
- مقدار الحوافـــز .
- عوامل أخرى (العوامل الطبيعية في الزراعه والصناعات الاستخراجية) .

ونسمى كل من هذه العوامل ومن في حكمها بالمتحولات ونرمز لهـا بـ $x_1\ x_2 \ldots x_n$ ويمكن أن نعبر عن هذه المتحولات بواسطه واحدات عينية أو بواسطة واحدات نقدية أو بواسطه واحدات مسنده كالارقـام القياسية أو النسب المئوية .

اذن فالتابع الانتاجي هو تابع z لعده متحولات هي $x_1\ x_2 \ldots x_n$ ولنفترض أن العلاقة التابعية هي من الشكل .

$$y = f(x_1\ x_2 \ldots x_n) \qquad (1,1,4)$$

ومن خواص التابع الانتاجي y مايلي .

- ان y غير سالب لأنه لايمكن لحجم النواتج أن يكون سالبا .
- ان المتحولات $x_1\ x_2 \ldots x_n$ هي أيضا غير سالبة لنفس السبب .

كما نفترض أن التابع y مقعر ومستمر وقابل للاشتقاق للحدين مرتين على الاقل في منطقة تعريفه بالنسبه لكل من متحولاته .

ومن المعروف أن أي ناتج اقتصادي يرتبط بعدد كبير من المتغيرات ولكن لايمكننا مهما حاولنا حساب تأثير كل هذه العوامل مجتمعة، عدا عن أن بعضها قد يكون غير قابل للقياس، أو أن تأثيرها يعد ضعيفا جدا، لذلك فاننا سنحاول أن ندخل في عبارة التابع الانتاجي المتحولات الهامة فقط وهي التي يكون لها دور حاسم في تغيرات التابع المدروس.

وسنبدأ دراستنا بتوابع انتاجية لمتحول واحد ثم ننتقل الى التوابع الانتاجية متعددة المتحولات.

I - التوابع الانتاجية لمتحول واحد :

ان هذه التوابع تأخذ الشكل التالي :

$$y = f(x) \qquad (1,1,4)$$

وهذا يعني أن التابع y يتبع المتحول x فقط، أما المتحولات الاخرى المؤثرة على y فتعتبر ثابتة.

وهناك عدة صيغ للتابع f(x) أهمها الصيغ التالية :

$$y = a_o + a_1 x$$

$$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

$$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad (2,1,4)$$

$$y = a_o + \frac{a_1}{x}$$

$$y = a_o x^{a_1}$$

$$y = a_o e^{a_1 x}$$

$$y = a_o - K a_1^{x}$$

حيث ان a_o و a_1 و a_2 و a_3 و K هي أعداد يجب أن تكون معلومة أو يجب حسابها من المعلومات الاحصائية المتوفرة عن التابع y وعن المتحول x وسنتعرض في الفقرة (IV) الى طريقة حسابها .

بعد أن نقوم بتحديد التابع الانتاجي يمكن أن نستخلص منه عددا من المؤشرات الاقتصادية الهامة التي تساعدنا في عملية التحليل الاقتصادي ، وهذه المؤشرات هي :

* مؤشرات تحليل التوابع الانتاجية ذات المتحول الواحد :

ا- الانتاجية الوسطى للمتحول x : ويعرف هذا المؤشر بأنه حاصل قسمة التابع y على المتحول x وبذلك نحصل على متوسط انتاجية الواحدة من x في واحدة الزمن ونسميها اختصارا بانتاجية المتحول x واذا رمزنا لانتاجية المتحول x بالرمز P_x فان :

$$P_x = \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

وهي تقاس بواحدة قياس مركبة من واحدتي قيـــاس y و x، فمثلا اذا كان y هو حجم الانتاج ويقاس بالطن ، وكان x عدد العمال فان المؤشر $P_x = \frac{y}{x}$ هو عبارة عـــــن متوسط انتاجية العامل ويقاس بواحدة القياس طن/ عامل .

٢ ـ الانتاجية الحديـــة للمتحول x : اذا تزايد x بمقـدار Δx فان y يتزايد بمقدار Δy وان الانتاجية الحدية لـ x هي حاصل قسمة Δy على Δx (اذن هي $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) عندمـــا ينتهي Δx الى الصفر ، وبما أن :

$$\lim_{\Delta x \to \neq o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \hat{f}_x(x)$$

واذ رمزنا للانتاجية الحدية بالرمز ℓ_x فاننا نجد أن :

$$\ell_x = \hat{f}_x(x) = \frac{dy}{dx} \qquad (4,1,4)$$

اذن الانتاجية الحدية : هي عبارة عن مشتق التابع f(x) بالنسبة لـ x وهي أيضا تقاس بواحدات مركبة من واحدتي y و x .

فمثلا اذا كان $y = f(x)$ هو تابع الربح في منشأة ، وكان x عدد العمـــــال فان الانتاجية الجديدة للربح هي $\hat{f}(x)$ ، وهي تعبر عن مقدار زيادة الربـــح عندما يزداد عدد العمال بمقدار عامل واحد ، وهي هنا تقـــــاس بالليرة / عامل .

ولمعرفة فيما اذا كانت الانتاجية الحديدة في نقطة ما x_o تتزايد

أم تتناقص فاننا نأخذ المشتق الثاني لـ $f(x)$ ، فاذا كـــــان $f''_x(x_o) < o$ فهي تتناقص وتبلغ قيمتها العظمى عندما يكون $f'_x = o$ وتكون متزايدة عندما يكون $f''_x > o$.

٣ ـ مرونة التابع الانتاجي بالنسبة لـ x :

قبل أن نعرف هذه المرونة نلاحظ أن $\frac{\Delta x}{x}$ هي التزايد النسبي لـ x وأن $\frac{\Delta y}{y}$ هي التزايد النسبي لـ y ، وأن نهاية حاصل قسمة التزايد النسبي $\frac{\Delta y}{y}$ على التزايد النسبي $\frac{\Delta x}{x}$ عندما $\Delta x \longrightarrow o$ يسمى بمرونة التابع y بالنسبة لـ x واذا رمزنا للمرونة بالرمز E_x فاننا نجد أن :

$$E_x = \lim_{\Delta x \to \neq o} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{dy}{dx} \frac{x}{y} \qquad (5,1,4)$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقتين (4 ,1 ,3) و (4 , 1 , 4) نجد أن :

$$E_x = \ell_x \cdot \frac{1}{P_x} \qquad (6,1,4)$$

ان مرونة التابع الانتاجي بالنسبة لـ x هي عدد مجرد لايتأثـــــر بواحدات القياس لـ y أو x وهـــي تعبر عن نسبة تزايد أو تناقص التابع y كنسبة مئوية عندما يتغير المتحول x بمقدار ١٪ .

كما يمكن النظر الى المرونة على أنها مشتق لوغاريتم y على

مشتق لوغاريتم x أي أن :

$$E_x = \frac{\frac{d \ln y}{dx}}{\frac{d \ln x}{dx}} \qquad (7,1,4)$$

ومن خواص المرونة نذكر الخاصتين التاليتين

* خاصة (١): ان مرونة جداء تابعين u و V تساوي مجموع مرونتيهما وللبرهان على ذلك نجد أنه حسب العلاقة (4 , 1 , 5) تكون .

$$E_x(u,V) = \frac{d(u.V)}{dx} \cdot \frac{x}{u.V} = \frac{Vdu + udV}{dx} \cdot \frac{x}{u.V}$$

$$= \frac{du}{dx} \cdot \frac{V.x}{u.V} + \frac{dV}{dx} \cdot \frac{u.x}{u.V}$$

$$= \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{u} + \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V}$$

$$E_x(u , V) = E_x(u) + E_x(V) \qquad (8,1,4)$$

* خاصة (٢): ان مرونة قسمة تابعين u و V تساوي الفرق بين مرونة تابع الصورة (البسط) على مرونة تابع المجرح (المقام) وللبرهان على ذلك نلاحظ أن :

$$E_x(\frac{u}{V}) = \frac{d(\frac{u}{V})}{dx} \cdot \frac{x}{\frac{u}{V}} = \frac{Vdu - udV}{V^2 dx} \cdot \frac{V.x}{u}$$

$$= \frac{du}{V^2 dx} \cdot \frac{V^2 . x}{u} - \frac{udV}{V^2 dx} \cdot \frac{V.x}{u}$$

$$= \frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u} - \frac{dV}{dx}\cdot\frac{x}{V} =$$

$$E_x\left(\frac{u}{V}\right) = E_x(u) - E_x(V) \qquad (9,1,4)$$

خاصة (٣): اذا كانت $E>1$ فان هذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% تؤدي الى زيادة y بمقدار أكبر من 1% ونقول ان التابع مرن .

واذا كانت $E = 1$ فان هذا يعني أنه اذا أزداد x بمقدار 1% فان y سيزداد بنفس النسبة 1% ونقول ان التابع حيادي .

أما اذا كانت $0 < E < 1$ فان هذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% ستؤدي الى زيادة y بمقدار أقل من 1% ونقول ان التابع غير مرن

أما اذا كانت $-1 < E < 0$ فان هذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% تؤدي الى تناقص y بمقدار أقل من 1% .

أما اذا كانت $E = -1$ فان هذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% ستؤدي الى تناقص y بمقدار 1% أيضا .

أما اذا كانت $E < -1$ فان هذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% تؤدي الى تناقص y بمقدار أكثر من 1% .

ولقد طبقنا هذه المؤشرات على أهم التوابع الانتاجية ذات المتحول الواحد والتي أوردناها في (4 ,1 ,2) ووضعنا النتائج في جدول خاص على الصفحة التالية :

الصيغة التابعة	النسبة المتوسطة لـ x وهي $\frac{y}{x}$	النسبة الحدية لـ x وهي $\frac{dy}{dx}$	معامل المرونة وهو $E = \frac{dy}{dx} \frac{x}{y}$
$y = a_o + a_1 x$	$\frac{a_o}{x} + a_1$	a_1	$\frac{a_1 x}{a_o + a_1 x}$
$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2$	$\frac{a_o}{x} + a_1 + a_2 x$	$a_1 + 2a_2 x$	$\frac{(a_1 + 2a_2 x)x}{a_o + a_1 x + a_2 x^2}$
$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	$\frac{a_o}{x} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2$	$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$	$\frac{(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)x}{a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}$
$y = a_o + \frac{a_1}{x}$	$\frac{a_o}{x} + \frac{a_1}{x^2}$	$-\frac{a_1}{x^2}$	$-\frac{a_1}{a_o x + a_1}$
$y = a_o x^{a_1}$	$a_o x^{a_1 - 1}$	$a_o a_1 x^{a_1 - 1}$	a_1
$y = a_o e^{a_1 x}$	$\frac{a_o e^{a_1 x}}{x}$	$a_o a_1 e^{a_1 x}$	$a_1 x$
$y = a_o - K a_1^x$	$\frac{a_o - K a_1^x}{x}$	$-K a_1^x \ln a_1$	$-\frac{K a_1^x x \ln a_1}{a_o - K a_1^x}$

فاذا أخذنا التابع الأول الذي يمثل أبسط صيغة للتوابع الانتاجية فاننا نجد أنه عندما تنعدم قيمة المورد x (أي عندما $x = o$) فان حجم الانتاج $y = a_o$ $(a_o > o)$، ان هذه النتيجة قد تكون مقبولة في بعض الحالات كحالة الانتاج الزراعي بدون أسمدة، ولكن لايمكن أن يكون لها أي معنى في حالات كثيرة أخرى ، كحالة انتاج السيارات بدون محركات .

كما ان كمية الانتاج في هذه الصيغة غير محدودة فكلما ازدادت x تزداد y . عدا عن أن مقدار زيادة y المقابل لزيادة x بمقدار واحدة فقط يساوي a_1 $(a_1 > o)$ بشكل دائم وان مثل هذا الفرض يبتعد عن الواقع في كثير من الاحيان وخاصة في حالة الاسمدة والانتاج الزراعي وان أنسب استخدام للمعادلة الخطية $y = a_o + a_1x$ هو عندما يكون x معبرا عن حجم الانتاج و y عن مقدار النفقات . وعندما يكون الثابتان a_o و a_1 موجبين فان المرونة تكون أصغر من الواحد ($E < 1$) ، وهي تتزايد مع تزايد x حتى تبلغ الواحد أي أنه في حالة الصيغة الخطية اذا ازداد x بمقدار 1% فان y سيزداد بمقدار أقل من 1% أي أن مقدار النفقات y يتزايد بشكل أبطأ مما يتزايد به حجم الانتاج x .

نجري نفس المناقشة للتابع الثاني الذي يأخذ صيغة القطع المكافئ فنجد أن $y = a_o$ عندما $x = o$، وأن y يتزايد اذا كانت $a_2 < o$ حتى يبلغ أكبر قيمة له ثم يعود فيتناقص حتى يبلغ الصفر في النقطتين اللتين تحققان المعادلة :

$$a_o + a_1x + a_2x^2 = o$$

ثم يأخذ قيما سالبة وهي خارجة عن المجالات الاقتصادية .

وان الانتاجية الوسطى لهذا التابع عندما يكون x متطرفا تقترب من الصفر وهي تساوي الصفر عندما يكون :

$$P_x = \frac{a_o}{x} + a_1 + a_2x = o$$

ثم تأخذ قيما سالبة ، ويمكن التأكد من أن حجم الانتاج y والانتاجية الوسطى P_x يساويان العنصر في نفس النقطتين اللتين تحققان المعادلتين السابقتين.

أما الانتاجية الحدية عندما $x = o$ فتساوي a_1 وهذا يعني أنها تنحدر (عندما $a_1 < o$) بشكل خط مستقيم حتى تأخذ القيمة صفر عندما :

$$x = - \frac{a_1}{2a_2}$$

أما المرونة E فتأخذ قيمة أصغر من الواحد عندما تكون x غير كبيرة وموجبة ، وبتزايد قيمة x تمر E بقيمتها العظمى ثم تبدأ بالتناقص حتى ندخل مجال القيم السالبة .

وبنفس الاسلوب يمكننا دراسة بقية التوابع واستنباط خواص كل منها .

مثال (4 -) تابع الطلب :

من المعلوم أن مقدار الطلب على سلعة ما يرتبط بسعر هذه

P فاذا ازداد السعر تقلص الطلب ، والعكس بالعكس ، وغالبا مـــا يكون لهذا التابع أحد الشكلين التاليين :

$$q = a_o - a_1 P \qquad a_o > o \qquad a_1 > o$$

$$q = \frac{a_1}{P} \qquad a_1 > o$$

فاذا كان لتابع الطلب الشكل المحدد التالي :

$$q = 10 - P$$

فاننا نجد أن مرونة الطلب تساوي :

$$E_p = \frac{P}{q} \cdot \frac{dq}{dP} = \frac{P}{10 - P} \cdot (-1)$$

عندما يكون السعر $P = 2$ فان المرونة تساوي :

$$E_p = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

وهذا يعني أنه اذا ازداد السعر بمقدار 1% عندما يكون $P = 2$ فان الطلب على تلك السلعة يتقلص بمقدار $\frac{1}{4}$ %

أما اذا كان تابع الطلب $q = \frac{C}{P}$ فان المرونة تساوي

$$E_P = \frac{P}{q} \cdot \frac{dq}{dP} = \frac{P}{\frac{C}{P}} \left(\frac{-C}{P^2}\right) = -1$$

أي أن مقدار الطلب يتقلص بمقدار 1% اذا ازداد السعـــر 1% وذلك مهما تكن القيمة التي يأخذها السعر P .

مثـــال (4 ـ 2) أوجد الانتاجية الوسطى والحدية ومرونة التابع :

$$y = 3x - 6$$

وذلك عندما تأخذ x القيمة $x = 10$.

الحـــل : ان الانتاجية الوسطى هي :

$$P_x = \frac{y}{x} = 3 - \frac{6}{x}$$

$$P_{x=10} = 3 - \frac{6}{10} = 2,4$$

وهذا يعني أنه مقابل كل واحدة من x ينتج وسطيا 2,4 واحـــــدة من y وذلك عندما $x = 10$.أما الانتاجية الحدية فتساوي :

$$\ell_x = y'_x = 3$$

وهذا يعني أنه اذا ازداد x بمقدار 1 فان y سيزداد بمقدار 3 وذلك مهما تكن x.أما المرونة فتساوي :

$$E_x = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = 3 \cdot \frac{x}{3x - 6} = \frac{3x}{3x - 6}$$

$$E_{x=10} = \frac{30}{24} = 1,25$$

وهذا يعني أنه كلما ازدادت x بمقدار 1% فان y تزداد بمقدار 1,25% وذلك عندما تكون $x = 10$.

مثـــال (3 – 4) أوجد الانتاجية الوسطى والحدية ومرونةالتابع :

$$y = 1 + 2x - x^2$$

وذلك عندما x تأخذ القيمة $x = \frac{1}{2}$.

الحـــــل: ان الانتاجية الوسطى هي :

$$P_x = \frac{y}{x} = \frac{1}{x} + 2 - x$$

$$P_{x=1/2} = 2 + 2 - \frac{1}{2} = 3,5$$

أي أنها تساوي 3,5 عندما $x = \frac{1}{2}$. وهذا يعني أنه مقابل كل واحدة من x ينتج وسطيا 3,5 واحدة من y وذلك عندما $x = \frac{1}{2}$. وان الانتاجية الحدية تساوي :

$$\ell_x = 2 - 2x$$

$$\ell_{x=1/2} = 1$$

أي أن y يزداد بمقدار الواحد اذا ازداد x بمقدار الواحد وذلك عندما $x = \frac{1}{2}$. أما المرونة فتساوي :

$$E_x = y'_x \cdot \frac{x}{y} = (2 - 2x)\frac{x}{1 + 2x - x^2}$$

$$E_{x=1/2} = 1.\frac{\frac{1}{2}}{1 + 1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{7}$$

أي أن التابع y يزداد بمقدار 2/7% اذا ازداد x بمقدار 1% وذلك عندما تكون $x = \frac{1}{2}$

II ـ التوابع الانتاجية لعدة متحولات :

ان التوابع الانتاجية لعدة متحولات هي من الشكل :

$$y = f(x_1, x_2 \ldots x_n) \qquad (1,2,4)$$

حيث ان y هو أحد نواتج النشاط الاقتصادي في المنشأة أو في القطاع أو في الدولة ككل. وان $x_1, x_2 \ldots x_n$ هو العوامل أو المؤشرات التي تؤثر على النشاط

وتجدر الاشارة هنا الى أن هذه التوابع تتناقص وتكثر [illegible]

$$y = a_o + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

$$y = a_o x_1^{a_1} . x_2^{a_2} . x_3^{a_3} \ldots x_n^{a_n} \qquad (2,2,4)$$

$$y = a_o a_1^{x_1} . a_2^{x_2} . a_3^{x_3} \ldots a_n^{x_n}$$

.....

* **مؤشرات تحليل التوابع الانتاجية متعددة المتحولات :**

ان المؤشرات التي تستخدم في تحليل التوابع الانتاجية متعدده المتحولات تشبه المؤشرات التي ذكرناها لتوابع المتحول الواحد ولكنها تشمل عددا آخر من المؤشرات الجديدة :

١ ـ الانتاجيه الوسطى للمتحول x_i : وهي حاصل قسمة التابع y على ذلك المتحول x_i وبذلك نحصل على متوسط انتاجية الواحدة من x_i في واحده الزمن، واذا رمزنا لهذه الانتاجية الوسطى بالنسبة لـ x_i بالرمز P_{x_i} فاننا نجد :

$$P_{x_i} = \frac{y}{x_i} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i} \qquad (3,2,4)$$

وهي تقاس كما أشرنا سابقا بواحدة قياس مركبة من واحدتي قياس y و x_i. وهنا نشير الى أنه لدينا n مؤشرا للانتاجيه الوسطى يختلف بقيمته من متحول x_i الى آخر x_{i+1} وتسمى المؤشرات $(P_{x_1} P_{x_2} P_{x_3} \ldots P_{x_n})$ بمؤشرات الانتاجيه الوسطى بالنسبة للمتحولات $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ لتابع الانتاج

المتعدد $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

٢ - الانتاجيه الحدية للمتحول x_i : وهي تعبر عن مقدار تزايد التابع y المقابل لزياده واحده اضافيه من المتحول x_i وهي تساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x_i}$ عندما $\Delta x_i \to \neq 0$ واذا رمزنا للانتاجية الحديه للمتحول x_i بالرمز ℓ_{x_i} فاننا نجد أن :

$$\ell_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to \neq 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1\ x_2 \ldots x_n)}{\partial x_i} \qquad (4,2,4)$$

حيث أن ($i = 1,2,3 \ldots n$).

ان العلاقات (4, 2, 4) هي عباره عن n معادله للانتاجية الحديه وبذلك نجد أن الانتاجيه الحديه للمتحول x_i هي المشتق الجزئي لـ $f(x_1 \ldots x_n)$ بالنسبه لـ x_i وهي تقاس بواحدة قياس مركبه من واحدتي القياس لـ y و x في واحده الزمن .

وتكون الانتاجيه الحدية ℓ_{x_i} متزايده في نقطه ما x_o اذا كان $f''_{x_i}(x_o) > 0$ كما تكون متناقصه عندما $f''_{x_i}(x_o) < 0$ وتبلغ قيمتها العظمى عندما $f''_{x_i} = 0$

٢ ـ مرونة التابع الانتاجي المتعدد ، وهنا سنميز بين نوعين من المرونة هما : المرونة الجزئية والمرونة الكلية .

آ ـ المرونة الجزئية :

ان المرونة الجزئية للتابع $y=f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ بالنسبة للمتحول x_i تساوي نهاية حاصل قسمة التزايد النسبي للتابع $\frac{\Delta y}{y}$ على التزايد النسبي $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ للمتحول x_i عندما $\Delta x_i \to o$. فاذا رمزنا للمرونة الجزئية للتابع $f(x_i \ldots x_n)$ بالنسبة لـ x_i بالرمز E_{x_i} فاننا نجد أن:

$$E_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to o} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} \qquad (5,2,4)$$

حيث أن $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ،

وبمقارنة هذه العلاقة من العلاقتين (4 , 2 , 3) و (4, 2, 4) نجد أنه يمكننا التعبير عن المرونة الجزئية بدلالة الانتاجية الوسطى P_{x_i} والانتاجية الحدية ℓ_{x_i} للمتحول x_i حيث نجد أن :

$$\tau_i = \ell_{x_i} \frac{1}{P_{x_i}} \qquad (6,2,4)$$

حيث أن ($i = 1,2, \ldots, n$)

كما يمكن النظر الى المرونة الجزئية بال

x_i على أنها مشتق لوغاريتم التابع y على مشتق لوغاريتم المتحول x_i والتعبير عن ذلك بالعلاقة التالية :

$$E_{x_i} = \frac{\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}}{\frac{\partial \ln x_i}{\partial x_i}} \qquad (7,2,4)$$

حيث أن : ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$)

من العلاقة (4 ,2 ,5) نلاحظ أن المرونة الجزئية هي عدد مجرد لايتأثر بواحدات القياس لكل من y والمتحولات x_i. اذن هو لايتغير في التابع الواحد اذا تغيرت واحدات القياس لمتحولاته .

ب ـ المرونة الكلية : هي مجموع المرونات الجزئية ،فاذا رمزنا للمرونة الكلية بالرمز E فاننا نجدأن :

$$E = E_{x_1} + E_{x_2} + E_{x_3} + \ldots E_{x_n} \qquad (8,2,4)$$

٤ ـ متطلبات الانتاج من المتحول x_i:عندما يكون التابع $y = f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ قابلا للعكس بالنسبة لـ x_i فانه يمكننا حساب x_i بدلالة المتحولات الاخرى بواسطة استخراجها من التابع السابق فنحصل على علاقة من الشكل :

$$x_i = g(x_1\ x_2 . y \ldots x_n) \qquad (9,2,4)$$

حيث ان : $(i = 1,2,3 \ldots n)$

ان هذه العلاقة تعطينا قيمة x_i اذا علمنا قيم المتحولات المتبقية ،وهي نفسها متطلبات الانتاج من x_i .

٥ – تناسبية المتحولات والتابع : ان العلاقة التناسبية لمتحولات تابع ذي متحولين x_1 و x_2 هي :

$$t = \frac{x_1}{x_2}$$

فاذا كان $t = 1$ فان هذا يعني أن x_1 و x_2 يتغيران بنفس النسبة .

أما اذا كان $t > 1$ $(t < 1)$ فان هذا يعني أن x_1 تتغير بنسبة أكبر (أصغر) من x_2 وعندما يتغير المتحولان x_1 و x_2 بنسبة t فان التابع $f(x_1\ x_2)$ يتغير بنسبة أخرى قد تساوي t أو تختلف عنها ، فاذا كان التابع $f(x_1\ x_2)$ متجانسا من المرتبة m وكان تزايد x_1 و x_2 بنفس النسبة K $(t = 1)$ فان القيمة الجديدة لهما هي Kx_1 و Kx_2 وان قيمة التابع المقابلة تساوي :

$$f(Kx_1, Kx_2) = K^m f(x_1, x_2)$$

أي أن التابع $f(x_1\ x_2)$ سيزداد بمقدار K^m مرة نتيجة زيادة x_1 و x_2 بنسبة K . فاذا كان $m = 1$ فان $f(x_1\ x_2)$ يزداد بمقدرا K مرة ، وهو نفس نسبة تزايد المتحولين ، وعندها نقول ان التناسبية ثابتة بين المتحولات والتابع .

أما اذا كان $m > 1$ $(m < 1)$ فان $f(x_1\ x_2)$ يتزايد بنسبة تختلف عن نسبة تزايد متحولاته ، وعندها نقول

ان التناسبية مختلفه فهي اما أكبر واما أصغر من نسبة تزايد المتحولين .

٦ - معدلات الاحلال : اذا كان لدينا التابع الانتاجي $y = f(x_1\ x_2\ \ldots x_n)$ واذا أعطينا y قيمة ثابتة y_o فاننا نحصل على :

$$f(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) = y_o \qquad (10,2,4)$$

وهي معادلة تعطينا سطح في R^n يسمى سطح سوية حجم الانتاج y_o، وللحصول على هذا الحجم y_o من المنتجات يمكننا أن نركب عوامل الانتاج مع بعضها بطرق مختلفة فاذا أخذنا نقطة على ذلك السطح مثل $x_o(x_{o1}\ x_{o2}..x_{on})$ ولننتقل الى نقطه مجاورة $\grave{x}(x_{o1}+dx_{o1}, x_{o2}+dx_{o2}..x_{on}+dx_{on})$ تقع على نفس سطح السوية y_o فان التفاضلات dx_i حيث $(i = 1,2,\ldots n)$ ترتبط مع بعضها بواسطة التفاضل الكلي للتابع f في النقطة x_o بالعلاقة :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = o \qquad (11,2,4)$$

ولمعرفه المعدل الذي يربط أي متحولين ببعضهما بحيث يمكن لأحدهما أن يحل محل الآخر ، ويبقى الانتاج مساويا y_o نفترض أن جميع المتحولات المستقلة ثابتة ماعدا المتحولين x_j و x_k وهذا يعني أن $dx_i = o$ عندما $i \neq j$ و k

وبذلك يأخذ المعادله السابقة الشكل التالي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j + \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k = o \qquad (1, 2, 4)$$

ولقياس معدل الاحلال للمتحولين x_k و x_j نأخذ نسبه تزايدهما $\frac{dx_j}{dx_k}$ والتي تعبر عن نسبة تزايد أحدهما x_j عندما ينقص الاخر x_k ، وان لهذه النسبة قيمه سالبه دائما لأن تغير x_j يعاكس تغير x_k وذلك عندما نريد أن نحافظ على مستوى الانتاج الثابت y_o . ومن العلاقه الاخيره ، نجد أن معدل احلال المتحول x_j في مقابل المتحول x_k يساوي :

$$\frac{dx_j}{dx_k} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_k}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \qquad (3, 2, 4)$$

وهي العلاقه التي تعطينا مختلف معدلات الاحلال لأزواج المتحولات المختلفه ، واذا عدنا الى العلاقة (4, 2, 10) ونسينا جميع المتحولات ماعدا المتحولين x_j و x_k فنصبح امام تابع :

$$f(x_{o1}, x_{o2}, \ldots x_k, x_j, \ldots x_{on}) = y_o$$

تابعا لـ x_j و x_k فقط ، واذا حسبنا أحد هذين المتحولين بدلاله الآخر نحصل على المعادلة التالية :

$$x_j = \varphi(x_k) \qquad (4, 2, 4)$$

ومنها يمكننا حساب معدل الاحلال لـ x_j الذي يحل بدلا من x_k أو من بعض x_k وذلك بحساب $\frac{dx_j}{dx_k}$

ومن الواضح أن هذه المعادلات تتغير عندما يتغير المتحولان x_j و x_k واذا رمزنا الى معدل احلال x_j بدلا من x_k بالرمز h_{jk} فاننا نجد أن h_{jk} تحسب من احدى العلاقتين التاليتين :

$$h_{jk} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \qquad (15,2,4)$$

$$h_{jk} = \frac{dx_j}{dx_k} = \varphi'(x_k) \qquad (16,2,4)$$

وهنا نشير الى أننا افترضنا أنه يمكن لأحد عوامل الانتاج أن يحل مكان عامل آخر دون أن يتغير حجم الانتاج y_o. غير أن هذا الفرض ليس مقبولا في كثير من الحالات ، ولامعنى لحساب معدلات الاحلال لكثير من توابع الانتاج التي تتضمن عوامل انتاج لايمكن لها أن تحل محل عوامل أخرى.

٧ - مرونة الاحلال : وهو المؤشر النسبي لاحلال العوامل ويعرف بالعلاقة التالية :

$$w_{jk} = \frac{d(\frac{x_j}{x_k})}{dh_{jk}} \cdot \frac{h_{jk}}{\frac{x_j}{x_k}} = \frac{h_{jk}}{p_{jk}} \cdot \frac{1}{h'_{p_{jk}}} \qquad (17,2,4)$$

حيث رمزنا بـ $p_{jk} = \frac{x_j}{x_k}$

حيث رمزنا بـ w_{jk} لمرونة الاحلال وهي عبارة عن معامل لايتأثر بواحدات القياس ، وان مرونة الاحلال قد تكون تابعة للمتحولات التي تعبر عن عوامل الانتاج أو تكون ثابتة مهما تغيرت المتحولات .

وانطلاقا من هاتين الحالتين تم تصنيف التوابع الانتاجية الى نوعين هما :

- التوابع الانتاجية ذات مرونة الاحلال المتغيرة V.E.S

وهي أوائل الكلمات

(Varable Elasticity of Substitution)

- التوابع الانتاجية ذات مرونة الاحلال الثابتة C.E.S

وهي أوائل الكلمات

(Constant Elasticity of Substitution)

وعند تحديد نوع التابع الانتاجي يجب أن نأخذ بعين الاعتبار طبيعة تغيرات متوسطات المنتجات وقيمتها الحدية ومعدلات الاحلال ومعاملات المرونة .

٨ - النقاط الحرجة : بعد أن نقوم بحساب مؤشرات التحليل الاقتصادي السابقةونستخلص النتائج اللازمة ، ننتقل الى حساب النقاط الحرجة للتابع الانتاجي وذلك لمعرفة النقاط التي تقابل أكبر (أو أصغر) . قيمة له لاعتمادهما في الخطط الانتاجية .

ويكون البحث عن النقاط الحرجة باستخدام نفس الطرائق

التي استعرضناها في الفصل الثالث (الفقرة II) لمعالجة الحالات المختلفة .

III - أهم التوابع الانتاجية المتعددة :

1 - التابع الخطي :

$$y = a_o + a_1x_1 + a_2x_2 \qquad (1,3,4)$$

وهو تابع لمتحولين x_1 و x_2 ويشكل سطحا مستويا في R^3 يقطع oy في النقطة $y = a_o$ ويتقاطع مع المستويين X_1OY و X_2OY بخطين مستقيمين يعبران عن مقدار تغيرات y عندما يتغير أحد المتحولين ويأخذ الثاني قيمة ثابتة .

والانتاجية الوسطى لهذا التابع تساوي بالنسبة لهذين المتحولين كمايلي :

$$\frac{y}{x_1} = \frac{a_o + a_1x_1 + a_2x_2}{x_1} = a_1 + \frac{a_o + a_2x_2}{x_1}$$

$$\frac{y}{x_2} = \frac{a_o + a_1x_1 + a_2x_2}{x_2} = a_2 + \frac{a_o + a_1x_1}{x_2}$$

وان الانتاجية الحدية تساوي بالنسبة لهذين المتحولين :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2$$

كما أن مرونة هذا التابع بالنسبة للمتحولين x_1 و x_2 تساوي

$$E_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{x_1}{y} = \frac{a_1 x_1}{a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2}$$

$$E_{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{x_2}{y} = \frac{a_2 x_2}{a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2}$$

لحساب متطلبات الانتاج من كل من x_1 و x_2 نحسب x_1 و x_2 من علاقة التابع فنحصل على أن :

$$x_1 = \frac{y - a_o - a_2 x_2}{a_1}$$

$$x_2 = \frac{y - a_o - a_1 x_1}{a_2}$$

أما معدل الاحلال لهذين المتحولين فيساوي :

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = - \frac{a_2}{a_1} = h$$

أو بشكل معاكس :

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = - \frac{a_1}{a_2}$$

ولحساب مرونة الاحلال نلاحظ ان h يساوى مقدارا ثابتا

اى ان $h' = 0$ ومن العلاقه (17,2,4) نجد ان

مرونة الاحلال تأخذ قيمة لانهائيه .

وهذا يعني انه لايوجد اية قيود على احلال اى من

المتحولين بدلا من الاخر عند اية قيمة من قيمها .

وأخيرا نشير الى أنه لايوجد لهذا التابع قيم قصوى لأن مشتقيه بالنسبة لـ x_1 و x_2 غير معدومين .

مثال (4 ـ 4) : لنفترض أنه لدينا التابع الخطي التالي :

$$y = 2 + 3x_1 + 4x_2$$

والمطلوب دراسة مؤشرات هذا التابع .

الحل : نلاحظ أن الانتاجية الوسطى لـ x_1 و x_2 تساوي :

$$\frac{y}{x_1} = \frac{2}{x_1} + \frac{4x_2}{x_1} + 3$$

$$\frac{y}{x_2} = \frac{2}{x_2} + \frac{3x_1}{x_2} + 4$$

فاذا كان $x_1 = 20$ و $x_2 = 30$ فان $y = 182$ وبذلك نجد أن:

$$\frac{y}{x_1} = \frac{2}{20} + \frac{120}{20} + 3 = 9,1$$

$$\frac{y}{x_2} = \frac{2}{30} + \frac{60}{30} + 4 = 6,0666$$

أما الانتاجية الحدية لهما فتساوي :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 4$$

وهي قيم ثابتة .

أما المرونة فتساوي عندما $x_1 = 20$ و $x_2 = 30$ مايلي:

$$E_{x_1} = 3.\frac{x_1}{y} = \frac{60}{182} = 0,33$$

$$E_{x_2} = 4.\frac{x_2}{y} = \frac{120}{182} = 0,66$$

$$E = E_{x_1} + E_{x_2} = 0,99 < 1$$

اذا ازداد x_1 بمقدار 1% فان y سيزداد بمقدار 0,33 %

واذا ازداد x_2 بمقدار 1% فان y سيزداد بمقدار 0,66 %

وكذلك نجد أن معدل الاحلال يساوي :

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -\frac{4}{3}$$

ب ـ تابع (كوب ـ دوغلاس) وهو يأخذ الشكل التالي :

$$y = a_o L^{a_1}.K^{a_2} \qquad (2,3,4)$$

حيث L يعبر عن العمل و K عن رأس المال ، وبحساب المؤشـــــرات السابقة نجد أن الانتاجية الوسطى لـ L و K تساويان على الترتيب

$$\frac{y}{L} = a_o L^{a_1-1}.K^{a_2}$$

$$\frac{y}{K} = a_o L^{a_1}.K^{a_2-1}$$

الانتاجية الحدية بالنسبة لـ L و K تساويان :

$$\frac{\partial y}{\partial L} = a_o a_1 L^{a_1-1}.K^{a_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial K} = a_o a_2 L^{a_1} . K^{a_2-1}$$

أما المرونات الجزئية فتساويان :

$$E_L = \frac{\partial y}{\partial L} . \frac{L}{y} = a_o a_1 L^{a_1-1} . K^{a_2} \frac{L}{a_o L^{a_1} K^{a_2}} = a_1$$

$$E_K = \frac{\partial y}{\partial K} . \frac{K}{y} = a_o a_1 L^{a_1} . K^{a_2-1} \frac{K}{a_o L^{a_1} K^{a_2}} = a_2$$

والمرونة الكلية تساوي :

$$E = E_L + E_K = a_1 + a_2$$

كما يمكننا أن ندرس مقدار تزايد y عندما يتزايد كل من L و K بمقدار 1% وذلك حسب قيمة المرونات الجزئية أوالكلية

أما متطلبات الانتاج من L و K فتساوي :

$$L = \left(\frac{y}{a_o K^{a_2}}\right)^{1/a_1}$$

$$K = \left(\frac{y}{a_o K^{a_1}}\right)^{1/a_2}$$

ومعدل الاحلال لـ L كبديل عن K يساوي :

$$h = \frac{-\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial K}} = - \frac{a_2 L}{a_1 K}$$

ولحساب مرونة هذا الاحلال نلاحظ أن :

$$\frac{L}{K} = - \frac{a_1}{a_2} h$$

وبذلك نجد أن :

$$w = \frac{d(\frac{L}{K})}{dh} . \frac{h}{\frac{L}{K}} = 1$$

وهذا يعني أن تابع (كوب دوغلاس) هو من النوع C.E.S لأن مرونة الاحلال فيه ثابتة .

ونشير أيضا الى أنه لايوجد نقطة عظمى لهذا التابع لأن مشتقيه الجزئيين لايساويان الصفر الاّ في النقطة L = o و K = o التي لاتقابل قيمة عظمى للتابع (تأكد من ذلك رياضيا) .

مثال (4 – 5) : لنأخذ التابع :

$$y = 2L^{0,6}.K^{0,5}$$

ولندرس مؤشراته التحليلية عندما يكون L=2 و K = 5 . ان الانتاجية الوسطى لـ L و K تساوي :

$$\frac{y}{L} = a_o L^{a_1-1}.K^{a_2} = 2(2)^{-0,4}(5)^{0,5} = 3,389$$

$$\frac{y}{K} = a_o L^{a_1}.K^{a_2-1} = 2(2)^{0,6}(5)^{-0,5} = 1,356$$

وان الانتاجية الحدية تساوي :

$$\frac{\partial y}{\partial L} = a_o a_1 L^{a_1-1}.K^{a_2} = 2,0334$$

$$\frac{\partial y}{\partial K} = a_o a_2 L^{a_1}.K^{a_2-1} = 0,678$$

أما المرونة فتساوي :

$$E_L = a_1 = 0,6$$

$$E_K = a_2 = 0,5$$

$$E = 1,1$$

أما معدل الاحلال فيساوي :

$$h = \frac{-\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial K}} = \frac{-a_2 L}{a_1 K} = \frac{-0,5(2)}{0,6(5)} = -\frac{1}{3}$$

ومعلوم أن مرونة الاحلال ثابتة وتساوي1 = w لكل التوابع التي من النوع (كوب ـ دوغلاس) .

جـ ـ التابع العام للنـــــوع C.E.S وهو التابع التالي :

$$y = a_o[a_1 L^{-B} + a_2 K^{-B}]^{-1/B} \qquad (3,3,4)$$

قبل كل شيء نلاحظ أنه لو وضعنا L = o فان $y = a_o a_2^{-1/B} \cdot K$ أي أن y يصبح مرتبطا خطيا بالمتحول K

وكذلك نجد أنه لو وضعنا K = o فان $y = a_o a_1^{-1/B} \cdot L$

أي أن y يصبح مرتبطا خطيا بالمتحول L .

كما نلاحظ أن هذا التابع متجانس لأنه لو بدلنـــــا L بـ tL و K بـ tK فاننا نجد أن القيمة الجديدة للتابـــــع y تساوي :

$$y = a_o[a_1(tL)^{-B} + a_2(tK)^{-B}]^{-1/B}$$

$$= ta_o[(a_1 L^{-B} + a_2 K^{-B})]^{-1/B} = ty$$

وهذا يعني أن هذا التابع متجانس من المرتبة الاولى .

أما الانتاجية الحديدة لـ L و K فتساويان :

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{a_1}{a_o}\left(\frac{y}{L}\right)^{1+B}$$

حيث رمزنا بـ $\grave{a}_o$ لـ a_o^{1-B} للاختصار:

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{a_2}{a_o}\left(\frac{y}{K}\right)^{1+B}$$

وهي مقادير موجبة مهما تكن اشارة وقيمة B .

أما المرونة الجزئية فتساوي :

$$E_L = \frac{\partial y}{\partial L}\cdot\frac{L}{y} = \frac{a_1}{a_o}\left(\frac{y}{L}\right)^{1+B}\cdot\frac{L}{y} = \frac{a_1}{a_o}\left(\frac{y}{L}\right)^{B}$$

$$E_K = \frac{\partial y}{\partial K}\cdot\frac{K}{y} = \frac{a_2}{a_o}\left(\frac{y}{K}\right)^{1+B}\cdot\frac{K}{y} = \frac{a_2}{a_o}\left(\frac{y}{K}\right)^{B}$$

ويمكن البرهان بسهولة على أن المرونة الكلية :

$$E = E_L + E_K = \frac{1}{a_o}$$

أما معدل الاحلال فيساوي :

$$h = \frac{dL}{\partial K} = \frac{-y_K}{y_L} = -\frac{a_2 L^{1+B}}{a_1 K^{1+B}}$$

ولحساب مرونة الاحلال نجد أن : $\frac{L}{K} = \left(-\frac{a_1}{a_2}h\right)^{1/1+B}$ وبذلك نجد أن :

$$w = \frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{dh}\cdot\frac{h}{\frac{L}{K}} = \left(-\frac{a_1}{a_2}h\right)^{\frac{-B}{1+B}}\left(\frac{1}{1+B}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{-a_1}{a_2}\right)\frac{-a_2 L^{1+B}}{a_1 K^{1+B}}\cdot\frac{K}{L}$$

وبالاصلاح نجد أن :

$$w = \frac{1}{1+B}$$

وهي مقدار ثابت ولكنه مرتبط بالوسيط B .

ويمكننا أن نلاحظ أن التابع (4 ,3 ,3) يتحول الى أنواع أخـــرى كنا قد درسناها في البنود السابقة.

فاذا كانت B = -1 فان التابع (4 , 3 , 3) يتحول الى تابـع خطي يتميز بأن انتاجيته الحديتين ثابتتان ، ومعدل احلال ثابـــت وبقيمة لانهائية لمرونة الاحلال ، كما هو الحال للتابـع (4 ,3 ,1) الذي درسناه سابقا .

أما اذا كانت B → o فان خواص التابع (4 ,3 ,3) تقترب مـن خواص التابع (4 ,3 ,2) (تابع كوب ـ دوغلاس) الذي يتميز بـأن مرونـــــــة الانتاج فيه ثابته وأن مرونة الاحلال تساوي الواحد.

مثـــال (4 ـ 6) أدرس خصائص التابع :

$$y = [2L^{-2} + 3K^{-2}]^{-\frac{1}{2}}$$

من العلاقات السابقة نجد أن الانتاجية الحديـــة لـ L و K تساويان:

$$\frac{\partial y}{\partial L} = 2\left(\frac{y}{L}\right)^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial K} = 3\left(\frac{y}{K}\right)^3$$

ومرونة الانتاج تساوي :

$$E_L = 2\left(\frac{y}{L}\right)^2 \qquad E_K = 3\left(\frac{y}{K}\right)^2$$

وبذلك نجد أن المرونة الكلية :

$$E = E_L + E_K = 1$$

ومعدل الاحلال يساوي:

$$\frac{dL}{dK} = -\frac{3}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^3$$

ومرونة الاحلال تساوي :

$$w = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

هـ ـ تابع أكبر حجم للانتاج ضمن تكلفة معينة :

لنفترض أن عملية الانتاج تستخدم نوعين من الموادر الاولية A و B ولنرمز بـ x_1 و x_2 لمقدار مايلزم للانتاج من النوعين A و B خلال فترة زمنية معينة ، ولنفترض أيضا أن سعر واحدة هذين النوعين هو P_1 و P_2 على الترتيب . ولنفترض أن تكاليف الانتاج محددة مسبقا وتساوي C والمطلوب ايجاد أكبر حجم للانتاج ضمن هذه التكلفة المحددة. وذلك اذا كان تابع الانتاج من نوع (كوب ـ دوغلاس) ..

مما سبق نلاحظ أن التكلفة الاجمالية تساوي :

$$C = P_1x_1 + P_2x_2 = g(x_1\ x_2) \qquad (5,3,4)$$

وهي شرط يقيد تحولات x_1 و x_2 .

أما تابع الانتاج فيساوي :

$$y = a_o x_1^{a_1}.x_2^{a_2} = f(x_1\ x_2) \qquad (6,3,4)$$

حتى نجد النقاط الحرجة للتابع ($f(x_1\ x_2)$) نستخدم طريقة ضارب لاغرانج ونشكل التابع :

$$L(x_1\ x_2,\lambda) = a_o x_1^{a_1}.x_2^{a_2} - \lambda[P_1x_1 + P_2x_2 - C] \qquad (7,3,4)$$

ثم نحسب مشتقيه الجزئيين ونضعهما مساويين للصفر فنجد أن :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = a_o a_1 x_1^{a_1-1} . x_2^{a_2} - \lambda P_1 = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = a_o a_2 x_1^{a_1} . x_2^{a_2-1} - \lambda P_2 = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_1 x_1 + P_2 x_2 - C = o$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على أن :

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} . \frac{C}{P_1}$$

$$x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} . \frac{C}{P_2} \qquad (7,3,4)$$

وهنا يجب التأكد من أن هذه النقطة تقابل قيمة عظمى للتابع y بواسطة معين (هيسان) .وبذلك نجد أن تناسب x_1 و x_2 يساوي :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2} . \frac{P_2}{P_1} \qquad (8,3,4)$$

وهذا يعني أن العلاقة التناسبية $\frac{x_1}{x_2}$ التي تعطينا أكبر انتاج ممكن تتناسب طردا مع تناسب المرونتين $\frac{a_1}{a_2}$ وعكسا مع تناسب السعرين $\frac{P_2}{P_1}$ وهي غير مرتبطة بالتكلفة المحددة مسبقا C وهذا أمر منطقي تفرضه تقنيات الانتاج .

وبتعويض x_1 و x_2 من العلاقتين السابقتين نجد أن حجم أكبر انتاج يساوي :

$$y = a_o \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{C}{P_1}\right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{C}{P_2}\right)^{a_2} \qquad (9,3,4)$$

وهو مقدار مرتبط بالتكلفة المحددة مسبقا C .

■ **ملاحظـــة** : اذا كان حجم الانتاج y محددا ويساوي y_o فاننـــا نقوم بتعويض x_2 من علاقة التناسب في عبارة التابـــع (4 ,3 ,6) فنحصل على :

$$y_o = a_o x_1^{a_1} \left(\frac{a_2}{a_1} \frac{P_1}{P_2} x_1\right)^{a_2} \qquad (10,3,4)$$

ومنها نحدد x_1 بدلالة y_o ثم نحسب x_2 من العلاقة التناسبية السابقة ثم نعوض في(4 ,3 ,5) فنحصل على تكلفة حجم الانتاج المحدد وهـــي ستكون أقل تكلفة ممكنة لحجم الانتاج المفروض .

مثـــال (4 ـ 7) لنفترض أن التكلفة المحددة للانتاج هي C =1000 وان أسعار المواد المستخدمة هـــــي P_1= 20 و

P_2= 30 وأن تابع الانتاج هو:

$$y = 2.x_1^{0,3}.x_2^{0,4}$$

والمطلوب ايجاد (x_1 و x_2) اللتين تعطيانا أكبر انتاج ممكن. بناء على ماسبق نجد أن الحل الذي يعطينا أكبر انتاج ممكن هو:

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{C}{P_1} = \frac{0,3}{0,7} \frac{1000}{20} = 21,43$$

$$x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{C}{P_2} = \frac{0,4}{0,7} \frac{1000}{30} = 19,05$$

واذا قمنا بحساب ناصر معين (هيسان) الموسع نجد أنه يســـاوي 20,75 وهو مقدار موجب . اذن النقطة (x_1 x_2) تقابل قمة منحنى تساوي y ويمكننا القول أن أكبر حجم للانتاج ضمن التكلفة المحددة

يساوي :

$$y_{max} = 2(21,43)^{0,3}(19,05)^{0,4} = 16,30$$

ويمكن التحقق من أن تكلفة هذا الحجم من الانتاج لاتزيد عن التكلفة المحددة1000 فنجد أن :

$$20(21,43) + 30(19,05) = 1000$$

الحالة الاخرى : اذا كان حجم الانتاج محددا ويساوي$y = y_o$=20 فان العلاقة (10, 3,4) تعطينا أن :

$$20 = 2x_1^{0,3}(\frac{0,4}{0,3}\ \frac{20}{30}\ x_1)^{0,4}$$

$$20 = 1,91\ x_1^{0,7}$$

$$x_1 = 28,69$$

من العلاقة (8,3,4) نجدأن :

$$x_2 = \frac{a_2}{a_1}\ \frac{P_1}{P_2}\ x_1 = \frac{0,4}{0,3}\ \frac{20}{30}(28,69) = 25,5$$

ولحساب تكلفة هذا الحجم من الانتاج نجد أن :

$$C = 20(28,69) + 30(25,5) = 1338,87$$

IV ـ حساب ثوابت التوابع الانتاجية :

لقد لاحظنا في الفقرات السابقه أن كل تابع انتاجي يتضمن عددا من الثوابت العددية مثلa_o و a_1 و a_2 و ... الخ.

ومادامت هذه الثوابت غير محددة فان التابع الانتاجي يبقى ذا صيغة

عامة غير محددة .

ان تحديد أو حساب هذه الثوابت يتم بواسطه عدة طرائق ري احصائية أهمها طريقة المربعات الصغرى والتي سنستعرضها تمايلي:

* طريقة المربعات الصغرى :

تعتمد هذه الطريقة على تسوية أو تقويم المعطيات الاحصائية المتوفرة عن التابع المدروس ، واعطائها شكل منحن انسيابي ذي معادلة رياضية معروفة ، ولتبسيط هذه المسألة نبدأ بالتابع الخطي لمتحول واحد .

* حساب ثوابت التابع الخطي :

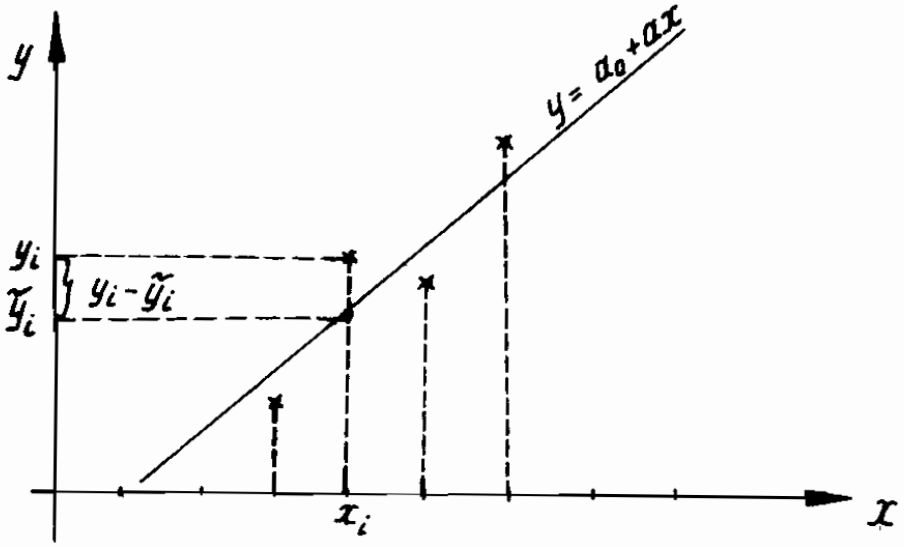
لنفترض أن عدد القيم الاحصائية أو الفعلية المتوفرة عن التابع y هي n قيمة ونرمز لها بالرموز .

$$y : y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \cdots \quad y_i \cdots y_n$$

كما نرمز للقيم الفعلية للمتحول x المقابلة للقيم السابقة بالرموز:

$$x : x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_i \cdots x_n$$

واذا قمنا برسم النقاط الهندسية (x_i , y_i) على المستوي XOY نحصل على شكل الانتشار التي .



شكل رقم(4 - 1)

فاذا أردنا تسوية أو تقويم هذا الشكل بواسطة معادلة مستقيم فعلينا أن نفترض أن القيم النظرية $\tilde{y}_i$ مرتبطة بقيم المنحول x_i بواسطة معادلة من الشكل :

$$\tilde{y}_i = a_o + a_1 x_i \qquad (1,4,4)$$

وحتى تكون الفروقات بين القيم الفعلية y_i والقيم النظرية $\tilde{y}_i$ أصغر ما يمكن يكفي أن يكون مجموع مربعات هذه الفروقات أصغر ما يمكن أي يجب أن يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 \longrightarrow \text{Min} \qquad (2,4,4)$$

واذا رمزنا لهذا المجموع بـ F واستبدلنا $\tilde{y}_i$ بماتساويه من معادلة التقويم (4, 4 , 1) فنحصل على التابع التالي :

$$F(a_o\ a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_o - a_1 x_i)^2 \longrightarrow \text{Min} \qquad (3,4,4)$$

ويسمى هذا التابع بتابع المربعات الصغرى لمعادلة المستقيم وهو يتضمن ثابتين مجهولين هما a_1, a_o أما x_i و y_i فهي معلومة من المعطيات الاحصائية . نلاحظ أن التابع $F(a_o, a_1)$ يأخذ أصغر قيمة له عندما يكون :

$$\frac{\partial F}{\partial a_o} = 2\ \Sigma(y_i - a_o - a_1 x_i)(-1) = o$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\ \Sigma(y_i - a_o - a_1 x_i)(-x_i) = o \qquad (4,4,4)$$

وباصلاح هاتين المعادلتين نحصل على المعادلتين الطبيعيتين التاليتين:

$$na_o + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_o \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\ \Sigma x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (5,4,4)$$

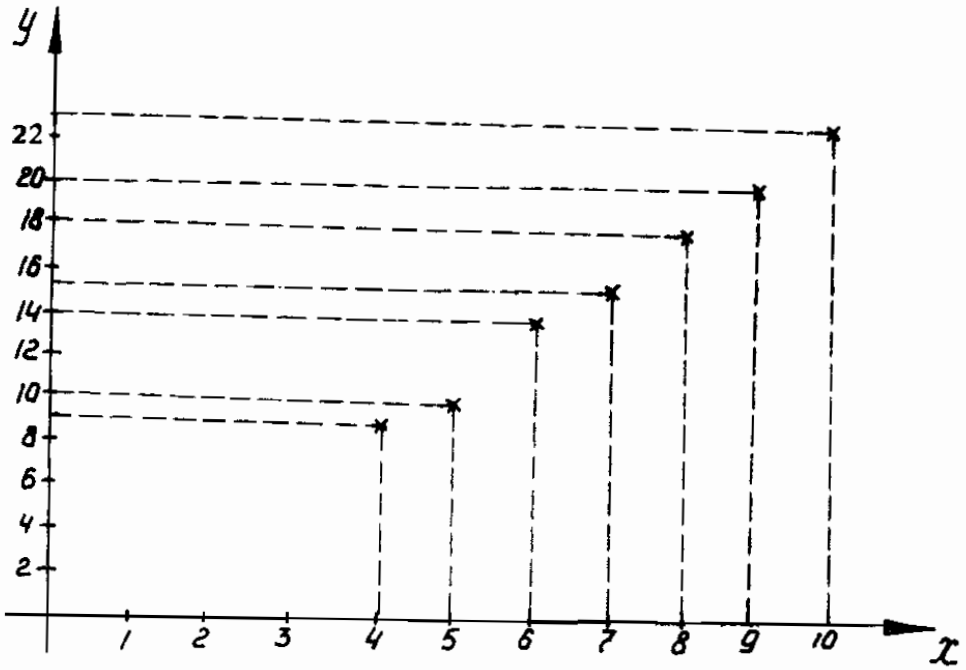
ومن هاتين المعادلتين نحصل على قيمة لكل من الوسيطين المجهولين a_o و a_1 اللتين تجعلان التابع F أصغر مايمكن ، نرمز لهما بالرمز $\grave{a}_o$ و $\grave{a}_1$. وللتأكد من ذلك يمكننا حساب معينين (هيسان) H_1 و H_2 فاذا كان $H_1 > o$ وكان $H_2 > o$ فان ذلك يعني أن القيمتين $\grave{a}_o$ و $\grave{a}_1$ تقابلان قيمة صغرى للتابع $F(a_o\ a_1)$

مثـــال (4 – 8) لنفترض أن y ، و x لهما القيم الفعلية المتقابلة التالية :

الرقم	1	2	3	4	5	6	7	Σ
x_i	4	5	6	7	8	9	10	49
y_i	9	10	14	15	18	20	25	111

والمطلوب . ايجاد معادلة y بدلالة x .

الحـــل : نقوم برسم النقاط (x_i , y_i) على المستوي XOY فنحصل على شكل الانتشار التالي :



شكل رقم(4 – 2)

نلاحظ أن شكل الانتشار يوحي لنا بمعادلة مستقيم ، اذن لنفترض أن :

$$\tilde{y}_i = a_o + a_1 x_i$$

ولحساب a_o و a_1 نطبق العلاقتين (4 ,4 ,5) لذلك نحسب المجاميع الداخلة فيهما فنجد أن $n = 7$ وأن :

$$\Sigma x_i = 49 \quad , \quad \Sigma x_i^2 = 371$$

$$\Sigma y_i = 111 \quad , \quad \Sigma x_i y_i = 849$$

نعوض ذلك في (4 ,4 ,5) فنحصل على المعادلتين :

$$7a_o + 49a_1 = 111$$

$$49a_o + 371a_1 = 849$$

نضرب المعادلة الاولى بـ (7) ونطرحها من الثانية فنحصل على المعادلة التالية :

$$28a_1 = 72$$

$$a_1 = 2,57$$

وبالتعويض في الاولى نجد أن :

$$7a_o + 49(2,57) = 111$$

$$a_o = -2,143$$

ومنه نحصل على معادلة المستقيم المطلوب التالية .

$$\tilde{y}_i = -2,143 + 2,57\ x_i$$

يمكن التأكد من أن قيمة معيار الهيسان المساوي 96 ، وهذا يدل على أن المعادلة [illegible]

* حساب ثوابت معادلة الدرجة الثانية :

$$\tilde{y}_i = a_o + a_1 x_i + a_2 x_i^2$$

نشكل التابع :

$$F(a_o\ a_1\ a_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_o - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \longrightarrow \text{Min} \quad (6,4,4)$$

وبحساب المشتقات الجزئية لـ F بالنسبة لـ a_o و a_1 و a_2 ووضعها مساوية للصفر نحصل على المعادلات التالية :

$$na_o + a_1 \Sigma x_i + \quad = \Sigma y_i$$

$$a_o \Sigma x_i + a_1 \Sigma x^{\cdot} + a_2 \Sigma x_i^3 = \Sigma x_i y_i \qquad (7,4,4)$$

$$a_o \Sigma x_i^2 + a_1 \Sigma x_i^3 + a_2 \Sigma x_i^4 = \Sigma x_i^2 y_i$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على $a_o^{\cdot}$ $a_1^{\cdot}$ $a_2^{\cdot}$:

* حساب ثوابت التابع الخطي المتعدد:

$$y = a_o + a_1 x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} \qquad (8,4,4)$$

نشكل التابع :

$$F(a_o\ a_1\ a_2\ a_3) = \sum^{n} (y_i - a_o - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i} - a_3 x_{3i})^2 \qquad (9,4,4)$$

نشق هذا التابع بالنسبة a_o و a_1 و a_2 و a_3 ونضع هـــذه المشتقات مساوية للصفر فنحصل على المعادلات التاليه .

$$r\,a_o + a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} + a_3\sum x_{3i} = \sum y_i$$

$$a_o\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_1\sum x_{1i}^2 + a_2\sum x_{2i}x_{1i} + a_3\sum x_{3i}x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i$$

$$a_o\sum x_{2i} + a_1\sum x_{1i}x_{2i} + a_2\sum x_{2i}^2 + a_3\sum_{i=1}^{n} x_{3i}x_{2i} = \sum x_{2i}y_i$$

(10,4,4)

$$a_o\sum x_{3i} + a_1\sum x_{1i}x_{3i} + a_3\sum x_{2i}x_{3i} + a_3\sum x_{3i}^2 = \sum x_{3i}y_i$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على a_3 ، a_2 ، a_1 ، a_o

■ حساب ثوابت تابع الجداء :

$$\tilde{y}_i = a_o x_{1i}^{a_1}.x_{2i}^{a_2}.x_{3i}^{a_3}$$

في هذه الحالة نقوم أولا بأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$\ln \tilde{y}_i = \ln a_o + a_1 \ln x_{1i} + a_2 \ln x_{2i} + a_3 \ln x_{3i} \quad (11,4,4)$$

وبذلك نكون قد حولنا علاقة الجداء الى علاقة خطية بدلالة :

$$\ln y_i \ , \ \ln a_o \ , \ \ln x_{3i} \ , \ \ln x_{2i} \ , \ \ln x_{1i}$$

وبالاستفادة من العلاقة السابقة (4 , 4 , 10) نجد أن المعـــادلات التي تساعدنا على حساب الثوابت هي :

$$n \ln a_o + a_1 \Sigma \ln x_{1i} + a_2 \Sigma \ln x_{2i} + a_3 \Sigma \ln x_{3i} = \Sigma \ln y_i$$

$$\ln a_o \Sigma \ln x_{1i} + a_1 \Sigma (\ln x_{1i})^2 + a_2 \Sigma \ln x_{2i} \ln x_{1i} +$$

$$+ a_3 \Sigma \ln x_{3i} \ln x_{1i} = \Sigma \ln y_i \ln x_{1i}$$

$$\ln a_o \Sigma \ln x_{2i} + a_1 \Sigma \ln x_{1i} \ln x_{2i} + a_2 \Sigma (\ln x_{2i})^2 +$$

$$+ a_3 \Sigma \ln x_{3i} \ln x_{2i} = \Sigma \ln y_i \ln x_{2i} \qquad (12,4,4)$$

$$\ln a_o \Sigma x_{3i} + a_1 \Sigma \ln x_{1i} \ln x_{3i} + a_2 \Sigma \ln x_{2i} \ln x_{3i} + a_3 \Sigma (\ln x_{3i})^2 =$$

$$= \Sigma \ln y_i \ln x_{3i}$$

بطريقة مشابهة يمكننا استنباط المعادلات المناسبة لحساب الثوابت لمساهمة في التابع الانتاجي ثم الانتقال الى تحليله ودراسته بواصطه.

٤ حساب الخطأ المرتكب :

عندما نحصل على التابع الانتاجي بواسطة الطريقة السابقة طريقة المربعات الصغرى) فاننا سنعتبر هذه المعادلة ممثلة للقيم الفعليه Y_i ولكن هذا التمثيل لايطابق بين القيم النظرية $\tilde{Y}_i$ والقيم الفعلية Y_i وان المتوسط غير المتحيز لمربعات الفروقات هي :

$$S^2 = \frac{\Sigma (y_i - \tilde{y}_i)^2}{n - 2}$$

ويكون الخطأ المرتكب هو S ويمكن أخذه بعين الاعتبار عند الحسابات المختلفة أو عند التنبؤات المستقبلية بحيث نضيف ونطرح من القيمة النظرية $\tilde{y}_i$ المقدار 2S فيكون :

$$y_i \in [\tilde{y}_i - 2S \ , \ \tilde{y}_i + 2S]$$

وذلك باحتمال قدره 9543 %

وسنعالج قضايا حساب نوابت التوابع الانتاجية بشكل مفصل في المقررات المخصصة في السنوات العليا ، كالاحصاء الرياضي ونظرية الارتباط والاقتصاد القياسي .

تمرينـــــــــــــــــات

١ ـ ادرس خصائص ومؤشرات التوابع الانتاجية التالية وذلك في النقـــاط المجاورة لكل منها :

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \qquad (x_1=8,\ x_2=27,\ x_3=61)$$

$$y = 40\,\frac{12x_1x_2 - 5x_1^2 - 4x_2^2}{x_1 + x_2}$$

$$y = x_1^{1/4}\, x_2^{3/4}$$

$$y = 2x_1^{\frac{1}{2}}\, x_2^{1/3}\, t^{0,2}$$

٢ ـ اذا كان لدينا التابع التالي :

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

وتابع التكلفة التالي :

$$C = 8x_1 + 2x_2 + x_3$$

أ ـ أوجد خطة الانتاج الذي يضمن لنا انتاجا قدره $y = 60$ ويجعل التكلفة أقل مايمكن .

ب ـ أوجد خطة الانتاج التي تجعل مقدار الانتاج أكبر مايمكـــــن وذلك ضمن تكلفة محددة مسبقا وتساوي $C = 1000$.

الفصل الخامس

المحددات والمصفوفات

I ـ مقدمة عن المصفوفـــــات :

(I ـ 1): تعاريـــــف :

* **المصفوفـــــة** : هي جملة من الاعداد مرتبة ضمن أسطر وأعمـــدة .

نرمز للمصفوفة بالرموز A أو B أو C ....

ونرمز للاعداد الداخلة فيها بالرموز a_{ij} أو b_{ij} أو c_{ij} على الترتيب حيث يرمز الدليل i لرقم السطر ويرمز الدليل j لرقـــم العمود .

ولنفترض أن i يأخذ القيم من 1 حتى m وأن j يأخذ القيم من 1 حتى n عندها نسمي الثنائية (m , n) بمرتبة المصفوفة .

* **المصفوفة المربعة** : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الاسطر مساويـا لعدد الاعمدة ، أي هي التي تكون من المرتبة (m , m) أو(n , n) وتكتب المصفوفة المربعة ذات المرتبة n على الشكل التالي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1,1,5)$$

* **المصفوفة القطرية** : هي مصفوفة مربعة من المرتبة (n , n)، تكون جميع العناصر فيها معدومة ماعدا عناصر القطر الرئيسي ، وتكتب على الشكل التالي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & o & o & \cdots & o \\ o & a_{22} & o & \cdots & o \\ o & \cdots & a_{33} & \cdots & o \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ o & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2,1,5)$$

* المصفوفة الاحادية : هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد ، يرمز لهذه المصفوفة بالحرف I وتكتب على الشكل التالي .

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (3,1,5)$$

(I ـ 2)العمليات الجبرية على المصفوفات :

١ ـ تساوي المصفوفات : نقول عن مصفوفتين A و B انهمامتساويتان اذا كانت لهما نفس المرتبة وكانت جميع عناصرهما المتقابلـــــــة متساوية ، أي يكون لدينا :

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \qquad (4,1,5)$$

٢ ـ جمع المصفوفات : ان مجموع مصفوفتين A و B لهما نفس المرتبة (m , n) يساوي مصفوفة ثالثة C لها نفس المرتبة ، وكل عنصر فيها يساوي مجموع العنصرين المتقابلين في A و B .أي أن:

$$A + B = C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} , a_{12} + b_{12} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} , a_{22} + b_{22} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} + b_{m1} , a_{m2} + b_{m2} \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (5,1,5)$$

٣ ـ جداء المصفوفة بعدد ثابت : ان جداء مصفوفة A بعدد ثابت K هو مصفوفة من نفس المرتبة ونحصل عليها بضرب جميع عناصر A بالعدد K أي أن :

$$KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} , Ka_{12} \dots Ka_{1n} \\ Ka_{21} , Ka_{22} \dots Ka_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Ka_{m1} , Ka_{m2} \dots Ka_{mn} \end{bmatrix} \qquad (6,1,5)$$

٤ ـ جداء المصفوفات : لايمكن اجراء جداء مصفوفتين A و B الا اذا كان عدد أعمدة الاولى يساوي عدد أسطر الثانية .

اذا كانت A من المرتبة (m , n) فان B يجب أن تكون من المرتبة (n , t) ويعرف الجداء على الشكل التالي:

$$\underset{(m,n)}{A} \cdot \underset{(n,t)}{B} = \underset{(m,t)}{C} \qquad (7,1,5)$$

حيث ان عناصر المصفوفة C تحسب من العلاقة التالية :

$$C_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{i\ell} \qquad (8,1,5)$$

حيث (i = 1,2, ... m) وحيث (ℓ = 1,2,3...t) .

أي أن عناصر C تحسب من جداء أشعة الاسطر في الاولى بأشعة الاعمدة في الثانية .

٥ ـ منقول مصفوفة A من المرتبة (m , n) هو عبارة عن مصفوفة تنتج عن A بجعل أعمدتها أسطرا . وأسطرها أعمدة ونرمز له بـ $\grave{A}$ ولعناصره بـ $\grave{a}_{ij}$

٦ ـ مقلوب مصفوفة : لايمكن البحث عن المقلوب الا اذا كانت المصفوفة مربعة ونظامية ، وللحصول على مقلوب مصفوفة مربعة A (من المرتبة n) نقوم بمايلي :

١ ـ نحسب قيمة معين المصفوفة ونتأكد من أن $|A| \neq 0$

٢ ـ نوجد منقول المصفوفة A ونرمز له بـ $A^{`}$.

٣ ـ نوجد المصفوفة المساعدة اعتمادا على $A^{`}$ وذلك بأن نضع مقابل العنصر ( $a^{`}_{ij}$) المقدار $|A_{ij}| (-1)^{i+J}$.

حيث $|A_{ij}|$ هو المعين (المصغر) المقابل للعنصر ($a^{`}_{ij}$ ) في $A^{`}$ المؤلف من عناصر $A^{`}$ بعد حذف السطر i والعمود J .

ونرمز للمصفوفة المساعدة بالرمز $\tilde{A}$.

٤ ـ نحسب مقلوب المصفوة A من العلاقة :

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} \qquad (9,1,5)$$

٧ ـ المصفوفة المميزة : ان المصفوفة المميزة لـ A المربعة هي المصفوفة ($\lambda I - A$) وان المعادلة :

$$|\lambda I - A| = 0$$

تسمى بالمعادلة المميزة وهي تتضمن كثير حدود بالنسبة المرتبة n ، وان حلول المعادلة المميزة بالنسبة لـ λ هي الخاصة للمصفوفة A.

(I – 3) حل جملة معادلات خطية بواسطة المصفوفات :

يمكن التعبير عن جملة من المعادلات الخطية عددها n معادله وتتضمن n متحولاً بواسطة المصفوفات كما يلي :

لتكن لدينا المعادلات :

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned} \qquad (10,1,5)$$

واعتمادا على تعريف جداء المصفوفات نجد أنه يمكننا كتابه هـذه المعادلات على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

أو على الشكل التالي :

$$A.X = B \qquad (11,1,5)$$

وان الحل المشترك لجملة هذه المعادلات يعطى بالعلاقة :

$$X = A^{-1}.B \qquad (12,1,5)$$

(I – 4)حل جملة معادلات خطية بطريقة التقارب المتتالي :

تهدف هذه الطريقة الى ايجاد حلول تقريبية وبالدقة التي نريدها لجملة المعادلات الخطية . ونختصر خطواتها على الشكل التالي :

١ – نكتب المعادلات الخطية السابقة (10, 1,3) على الشكل التالي:

$$x_1 = b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$x_2 = b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (13,1,5)$$

$$x_n = b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n$$

أو على الشكل المصفوفي التالي :

$$X = B + A.X \qquad (14,1,5)$$

٢ – نعطي جميع المتحولات في الطرف الايمن القيمة صفرا فنحصل على حل ابتدائي نسميه الحل الصفري وهو يساوي :

$$x_1^{(o)} = b_1 \quad , \quad x_2^{(o)} = b_2 \quad , \ldots , \quad x_n^{(o)} = b_n \qquad (15,1,5)$$

٣ – نعوض قيم هذا الحل في المعادلات (13, 1, 5) فنحصل على حل آخر نسميه الحل الاول وهو يساوي :

$$x_i^{(1)} = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^{(o)} \qquad (15,1,5)$$

حيث (i = 1,2,3... n)

٤ ـ نعود ونعوض قيم الحل الاول في نفس المعادلات (5 ,1 ,13)فنحصل على حل ثاني وهو :

$$x_i^{(2)} = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_i^{(1)} \qquad (15,1,5)$$

٥ ـ نتابع هذا العمل ونعوض قيم الحل الثاني في(5 ,1 ,15) فنحصل على حل ثالث ... الخ.

وهكذا نحصل على الحل ذي الرقم K والذي يساوي :

$$x_i^{(K)} = b_i + \Sigma a_{ij} . x_i^{(K-1)} \qquad (16,1,5)$$

والذي يكتب بشكل مصفوفي كمايلي :

$$X^{(K)} = B + AX^{(K-1)} \qquad (17,1,5)$$

وبتكرار هذه العملية عدد معين من المرات يتضح لنا فيما اذا كانت الحلول تقترب من قيمة معينة لكل من المتحولات أم لا .

ويبرهن على أنه اذا كانت القيمة المطلقة لجميع عناصر المصفوفة A أصغر من $\frac{1}{n}$ فان عمليات هذه الطريقة تكون متقاربة.

مثال (5 – 1) أوجد بطريقة التقارب المتتالي حل جملة المعادلات :

$$4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8$$

$$0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9$$

$$0,04x_1 + 0,08x_2 + 4x_3 = 20$$

الحـــل : نكتب جملة المعادلات السابقة على الشكل التالي :

$$x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3$$

$$x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3$$

$$x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2$$

نعطي قيمة الصفر لجميع المتحولات التي في الطرف الايمن فنحصـــــل على الحل الصفري التالي :

$$x_1^{(o)} = 2 \quad , \quad x_2^{(o)} = 3 \quad , \quad x_3^{(o)} = 5$$

نعوض هذه القيم في المعادلات السابقة فنحصل على الحل الاول التالي.

$$x_1^{(1)} = 2 - 0,06(3) + 0,02(5) = 1,92$$

$$x_2^{(1)} = 3 - 0,03(2) + 0,05(5) = 3,19$$

$$x_3^{(1)} = 5 - 0,03(2) + 0,02(3) = 5,04$$

نعود ونعوض قيم الحل الاول في المعادلات السابقة نفسها فنحصل علـى الحل الثاني التالي :

$$x_1^{(2)} = 1,9094 \quad , \quad x_2^{(2)} = 3,1944 \quad , \quad x_3^{(2)} = 5,0446$$

وبتعويض قيم الحل الثاني في نفس المعادلات نحصل على الحل الثالث التالي :

$$x_1^{(3)} = 1,90923 \quad , \quad x_2^{(3)} = 3,19495 \quad , \quad x_3^{(3)} = 5,04485$$

وهكذا نتابع عمليه التقارب المتتالي حتى نحصل على نتيجة تحقق الدقة المطلوبة . وهنا نلاحظ أن الحل الثالث أعطانا نتيجة بدقة حتى ثلاثة أرقام بعد الفاصلة (قارن مع الحل الثاني).

II ـ نموذج التشابك القطاعي :

ان أشهر نموذج للمدخلات والمخرجات هو نموذج التشابك القطاعي الذي يعكس تداخل العمليات الانتاجية بين القطاعات المختلفة وسنفترض أن عدد القطاعات هو n قطاعا وأن كل منها يقوم بانتاج صنف معين من المنتجات وبذلك يكون عدد أصناف المنتجات يساوي n صنفا أيضا .

ومن المعروف أن عملية الانتاج في القطاعات المختلفة هي عملية متداخلة أو متشابكة . فكل قطاع يعتمد في انتاجه على قطاعات أخرى لتأمين بعض المواد الوسيطة ـ نصف المصنعة ـ الداخلة في انتاجه المتخصص .

ويمكن التعبير عن تشابك القطاعات بواسطة جدول خاص يسمى جدول (العلاقات القطاعية) أوجدول التشابك القطاعي ، وذلك بطريقتين هما

ا ـ الطريقة الاولى : وفيها يتم التعبير عن التشابك بدلالة كميات

المواد المنتجة (بشكلها الطبيعي) وبوحدات قياس مناسبة .

٢- الطريقة الثانية : وفيها يتم التعبير عن التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد المنتجة (بسعر المنتّج أو بسعر المستهلك) وبواحدات نقدية ملائمة .

كما يمكن النظر الى عملية تحليل التشابك القطاعي في كلتا الطريقتين السابقتين على أنها :

* عملية سكونية ثابتة ، لاتتغير فيها مقادير أو قيم المنتجات المتداخلة ويتم الاعتماد على هذه النظرة عندما تكون عملية التحليل قصيرة الاجل (خلال عام مثلاً) .

* عملية ديناميكية متغيرة ، تتغير فيها مقادير أو قيم المنتجات المتداخلة (بسبب التقدم التقني أو التضخم النقدي ...الخ) وتعتمد هذه النظرة عندما تكون عملية التحليل تتناول فترة طويلة الاجل.

وسنعالج مسألة تحليل التشابك القطاعي وفقا للطريقتين السابقتين باعتبارهما عملية سكونية ثابتة فقط . ونترك مسألة تحليل التشابك القطاعي باعتباره عملية ديناميكية الى المقررات المتخصصة في الصفوف العليا .

(II - 1)نموذج التشابك القطاعي بدلالة كميات المواد المنتجة :

لنفترض أن عملية الانتاج المادي تقسم الى n قطاعا يقوم كل منها بانتاج صنف معين من المنتجات ، ولنفترض أن أرقام الخط الانتاجية لهذه القطاعات هي :

$$Q_1 \ , \ Q_2 \ , \ Q_3 \ \cdots \ Q_n$$

وان هذه الارقام معطاة بواحدات قياس طبيعية (المترأو القطعة) خلال واحدة الزمن (السنة مثلا).

ومن المعلوم أن منتجات كل قطاع تقسم الى قسمين يستهلكان على شكلين مختلفين هما :

* منتجات الاستهلاك الوسيط : وهي جزء من انتاج القطاع المذكور الذي يستخدم مرة ثانية في انتاج مواد أخرى في القطاعات الاخرى ونرمز لمقدار منتجات الاستهلاك الوسيط في القطاع i المستخدمة في القطاع j بالرمز q_{ij} .

* منتجات الاستهلاك النهائي : وهي جزء من انتاج القطاع المذكور الذي يستخدم لغرض الاستهلاك النهائي الخاص والحكومي أو لغرض التصدير أو الاستثمار أو زيادة المخزون أو تعويض الاهتلاك .... الخ.
ويسمى هذا الجزء غير المخصص للانتاج بالناتج النهائي .
ونرمز لمقداره في القطاع i بالرمز q_i .
وتسمى منتجات القطاع بالمخرجات أمامستلزماته فتسمى بالمدخلات وبناء على ماتقدم يمكننا أن نضع جدولا للمدخلات والمخرجات يسمى جدول (التشابك القطاعي) ويأخذ الشكل التالي :

جدول رقم (5 - 1) جدول المدخلات القطاعي بدلالة كميات المواد المنتجة

القطاعات المخلقة (المدخلات)	أرقام الخطة	المخرجات: منتجات الاستهلاك الوسيط في القطاعات 1	2	3	...	n	منتجات الاستهلاك النهائي	مجموع المخرجات للقطاع i
i \ j								
1	Q_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}	...	q_{1n}	q_1	$\sum_{j=1}^{n} q_{1j} + q_1$
2	Q_2	q_{21}	q_{22}	q_{23}	...	q_{2n}	q_2	$\sum_{j} q_{2j} + q_2$
3	Q_3	q_{31}	q_{32}	q_{33}	...	q_{3n}	q_3	$\sum_{j} q_{3j} + q_3$
....	....	...	...	...	...	...	...	.....
	Q_i	q_{i1}	q_{i2}	q_{i3}	...	q_{in}	q_i	$\sum_{j} q_{ij} + q_i$
....	.....	...	...	...	...	...	...	.....
....	.....	...	...	...	...	...	...	.....
n	Q_n	q_{n1}	q_{n2}	q_{n3}	...	q_{nn}	q_n	$\sum_{j} q_{nj} + q_n$

وهنا نحب أن نسترعى أنه لا يمكننا جمع الكميات الواردة في الجدول السابق بشكل عمودى . لأن منتجات كل قطاع تختلف عن القطاع الآخر وتقاس بوحدات قياس خاصة بكل قطاع .

ولكن يمكننا أن نجمع الكميات بشكل أفقى ، المخرجات الأنها منتجة

في قطاع واحد ومقاسه بواحده قياس واحده .

وحتى تكون أرقام الخطة محققه لمتطلبات الانتاج في القطاعات المختلفة يجب أن تتحقق المعادلات التالية :

$$Q_1 = q_{11} + q_{12} + q_{13} + \ldots + q_{1n} + q_1$$

$$Q_2 = q_{21} + q_{22} + q_{23} + \ldots + q_{2n} + q_2$$

(1,2,5)

$$Q_3 = q_{31} + q_{32} + q_{33} + \ldots + q_{3n} + q_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_n = q_{n1} + q_{n2} + q_{n3} + \ldots + q_{nn} + q_n$$

وتسمى هذه المعادلات بمعادلات (توازن الانتاج) .

وهي تعني أن مقدار ماينتج في القطاع i يساوي مجموع مايستهلك من انتاجه في القطاعات المختلفة + الناتج النهائي لذلك القطاع.

وحتى يتلائم هذا النموذج مع الاستخدامات المختلفة له في أغراض التخطيط والادارة سندخل مفهوما جديداً هو " المعاملات الفنية " .

* **المعاملات الفنية** : هي معاملات تعبر عن مقدار مايلزمنا من منتجات القطاع i لانتاج كل واحدة من منتجات القطاع j . وذلك بفرض أن استهلاك القطاع j من منتجات القطاع i يتناسب مع حجم

انتاجه ، أي بفرض أن q_{ij} يتناسب مع Q_j والنسبة بينهما ثابتة .

وحسب التعريف السابق نحصل على المعاملات الفنية لانتاج واحدة من المنتجات في كل قطاع من العلاقات التالية :

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j} \qquad (2,2,5)$$

حيث ان : ($i,j = 1,2,3 \ldots n$)

وحيث ان a_{ij} هو المعامل الفني الذي يعبر عن مقدار مايلزمنا من منتجات القطاع i لانتاج كل واحدة من منتجات القطاع j . وان هذه المعاملات تأخذ شكل مصفوفة مربعة نرمز لها بـ A ونسميها بمصفوفة المعاملات الفنيه وهي :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3,2,5)$$

وسنرى أن لهذه المصفوفة أهمية كبيرة في أعمال التخطيط والتحليل الاقتصاددي لأنها تحدد الشروط الفنيةوالتقنية للانتاج خلال فترة الخطة قصيرة الاجل .

من العلاقة (5 , 2 , 2) نجد أن :

$$q_{ij} = a_{ij}Q_j \qquad (4,2,5)$$

وبتعويض قيمة q_{ij} في معادلات التوازن (1, 1,3) نحصل على المعادلات التالية :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{13}Q_3 + \ldots + a_{1n}Q_n + q_1 \\
Q_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + a_{23}Q_3 + \ldots + a_{2n}Q_n + q_2 \\
Q_3 &= a_{31}Q_1 + a_{32}Q_2 + a_{33}Q_3 + \ldots + a_{3n}Q_n + q_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_n &= a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_n + a_{n3}Q_3 + \ldots + a_{nn}Q_n + q_n
\end{aligned} \qquad (4,2,5)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات بشكل مصفوفي على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad (5,2,5)$$

وبافتراض أن :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = Q \quad , \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = q$$

نحصل على المعادلة المصفوفية التالية :

$$Q = AQ + q$$

$$(I - A)Q = q \qquad (6,2,5)$$

وهي تعطينا عناصر المصفوفة q (مصفوفة الناتج النهائي) بدلالة Q و A . الذين يفترض أنهما معلومين .

واذا أردنا حساب Q بدلالة q و A نجد أن :

$$Q = (I - A)^{-1}.q \qquad (7,2,5)$$

وهي تعطينا أرقام الخطة لكل قطاع بفرض أن A و q معلومين. وحتى نستطيع تغطية كامل الطلب الاجتماعي على منتجات هذه القطاعات يجب أن نجعل الناتج النهائي q مساويا لذلك الطلب ، أوبعبارة أخرى عندما نريد أن نحدد أرقام خطط القطاعات المختلفة نعتبر المصفوفة q هي مصفوفة الطلب الاجتماعي بما فيه من استهلاك محلي واستثمار وتصدير وتخزين وتعويض اهتلاك ...الخ.

وان المعادلة (7, 2,5)تساعدنا بسرعة على استنباط البدائل المختلفة لخطط الانتاج بما يتفق مع بدائل الناتج الاجتماعي النهائي .

ولكن حتى تكون المعادله (7, 2,5) قابلة للحل يجب أن يكـــــون معين المعطوفة (I - A) مختلفا عن الصفـــر (وهو شرط تم البرهـان على تحققه نظريـــا).

وفي الحالات العملية نقوم بالتحقق من أن $|I-A| \neq 0$ وذلك عندمـــا نقوم بايجاد المقلوب $(I - A)^{-1}$.

لنرمز للمقلوب $(I - A)^{-1}$ بالرمز :

$$(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (8,2,5)$$

وتكتب المعادلة (7, 2, 5) على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad (9,2,5)$$

وباجراء الجداء في الطرف الايمن وبمطابقة المصفوفتين نحصل على المعادلات التالية :

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + A_{13}q_3 + \ldots + A_{1n}q_n \\
Q_2 &= A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + A_{23}q_3 + \ldots + A_{2n}q_n \\
Q_3 &= A_{31}q_1 + A_{32}q_2 + A_{33}q_3 + \ldots + A_{3n}q_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_n &= A_{n1}q_1 + A_{n2}q_2 + A_{n3}q_3 + \ldots + A_{nn}q_n
\end{aligned}
\qquad (10,2,5)
$$

ومن المعادلات (10,2,5) يتضح أن عناصر المصفوفة $(I - A)^{-1}$ هي المقادير التي تحدد العلاقة التناسبية الكمية بين النواتج النهائية لمختلف القطاعات وبين منتجات كل قطـــــاع .

ولهذه العناصر معنى اقتصادي محدد ، فلو أردنا زيادة الناتـــــج النهائي للقطاع الثالث q_3 فقط بمقدار واحدة انتاجية فان عمـــــود الثوابت A_{i3} يعبر عن مقدار زيادة منتجات القطـاع i نتيجةلذلك، أو بعبارة أخرى فان A_{i3} يعبر عن مقدار واحدات منتجات القطاع i الذي يجب زيادته لتحقيق زيادة في الناتج النهائي في القطـاع 3 . بمقدار واحده انتاجية فقط ، لذلك تسمى العناصر A_{ij} بالمعامـــــلات الفنية الكلية وتسمى المصفوفة $(I - A)^{-1}$ بمصفوفة المعامـــــلات الفنية الكلية .

* خواص المعاملات الفنيـــــة :

١ ـ من العلاقة (2,5 ,2) يمكننا أن نستنتج أن :

$$o \leqslant a_{ij} < 1 \qquad (11,2,5)$$

وذلك لأن الجزء الذي يستهلكه القطاع j من القطاع i هو q_{ij} لايمكن أن يكون سالبا ، ولايمكن أن يكون أكبر من Q_j اجمالي انتـاج القطاع j .

٢ ـ كذلك نجد أن اجمالي مايستهلكه القطاع j من جميع القطاعـات لايمكن أن يكون أكبر من اجمالي انتاجه Q_j.أي أن :

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} < Q_j$$

وهذا مايعطينا العلاقة التالية :

$$o \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (12,2,5)$$

أي مجمـــوع المعاملات الفنيـةلأي عمود يجب أن يكون غير سالـــــب وأصغر من الواحـــــد .

ان الشرطين (11,2,5) و (5 ,2 ,12) هما شرطان كافيان ليكون للمعادلات (5 ,2 ,7) حلا غير سالب .

مثـال(5 ـ 1): لنفترض أن عملية الانتاج موزعة على ثلاثة قطاعات هي الزراعة والصناعة والخدمات ولها مصفوفة المعاملات الفنية التالية :

القطاعات	الزراعة	الصناعه	الخدمات
الزراعة	0,3	0,1	0,0
الصناعة	0,2	0,3	0,2
الخدمات	0,1	0,0	0,1

أوجد أرقام الخطط الانتاجية لهذه القطاعات الموافقة لكل من البديلين التاليين للناتج النهائي :

1) $q_1 = 100000 \qquad q_2 = 300000 \qquad q_3 = 200000$

2) $q_1 = 200000 \qquad q_2 = 300000 \qquad q_3 = 100000$

الحل : 1 ـ بالنسبه للبديل الاول نجد أن :

$$Q = (I - A)^{-1}.q$$

$$Q = \begin{bmatrix} +0,7 & -0.1 & 0 \\ -0,2 & +0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0 & +0,9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1,49643 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49643 & 0,33253 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 223279 \\ 562941 \\ 247030 \end{bmatrix}$$

أي أن انتاج القطاعات يساوي على الترتيب :

$Q_1 = 223279$ $\quad Q_2 = 562941$ $\quad Q_3 = 247030$

٢ ـ بالنسبة للبديل الثاني نجد أن :

$$Q = \begin{bmatrix} 1,49643 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49643 & 0,33253 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200000 \\ 300000 \\ 100000 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 368171 \\ 577194 \\ 152018 \end{bmatrix}$$

أي أن انتاج القطاعات في هذه الحالة يساوي على الترتيب :

$Q_1 = 368171$ $\quad Q_2 = 577194$ $\quad Q_3 = 152018$

(II ـ 2) نموذج التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد المنتجة :

لنفترض أن قيمة منتجات القطاع i (بسعر المنتج أو المستهلك) خلال العام هي W_i . ولنرمز لقيمة منتجات القطاع i التي تستخدم في القطاع j بالرمز v_{ij} خلال عام أيضا ،ولقيمة منتجات القطاع i المخصصة للاستهلاك النهائي بالرمز v_i ،وبشكل

مشابه لما فعلناه فى الحاله السابقة نجد أن جدول المدخلات والمخرجات للتشابك القطاعي بدلاله قيم المواد المصنعة يأخذ الشكل التالي :

جدول رقم (5 - 2) :جدول التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد المنتجة .

	قيم القطاع المنتجات		المخرجات						قيمة منتجات الاستهلاك النهائي	مجموع المخرجات للقطاع i
			قيمة منتجات الاستهلاك الوسيط في القطاعات							
	j	W_i	1	2	3	...	...	n		
المدخلات	1	W_1	v_{11}	v_{12}	v_{13}	...	...	v_{1n}	v_1	$\sum_j v_{1j} + v_1$
	2	W_2	v_{21}	v_{22}	v_{23}	...	...	v_{2n}	v_2	$\sum_j v_{2j} + v_2$
	3	W_3	v_{31}	v_{32}	v_{33}	...	...	v_{3n}	v_3	$\sum_j v_{3j} + v_3$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	i	W_i	v_{i1}	v_{i2}	v_{i3}	...	...	v_{in}	v_i	$\sum_j v_{ij} + v_j$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	n	W_n	v_{n2}	v_{n2}	v_{n3}	...	...	v_{nn}	v_n	$\sum_j v_{nj} + v_n$
	مجموع المدخلات في القطاع j	$\sum_i W_i$	$\hat{W}_1$	$\hat{W}_2$	$\hat{W}_3$	...	...	$\hat{W}_n$	$\hat{W}$	$\sum_j \hat{W}_j + \hat{W}$

ومن الواضح هنا انه يمكننا جمع عناصر كل سطر فنحصل على مجمـــوع قيم المخرجات في كل قطاع .

وهنـا يجب أن تتحقق المعادلات التالية :

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} + v_i \qquad (i = 1,2,3...n) \quad (13,2,5)$$

كما يمكننا جمع عناصر كل عمود (لأنها مقـاسـة بواحدات نقدية) فنحصل على مجموع قيم المدخلات الى كل قطاع ، وهنا يجب أن تحقـــق المعادلات التالية :

$$\hat{W}_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} \qquad (j=1,2,3,...n) \qquad (14,2,5)$$

كما يجب أن يكون مجموع قيم المخرجات في جميع القطاعات مساويـــا لمجموع قيم المدخلات أي يجب أن تتحقق المعادلة التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{W}_j + \hat{W} \qquad (15,2,5)$$

وبالانتقال الى مفهوم المعاملات الفنية سنبحث عن مضمونة هـــذه المعامـــلات .

■ المعاملات الفنية للنفقـــات : هي معاملات تعبر عن قيمة منتجات القطاع i التي تلزم لانتاج ماقيمته وحدة نقدية واحدة من منتجـات القطاع j وذلك بفرض أن المستوى التقني ومعدل الاسعار لايتغيـــران خلال الفترة المعينة .

من التعريف نجد أنه لو رمزنا لقيمة منتجات القطاع i التي تلـزم

لانتاج ما قيمته وحدة نقدية واحدة من منتجات القطاع j بالرمز b_{ij} لوجدنا أن :

$$b_{ij} = \frac{v_{ij}}{W_j} \qquad (16,2,5)$$

وبالتعويض في المعادلات (13, 2,5) نحصل على المعادلات التالية .

$$W_1 = b_{11}W_1 + b_{12}W_2 + b_{13}W_3 + \ldots + b_{1n}W_n + v_1$$

$$W_2 = b_{21}W_1 + b_{22}W_2 + b_{23}W_3 + \ldots + b_{2n}W_n + v_2 \qquad (17,2,5)$$

$$W_3 = b_{31}W_1 + b_{32}W_2 + b_{33}W_3 + \ldots + b_{3n}W_n + v_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$W_n = b_{n1}W_1 + b_{n2}W_2 + b_{n3}W_3 + \ldots + b_{nn}W_n + v_n$$

لترمز لمصفوفة معاملات النفقات المادية بالرمز B فيكون :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (18,2,5)$$

ثم نرمز بـ W و V للعمودين :

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad (19,2,5)$$

ونكتب المعادلات (5 ,2 ,17)بشكل مصفوفي فنجد أن:

$$W = B.W + V \qquad (20,2,5)$$

ومنها نجد أن :

$$(I - B).W = V \qquad (21,2,5)$$

ومنها نجد أن قيمة المنتجات تساوي :

$$W = (I - B)^{-1}.V \qquad (22.2.5)$$

واذا رمزنا لعناصر المصفوفة $(I-B)^{-1}$ بالرموز B_{ij} فيكون لدينا :

$$(I-B)^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

ونحصل على العلاقة التالية :

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

وهي تعطينا جملة المعادلات التالية :

$$
\begin{aligned}
W_1 &= B_{11}V_1 + B_{12}V_2 + B_{13}V_3 + \ldots + B_{1n}V_n \\
W_2 &= B_{21}V_1 + B_{22}V_2 + B_{23}V_3 + \ldots + B_{2n}V_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W_n &= B_{n1}V_1 + B_{n2}V_2 + B_{n3}V_3 + \ldots + B_{nn}V_n
\end{aligned}
\qquad (23,2,5)
$$

وهذه المعادلات توضح أن قيم منتجات كل قطاع مرتبطة بقيم النـــاتج النهائي في كل القطاعات . وان أي تغير في أحدى هذه القيم يـــؤدي الى تغير في قيم جميع المنتجات وفق هذه المعادلات . وان المعـــاملات B_{ij} تسمى (معاملات النفقات الكلية) وان المصفوفة $(I - B)^{-1}$ تسمى مصفوفة معاملات النفقات الكلية .

وان للمعاملات B_{ij} مفهوما اقتصاديا محددا. فالمعامـــــل B_j يساوي قيمة منتجات القطاع i اللازمة لانتاج ماقيمته واحده نقديـــه من منتجات الاستهلاك النهائي في القطاع j .

ملاحظـــه :

ان لنموذج التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد السنـــد أهمية خاصة في التحليل الاقتصادي وذلك لأنه يسمح [illegible] بدقة [illegible] بين القطاعات في قطاع واحد ، مما يسهل عمليـــة التخطيط و [illegible] الموازنات الانتاجيـــــه .

مثـــال(5 – 2): أوجد أرقام الخطة للقطاعات الأربعة التي من شأنها تحقيق منتوجا نهائيا قيمته كمايلي:

القطـــــــاع	قيمة المنتجات النهائية بملايين الليـــرات
الزراعـــــــة	150
الصناعة الثقيلة	350
الصناعة الخفيفة	80
الخدمـــــــات	70
المجمـــــوع	650

علما بأن جدول العلاقات القطاعية بدلالة قيم المواد المنتجة كان في العام الماضي كمايلي (بملايين الليرات):

	القطـــاع	1	2	3	4	قيمة المنتجات النهائية V_i	مجموع المخرجات W_i
1	الخدمـات	20	25	15	80	60	200
2	الزراعـــة	0	25	0	120	105	250
3	الصناعـــة الخفيفـــة	0	25	45	40	40	150
4	الصناعـــة الثقيلـــة	0	0	0	80	320	400
Σ		20	75	60	320	525	1000

الحـــــل : نعلم أن أرقام الخطة المطلوبة تعطى من المعادلة :

$$W = (I - B)^{-1}.V$$

وسنستفيد من المعطيات الواردة في جدول العلاقات القطاعية السابـــــق لحساب المصفوفة B مصفوفة المعاملات الفنية للنفقات وذلك بفـــرض أن تقنيات العمل ومستويات الاسعار لم تتغير خلال هذه المده ،واعتمادا على العلاقة :

$$b_{ij} = \frac{v_{ij}}{W_j}$$

نجد أن :

$b_{11} = \frac{20}{200} = 0,1$ $\quad b_{12} = \frac{25}{250} = 0,1$ $\quad b_{13} = \frac{15}{150} = 0,1$ $\quad b_{14} = \frac{80}{400} = 0,2$

$b_{21} = 0$ $\quad b_{22} = \frac{25}{250} = 0,1$ $\quad b_{23} = 0$ $\quad b_{24} = \frac{120}{400} = 0,3$

$b_{31} = 0$ $\quad b_{32} = \frac{25}{250} = 0,1$ $\quad b_{33} = \frac{45}{150} = 0,3$ $\quad b_{34} = \frac{40}{400} = 0,1$

$b_{41} = 0$ $\quad b_{42} = 0$ $\quad b_{43} = 0$ $\quad b_{44} = \frac{80}{400} = 0,2$

وهكذا نجد أن مصفوفة المعاملات الفنية للنفقات B تساوي :

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن المصفوفة (I - B) تساوي :

$$(I - B) = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & 0,9 & 0 & -0,3 \\ 0 & -0,1 & 0,7 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

وأن مقلوبها $(I - B)^{-1}$ يساوي :

$$(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,111 & 0,141 & 0,159 & 0,212 \\ 0 & 1,111 & 0 & 0,417 \\ 0 & 0,159 & 1,429 & 0,238 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{bmatrix}$$

ولايجاد أرقام الخطة الجديدة W نطبق العلاقة :

$$W = (I - B)^{-1}.V$$

حيث ان V هو عمود قيم منحات الاستهلاك النهائي مرتبة مع خديد بما يتوافق مع ترتيبها في الجدول السابق ويدل بعد أن

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,111 & 0,141 & 0,159 & 0,212 \\ 0 & 1,111 & 0 & 0,417 \\ 0 & 0,159 & 1,429 & 0,238 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 70 \\ 150 \\ 80 \\ 350 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185,84 \\ 312,6 \\ 221,47 \\ 437,5 \end{bmatrix}$$

وهو عمود أرقام الخطة المطلوبه للقطاعات الاربعه والتي تبلغ قيمتها الاجماليه (1157,41)مليون ليره بدلا من (1100) مليون ليره في العام الماضي . وهي تمثل قيمة الناتج الاجمالي الاجمالي .

III ـ نموذج تحديد اجمالي نفقات العمـــل :

من المعروف أن كميه أو نفقات العمل اللازمه لانتـــــاج المنتجات المختلفة تتألف من نوعين هما العمل الحي . والعمـــل المتجسد ، والعمل الحي ينقسم الى قسمين هما

ـ نفقات العمل الحي المنتج . وهو الذي يتدخل مباشره على الانتاج ضمن عملية الانتاج المادي (كجهود العمال والحرفيين والفلاحين . الخ)

ـ نفقات العمل الحي غير المنتج وهو الذي يتدخل بشكل غير مباشر على

الانتاج ويمارس من خارج عملية الانتاج المادي (كجهود الموظفين في الادارة والتعليم والطب ... الخ).

ومع ان العمل الحي المنتج هو المولد الوحيد للمنتجات المادية المختلفة ،ولكنه لايمكنه الاستغناء عن العمل الحي غير المنتج، اذ لايمكن تحقيق أو انجاز أية عملية انتاجية بدون جهاز اداري أوتعليمي أو طبي ...الخ.

وان ايجاد علاقة تد[illegible] هذين العملين/تحدد تطور قوى الانتاج بحيث لايطغى أحدهما على الآخر،يعتبر أمرا في غاية الاهمية.

- العمل المتجسد : وهو عبارة عن مقدار العمل الحي ، الذي بذل على الانتاج المادي في مراحل الانتاج السابقة والذي تجسد على شكل معين وان هذا العمل يظهر على ثلاثة أشكال هي :

- شكل وسائل الانتاج التي تستخدم في عمليات الانتاج .
- شكل وسائل الاستهلاك الوسيط التي تستخدم في عمليات اعادة الانتاج .
- شكل وسائل الاستهلاك النهائي التي تستخدم في الاستهلاك مباشرة .

[illegible]

فاننا نجد أن:

$$L_j = u_j + K_j \qquad (1,3,5)$$

اذن نفقات العمل الحي تضاف الى نفقات العمل المتجسد لتعطيـــــا قيمة جديدة للمنتوج الاجتماعي .

لذلك فان نفقات العمل الحي تسمى بالقيمه المضافة على القيمـــــة السابقة ونعرفها على الشكل التالي :

* القيمة المضافة : هي قيمة المنتجات أو الخدمات في القطـــاع j مطروحا منها قيمة العمل المتجسد خلال العمليات السابقة ونعبـــر عن ذلك بالعلاقـــة :

$$K_j = L_j - u_j \qquad (2,3,5)$$

ويمكننا النظر الى القيمة المضافة على أنها تعادل قيمه مقـــدار ماينفق ومايستهلك في عملية الانتاج ، اذن نجد أن.

القيمة المضافة = الاجور+الايجارات + الضرائب + الارباح + الفوائد + الاهتلاك ـ الاعانات .

* الاهتـــــلاك : هو مقدار مايستهلك أو مايندثر من قيمه وسائـــل الانتاج خلال عملية الانتاج.

* صافي القيمة المضافة : هو القيمه المضافه مطروحا منها الاهتـــــلاك أو بتعبير آخر فان .

صافي القيمة المضافه = الأجور+الايجارات + الضرائب + الارباح + الفوائد ـ الاعانات .

لنرمز لمقدار نفقات العمل المتجسد في القطاع i واللازم للقطاع j لانتاج واحدة من منتجاته بالرمز ℓ_{ij} ولنضع النتائج في جـــــدول كالتالي :

جدول رقم(5 - 3) جدول نفقات العمـــــــــــــل

	القطاعات j / i	المخرجات 1	2	3	...	n	منتجات الاستهلاك النهائي
المدخلات	1	ℓ_{11}	ℓ_{12}	ℓ_{13}	...	ℓ_{1n}	q_1
	2	ℓ_{21}	ℓ_{22}	ℓ_{23}	...	ℓ_{2n}	q_2
	3	ℓ_{31}	ℓ_{32}	ℓ_{33}	...	ℓ_{3n}	q_3
	⋮	....	....	....	....	....	⋮
	n	ℓ_{n1}	ℓ_{n2}	ℓ_{n3}	...	ℓ_{nn}	q_n
	نفقات العمل المتجسد	U_1	[illegible]	U_3	...	U_n	
	نفقات العمل الحي	V_1	[illegible]	[illegible]	...	V_n	
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	

من الواضح أن مقدار العمل المتجسد المصدر من جميع القطاعات الى

القطاع j يساوي U_j ويساوي مجموع عناصر العمود j ، أي أن:

$$U_j = \ell_{1j} + \ell_{2j} + \ell_{3j} +...+ \ell_{nj} \quad (j:1,2,3...n)$$

وبادخال مفعوم المعاملات الفنية لنفقات العمل المتجسد المتبادل بين القطاعات ، نجد أن المعامل الفني a_{ij} للعمل المتجسد المصدر من القطاع i الى القطاع j يساوي :

$$a_{ij} = \frac{\ell_{ij}}{L_j}$$

اي أن :

$$\ell_{ij} = a_{ij} \cdot L_j$$

وبتعويض ذلك في المعادلة السابقة نجد أن:

$$U_j = a_{1j}L_1 + a_{2j}L_2 + a_{3j}L_3 +...+ a_{nj}L_n$$

وبملاحظة المعادلة (1, 3, 5) نجد أن:

$$L_j = U_j + K_j$$

وبتعويض U_j نحصل على جملة المعادلات التالية :

$$L_1 = a_{11}L_1 + a_{21}L_2 + a_{31}L_3 +...+ a_{n1}L_n + K_1$$

$$L_2 = a_{12}L_1 + a_{22}L_2 + a_{32}L_3 +...+ a_{n2}L_n + K_2$$

(3,3,5)

$$L_3 = a_{13}L_1 + a_{23}L_2 + a_{33}L_3 +...+ a_{n3}L_n + K_3$$

.....

$$L_n = a_{1n}L_1 + a_{2n}L_2 + a_{3n}L_3 +...+ a_{nn}L_n + K_n$$

وبملاحظة أن أمثال L_i ماهي الأ منقول المصفوفة A وبادخال الرموز

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$$

فاننا نحصل على المعادلة المصفوفية التالية :

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \qquad (4,3,5)$$

والتي نكتبها على الشكل التالي :

$$L = \hat{A} L + K$$

$$(I - \hat{A}).L = K \qquad (5,3,5)$$

$$L = (I - \hat{A})^{-1}.K$$

وهكذا نجد أن شعاع العمل الاجتماعي اللازم لانتاج واحدة من منتجات

القطاعات المختلفة يعطى بواسطه جداء المصفوفة $(I - \hat{A})^{-1}$ في شعاع العمل الحي K .

ويمكننا متابعة المناقشة للحصول على اجمالي العمل الاجتماعي اللازم لانجاز الخطط القطاعية ولذلك نفترض أن المنتجات المخططة للاستهلاك النهائي هي :

$$q_1 \ , \ q_2 \ , \ q_3 \ , \cdots \ q_n$$

وبما أن L_j هو مقدار العمل الاجتماعي اللازم لانتاج واحدة من منتجات القطاع j فان $L_j \ q_j$ هو مقدار العمل الاجتماعي اللازم لتحقيق خطة القطاع j وبذلك نجد أن اجمالي العمل T اللازم لتحقيق الخطط القطاعية بكاملها يساوي :

$$T = \sum_{j=1}^{n} L_j \ q_j \qquad (6,3,5)$$

وهكذا يمكننا حساب مايلزم من القوى العاملة اذا علمنا شعاع منتجات الاستهلاك النهائي q وشعاع العمل الحي K وكذلك مصفوفة المعاملات الفنية A (أو $\hat{A}$) وذلك لأن L مرتبط معهما بالعلاقة (5, 3, 5).

مثال (5 – 4) : ماهو اجمالي العمل الاجتماعي اللازم لثلاثة قطاعات لتنفيذ خطة المنتجات النهائية التالية :

$$q_1 = 300 \quad , \quad q_2 = 200 \quad , \quad q_3 = 100$$

اذا علمت أن مصفوفة المعاملات الفنية للعمل هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

وأن العمل الحي اللازم (انسان / يوم) لانتاج واحدة من منتجـــات هذه القطاعات يساوي :

$$K_1 = 50 \qquad K_2 = 40 \qquad K_3 = 60$$

الحـــل : نعلم أن العمل الاجتماعي اللازم لانتاج واحدة المنتجـــات يعطى من خلال العلاقة التالية :

$$\bar{L} = (I - \grave{A})^{-1}.K$$

لذلك نقوم بحساب $(I - \grave{A})^{-1}$ فنجدأن:

$$\grave{A} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$(I - \grave{A}) = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

لايجاد مقلوب $(I - \grave{A})$ نبحث عن قيمة معينها فنجد أن:

$$|I - \hat{A}| = 0,172 \neq o$$

$$(I - \hat{A})' = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,6 & -0,2 \\ -0,3 & -0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$I-\hat{A})^{-1} = \frac{1}{0,172}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0,1 & 0,6 \\ -0,3 & -0,1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,3 & 0,5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,3 & -0,1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0,3 & -0,1 \\ 0,6 & -0,2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,8 & -0,3 \\ 0,1 & 0,6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(I-\hat{A})^{-1} = \frac{1}{0,172}\begin{bmatrix} 0,28 & 0,11 & 0,19 \\ 0,16 & 0,37 & 0,17 \\ 0,12 & 0,17 & 0,45 \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{1}{0,172}\begin{bmatrix} 0,28 & 0,11 & 0,19 \\ 0,16 & 0,37 & 0,17 \\ 0,12 & 0,17 & 0,45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173,26 \\ 191,86 \\ 231,39 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن اجمالي العمل الاجتماعي اللازم لتحقيق الخطة المطلوبة يساوي :

$$T = \Sigma L_j q_j = (173,26).(300) + (191,86).(200) + (231,39).(100)$$

$$T = 113488,37 \qquad \text{انسان /يوم}$$

IV – نموذج تحديد أسعار المنتجات :

يعتمد هذا النموذج على نفس المفاهيم السابقة وعلى بعض المفاهيم الاخرى كالاهتلاك ومقدار صافي القيمة المضافة (الاجور + الربح + الفوائد + الضرائب ...)

لذلك نفترض أن عدد القطاعات هو n وأن مقدار منتجات كل منهـــا يساوي : $Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \cdots Q_n$

وان أسعارها هي : $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \cdots P_n$

وان مصفوفة المعاملات الفنية للانتاج هي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وبالعودة الى الجدول رقم(5 - 1) والى العلاقة (5 ,2 ,2)التـــي

تعطينا $q_{ij} = a_{ij}Q_j$ يمكننا انشاء جدول التشابك القطاعي بدلالة الاسعار والكميات (القيمة = السعر x الكمية) وذلك بفرض أن كل قطاع ينتج منتجات متجانسة يمكن وضع سعر موحد أو معياري لمنتجات كل قطاع ، ولكن الاسعار مرتبطة بمقدار الاهتلاك وبمقدار صافي القيمة المضافة للانتاج لذلك نرمز بالرمز a_i لمقدار الاهتلاك المقابل لواحدة منتجات القطاع i ونرمز بـ d_i لمقدار صافي القيمة المضافة المقابل لواحدة منتجات القطاع i .

ثم نضع هذه المعلومات في الجدول التالي :

جدول رقم (5 , 4) جدول التشابك القطاعي بدلالة الأسعار (سعر المنتج).

اجمالي قيمة منتجات القطاع i	قيمة منتجات الاستهلاك النهائي	المخرجات					القطاعات	
		n	...	3	2	1		
Q_1P_1	q_1P_1	$a_{1n}Q_nP_1$	...	$a_{13}Q_3P_1$	$a_{12}Q_2P_1$	$a_{11}Q_1P_1$	1	المدخلات
Q_2P_2	q_2P_2	$a_{2n}Q_nP_2$	...	$a_{23}Q_3P_2$	$a_{22}Q_2P_2$	$a_{21}Q_1P_2$	2	
Q_3P_3	q_3P_3	$a_{nn}Q_nP_3$	...	$a_{33}Q_3P_3$	$a_{32}Q_2P_3$	$a_{31}Q_1P_3$	3	
.....	.....	...		...	...	...	...	
Q_nP_n	q_nP_n	$a_{nn}Q_nP_n$	...	$a_{n3}Q_3P_n$	$a_{n2}Q_2P_n$	$a_{n1}Q_1P_n$	n	
		Q_na_n	...	Q_3a_3	Q_2a_2	Q_1a_1		الاهتلاك
		Q_nd_n	...	Q_3d_3	Q_2d_2	Q_1d_1		صافي القيمة المضافة

وبملاحظة أن قيمة منتجات كل قطاع تساوي قيمة مدخلاته + الاهلاك + القيمة المضافة فيه اذن مجموع العمود j تساوي اجمالي قيمة منتجات القطاع j والتي تساوي $Q_j P_j$.

وباجراء الجمع نحصل على جملة المعادلات التالية :

$$a_{11}Q_1P_1 + a_{21}Q_1P_2 + a_{31}Q_1P_3 + \ldots + a_{n1}Q_1P_n + Q_1a_1 + Q_1d_1 = Q_1P_1$$

$$a_{12}Q_2P_1 + a_{22}Q_2P_2 + a_{32}Q_2P_3 + \ldots + a_{n2}Q_2P_n + Q_2a_2 + Q_2d_2 = Q_2P_2$$

$$a_{13}Q_3P_1 + a_{23}Q_3P_2 + a_{33}Q_3P_3 + \ldots + a_{n3}Q_3P_n + Q_3a_3 + Q_3d_3 = Q_3P_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}Q_nP_1 + a_{2n}Q_nP_2 + a_{3n}Q_nP_3 + \ldots + a_{nn}Q_nP_n + Q_na_n + Q_nd_n = Q_nP_n$$

وباختصار طرفي كل معادلة من هذه المعادلات على Q_i نحصل على المعادلات التالية :

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + a_{31}P_3 + \ldots + a_{n1}P_n + a_1 + d_1 = P_1$$

$$a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + \ldots + a_{n2}P_2 + a_2 + d_2 = P_2$$

(1,4,5)

$$a_{13}P_1 + a_{23}P_2 + a_{33}P_3 + \ldots + a_{n3}P_3 + a_3 + d_3 = P_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}P_1 + a_{2n}P_2 + a_{3n}P_3 + \ldots + a_{nn}P_n + a_n + d_n = P_n$$

ولكتابة هذه المعادلات بشكل مصفوفي نرمز لمصفوفة الامثال بـ A' وهي منقول المصفوفة A أي أن:

$$\grave{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ولعمود الاهتلاك بالرمز a ولعمود صافي الانتاج بـ d ولعمودالاسعار P :

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

وبذلك سأخذ المعادلات (1 , 4, 5) الشكل المصفوفي التالي :

$$\grave{A}.P + a + d = P$$

(2,4,5)

$$(I - \grave{A}).P = a + d$$

ومنها نجد أن :

$$P = (I - \grave{A})^{-1}(a + d) \qquad (3,4,5)$$

وهذه المعادلة تعطينا السعر الموافق لمنتجات كل قطاع.

واذا رمزنا لعناصرالمصفوفة $(I - \hat{A})^{-1}$ بالرمز C_{ij} يمكننا كتابة المعادلة (5 , 4 , 3)على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \cdots & C_{3n} \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 + d_1 \\ a_2 + d_2 \\ a_3 + d_3 \\ a_n + d_n \end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على جملة المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} P_1 &= C_{11}(a_1 + d_1) + C_{12}(a_2 + d_2) + \ldots + C_{1n}(a_n + d_n) \\ P_2 &= C_{21}(a_I + d_1) + C_{22}(a_2 + d_2) + \ldots + C_{2n}(a_n + d_n) \\ P_3 &= C_{31}(a_1 + d_1) + C_{32}(a_2 + d_2) + \ldots + C_{3n}(a_n + d_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= C_{n1}(a_1 + d_1) + C_{n2}(a_2 + d_2) + \ldots + C_{nn}(a_n + d_n) \end{aligned} \qquad (5,4,5)$$

ومن هذه المعادلات يتضح لنا أن أسعار المواد المنتجة في كل قطاع ضمن ظروف التقنية الانتاجية المفروضة ، ترتبط بشكل مباشر مع مقدار الاهتلاك ومقدار صافي القيمة المضافة المقابلتين لواحدة الانتاج في القطاعات المختلفة ، واذا تغير أحد هذه الكميات (واحد منها على الاقل) أدى ذلك الى تغير أسعار المواد المنتجة في جميع القطاعات وفق المعادلات (5 , 4 , 5).

مثـــال (5 ـ 5) اذا كانت مصفوفة المعاملات الفنية لثلاثة قطاعـــات هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,0 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

وكان شعاعي الاستهلاك والقيمة المضافة يساويان :

$$a = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 80 \\ 85 \\ 100 \end{bmatrix}$$

فاحسب شعاع أسعار منتجات هذه القطاعات بفرض أن منتجات كل منهـــا متجانسة .

الحـــل : من المعادلة (3,4,5) نجد أن $P = (I - A)^{-1}(a + d)$

لذلك نقوم بحساب $(I - A)$ فنجد أن:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,4 \\ -0,3 & 1 & -0,3 \\ -0,4 & -0,2 & 0,9 \end{bmatrix}$$

ولحساب مقلوب هذه المصفوفة نتأكد من أنها نظامية فنحسب :

$$|I-A| = 1.1.(0,9)+(-0,5)(-0,3)(-0,4)+(-0,4)(-0,3)(-0,2)$$

$$-(-0,4)\,.\,2\,.\,(-0,4)-(-0,3)\,(-0,2)\,.\,1-(0,9)\,(-0,5)\,(-0,3)$$

$$|I - \dot{A}| = 0,461$$

ولحساب مقلوبها نحسب المصفوفة المساعدة لمصفوفتها ومنه أن :

$$(I-\dot{A})' = \begin{bmatrix} 1 & -0,3 & -0,4 \\ -0,5 & 1 & -0,2 \\ -0,4 & -0,3 & 0,9 \end{bmatrix}$$

وأن المصفوفة المساعدة لها هي

$$\widetilde{(I-\dot{A})} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,9 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} -0,5 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 \end{vmatrix}, & +\begin{vmatrix} -0,5 & 1 \\ -0,4 & -0,3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0,3 & -0,4 \\ -0,3 & 0,9 \end{vmatrix}, & +\begin{vmatrix} 1 & -0,4 \\ -0,4 & 0,9 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 1 & -0,3 \\ -0,4 & -0,3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -0,3 & -0,4 \\ 1 & -0,2 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 1 & -0,4 \\ -0,5 & -0,2 \end{vmatrix}, & +\begin{vmatrix} 1 & -0,3 \\ -0,5 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{(I-\dot{A})} = \begin{bmatrix} 0,84 & +0,53 & +0,55 \\ +0,39 & +0,74 & +0,42 \\ +0,46 & +0,40 & +0,85 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن :

$$\widetilde{(I-\dot{A})}^{-1} = \frac{1}{0,461} \begin{bmatrix} 0,84 & 0,53 & 0,55 \\ 0,39 & 0,74 & 0,42 \\ 0,46 & 0,40 & 0,85 \end{bmatrix}$$

أما شعاع المجموع (a + d) فيساوي:

$$(a + d) = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن شعاع الاسعار يساوي :

$$P = \frac{1}{0,461} \begin{bmatrix} 0,84 & 0,53 & 0,55 \\ 0,39 & 0,74 & 0,42 \\ 0,46 & 0,40 & 0,85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{0,461} \begin{bmatrix} 203 \\ 163,40 \\ 188 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440,347 \\ 354,447 \\ 407,809 \end{bmatrix}$$

V ـ نموذج توازن الانتاج وتوزيع الناتج الاجتماعي الاجمالي بدلالة قيم المنتجات :

لنفترض كالسابق أن الانتاج المادي يتألف من n قطاعا وأن الموارد الانتاجية لكل قطاع i تتألف من قيمة منتجاته W_i وقيمة المنتجات المستوردة له M_i. وان منتجات الاستهلاك النهائي يمكن أن تستخدم أوتوزع بأشكال مختلفة ، وأن حصةً ما من المنتجات النهائية يمكن أن تخصص للتصدير وحصةٌ أخرى للاستثمار وحصةٌ ثالثة للاستهلاك العام والخاص . ولنرمز بـ E_i لقيمة جزء المنتجات النهائية المخصص للتصدير ولنرمز بـ I_i لقيمة جزء المنتجات النهائية المخصص للاستثمار . ولنرمز بـ S_i لقيمة جزء المنتجات النهائية المخصص

للاستهلاك العام والخاص وذلك بالنسبة للقطاع i ، انطلاقا مما سبق وبالاستفادة من الجدولين رقم(5 - 2) و(5 - 4) يمكننا أن نرتب المؤشرات السابقة في جدول كالتالي :

جدول رقم(5 - 5): جدول توازن الانتاج وتوزيع الناتج الاجمالي:

القطاعات	قيمة المنتجات	قيمة المستوردات	قيمة المخرجات النهائية				قيمة المنتجات النهائية V_i		
			1	2	...	n	الاستهلاك S_i	الاستثمار أو التكوين الرأسمالي I_i	التصدير E_i
1	W_1	M_1	v_{11}	v_{12}	...	v_{1n}	S_1	I_1	E_1
2	W_2	M_2	v_{21}	v_{22}	...	v_{2n}	S_2	I_2	E_2
3	W_3	M_3	v_{31}	v_{32}	...	v_{3n}	S_3	I_3	E_3
n	W_n	M_n	v_{n1}	v_{n2}	...	v_{nn}	S_n	I_n	E_n
قيمة الاهتلاك			A_1	A_2	...	A_n			
صافي القيمة المضافة			D_1	D_2	...	D_n			
Σ	W	M	W_1	W_2	...	W_n	S	I	E

حيث رمزنا بـ $W = \sum_{j=1}^{n} W_j$ وبـ $M = \sum_{j=1}^{n} M_j$

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j \qquad S = \sum_{j=1}^{n} S_j \quad , \quad I = \sum_{j=1}^{n} I_j$$

مما تقدم واعتمادا على الجدول السابق نستخلص أن قيمة المنتجات النهائية V_i يجب أن تساوي مجموع عناصرها أي أن :

$$V_i = S_i + I_i + E_i \qquad (1,5,5)$$

كما نستخلص أن مجموع موارد القطاع i يجب أن يساوي مجموع مخرجاته ومنتجاته النهائية ، أي أن :

$$W_i + M_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} + S_i + I_i + E_i \qquad (2,5,5)$$

ومنها نحصل على أن :

$$\sum_{i=1}^{n} W_i + \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} + \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} E_i \qquad (3,5,5)$$

واذا أخذنا مجموع أعمدة المدخلات نجد أن مجموع عناصر كل عمود + الاهتلاك + صافي القيمة المضافة يساوي قيمة منتجات ذلك القطاع الذي يشير اليه العمود . اذن يكون لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ij} + A_j + D_j = W_j$$

وبأخذ مجموع الطرفين بالنسبة لـ j نجد أن:

$$\sum_{j=1}^{n} W_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_{ij} + \sum_{j=1}^{n} A_j + \sum_{j=1}^{n} D_j \qquad (5,5,5)$$

وبالاستفادة من الرموز السابقة نجد أن المعادلتين (5, 5, 3) و (5, 5, 5) تكتبان على الشكل التالي :

$$W + M = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} v_{ij} + S + I + E \qquad (6,5,5)$$

$$W = \sum \sum v_{ij} + A + D \qquad (7,5,5)$$

وبطرح المعادلة الثانية من الاولى نحصل على المعادلة التالية

$$M = S + I + E - A - D \qquad (8,5,5)$$

ومنها نحصل على معادلة التوازن التالية :

$$M + A + D = S + I + E \qquad (9,5,5)$$

وهذه المعادلة تشير الى شرط التوازن في الاقتصاد ، وهو يقتضي أن يتساوى مجموع قيم المستوردات والاهتلاك وصافي القيم المضافة مع مجموع قيم الاستهلاك والاستثمار والتصدير ، ولكن ضمن هذا الشرط يمكن توزيع عناصر كل طرف بأشكال مختلفة ، وتلعب كيفية توزيع عناصر الطرفين في العلاقة (5,5 , 9) دورا هاما في التخطيط لأنها تحدد التناسبات الاساسية ضمن الاقتصاد الوطني .

VI- الشكل العام لجدول المدخلات والمخرجات :

من النماذج السابقة يمكننا أن نصيغ الشكل العام لجدول المدخلات والمخرجات والذي يصلح لمختلف التطبيقات الاقتصادية ، وهو يعطى بدلالة قيم المنتجات (بسعر المنتج أو المستهلك) ، ويأخذ

الشكل العام الوارد في الجدول رقم(5 - 6)الواردلاحقا،في هـــــذا الجدول تم تقسيم المخرجات الى مخرجات وسيطية ومخرجات نهائية .

■ **المخرجات الوسيطية** : وتشمل جميع المواد الانتاجية نصف المصنعـه التي تستخدم في عمليات تجديد الانتاج في القطاعات المختلفة .

■ **المخرجات النهائية** : وتشمل المنتجات المخصصة للاستهلاك النهائـــي وهي تتفرع الـــــى :

- مخرجاتللاستهلاك الحكومي : ويشمل ماتستهلكه الدولة والقطاع العام من المنتجات النهائية .
- مخرجاتللاستهلاك الخاص : ويشمل مايستهلكه القطاع الخاص مـــــن المنتجات النهائية .
- مخرجات للتكوين الرأسمالي : هو جزء من المنتجات النهائيـــة الذي يوظف لانشاء مؤسسات جديدة أو لاقامة تجهيزات بديلة أو لاصـــــلاح ماأهتلك من الاصول الثابتة ، أو بالاحرى كل مايساهم في توســـع عمليات الانتاج .
- مخرجات للمخزون : وهو جزء من المنتجات النهائية يخصص لزيـــادة المخزون .
- مخرجات للصادرات : وهو جزء من المنتجات النهائية، يخصص للتصدير الى البلدان الاخرى .

ويمكن أن نمثل الجدول العام للمدخلات والمخرجات .

- مخرجات أخـــرى : وهي مقدار مايخصص لتغطية الكوارث الطبيعيـــة المفاجئة كالحرائق والفيـضانات والزلازل وغيرها .

- الفوارق الاحصائية : وهي قيمة مايلزم منحات القطاع i التحقـــــق التوازن بين العرض والطلب المتعلقين بمنتجات ذلك القطاع.

ويتم تقسيم المدخلات الى مدخلات وسيطية ومدخلات أولية :

* المدخلات الوسيطية : وتشمل جميع المواد نصف المصنعة التـــــي يستخدمها القطاع في عمليات الانتاج والتي تدخل اليه مـــــن القطاعات الاخرى .

* المدخلات الاولية : وهي تشمل البنود التالية :

- الواردات : قيمة المواد المستوردة لكل قطاع ولكل جهة من الجهات الواردة في المخرجات النهائية .

- الاهتـــلاك : وهو قيمة ماينذثر من الاصول الثابتة خلال عمليـــة الانتاج .

- صافي القيمة المضافة : وهو يشمل الاجور والايجارات والضرائـــب والفوائد والارباح - الاعانات .

وهكذا يتم تقسيم الجدول الى أربعة أرباع هي :

الربع الاول : ويضم المدخلات والمخرجات الوسيطية .

الربع الثاني :ويضـم المخرجات النهائية

جدول (5 - 5) الشكل العام لجدول المدخرات والمصطلحات المستخدمة في حساب السواد المستقل

الربع الثالث : ويضم المدخلات الأولية التي تصرف على الانتاج .

الربع الرابع :.ويضم المدخلات الاولية التي تصرف خارج عمليات الانتاج .

وأخيرا نشير الى أن جدول المدخلات والمخرجات يمكن أن يكون أكثر تفصيلا من الجدول السابق وذلك عندما نجزء القطاعات الى فروعها المختلفة . ولايوجد أي عائق لانشاء مثل تلك الجداول الموسّعة غير عدم توفر المعلومات اذ انه لامعنى لوجود فرع معين في الجدول بدون معلومات دقيقة وكاملة عنه .

كما يمكننا تجميع بنود أو قطاعات جدول المدخلات والمخرجات لانشاء جدول مبسط تظهر فيه القطاعات الرئيسية والمدخلات الاولية الرئيسية والمخرجات النهائية ، فيمكننا مثلا دمج قطاعي التجارة والخدمات وقطاعي الصناعة والبناء ، كل في قطاع واحد، كما يمكننا دمج كافه بنود صافي القيمة المضافة تحت بند واحد وهو صافي القيمةالمضافة .... الخ .

وان دمج أي بندين في الجدول يقتضي جمع المعلومات الرقمية المقابلة لهما في رقم واحد.

فاذارغبنا بدمج الاستهلاكالعامو الاستهلاك الخاص تحت بند واحد نسميه الاستهلاك وجب علينا أن نجمع جميع الأرقام التي في هذين العمودين ووضعها في العمود الجديد.

وكمثال تطبيقي على ذلك نورد جدولين أحدهما موسع والآخر مجمع عن مدخلات ومخرجات ايرلندا لعام 1960* في الجدول(5-8) نلاحظ أنه تم دمج القطاعات 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 بقطاع واحد سمي قطاع الصناعة وأرقامه هي حصيلة جمع أرقام القطاعات السبعة السابقة ، فمثلا نجد أن قيمة المخرجات الوسيطية من هذه القطاعات الى قطاع الزراعة تساوي .

13,86+0,496+0,400+2,942+9,314+0,150+0,547=27,709

كما أن قيمة مخرجات هذه القطاعات الى نفسها تساوي مجموع الارقام الواقعة في الربع الناشئ عن تقاطعها وتساوي حسب ما هو في الجدول المجمع 98,036 .

كذلك نجد أن قيمة واردات قطاع الصناعة في الجدول رقم (5 - 8) هي مجموع قيم واردات القطاعات المندمجة فيه وتساوي :

15,418+6,168+21,329+27,203+39,723+6,227+3,774=119,842

أما اجمالي قيمة صادرات قطاع الصناعة فيساوي قيم صادرات القطاعات فيه ويساوي:

43,094+12,711+21,000+7,750+18,664+0,059 = 103,278

ونجد نفس الأمر بالنسبة الى البنود الاخرى.

---

* - ان هذين الجدولين وردا في كتاب (الاقتصاد الرياضي) للدكتور أحمد دهقان، الطبعة الثانية 1983 - جامعة حلب ، وهما مأخوذان عن المصدر المدون على الجدول نفسه.

جدول رقم (5-7) جدول المدخلات والمخرجات لايرلندا عام 1960 (بملايين الجنيهات)

المدخلات \ المخرجات		المخرجات الوسيطة										المخرجات النهائية					
		الزراعة والغابات والأسماك 1	صناعة الأغذية 2	المشروبات والدخان 3	النسيج 4	الملابس والمنسوجات 5	الصناعات الأخرى والتعدين 6	البناء 7	الكهرباء والغاز والماء 8	الخدمات 9	مجموع المخرجات الوسيطة 10	الاستهلاك النهائي الخاص 11	الاستهلاك النهائي الحكومي 12	التكوين الرأسمالي 13	الصادرات 14	مجموع المخرجات النهائي 15	المخرجات الاجمالية 16
المدخلات الوسيطة	1 الزراعة والغابات والأسماك	2.180	77.450	3.104	0.550	–	1.033	–	–	1.343	85.010	62.111	0.803	2.671	49.750	115.335	200.345
	2 صناعة الأغذية	13.860	19.345	0.200	–	–	1.995	–	–	0.105	35.505	78.712	-0.014	-1.009	43.052	120.811	156.316
	3 المشروبات والدخان	0.495	0.234	0.3	–	–	0.119	–	–	0.100	1.027	55.834	–	0.010	12.711	68.585	71.612
	4 النسيج	0.450	1.047	0.017	13.015	–	0.979	–	–	1.078	16.526	25.841	–	1.595	21.000	48.836	65.362
	5 الملابس والمنسوجات	2.942	0.505	0.0	0.120	2.537	0.779	4.545	1.581	4.561	18.065	16.453	0.250	13.561	7.750	38.014	56.079
	6 الصناعات الأخرى والتعدين	9.311	6.833	1.737	3.397	2.106	9.537	12.261	3.022	10.212	58.490	16.628	0.666	2.755	18.661	38.733	97.223
	7 البناء	0.150	0.466	0.215	0.150	0.127	0.410	2.944	0.158	6.352	11.110	2.036	13.305	40.322	–	55.663	66.773
	8 الكهرباء والغاز والماء	0.567	1.129	0.157	0.611	0.613	1.684	0.355	0.161	3.019	8.479	11.582	0.566	3.668	0.059	16.275	24.754
	9 الخدمات	11.020	13.678	0.832	5.200	2.819	3.925	4.590	0.215	19.487	62.749	139.195	50.619	6.325	42.050	238.562	301.311
	10 مجموع المدخلات الوسيطة	40.903	120.186	6.673	23.173	8.202	21.691	21.695	5.573	46.087	298.961	408.392	66.473	70.831	195.118	720.814	1039.775
المدخلات الأولية	11 الواردات	15.291	15.418	5.158	21.329	27.203	39.723	6.227	3.774	7.855	142.991	62.295	1.764	23.583	3.345	93.387	236.378
	12 الضرائب غير المباشرة	11.559	1.529	12.550	0.303	2.800	0.873	0.726	0.665	5.200	70.016	31.681	–	0.866	3.175	35.945	105.961
	13 ناقصا الاعانات	-7.317	-3.337	–	-0.100	-0.169	-2.262	–	–	-6.701	-19.866	–	–	–	–	–	-19.866
	14 الاجور والمرتبات والارباح الخ	133.600	20.509	12.049	19.557	17.023	34.198	34.325	12.022	229.570	513.573	–	–	–	33.512	33.512	547.085
	15 مخصص الاهتلاك	6.320	1.900	1.800	1.100	1.000	3.000	0.800	2.900	15.300	34.100	–	2.500	-1.100	–	1.400	35.500
	16 مجموع المدخلات الأولية	159.435	36.130	31.557	42.189	47.377	75.532	42.078	19.161	255.424	740.814	94.179	4.264	23.769	40.632	164.644	905.458
	17 المدخلات الاجمالية	200.345	156.316	71.612	65.362	56.079	97.223	66.773	24.754	301.511	1039.775	502.571	70.737	96.500	235.550	905.458	1945.233

( ) المصدر هو :

O'Connor R. , Henry E . W . Input - Output Analysis and Its Applications . Charles Griffin and Company Ltd , London , 1975 .

" P . A

VII ـ نموذج الخطة الاقتصادية والفنية للمنشأة الصناعية :

لنفترض أن المنشأة تتألف من n قسما أو فرعا ينتج كل منها منتجا متجانسا ان الخطة الاقتصادية والفنية للمؤسسة الصناعية تعتمد على منظومة من المعايير الاقتصادية الفنية وتتألف من :

١ ـ معايير نفقات المنتجات الذاتية في الاقسام المختلفة، ولنرمز لهذه المعايير بنفس رمز المعاملات الفنية وهو A حيث :

$$A = [a_{ij}] \qquad (i,j=1,2,3 \ldots n)$$

حيث ترمز i الى نوع المنتج و j الى القسم و n الى عدد الاقسام.

٢ ـ معايير نفقات المواد الاولية (المواد الاساسية والمحروقات والكهرباء) على واحدة من منتجات كل من الاقسام المختلفة، ونرمز لمصفوفة هذه المعايير بالرمز B حيث

$$B = [b_{kj}]$$

حيث k ترمز الى نوع المادة الاولية و j الى القسم وحيث :

$$(i = 1,2,3 \ldots m) \quad , \quad (j = 1,2,3 \ldots n)$$

وان m عدد المواد الداخلة في الانتاج .

٣ ـ معايير زمن عمل الآلات والاجهزة لانتاج واحدة من منتجات كل من الاقسام المختلفة ، ونرمز لمصفوفة هذه المعايير بالرمز C حيث C :

$$C = [C_{hj}]$$

وحيث h ترمز لنوع الآلة و j الى القسم وحيث $(h = 1,2,3 \ldots r)$ و r هو عدد الآلات المستعملة .

جدول رقم (5 ـ 8) جدول المدخلات والمخرجات المكتف لايرلندا عام 1960 (بملايين الجنيهات)

المدخلات / المخرجات			المخرجات الوسيطة				المخرجات النهائية					المخرجات الاجمالية
			الزراعة	الصناعة	الخدمات	مجموع المخرجات الوسيطة	الاستهلاك العائلي	الاستهلاك الحكومي	التكوين الرأسمالي	التصدير	مجموع المخرجات النهائية	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المدخلات الوسيطة	1	الزراعة	2.180	81.687	1.143	85.010	62.111	0.803	2.671	49.750	115.335	200.345
	2	الصناعة	27.709	98.036	25.457	151.202	207.086	14.821	61.732	103.278	386.917	538.119
	3	الخدمات	11.020	32.242	19.487	62.749	139.195	50.849	6.428	42.090	238.562	301.311
	4	مجموع المدخلات الوسيطة	40.909	211.965	46.087	298.961	408.392	66.473	70.831	195.118	740.814	1039.775
المدخلات الاولية	5	الواردات	15.294	119.842	7.855	142.991	62.295	1.764	25.983	3.345	93.387	236.378
	6	الضرائب غير المباشرة	11.559	49.257	9.200	70.016	31.884	—	0.886	3.175	35.945	105.961
	7	ناقصا الاعانات	-7.317	-5.848	- 6.701	-19.866	—	—	—	—	—	-19.866
	8	الاجور والرواتب والارباح الخ	133.600	150.403	229.570	513.573	—	—	—	33.912	33.912	547.485
	9	مخصص الاهتلاك	6.300	12.500	15.300	34.100	—	2.500	-1.100	—	1.400	35.500
	10	مجمل المدخلات الاولية	159.436	326.154	255.224	740.814	94.179	4.264	25.769	40.432	164.644	905.458
	11	المدخلات الاجمالية	200.345	538.119	301.311	1039.775	502.571	70.737	96.600	235.550	905.458	1945.233

٤- معايير زمن عمل فئات العمال المختلفة اللازم لانتاج واحدة من منتجات كل من الاقسام المختلفة ، ونرمز لمصفوفة هذه المعايير بالرمز D حيث ان :

$$D = [d_{ej}]$$

حيث (e = 1,2,...s) وان S هو عدد فئات العمال ، ولنرمز بالرمز Q_i لاجمالي منتجات القسم i وبالرمز q_i لجزء هذه المنتجات المخصص للتسويق التجاري ، وبما أن نفقات منتجات القسم i لانتاج واحدة من منتجات القسم j محددة من خلال المصفوفة A .

اذن يمكننا أن نحصل على جملة المعادلات التالية (انظر العلاقات (1,3,5) في هذا الفصل).

$$\begin{aligned}
Q_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{13}Q_3 + \ldots + a_{1n}Q_n + q_1 \\
Q_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + a_{23}Q_3 + \ldots + a_{2n}Q_n + q_2 \qquad (1,7,5) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_n &= a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + a_{n3}Q_3 + \ldots + a_{nn}Q_n + q_n
\end{aligned}$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل المصفوفي التالي :

$$Q = AQ + q \qquad (2,7,5)$$

وذلك باستخدام نفس الرموز المستخدمة سابقا في الفقرة II .

ومنها نجد أن :

(3,7,5)

$$Q = (I - A)^{-1}.q$$

وبما أن المصفوفة q وهي مصفوفة المنتجات المخصصة للتسويق التجاري تكون معلومة من خلال المهمات الملقاة على المنشأة ، فان مصفوفة الانتاج Q تصبح سهلة الحساب من جداء مصفوفة المعاملات الكلية $(I - A)^{-1}$ بمصفوفة المنتجات التجارية q .

وبطريقة مشابهة نجد أنه لو رمزنا لمقادير المواد الاولية المستخدمة في الانتاج بالرمز M_k حيث (k = 1,2,...m) فاننا نجد من مصفوفة معايير نفقات المواد الاولية B أن

$$M_1 = b_{11}Q_1 + b_{12}Q_2 +...+ b_{1n}Q_n$$

$$M_2 = b_{21}Q_1 + b_{22}Q_2 +...+ b_{2n}Q_n \qquad (4,7,5)$$

$$.....$$

$$M_m = b_{m1}Q_1 + b_{m2}Q_2 +...+ b_{mn}Q_n$$

وهي تكتب على الشكل المصفوفي التالي :

$$M = B.Q \qquad (5,7,5)$$

حيث M هو عمود مقادير المواد الاولية اللازمة لعمليات الانتاج.

وبتعويض Q من العلاقة (5 , 7 , 3) نجد أن :

$$M = B(I - A)^{-1}.q \qquad (6,7,5)$$

وهكذا يمكننا حساب مايلزمنا من مواد أولية اذا علمنا شعاع المنتجات التجارية q والمصفوفتين $(I-A)^{-1}$ و B.ونسمي الجداء

$B(I - A)^{-1}$ بمصفوفة النفقات الكلية للمواد الاولية.

واذا رمزنا بـ U_h لزمن عمل الآلة h اللازم لتحقيق المنتجات المطلوبة وحيث($h = 1,2,3,\ldots r$)، فاننا نجد من مصفوفة معايير زمن عمل الآلات C أن :

$$U_1 = C_{11}Q_1 + C_{12}Q_2 + \ldots + C_{1n}Q_n$$

$$U_2 = C_{21}Q_1 + C_{22}Q_2 + \ldots + C_{2n}Q_n \qquad (7,7,5)$$

$$U_r = C_{r1}Q_1 + C_{r2}Q_2 + \ldots + C_{rn}Q_n$$

والتي نكتبها على الشكل المصفوفي التالي :

$$U = C.Q = C.(I - A)^{-1}.q \qquad (8,7,5)$$

ونسمي المصفوفة $C.(I - A)^{-1}$ بمصفوفة الاستخدام الكلي للآلات والاجهزة .من العلاقة (8, 7, 5) يمكننا أن نحسب مايلزمنا من زمن عمل للآلات والاجهزة لتحقيق مهمة تأمين المنتجات التجارية q .

وبطريقة مشابهة نحصل بالنسبة لزمن عمل العمال ، فاذا رمزنا بـ Z لزمن عمل العمال حسب فئاتهم فاننا نجد أن :

$$Z = D.Q = D(I - A)^{-1}.q \qquad (9,7,5)$$

ونسمى المصفوفه $D(I - A)^{-1}$ بمصفوفة النفقات الكلية للقوى العاملة وهكذا نجد أنه يمكننا اعداد الخطط اللازمة لتحديد كمية الانتاج Q ولتأمين كمية المواد الاولية M ولاستغلال الآلات والاجهزة U وللاستفادة من القوى العاملة Z في سبيل تحقيق خطة المنتجات.

المخصصة للتسويق q .

مثـــال (5 – 6) : تتألف احدى المنشآت الاقتصادية من خمسة أقسام و ن منتجات كل قسم تستخدم في الاقسام الاخرى ، وان نشاطها الانتاجي مؤسس على جملة المعايير الاقتصادية المبينة في الجدول التالي :

اسم المؤشر	وحدة القياس	الاقسام 1	2	3	4	5	المصنوفة
I – الخدمات نصف المصنعة .							
نوع 1	M^3	0	1000	500	300	100	A
نوع 2	m	0	0	0,3	0,25	0,2	
نوع 3	m	0	0	0	0,75	0,5	
نوع 4	m	0	0	0	0	0,8	
نوع 5	m	0	0	0	0	0	
II – المواد الاولية							
مادة M_1	m	0	2	0	0	0	B
مادة M_2	K_q	0	1	0	0	0	
مادة M_3	m	0	0	0	0	0,1	
مادة M_4	KW.H	0,2	500	100	50	20	

III- العمـــل							
فئـــة 1	انسان/ساعة	0	3	2	3	7	D
فئـــة 2	انسان/ساعة	0,001	5	2	5	5	
فئـــة 3	انسان/ساعة	0	2	2	4	8	

ماهي خطة الانتاج واستهلاك المواد الاولية والعمل اللازمة لتحقيـــق خطة المنتجات المخصصة للتسويق q حسب الاقسام التالية :

$q_1 = 0$, $q_2 = 5000$, $q_3 = 15000$,

$q_4 = 30000$, $q_5 = 90000$

وذلك باعتبار أن القسم الاول هو قسم مساعد ولاينتج منتجات قابلـــة للتسويق .

الحـــل: من الجدول السابق نجد أن المصفوفة A هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 500 & 300 & 100 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,25 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وأن المصفوفة (I - A) هي:

$$(I-A)=\begin{bmatrix} 1 & -1000 & -500 & -300 & -100 \\ 0 & 1 & -0,3 & -0,25 & -0,2 \\ 0 & 0 & 1 & -0,75 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وان مقلوبه $(I-A)^{-1}$ يساوي :

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1000 & 800 & 1150 & 1620 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0,475 & 0,73 \\ 0 & 0 & 1 & 0,75 & 1,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن خطة الانتاج هـــــي :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1000 & 800 & 1150 & 1620 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0,475 & 0,73 \\ 0 & 0 & 1 & 0,75 & 1,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 5000 \\ 15000 \\ 30000 \\ 90000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 197300000 \\ 89450 \\ 136500 \\ 102000 \\ 90000 \end{bmatrix}$$

أما بالنسبة للقوى العاملة نجد أن المصفوفة D تساوي:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 & 7 \\ 0,001 & 5 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

وان مقدار مايلزمنا من القوى العاملة حسب فئاتها يساوي:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 & 7 \\ 0,001 & 5 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 197300000 \\ 89450 \\ 136500 \\ 102000 \\ 9000 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1477350 \\ 1877550 \\ 1579900 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن مستلزمات الانتاج من القوى العاملة حسب فئاتها تساوي:

مقدار المستلزمات	وحدة القياس	فئات العمال
1477350	انسان /ساعة	فئة 1
1877550	انسان /ساعة	فئة 2
1579900	انسان /ساعة	فئة 3

تمرينـــــــات

- احسب حجم منتجات ثلاث قطاعات ثم أوجد جدول المدخلات والمخرجات بدلالة كميات المواد المنتجة اذا علمت أن مصفوفة المعامـــلات الفنية بين هذه القطاعات هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,0 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

وان شعاع المنتجات النهائية هو $q_1=300,\ q_2=300, q_3=200$

٢ - احسب قيمة منتجات قطاعين ، مصفوفة المعاملات الفنية بينهما هي :

$$B = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 \end{bmatrix}$$

علما بأن قيمة المنتجات النهائية لها هي $V_1= 18 \quad V_2= 42$

٣- احسب حجم منتجات ثلاث قطاعات بطريقة التقارب المتتالي وبدقة حتى (0,01) اذا علمت أن مصفوفة المعاملات الفنية هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

وأن المنتجات النهائية لها هي $q_1= 0 \ , \ q_2= 1 \ , \ q_3= 0$

٤- احسب المصفوفة $(I - A)^{-1}$ بطريقة التقارب المتتالي وبدقة حتى (0,001) اذا علمت أن A هي نفسها الواردة في التمرين (٣) (استعن بجداء المصفوفتين لتشكيل جملة المعادلات).

٥- احسب أسعار منتجات ثلاثة قطاعات مصفوفة المعاملات الفنية بينها هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

وان قيمة الاهتلاك وصافي القيمة المضافة تساويان:

$a_1 = 30$ $\quad a_2 = 10$ $\quad a_3 = 25$

$d_1 = 90$ $\quad d_2 = 80$ $\quad d_3 = 100$

٦- احسب النفقات الكلية من العمل الاجمالي على واحدة منتجات ثلاث قطاعات تتميز بأن مصفوفة المعاملات الفنية لها تساوي :

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

علما بأن نفقات العمل الحي على واحدة الانتاج في القطاعات تساوي:

$t_1 = 3$ $\quad t_2 = 5$ $\quad t_3 = 10$

٧- اذا كان جدول المدخلات والمخرجات للانتاج في ثلاثة قطاعات هو كما يلي :

q_{ij}	1	2	3	q_i
1	110	270	0	720
2	220	0	200	480
3	275	180	100	545

والمطلوب :

١ ـ ايجاد شعاع المخرجات Q

٢ ـ ايجاد مصفوفة المعاملات الفنية

٣ ـ ايجاد مصفوفة المعاملات الكلية $(I - A)^{-1}$

٤ ـ اذا أصبح شعاع الطلب كمايلي :

$$q = \begin{bmatrix} 1120 \\ 1105 \\ 1630 \end{bmatrix}$$

فأوجد شعاع المخرجات الجديد لسد حاجة هذا الطلب .

الفصل السادس

مبادئ البرمجة الخطية

I - تمهيـــــد :

لقد ناقشنا في الفصل السابق عددا من المسائل الاقتصادية من خلال جداول المدخلات والمخرجات ، وتمكنا من التعرف على عـــــدد من النماذج الرياضية التي تعطينا الحلول المناسبة لبعض المسائـل الاقتصادية التي نصادفها في عمليات التخطيط ، ولكن هذه النمـــاذج تعالج تلك المسائل التخطيطية دون النظر الى جميع البدائل الممكنة ودون احتساب شروط الامكانيات المتوفرة من المواد الأولية والقـــوى العاملـــة .... الخ.

وهكذا نرى أن عملية التخطيط تحتاج الى طرائق أخرى توفر للمخططيـن امكانية مقارنة البدائل المختلفة لاختيار البديل المثالي وذلـــك ضمن شروط الامكانيات المتوفـــــرة .

وتعتبر (البرمجة الخطية) احدى الطرائق الدقيقة التي تساعدنا على القيام بهذه المهمة ، ولذا فاننا سنستعرض أهم مفاهيم البرمجة الخطية في هذا الفصل ، تاركين القضايا المعمقة فيها الى المقررات المتخصصة في الصفوف العليا ، وسنبدأ استعراضنا لهذه المفاهيم بمثال يوضح لنا أهميتها ومهمتها .

مثال(6 – 1) : اذا كانت معكوسة المعاملات الفنية للنفقات لقطاعين هي :

$$B = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

وكانت خطة المنتجات النهائية تتألف من ثلاث بدائل هي :

القطاع	بدائل المنتجات النهائية V_i		
	بديل 1	بديل 2	بديل 3
1	21	42	63
2	42	63	63

فما هي خطط الانتاج الموافقة للبدائل الثلاثة ؟

ان خطة الانتاج W الموافقة للبديل V تعطى بالعلاقة :

$$W = (I - B)^{-1}.V \qquad (1,1,6)$$

نقوم بحساب $(I - B)^{-1}$ فنجد أن :

$$(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{40}{21} & \frac{30}{21} \\ \frac{10}{21} & \frac{60}{21} \end{bmatrix}$$

وبذلك لدينا :

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{21} & \frac{30}{21} \\ \frac{10}{21} & \frac{60}{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (2,1,6)$$

حيث ان W_1 و W_2 هما قيمتا منتجات القطاعين و v_1 و v_2 هما قيمتا المنتجات النهائية لهما .

وباستبدال v_1 و v_2 من البدائل الثلاثة المفترضة نحصل على البدائل الثلاثة لحظة الانتاج وهي البدائل المبينة في الجدول التالي :

القطاع	بدائل خطة الانتاج W_i		
	بديل 1	بديل 2	بديل 3
1	100	170	210
2	130	200	210
المجموع	230	370	410

ومن هذا الجدول نجد أن البديل الثالث هو أفضل البدائل ولكنه ليس بالضرورة أن يكون البديل المثالي ، لأنه قد يكون مستحيل التحقيق، بسبب عدم توفر الامكانيات من مواد أولية أو قوى عاملة أو غيرها .

لنبحث الآن في قضية توفر مستلزمات الانتاج بكميات محدده التي قد لاتسمح لنا في تنفيذ الخطط المرسومة أو في زيادة أرقامها .

ولنفترض أن موارد القوى العاملة A متوفرة بمقدار (1000)واحدة فقط وأن استطاعة النوع الاول من وسائل الانتاج B لاتتجاوز (1000) واحدة ، وأن استطاعة النوع الثاني من وسائل الانتاج C لاتتجاوز (1350) واحدة ، وأن مصفوفة معايير نفقات هذه الموارد على كل واحدة من منتجات هذين القطاعين معطية بدلالة قيمها وتساوي :

المتوفر	قيمة النفقات على واحدة الانتاج		المورد
	في القطاع 2	في القطاع 1	
1000	3	2	A
1000	2	3	B
1350	4	3	C
	W_2	W_1	خطة الانتاج

ولقد وضعنا على يمين هذا الجدول الامكانيات المتوفرة من كل مورد وفي أسفله أرقام خطة الانتاج المعتمدة .

وحتى تكون الخطة قابلة للتنفيذ يجب أن يكون مجموع مانستهلكه من كل مورد لايزيد عن مقدار مايتوفر منه ، ولهذا فان خطة الانتاج يجب أن تحقق المتراجحات التالية :

(بالنسبة لـ A) $2W_1 + 3W_2 \leq 1000$

(بالنسبة لـ B) $3W_1 + 2W_2 \leq 1000$

(بالنسبة لـ C) $3W_1 + 4W_2 \leq 1350$

ولدراسة امكانية تنفيذ كل من البدائل الثلاثة السابقة لخطة الانتاج نحسب مستلزمات كل بديل من هذه الموارد ونستعين بمصفوفة المعايير فنحصل على الجدول التالي :

نوع المورد	المتوفر منه	العلاقة بين W_1 و W_2	المتطلبات حسب البدائل		
			1	2	3
A	1000	$2W_1 + 3W_2$	590	940	1050
B	1000	$3W_1 + 2W_2$	560	910	1050
C	1350	$3W_1 + 4W_2$	820	1310	1470

وبمقارنة متطلبات بدائل الخطة الانتاجية نجد أن الخطتين الاولى

والثانيه قابلتين للتنفيذ لأن متطلبات كل منهما من الموارد أقل من المقدار المتوفر فيه ، أما الخطه الثالثة فهي غير قابله للتنفيذ لأن متطلباتها من الموارد أكبر من المقدار المتوفر من كل منهـــا ، ولهذا علينا أن نستبعد الخطه الثالثه ونعتبرها خطة مستحيلـــة التحقيق . وبمقارنه متطلبات الخطتين الاولى والثانيه ، نجـــد أن الخطه الثانية تستثمر الموارد المتوفره بشكل أفضل من الخطة الاولـــى لذلك تسمى هذه الخطه بالبديل الأفضل ، ويمكننا أن نعتمدها كخطـــة للعمل ، ولكن لابد لنا من أن نتساءل، هل هذه الخطه هي أفضل الخطـــط الممكنه التنفيذ على الاطلاق أم لا ؟

ان الجواب على هذا السؤال يحتاج الى برهان قاطع ، ولكن مـــادام الامر غير معروف يجب علينا أن نبحث عن الخطة التي تكون أفضـــل الخطط على الاطـــلاق وذلك ضمن الشروط المفروضة والامكانيات المتاحة . وان الخطه التي تتصف بتلك الخاصه تسمى بالخطه المثالية أو بالحل المثالـــي .

وبعد هذه المقدمة يمكننا أن نصوغ المسألة السابقة رياضيا علـــى الشكل التالـــي :

يجب أن نجعل قيمة المنتجات في القطاعين أكبر مـايمكن ، أن يجـــب أن نجعل التابع :

$$W = W_1 + W_2 \qquad (3,1,6)$$

أكبر مايمكن .

وذلك ضمن الشروط أو القيود المفروضة على W_1 و W_2 التالية :

$$2W_1 + 3W_2 \leq 1000$$

$$3W_1 + 2W_2 \leq 1000 \qquad (4,1,6)$$

$$3W_1 + 4W_2 \leq 1350$$

$$W_1 \geq 0 \qquad W_2 \geq 0 \qquad (5,1,6)$$

تسمى العلاقة (3, 1, 6) بتابع الهدف وهو تابع خطـــي

وتسمى العلاقات(4 , 1 , 6) بالشروط الخطية

وتسمى العلاقات(5 , 1 , 6) بشروط عدم السالبية لأن قيمة الانتـــاج لايمكن أن تكون سالبة .

ان هذه المسائل وأمثالها تشكل موضوعات البرمجة الخطية ، وان حلولها تكمن في تحديد الخطة المثالية التي تحقق الشروط (4 , 1 , 6)و(5,1,6) وتجعل التابع (3 , 1, 6) أكبر مايمكن .

ويجب أن نشير هنا الى أن جميع المعادلات والمتراجحات المستخدمه في مسائل البرمجة هي معادلات خطية تكون فيها المجهولات من الدرجه الاولى ، وهذا مايفسر تسمية عملية البحث عن حلول هذه المسائل باسم البرمجة الخطيـــة .

II – الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية :

اذا كانت المسألة الخطية لاتتضمن غير متحولين فانه يمكننا حلها بطريقة بيانية كمايلي:

لنفترض أن تابع الهدف يتضمن المتحولين x_1 و x_2 ويساوي:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 \longrightarrow Max \qquad (1,2,6)$$

وأن الشروط الخطية هي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant C_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant C_2 \qquad (2,2,6)$$

وأن شروط عدم السالبية هي :

$$x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 \geqslant 0 \qquad (3,2,6)$$

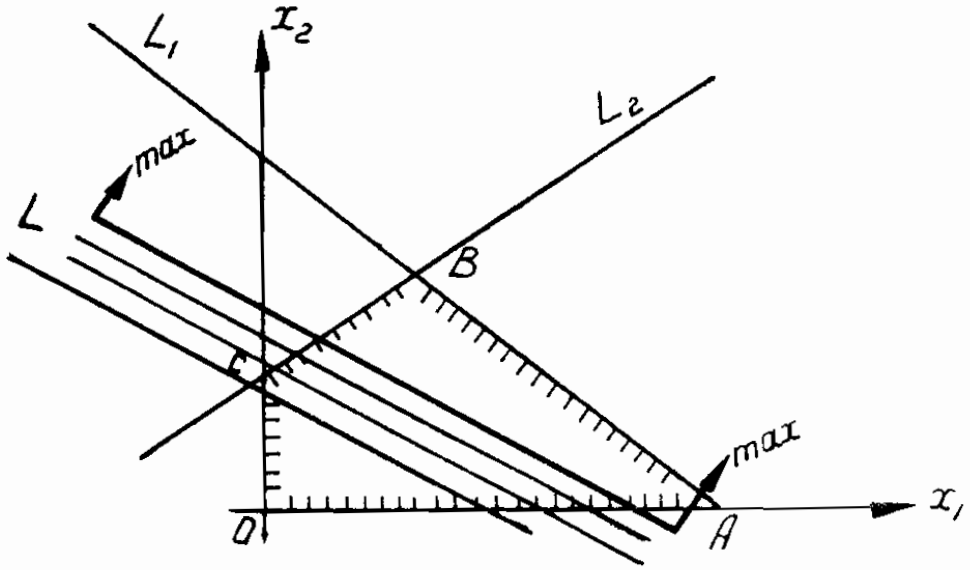
والمطلوب ايجاد قيمة لـ x_1 و x_2 تحقق الشروط (2, 2, 6) و (3, 2, 6) وتجعل تابع الهدف (1, 2, 6) أكبر مايمكن .

لايجاد المطلوب نقوم بتحديد منطقة حلول المتراجحتين (2, 2, 6) والمتراجحتين (3, 2, 6) على المحاور الاحداثية . لذلك نرسم المستقيمين L_1 و L_2 المأخوذين من المتراجتين (2, 2, 6) التاليين :

$$(L_1) \qquad x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{C_1}{a_{12}}$$

$$(L_2) \qquad x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{c_1}{a_{22}} \qquad (4,2,6)$$

وبفرض أن $a_{ij} > o$ وأن $c_i > o$ نحصل على الشكل رقم (6 - 1):



الشكل رقم (6 - 1)

وبتحديد منطقة حلول كل من المتراجحات السابقة بطريقة الاختبار بواسطة نقطة ما نحصل على المنطقة المشتركة للحلول OABC والتي نسميها بمنطقة الحلول المقبولة ،وذلك لأن منطقة حلول المتراجحتين $x_1 \geq o$ و $x_2 \geq o$ هي الربع الاول فقط . ولايجاد الحل المثالي (الخطة المثالية) نرسم المستقيم الذي يمثل تابع الهدف التالي :

$$(L) \qquad x_2 = \frac{-p_1}{p_2} x_1 + \frac{z}{p_2} \qquad (5,2,6)$$

حيث يمكننا اعتبار z وسطيا متغيرا وليس متحولا.

وباعطاء Z قيما متغيـــــره فاننا نحصل على حزمة من المستقيمـــات المتوازية ، وبفرض أن $(p_1 , p_2 > 0)$ نلاحظ أن جهة تزايد Z هي جهة تزايد x_2 ، أي أن اتجاه تزايد Z نحو الاعلى ، اذن فاذا أزحنا المستقيم (6 , 2 , 5) نحو الاعلى بحيث يبقى موازيا لنفسه فاننا نزيد قيمة Z . واذا تابعنا الازاحة سنصل الى وضع للمستقيم (6 , 2 , 5) يمر بالنقطة B وهي النقطة الاخيرة من منطقة الحلول المقبولة . وبذلـــك تكون هذه الوضعية للمستقيم هي الوضعية المثاليـة وتكون النقطـــة B هي الحل الامثل لذلك نبحث عن احداثيـــي B من تقاطع المستقيميـــن L_1 و L_2 ونعتبرهما الحل المثالي .

* ملاحظـــة : ان عملية البحث عن الحل المثالي توصلنا الـــى احدى الحالات التالية :

١ ـ يمكن أن نحصل على حل مثالي وحيد، وفي هذه الحالة يكون الحل مقابلا لنقطة رأسية من رؤوس منطقة الحلول المقبولة لجملة المتراجحات الواردة في الشروط . وهي النقطـــة الاخيرة التي تقع في اتجاه تزايد تابع الهدف حيث يمـــر بها لوحدها .

٢ ـ يمكن أن يحصل على لانهاية من الحلول المثالية وذلـــك عندما يكون المستقيم (6 , 2 , 5) موازيا لأحد أضـــلاع منطقة القبول وواقع في جهة تزايد Z .

٣ ـ يمكن أن لايكون هناك أي حل مثالي وذلك عندما تكـــون منطقة القبول مفتوحة من جهة تزايـد Z .

٤ – يمكن أن لايوجد أي حل مقبول عندما تكون منطقة القبـــــول خالية ، وهذا يحدث عندما تكون الشروط متعارضة .

مثـــال (6 – 2) ليكن لدينا تابع الهدف التالي :

$$Z = x_1 + 2x_2$$

أوجد الحل المثالي الذي يجعل Z أكبر ما يمكن ضمن الشروط الخطية التالية :

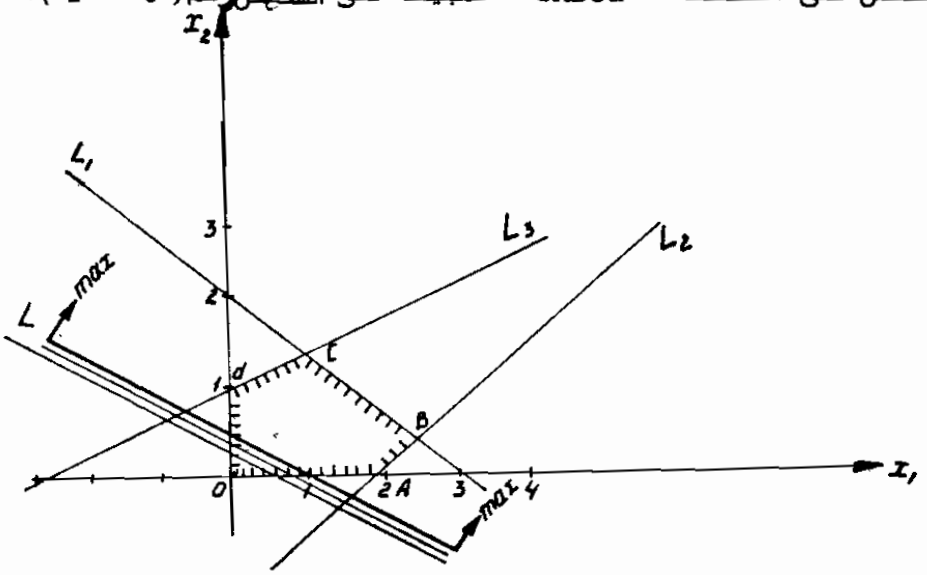
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$$

$$x_1 - x_2 \leqslant 2$$

$$-x_1 + 3x_2 \leqslant 3$$

$$x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 \geqslant 0$$

الحـــل : قبل كل شيء نبحث عن منطقة حلول المتراجحات السابقـــة فنحصل على المنطقة OABCd المبينة على الشكل رقم (6 – 2) .



الشكل رقم (6 – 2)

حيث قمنا برسم المستقيمات التالية :

$$x_2 = -\frac{2}{3} x_1 + 2 \qquad (L_1)$$

$$x_2 = x_1 - 2 \qquad (L_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} x_1 + 1 \qquad (L_3)$$

وحددنا جهة حلول كل المتراجحات بطريقة الاختيار ، كما حددنا منطقة حلول المتراجحة $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ وهي تشمل الربع الاول فقط .

للبحث عن النقطة التي تمثل الحل المثالي نرسم المستقيم (تابع الهدف) :

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_1 + \frac{Z}{2} \qquad (L)$$

ونلاحظ أن Z يتزايد عندما يتزايد x_2، أي أن اتجاه تزايد Z نحو الأعلى لذلك نسحب المستقيم(L) وبشكل يبقى موازيا لنفسه نحو الاعلى،فنجد أن آخر نقطة يمر بها من منطقة الحلول المقبولة هي النقطة الرأسية C ، والتي نحصل على احداثييها من تقاطع المستقيمين L_3 و L_1 فنجد أن :

$$-\frac{2}{3} x_1 + 2 = \frac{1}{3} x_1 + 1$$

$$x_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

وبذلك نجد أن الحل المثالي هو $(1 , \frac{4}{3})$ وهو يجعل تابع الهدف مساويا :

$$Z = 1 + 2.\frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

III ـ نماذج البرمجة الخطيـــة :

(III ـ 1) النموذج العام :

مما سبق يمكننا أن نتصور أن النموذج العام لمسائـــل البرمجة الخطية يحتوي على n متحولا $x_1, x_2 \ldots x_n$ ومؤلفا ممـا يلـــي :

١ ـ تابع هدف خطي لهذه المتحولات وله الشكل التالي

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n \qquad (1,3,6)$$

ويطلب ايجاد الحل المثالي ($\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n$) الذي يعطينا أكبر (أو أصغر) قيمة لـ Z ضمن الشروط المفروضـــة .

٢ ـ الشروط الخطية (الشروط الجماعية) والمعطية على شكـــل متراجحات من الشكل :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots \quad a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots \quad a_{2n}x_n \leq b_2 \qquad (2,3,6)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots \quad a_{mn}x_n \leq b_m$$

وعددها m متراجحة خطية ($m \neq n$) .

٣ ـ شروط عدم السالبية (الشروط الفردية) والمعطية على الشكل :

$$x_j > 0 \qquad (j = 1,2,3...,n) \qquad (3,3,6)$$

وهنا نشير الى أن شكل المتراجحات (2, 3, 6) يعتبر شرطا آخر من شروط النموذج العام ، اذ أن هذا النموذج يشترط أن تكون المتراجحات بمينية . كما يشترط أن تكون الاعداد $b_1, b_2 \ldots b_m$ أعدادا موجبة أو غير سالبة على الاقل .

ومن المعلوم أن منطقة حلول المتراجحات (2, 3, 6)و(3, 3, 6) (ان لم تكن متعارضة) تشكل مجموعة محدبة* في الفضاء R^n ، وهنا سنميز بين عدة أنواع من الحلول هي :

* الحل المقبول : هو أي جملة من الاعداد $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \hat{x_3} \ldots \hat{x_n})$ غير السالبة وتحقق المتراجحات(2, 3, 6)،وان مجموعة الحلول المقبولة تشكل منطقة الحلول المقبولة .

من الواضح أن عدد الحلول المقبولة لكل جملة متراجحات ـ غالبا ـ مايكون لانهائيا ومن هذا العدد الضخم علينا أن نختار الحل الذي يجعل التابع (1, 3, 6) أكبر مايمكن .

---

* ـ المجموعة المحدبة : هي المجموعة التي تحتوي على جميع النقاط x الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين منها x_1 و x_2 . وكمثال على المجموعة المحدبة نذكر المثلث والمربع والمضلع المحدب والمسطح المحدب والمنشور وكل سطح يحقق الشرط المذكور حتى وان كان غير مغلق من أحد جوانبه .

* الحل الرأســـــي : هو حل مقبول ينطبق على نقطة رأسية ،ومما يميز الحل الرأسي عن غيره من الحلول المقبولة انه يقع علـــى تقاطع مستقيمين أو سطحين وهذا مايجعل عددا من مركباته معدومة .

* الحل الافضل : هو الحل المقبول الذي يعطينا قيمة للتابع Z أكبر من قيمة أخرى يعطيها حل آخر .

* الحل المثالي : وهو حل رأسي يجعل التابع Z أكبر مايمكن،وغالبا مايكون وحيدا إلاّ اذا كان مستوى التابع Z موازيا لأحد أسطـــح منطقة الحلول من جهة تزايد Z .

(III ـ 2) النموذج النظامـــي :

ان الشكل النظامي لمسألة البرمجة الخطية هو الشكل الذي تكتب فيه الشروط على شكل معادلات خطية بدلا من المتراجحـــــات ونلجأ الى هذا الشكل لسهولة التعامل مع المعادلات حيث تساعدنا في استخراج بعض المتحولات من بعضها لتعويضه في المعادلات الاخـــرى وله الشكل التالي :

يطلب ايجاد الحل ($x'_1, x'_2 \ldots x'_n$) الذي يعطينا أكبر قيمـــة لتابع الهدف التالي :

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots p_nx_n \qquad (4,3,6)$$

ضمن الشرود الخطية المعطية على شكل m معادلة خطية هي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5,3,6)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

وشروط عدم السالبيـــــــة :

$$x_j \geq o \qquad (j = 1,2,3,\ldots n) \qquad (6,3,6)$$

ويمكن كتابة هذا الشكل بدلالة المصفوفات على الشكل التالي .

يطلب ايجاد الشعاع $\hat{X}$ الذي يعطينا أكبر قيمة لتابع الهدف التالي

$$Z = P.X \longrightarrow Max \qquad (7,3,6)$$

ضمن الشروط الخطية .

$$A.X = B \qquad (8,3,6)$$

وشروط عدم السالبية :

$$X \geq o \qquad (9,3,6)$$

حيث ان :

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$P_{(n)} = [p_1, p_2 \cdots p_n] \ , \ X_{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ , B_{(n)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وعند البحث عن الحل المثالي سنعتمد على هذا النموذج في طريقـــــة الحل لأنه يسهل علينا عمليات التعويض والحسابات الاخرى .

(III ـ 3) كيفية الانتقال من النموذج العام الى النموذج النظامي :

اذا كانت معطيات المسألة على شكل النموذج العام التالي:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n \longrightarrow \text{Max}$$

والمتراجحات .

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$$

والشروط : $x_j \geqslant o \qquad (j = 1,2,\ldots n)$

فانه يمكننا تحويل هذه المتراجحات الى معادلات وذلك باضافة متحول موجب y_i الى الطرف الاسر للمتراجحة (i)، وتسمى هذه المتحولات بالمتحولات القاعدية ، كما يمكن ادخال هذه المتحولات على تابع الهدف بأمثال معدومة ، فنحصل على النموذج النظامي المكافئ للنموذج العام السابق والذي نكتبه على الشكل التالي :

تابع الهدف يأخذ الشكل التالي :

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + o.y_1 + o.y_2 + \ldots + o.y_m \quad (1,3,6)$$

ويأخذ شروط الخطة الشكل التالي :

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m
\end{aligned} \quad (1,3,6)$$

وشروط عدم السالبية

$$x_j \geq o \qquad (j = 1,2,3,\ldots,n) \quad (2,3,6)$$

$$y_i \geq o \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

ويصبح النموذج متضمنا لـ $n + m$ متحولا غير سالب

وسنبرهن على أنه مقابل كل حل ($x_1^{\wedge}, x_2^{\wedge}, \ldots x_n^{\wedge}$) لحملة المتراجحات (2, 3, 6) يوجد حل معين من الشكل ($x_1^{\wedge}, x_2^{\wedge} \ldots x_n^{\wedge}, y_1^{\wedge} \ldots y_m^{\wedge}$) لحملة المعادلات (1,3, 6) وأن المتحولات الاضافية تحقق شروط عدم السالبية. وبالعكس مقابل كل حل غير سالب ($x_1^{\wedge}, x_2^{\wedge} \ldots x_n^{\wedge}, y_1^{\wedge} \ldots y_m^{\wedge}$) لحملة المعادلات (1, 3, 6) يوجد حل ($x_1^{\wedge}, x_2^{\wedge} \ldots x_n^{\wedge}$) لحملة

المتراجحات (6 ,3 ,2).

لنفترض أن $(\hat{x_1}, \hat{x_2} \dots \hat{x_n})$ حلا لـ (6 ,3 ,2) عندئذ يكـــون لدينا :

$$a_{11}\hat{x_1} + a_{12}\hat{x_2} + a_{13}\hat{x_3} + \dots + a_{1n}\hat{x_n} \leq b_1$$

$$a_{21}\hat{x_1} + a_{22}\hat{x_2} + a_{23}\hat{x_3} + \dots + a_{2n}\hat{x_n} \leq b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}\hat{x_1} + a_{m2}\hat{x_2} + a_{m3}\hat{x_3} + \dots + a_{mn}\hat{x_n} \leq b_m$$

وبتعويض هذا الحل $(\hat{x_1}, \hat{x_2} \dots \hat{x_n})$ في المعادلات (11,3,6) واذا رمزنا لقيم المتحولات الاضافية الموافقة لهذا الحل بالرموز:

$$\hat{y_1}, \hat{y_2} \dots \hat{y_m}$$

وباجراء بعض الاصلاحات نحصل على أن :

$$\hat{y_1} = b_1 - (a_{11}\hat{x_1} + a_{12}\hat{x_2} \dots a_{1n}\hat{x_n})$$

$$\hat{y_2} = b_2 - (a_{21}\hat{x_1} + a_{22}\hat{x_2} \dots a_{2n}\hat{x_n})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\hat{y_m} = b_m - (a_{m1}\hat{x_1} + a_{m2}\hat{x_2} \dots a_{mn}\hat{x_n})$$

وهي قيم معينة بدلالة ($\hat{x}_1 , \hat{x}_2 \dots \hat{x}_n$) وتحقق شروط عدم السالبية لأن الطرف الايمن لهذه المعادلات موجب .

اذن :

$$\hat{y}_1 \geq o \quad , \quad \hat{y}_2 \geq o \dots \quad \hat{y}_m \geq o$$

وبذلك تكون الجملة ($\hat{x}_1, \hat{x}_2 \dots \hat{x}_n, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n$) حلا لجملة المعادلات (11,3,6) وتحقق شروط عدم السالبية .

ولبرهان الحالة المعاكسة نفترض أن الجملة $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots \hat{x}_n, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_m)$ تمثل حلا غير سالب لجملة المعادلات (11, 3, 6) ، اذن المتحولات الاضافية تحقق الشروط :

$$\hat{y}_1 \geq o \quad \hat{y}_2 \geq o \quad \dots \quad \hat{y}_m \geq o$$

وجملة الحل المفروض تحقق المعادلات التالية :

$$a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + \dots + a_{1n}\hat{x}_n + \hat{y}_1 = b_1$$

$$a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + \dots + a_{2n}\hat{x}_n + \hat{y}_2 = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}\hat{x}_1 + a_{m2}\hat{x}_2 + \dots + a_{mn}\hat{x}_n + \hat{y}_m = b_m$$

وبما أن المتحولات الاضافية غير سالبة اذن نحذفها من هذه المعادلات فنحصل على المتراجحات التالية :

$$a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + \ldots + a_{1n}\hat{x}_n \leq b_1$$

$$a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + \ldots + a_{2n}\hat{x}_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}\hat{x}_1 + a_{m2}\hat{x}_2 + \ldots + a_{mn}\hat{x}_n \leq b_n$$

أي أن الجملة ($\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ ... $\hat{x}_n$) تمثل حلاً لجملة المتراجحات (2, 3, 6) وهذا يعني أنه يمكن تحويل أي حل للمتراجحات (2, 3, 6) الى حل للمعادلات (11, 3, 6). وبالعكس يمكن تحويل أي حل للمعادلات (11, 3, 6) الى حل للمتراجحات (2, 3, 6)وذلك بواسطة حذف قيم المتحولات الاضافية منه .

مثال (6 – 3) : تتألف احدى المؤسسات من أربعة أقسام، وتقوم بتصنيع نوعين من المنتجات A و B وان استطاعة كل قسم في اليوم (ساعة / يوم) تساوي :

$$m_1 = 12 \quad , \quad m_2 = 8 \quad , \quad m_3 = 16 \quad , \quad m_4 = 12$$

وان مصفوفة المعايير للزمن اللازم (ساعة) لتصنيع واحدة من كل من المنتجات هي كمايلي :

القسم	المنتجات	
	A	B
1	2	2
2	1	2
3	4	0
4	0	4

وان مقدار الربح الناجم عن واحدة منتجات النوع A يساوي 2 ل.س

وان مقدار الربح الناجم عن واحدةمنتجات النوع B يساوي 3 ل.س

والمطلوب ايجاد الخطةالمثاليـة للانتاج التي تحقق أكبر ربح ممكن .

الحـــل : لنفترض أن x_1 هو مقدار مايجب انتاجه من النوع A

وأن x_2 هو مقدار مايجب انتاجه من النوع B

وبالاعتماد على مصفوفة المعايير الزمنية وعلى استطاعة الاقسـام المبينة أعلاه نجد أن x_1 و x_2 يجب أن يحققا الشروط التالية :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8 \qquad (13,3,6)$$

$$4x_1 + 0.x_2 \leq 16$$

$$0.x_1 + 4x_2 \leq 12$$

وان x_1 و x_2 يحققا شرط عدم السالبية $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ لأن كمية الانتاج لايمكن أن تكون سالبة .

ونجد أن تابع الهدف يساوي :

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow Max \qquad (14,3,6)$$

ويصبح المطلوب تحديد قيمة لكل من x_1 لـ x_2 تحققان الشـــــروط السابقة وتجعلان التابع Z أكبر مايمكن .

حتى نتمكن من ايجاد الحل اللازم نحول النموذج السابق الى النمـوذج النظامي وذلك باضافة متحولات غير سالبة Y_1 و Y_2 و Y_3 و Y_4 على المتراجحات حسب الترتيب فتتحول تلك المتراجحات الى معـــادلات كمايلـــي :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + y_1 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + y_2 &= 8 \\ 4x_1 + 0.x_2 + y_3 &= 16 \\ 0x_1 + 4x_2 + y_4 &= 12 \end{aligned} \qquad (15,3,6)$$

وهنا نشير الى أن هذه المتحولات الاضافية هي مقادير الامكانيـــات الانتاجية غير المستغلة في كل من الاقسام الاول والثاني والثالـــث والرابع على الترتيب،وبادخال هذه المتحولات في عباره Z بأمثـــال تساوي الصفر نحصل على تابع الهدف التالي .

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 \qquad (16,3,6)$$

وسنحاول الآن أن نبحث عن الحلول المماثلة ($x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, y'_3, y'_4$) التي تجعل Z أكبر ما يمكن وتحقق الشروط (15, 3, 6) وذلك باتباع أسلوب التحسس المتتابع للبدائل الممكنة حتى نصل الى الخطة المثالية المطلوبة .

وسنبدأ ذلك الأسلوب على ما رأيناه في الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية (إن وجدت) بوقوع أحد رؤوس منطقة الحلول المقبولة . ويرجع السبب الرئيسي في ذلك عن تقاطع عدد من المستقيمات أو المستويات لذلك فانه لابد وأن تكون إحداثيات مركبات تلك النقطة معدومة ، وبتعبير آخر لابد وأن يكون عددا (n - m) متحولا على الاقل) من المتحولات معدومة في تلك النقطة ، لذلك فاننا سنقوم باعطاء قيمة الصفر للمتحولات التي تدخل في عبارة Z ثم نحسب قيم المتحولات الأخرى من المعادلات (15, 3,6) أو من التي في حكمها . فاذا حققت هذه المطلوب توقفنا على الحل وإذا لم نتوصل الى الحل المناسب نقوم بحذف أحد المتحولات الموجودة في عبارة Z ، التي لا نتعرض للانعدام ، وذلك بتعويض قيمته من أحد المعادلات المناسبة في (15, 3,6) .وفي هذا الحال سنقوم بما يلي :

- نضع $0 = x_1 = x_2$ ونحسب قيم المتحولات الهدف Z=0

وهي الخطة البدائية التي تجعل الربح معدوما نتيجة لعدم استغلال الامكانيات أو القدرات الانتاجية المتوفرة في الاقسام (لأن المتحولات الاضافية غير معدومة).

٢ - نحاول أن ننتقل من الخطة السابقة الى خطة جديدة وذلك بأن ندخل الى خطة الانتاج أحد النوعين A أو B. ولتحديد أيهما نقوم بدراسة أمثال المتحولات في عبارة تابع الهدف Z فنجد أنه من الأربح أن ندخل النوع B الى خطة الانتاج وذلك لأن كل واحدة انتاج منه تعطينا 3 وحدات من الربح. واذا أخذنا بعين الاعتبار المعايير الزمنية اللازمة لانتاج واحدة من منتجات النوع B في الاقسام المختلفة لوجدنا أن :

مقدار الزمن المتوفر في القسم الاول يسمح بانتاج 6 واحدات (لأن $\frac{12}{2} = 6$).

ومقدار الزمن المتوفر في القسم الثاني يسمح بانتاج 4 واحدات (لأن $\frac{8}{2} = 4$)

ومقدار الزمن المتوفر في القسم الرابع يسمح بانتاج 3 واحدات (لأن $\frac{12}{4} = 3$).

ولم نتعرض للقسم الثالث لأن مصفوفة المعايير تشير الى أن النوع B لا ينتج هناك .

وبالمقارنة نجد أن مقدار الانتاج الممكن من النوع B هو المقدار

الاصغر من المقادير التي تسمح بها الامكانيات الزمنية في الاقسام وهو 3 واحدات فقط في اليوم،وذلك لأنه لوكان مقدار الانتاج من B أكبر من 3 لما أمكن تنفيذ هذه الخطة في القسم الرابع الذي يحتاج 4 ساعات لكل واحدة من المنتجات ولايتوفر فيه الا 12 ساعة في اليوم .

لذلك نقوم بحساب x_2 من المعادلة الرابعة (معادلة القسم الذي أعطانا أصغر انتاج ممكن) بدلالة المتحولات الاخرى ونعوضه في المعادلات الاخرى وتبقى معادلة تابع الهدف حتى نحذفه ولايتعرض للانعدام مرة ثانية ، من المعادلة الرابعة نجد أن .

$$x_2 = \frac{12 - y_4}{4} = 3 - \frac{1}{4} y_4$$

نقوم ذلك في المعادلات السابقة فتأخذ شروط النموذج السابق الشكل التالي .

$$\begin{aligned} 2x_1 + y_1 - \frac{1}{2} y_4 &= 6 \\ x_1 + y_2 - \frac{1}{2} y_4 &= 2 \\ 4x_1 + y_3 &= 16 \\ x_2 + \frac{1}{4} y_4 &= 3 \end{aligned} \qquad (17,3\ 6)$$

أما تابع الهدف فيأخذ الشكل التالي :

$$2x_1 \qquad - \frac{3}{4} y_4 = Z - 9 \qquad (18,3,6)$$

وهنا نلاحظ أنه لووضعنا $x_1 = o$ و $y_4 = o$ (المتحولات التي تدخل في عبارة Z) لوجدنا أن المتحولات الاخرى تأخذ القيم التالية :

$$x_2 = 3 \ , \quad y_1 = 6 \ , \quad y_2 = 2 \ , \quad y_3 = 16$$

أما تابع الهدف عند هذه النقطة (0,3,6,2,16,0) فيساوي 9 واحدات لأن :

$$0 = Z - 9$$

$$Z = 9$$

ولتقدير فيما اذا كانت النقطة السابقة هي النقطة المثالية أم لا ، ندرس أمثال المتحولات الداخلة في معادلة Z (وهي y_4 و x_1) فنرى أن أمثال x_1 موجبة ، وهذا يعني أن زيادة x_1 ستؤدي الى زيادة Z ، أي أن النقطة السابقة لم تجعل Z أكبر مايمكن .
اذن النقطة السابقة ليست هي النقطة المثالية المطلوبة .

ولمتابعة البحث عن النقطة المثالية ندرس الامكانيات التي تسمح بها الاقسام المختلفة في زيادة x_1 مقدار انتاج النوع A .

وبما أن المعادلات (6 ,3 ,17) تحدد لنا مقدار الانتاج الذي تسمح به الامكانيات المتوفرة في كل قسم نجد أن مقدار الزمن المتبقي في القسم الاول (بعد ما تم استغلاله لانتاج 3 وحدات من النوع B) يسمح بانتاج 3 واحدات من النوع A (لأن $\frac{6}{2} = 3$) ومقدار الزمن المتبقي في القسم الثاني يسمح بانتاج واحدتين (لأن $\frac{2}{1} = 2$) ومقدار الزمن المتبقي في القسم الثالث يسمح

ـــــج 4 و حد ـــ ، لأن $\frac{16}{4} = 4$. وبالمقارنة نجد أن مقدار لاســـج ـــمكن هو المقدار الأصغر و ـــذي ـــاوي 2 وهو الـــــــذي يحدده القسم الثاني .

لذلك نقوم بحساب x_1 من المعادلة الثانية (معادلة القسم الـــــذي أعطانا أصغر انـــاج ممكن) بدلالة المتحولات الاخرى ونعوّضه فـــــي المعادلات الاخرى وفي معادلة تابع الهدف . من المعادلة الثانيـــــة نجد أن :

$$x_1 = 2 - y_2 + \frac{1}{2} y_4$$

نعوض هذه القيمة في المعادلات (17, 3, 4) فنحصل على المعادلات التاليـــــة :

$$y_1 - 2y_2 + \frac{1}{2} y_4 = 2$$

$$x_1 + y_2 - \frac{1}{2} y_4 = 2 \qquad (19,3,6)$$

$$-4y_2 + y_3 + 2y_4 = 8$$

$$x_2 + \frac{1}{4} y_4 = 3$$

أما تابع الهدف فيســـــاوي :

$$-2y_2 + \frac{1}{4} y_4 = z - 13 \qquad (20,3,6)$$

وهنا نلاحظ أنه لو وضعنا المتحولات الداخلة في عبارة Z مساوية للصفر، أي لو وضعنا $y_4 = 0$ و $y_2 = 0$ لوجدنا أن المتحولات الاخرى تأخذ القيم التالية :

$$x_1 = 2 \ , \ x_2 = 3 \ , \ y_1 = 2 \ , \ y_3 = 8$$

أما تابع الهدف فيأخذ عند هذه الخطة (2, 3, 2, 0, 8 , 0) القيمة 13 لأن :

$$0 = Z - 13 \Longrightarrow Z = 13$$

اذن الخطة (2 , 3, 2,0, 8, 0) أفضل من الخطة (0, 3, 6, 2, 16, 0) .

ولمعرفة فيما اذا كانت الخطة السابقة هي الخطة المثالية أم لا ، نقوم بدراسة أمثال المتحولات الداخلة في عبارة تابع الهدف في شكلها الاخير (وهي y_2 , y_4) فنلاحظ أن أمثال y_4 مازالت موجبة وهذا يعني أن زيادة y_4 ستؤدي الى زيادة Z ، أي أن الخطة السابقة لم تجعل التابع Z أكبر مايمكن ، اذن الخطة السابقة ليست هي الخطة المثالية المطلوبة .

ولمتابعة البحث عن الخطة المثالية ندرس الامكانيات التي تسمح بها الاقسام في زيادة y_4 (أي الابقاء على بعض الزمن في القسم الرابع دون استغلال). فمن (6 , 3 , 19) نجد أن مقدار الزمن المتبقي في القسم الاول يسمح بزيادة y_4 الى 4 واحدات (لأن $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$) .

ومقدار الزمن المتبقي في القسم الثالث يسمح بزيـــــادة y_4 الى 4 واحدات أيضا (أن $\frac{8}{2} = 4$)

ومقدار الزمن المتبقي في القسم الرابع يسمح بزيادة y_4 الى 2 واحدة (لأن $\frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$)

ولم نتعامل مع القسم الثاني لأن أمثال y_4 فيه سالبة.

وبالمقارنة نجد أن مقدار الزيادة الممكنة لـ y_4 هو المقدار الاصغر والذي يساوي 4 وهو الذي يحدده كل من القسم الاول والقسم الثاني.

لذلك نقوم لحساب y_4 من المعادلة الاولى (أو من الثانية) فنجد أن :

$$y_4 = 4 - 2y_1 + 4y_2$$

وبالتعويض في المعادلات (4, 3, 19) نحصل على المعادلات التالية :

$$2y_1 - 4y_2 + y_4 = 4$$

$$x_1 + y_1 - y_2 = 4$$

$$-4y_1 + 4y_2 + y_3 = 0$$

$$x_2 - \frac{1}{2} y_1 + y_2 = 2$$

أما تابع الهدف فيساوي :

$$-\frac{1}{2} y_1 - y_2 = Z - 14$$

وهنا نلاحظ أنه لو وضعنا المتحولات الداخله في عباره Z مساويه للصفر،أي لو وضعنا $y_2 = 0$ و $y_1 = 0$ لوجدنا أن المتحولات الاخرى تأخذ القيم التالية :

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad y_3 = 0 \quad , \quad y_4 = 4$$

وهنا نشير الى أن زياده y_4 أدت الى زياده x_1 ونقاص x_2 عما كان عليه في الخطه السابقه .

وان هذه الخطه (4, 2, 0, 0, 4) تجعل تابع الهدف يأخذ القيمه 14 وتكون بذلك أفضل من الخطه السابقه .

ولمعرفة فيما اذا كانت هذه الخطه هي الخطه المثاليه أم لا ، نقوم بدراسة أمثال المتحولات الداخله في معادله تابع الهدف في شكلها الأخير ، فنلاحظ أن أمثال كل من y_2 و y_1 أصبحا سالبين، اذن فان أيه زياده لهذين المتحولين ستؤدي الى نقاص قيمه Z ، وبذلك نجد أنه ليس في مصلحتنا أن نقوم بأي حدف أو تبديل في متحولات Z، وهذا يعني أن الخطة التي توصلنا اليها هي الخطه المثاليه حسب الشروط المفروضة ، وان هذه الخطه هي

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 2$$

وهي تجعل قيمه Z أكبر مايمكن وتساوي $Z = 14$.

كما أن هذه الخطة تحتم علينا استغلال جميع الموارد الانتاجيه الزمنية المتوفره في الأقسام الاول والثاني والثالث وذلك لأنها تجعل $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ولكنها تبقى في القسم الرابع على مقدار 4 واحدات من الموارد الانتاجية غير مستغله لأن $y_4 = 4$

وهذا مايشير من ناحية أخرى الى أن الموارد غير موزعة على الأقسام بالشكل اللازم .

IV – طريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) Simplex Method :

ان هذه الطريقة تتناول عملية ايجاد الحل المثالي لمسائل البرمجة الخطية بأسلوب مبسط بعيد عن العمليات الحسابية التي تعرضنا لها في المثال السابق ، وذلك بالاعتماد على جداول تتضمن أمثال المتحولات في المعادلات الخطية ، ولكن حتى نستطيع فهم العمليات التي تعتمد عليها هذه الطريقة نبحث في أساسها الرياضي كمايلي :

نفترض أن النموذج الرياضي معطيا بشكله النظامي التالي : ضمن الشروط :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1,4,6)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m$$

$$x_j \geq o \quad (j = 1,2,3,\ldots n), \; y_i \geq o \quad (i=1,2,..m)$$

يجب ايجاد ($x_1 , x_2 \ldots x_n . \; y_1 \ldots y_m$) التي تعطينا

أكبر قيمـــة للتابع :

$$Z = p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\ldots+ p_nx_n+0.y_1+\ldots+0.y_m \quad (2,4,6)$$

نضع أمثال هذه المتحولات في جدول كالتالي :

جدول رقم(6 - 1): الجدول الاول لطريقة السمبلكس .

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2 .. x_s .. x_n	y_1	y_2	... y_m	الثوابت الحرة
1	a_{11}	a_{12} .. a_{1s} .. a_{1n}	1	0	... 0	b_1
2	a_{21}	a_{22} .. a_{2s} .. a_{2n}	0	1	... 0	b_2
3	a_{31}	a_{32} .. a_{3s} .. a_{3n}	0	0	1 .. 0	b_3
⋮		.....				⋮
m	a_{m1}	a_{m2} .. a_{ms} .. a_{mn}	0	0	... 1	b_m
تابع الهدف	p_1	p_2 .. p_s .. p_n	0	0	... 0	Z

وللبحث عن الحل المثالي ندرس أمثال المتحولات في سطر تابـــــع الهدف Z ونختار أكبر الأمثال الموجبة (اذا لم نجد أي منهـــا

موجبا فهذا يعني أننا في وضعية الحل المثالي ، وعندها نجعل المتحولات الداخلة في عبارة Z مساوية للصفر ونحسب الباقي من الجدول فنحصل على الحل المثالي المطلوب) ، لأن أي زيادة في قيمة المتحول المرافق تؤدي الى أكبر زيادة في قيمة تابع الهدف. ويسمى العمود الذي نختاره بعمود الارتكاز ، ولنفترض أنه كان العمود s ، ولنحاول الآن حذف المتحول x_s الذي يقابل عمود الارتكاز لذلك نبحث عن السطر (المعادلة) الذي يعطينا أقل انتاج ممكن تسمح به الامكانيات المتوفرة في جميع الاسطر ، ولهذا فاننا نقوم بتقسيم عناصر عمود الثوابت الحرة على عناصر عمود الارتكاز المقابلة لها والموجبة منها فقط (لأن العناصر المعدومة والسالبة لاتقيد عملية الانتاج) . ثم نختار أصغر هذه النتائج ونعتبر السطر الذي يقابل هذه القيمة الصغرى سطرا للارتكاز ، ولنفترض أنه كان السطر t ويسمى العنصر الذي يقع على تقاطع سطر الارتكاز وعمود الارتكاز بعنصر الارتكاز وهو a_{ts} .

أي أنه يتم تحديد سطر الارتكاز بواسطة تحديد قيمة المؤشر θ_s المعرف بالعلاقة التالية :

$$\theta_s = \min_{a_{is}>0} \left[\frac{b_i}{a_{is}}\right] = \frac{b_t}{a_{ts}} > 0 \qquad (3,4,6)$$

$b_i > 0$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو a_{ts} .

وبعد معرفة عنصر الارتكاز a_{ts} المرافق للمتحول x_s في السطر t نقوم بحساب المتحول x_s بدلالة المتحولات الاخرى من المعادلة المقابلة للسطر t ، فنجد أن تلك المعادلة تكتب على الشكل التالي :

$$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \dots a_{ts}x_s + \dots a_{tn}x_n \dots + y_t = b_t$$

ومنها نجد أن :

$$x_s = \frac{b_t}{a_{ts}} - \frac{a_{t1}}{a_{ts}}x_1 - \frac{a_{t2}}{a_{ts}}x_2 \cdots \frac{a_{tn}}{a_{ts}}x_n - \frac{1}{a_{ts}}y_t \qquad (4,4,6)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\frac{a_{t1}}{a_{ts}}x_1 + \frac{a_{t2}}{a_{ts}}x_2 + \ldots + x_s + \ldots \frac{a_{tn}}{a_{ts}}x_n + \frac{1}{a_{ts}}y_t = \frac{b_t}{a_{ts}}$$

وبتعويض قيمة x_s في كل من المعادلات (1 , 4, 6) وفي معادلة تابع الهدف (2, 4, 6) نحصل على شكل جديد للنموذج الرياضي السابق ، فالمعادلة الاولى من (1, 4, 6) ، تأخذ الشكل التالي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1s}\left(\frac{b_t}{a_{ts}} - \frac{a_{t1}}{a_{ts}}x_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{t2}}{a_{ts}}x_2 \ldots - \frac{a_{tn}}{a_{ts}}x_n - \frac{1}{a_{ts}}y_t\right) \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1$$

وبعد الاصلاح تأخذ الشكل التالي :

$$\left(a_{11} - a_{1s}\frac{a_{t1}}{a_{ts}}\right)x_1 + \left(a_{12} - a_{1s}\frac{a_{t2}}{a_{ts}}\right)x_2 + \ldots \left(a_{1n} -\right.$$

$$\left. - a_{1s}\frac{a_{tn}}{a_{ts}}\right)x_n + y_1 \ldots - a_{1s}\frac{1}{a_{ts}}y_t = b_1 - a_{1s}\frac{b_t}{a_{ts}} \qquad (t-1)$$

وهي معادلة لاتحتوي على المجهول x_s الذي أردنا حذفه فحذفناه .

ويمكننا أن نحصل على أمثال المتحولات الداخله في هذه المعادله بضرب أمثالها في المعادله (4, 4, 6) بأمثال x_s مضروبا بناقص أي بـ ($-a_{1s}$) ثم جمعها الى أمثالها .

المعادلة نفسها . ونطبق الشيء نفسه على الثابت الحر الجديـــــد .
ونفعـل الامر نفسه في المعادلات الاخرى وفي تابع الهدف فنحصـــــل بالتالي على جملة معادلات جديدة وتابع هدف جديد ويأخذ النمـــوذج الشكل التالي :

ضمن الشـــــروط :

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + y_1 \ldots + \alpha_{1t}y_t = B_1$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + y_2 \ldots + \alpha_{2t}y_t = B_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5,4,6)$$

$$\alpha_{t1}x_1 + \alpha_{t2}x_2 + \ldots + \alpha_{tn}x_n + \ldots + \alpha_{tt}y_t = B_t$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n + \ldots + \alpha_{mt}y_t + \ldots y_m = B_m$$

والشروط $x_j \geq o$ $(j = 1,2,\ldots n)$

$y_i \geq o$ $(i = 1,2,\ldots m)$

يجب ايجاد $(x_1, x_2 \ldots x_n \; y_1 \ldots y_m)$ التي تعطينا أكبر قيمـة للتابع:

$$z - p_s \frac{b_t}{a_{ts}} = q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n + q_ty_t \qquad (6,4,6)$$

حيث أن أمثال هذه المعادلات تحسب من العلاقات :

$$\alpha_{tj} = \frac{a_{tj}}{a_{ts}} \qquad (\text{لأمثال المعادلة } t) \qquad (7,4,6)$$

$$\alpha_{ij} = a_{ij} - a_{is}\frac{a_{tj}}{a_{ts}} \qquad (i \neq t) \qquad (8,4,6)$$

$$B_i = b_i - a_{is}\frac{b_j}{a_{ts}} \qquad (i \neq t) \qquad (9,4,6)$$

$$q_j = p_j - p_s \cdot \frac{a_{tj}}{a_{ts}} \qquad (10,4,6)$$

ونضع النتائج السابقة في جدول جديد يأخذ الشكل التالي :

جدول رقم(6 - 2) الجدول الثاني لطريقة السمبلكـــــــس :

المتحولات / المعادلات	a_1 x_2 ... x_s ... x_n	y_1 ... y_t ... y_m	الثوابت الحرة
1	α_{11} α_{12} ... 0 ... α_{1n}	1 0 .. α_{1t} ... 0	B_1
2	α_{21} α_{22} ... 0 ... α_{2n}	0 1 .. α_{1t} ... 0	B_2
t	α_{t1} α_{t2} ... 1 ... α_{tn}	0 0 .. α_{tt} ... 0	B_t
m	α_{m1} α_{m2} ... 0 ... α_{mn}	0 0 .. α_{mt} ... 1	B_m
تابع الهدف	q_1 q_2 0 q_n	0 0 q_t 0 0	$Z - p_s \frac{b_t}{a_{ts}}$

وهكذا نتابع هذه العمليات مرة تلو مرة ، وبعد عدد محدود من المرات ستصبح أمثال المتحولات في السطر الأخير (سطر تابع الهدف) غير موجبة (حل مثالي) أو أننا نتوصل الى نتيجة محددة حول الحل المثالي .

وبعدها نحصل على الحل المثالي باعطاء جميع المتحولات الداخلة في عبارة تابع الهدف (التي تكون أمثالها غير معدومة وسالبة)قيمة الصفر ونحسب قيم المتحولات الأخرى من الجدول الاخير حيث تكون مساوية لقيم الثوابت الحرة في ذلك الجدول .

* خوارزمية السمبلكس :

نحاول تلخيص خطوات العمل حسب طريقة السمبلكس بمايلي:

١ - نكتب المتراجحات على شكل معادلات وذلك بادخال متحولات اضافية هي : $Y_1, Y_2, \cdots Y_m$

٢ - نعد الجدول الاول وننقل اليه جميع الاعداد المرافقة للمتحولات والثوابت الحرة .

٣ - ندرس الأمثال في سطر تابع الهدف (السطر الاخير) ونختار أكبر الاعداد الموجبة ، ونعتبر ذلك العمود عمودا للارتكاز وليكن هو العمود المقابل للمتحول x_s (واذا لم نجد عددا موجبا ننتقل الى "١٠" فورا) .

٤ - نحسب قيمة θ من العلاقة (3, 4, 6) ونحدد سطر الارتكاز وبالتالي عنصر الارتكاز .

٥ - نعد جدولا جديدا لتسجيل الامثال الجديدة فيه .

٦ - نقسم جميع عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز ونسجل النتائج في الجدول الجديد وفي السطر المقابل (حسب العلاقة (6 ,4 ,7)).

٧ - نجعل جميع عناصر العمود المقابل لعمود الارتكاز في الجدول الجديد صفرا (ماعدا العنصر الذي يقابل عنصر الارتكاز نفسه فنضعه يساوي (١) نتيجة للخطوة السابقة) .

٨ - نقوم بحساب عناصر الأسطر سطرا ، سطرا ، وذلك حسب العلاقات (6 و 4 ,8-9-10) حيث نقوم بضرب عناصر السطر المقابل لسطر الارتكاز في الجدول الجديد بأمثال x_s في السطر المطلوب حساب عناصره مضروبة بناقص . أي نضرب عناصره بـ (a_{cs} -) ثم نجمع العناصر الناتجة الى عناصر السطر المطلوب حسابه فنحصل على العناصر الجديدة . ونطبق نفس الشيء على سطر تابع الهدف حيث نضرب عناصر السطر المقابل لسطر الارتكاز بأمثال المجهول x_s في السطر الأخير مضروبا بناقص (أي نضرب بـ p_s -) ثم نجمعه الى السطر الاخير فنحصل على السطر الأخير الجديد .

كما يمكن حساب عناصر الجدول الجديد بطريقة المستطيل وذلك بناء على العلاقات (6 ,4 ,8- 9 - 10) التي تكتب كمايلي :

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ts} - a_{is}a_{tj}}{a_{ts}} \qquad (8,4,6)$$

$$B_i = \frac{b_i a_{ts} - a_{is} b_t}{a_{ts}} \qquad (9,4,6)$$

$$q_i = \frac{p_j a_{ts} - p_s a_{tj}}{a_{ts}} \qquad (10,4,6)$$

ولذلك نقوم بتطبيق قاعدة المستطيل، التي تتلخص بأن نجعل أحد رؤوس المستطيل هو عنصر الارتكاز ، أما الرأس المقابل قطريا له فهو العنصر المقابل للعنصر المراد حسابه، وبذلك نضرب العنصرين في هذين الرأسين ونطرح منهما جداء العنصرين في الرأسين الآخرين ، ثم نقسم الناتج على عنصر الارتكاز فنحصل على العنصر الجديد المراد حسابه كما هو موضح على الجدول رقم (6 - 1) السابق .

ونطبق هذه القاعده على جميع عناصر الجدول ماعدا عناصر سطر الارتكاز وعناصر عمود الارتكاز التي يتم حسابها وفق الخطوتين (٦) و (٧) .

٩ - نعود الى الخطوه (٣) ونكرر هذا العمل حتى نجعل جميع الامثال فى السطر الاخير غير موجبة .

١٠ - نعطي قيمه الصفر لكل متحول يدخل بأمثال سالبة* في عباره تابع الهدف ونحسب قيمة كل من المتحولات المتبقية

* انظر فقره الحالات التى تعترض الحل لاحقا .

من خلال الجدول الاخير الذي حصلنا عليه .

١١ - نبرز الحل المثالي الذي حصلنا عليه من (١٠) بدلالة المتحولات الاصلية كما نبرز القيمة العظمى التي يأخذها تابع الهدف مقابل ذلك الحل .

١٢ - نقوم بالتحقق من أن الحل المثالي الذي حصلنا عليه يحقق الشروط المفروضة للمسألة المطروحة .

* العقبات التي تعترض الحل :

١ - الحالة التي يكون فيها المطلوب ايجاد أصغر قيمة لتابع الهدف التالي :

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \longrightarrow \text{Min}$$

في هذه الحالة نقوم بتحويل هذا التابع الى تابع أكبر قيمه وذلك بفرض :

$$Z = -L$$

فيصبح تابع الهدف الجديد هو .

$$Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - \ldots - c_nx_n \longrightarrow \text{Max}$$

وبعدها نتابع الحل كالعاده . وبعد الحصول على الحل المثالي نعود ونحسب قيمه L من العلاقه $L = -Z$.

٢ - الحاله التي تكون فيها الشروط على شكل معادلات ومتراجحات

يسارية (أي ذات اتجاه $\leqslant$) . بالنسبة للمعادلات نقوم بحساب منحول من كل معادله ثم نعوض ذلك في المتراجحات وفي عبارة تابع الهدف . وهذا يعني أننا قمنا بعزل تلك المنحولات وحذفها من تابع الهدف .

أما المتراجحات اليسارية فيمكننا تحويلها الى يمينية بضربها باشارة ناقص اذا كان ذلك لايجعل الثابت الحر في الطرف الايمن سالبا . أما اذا كان الضرب بناقص يؤدي الى ذلك فاننا نضيف منحولا اضافيا الى الطرف الايسر مسبوقا باشاره ناقص الى كل متراجحة يسارية لايمكن تحويلها الى يمينية .

ويجب الانتباه دائما الى أن الثوابت الحرة يجب أن تبقى موجبة أو غير سالبة على الاقل .

أما عندما تكون شروط عدم السالبية غير محققة بالنسبة لبعض المنحولات فعلينا أن نجعلها محققه ، فمثلا اذا كان $x_1 < 0$ فاننا نفرض أن $\grave{x_1} = -x_1$ ونعوض ذلك في جميع المعادلات والمتراجحات فيكون $\grave{x_1} \geqslant 0$

كما يمكننا حساب المنحول السالب من أحد المعادلات ونعوضه في الاخرى ثم عزل هذه المعادلة من الشروط ، أما عندما يكون أحد المنحولات غير مقيد فلا بد من حسابه من أحد المعادلات وعزله عن النموذج .

٣ ـ حاله وجود أكثر من عنصر ارتكاز واحد ، ويظهر هذه الحالة عندما يكون لدينا

$$\theta = \text{Min}[\frac{b_i}{a_{is}}] = \frac{b_t}{a_{ts}} = \frac{b_k}{a_{ks}}$$

ويتم التخلص من هذه الحالة بأن نعتمد أحد العنصرين a_{ts} أو a_{ks} ليكون عنصر ارتكاز ثم نتابع الحل حسب الخوارزمية .

٤ ـ حالة الانحلال (Degeneration) : وهي حالة تنشأ عن الحالة السابقة ونستدل عليها من ظهور صفر في عمود الثوابت المرة وبتطبيق العلاقة (3, 4, 6) في حساب θ يمكننا تجاهل ذلك الصفر والحفاظ على العناصر الموجبة فقط ، أما اذا لم نجد عناصر موجبة في عمود الارتكاز غيرالعنصر المقابل للصفر، فاننا نضطر الى اعتباره عنصرا للارتكاز ثم نتابع العمل كالعادة .

٥ ـ حالة عدم وجود حل مثالي : وقد نصادف هذه الحالة في أية مرحلة من مراحل الحل ، ونستدل عليها من عدم وجود أي عنصر موجب في عمود الارتكاز ، ان هذه الحالة تدل على أنه لايمكننا التخلص من المتحول x_s وحذفه من عبارة تابع الهدف ، وان هذه الحالة تعني أن منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تزايد تابع الهدف Z ، وان هذا يعني بدوره أن المنطقة لاتسمح لنا بتحديد حل مثالي (رغم وجود الكثير من الحلول المقبولة) وذلك لأنه كلما تحركنا باتجاه المنطقة المفتوحة نجد حلولا أخرى تحقق الشروط وتزيد من قيمة تابع الهدف .

ولكننا لانستطيع التوصل الى نقطة معينة لنعتبرها حلا

مثاليا لذلك تسمى هذه الحالة بحالة عدم وجود حل مثالي ، وحين ظهور هذه الحالة نتوقف عن العمل ونعلن ذلك .

٦ ـ حالة وجود أكثر من حل مثالي واحد : وتحدث هذه الحالة عندما يكون مستقيم (مستوى) تابع الهدف موازيا لأحد أضلاع (سطح) منطقة الحلول وواقعا في اتجاه تزايد Z. ونستدل على هذه الحالة بعد حصولنا على الحل المثالي الاول حيث نلاحظ ظهور صفر في السطر الاخير ، مقابل لعمود غير أعمدة المتحولات القاعدية .

أما أعمدة المتحولات القاعدية فهي الاعمدة التي تكون جميع عناصرها معدومة ماعدا أحدها حيث يساوي الواحد ، واذا أردنا الحصول على حل مثالي آخر فاننا نعتبر العمود الذي يحوي ذلك الصفر عمود ارتكاز ونتابع عملية الحل حسب الخوارزمية فنحصل على حل مثالي آخر يختلف باحداثياته عن الحل الاول ولكنه يعطينا نفس القيمة للتابع Z .

٧ ـ حالة الدوار : وهي الحالة التي تعيدنا الى وضعية سابقة كنا قد مررنا بها أثناء عملية الحل ، وللتخلص من هذه الحالة نتأكد من صحة حساباتنا أولا واذا لم نعثر على خطأ فيها نحاول أن نختار عنصر ارتكاز غير العنصر التقليدي الذي تحدده العلاقة (3, 4, 6) وذلك لمرة واحدة في أحد مراحل الحل .

٨ ـ حالة تناقض الشروط : قد تكتشف هذه الحالة مباشرة أو خلال

مراحل الحل ، ونستدل عليها عندما تكون جميع عناصر أحد الاسطر غير موجبة (ماعدا الثابت الحر) وهذا يعني أن منطقة الحلول هي مجموعة خاليه ، ومن الواضح أنه في هذه الحالة لاجدوى من البحث عن حل مثالي ونعتبر المسألة غير قابلة للحل بسبب تعارض الشروط .

٩ ـ حالة الحل المثالي المنحل : وهي الحالة التي تظهر فيها حالة الانحلال السابقة في الوقت الذي نكون قد حصلنا فيه على حل مثالي ونسمي هذا الحل المثالي بحل مثالي منحل لأنه يقابل حالة الانحلال وليس لهذه الحالة أية تأثيرات أخرى .

مثال (6 ـ 4) أوجد بطريقة السمبلكس الحل المثالي للمسألة الواردة في المثال السابق (6 - 3) التالية :

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$

$$4x_1 + 0.x_2 \leqslant 16$$

$$0.x_1 + 4x_2 \leqslant 12$$

$$x_1 \geqslant 0 \quad , \quad x_2 \geqslant 0$$

الحـــل : نحول هذا الشكل الى الشكل النظامي فنحصل على المعادلات التالية :

$$2x_1 + 2x_2 + y_1 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + y_2 = 8$$

$$4x_1 + 0.x_2 + y_3 = 16$$

$$0.x_1 + 4x_2 + y_4 = 12$$

$$x_1 \geq o \ , \ x_2 \geq o \ , \ y_1 \geq o \ , \ y_2 \geq o, \ y_3 \geq o, y_4 \geq o$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 0.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 + 0.y_4 \longrightarrow Max$$

٢ ـ نعد الجدول الاول التالي:

المتحولات / المعادلة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الثوابت الحرة	Θ_i
1	2	2	1	0	0	0	12	$\frac{12}{2}=6$
2	1	2	0	1	0	0	8	$\frac{8}{2}=4$
3	4	0	0	0	1	0	16	-
4	0	[4]	0	0	0	1	12	$\frac{12}{4}=3$*
تابع الهدف	2	3	0	0	0	0	Z	

٣ ـ عند دراسة عناصر السطر الاخير نلاحظ أن أكبر الاعداد الموجبة هو العدد 3 ، المقابل لـ x_2 اذن عمود الارتكاز هو العمود الثاني .

٤ ـ نحسب θ_i وذلك بقسمة عناصر العمود الاخير على العناصر الموجبة المقابلة لها في العمود الثاني فنجد أن

$$\theta_i = \text{Min}\left\{\frac{12}{2}, \frac{8}{2}, \frac{16}{4}\right\} = \frac{12}{4}$$

أي أن السطر الذي يقابل أصغر الارتكاز هو السطر الرابع ، نشير اليه بمربع في الجدول السابق .

٥ ـ نعد الجدول الثاني لاستدلال الاعداد الجديدة .

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الثوابت الجديدة	θ_i
1	2	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	6	$\frac{6}{2}$
2	1	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{2}{1}$ *
3	4	0	0	0	1	2	16	$\frac{16}{4}$
4	0	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	4	—
تابع الهدف	2	0	0	3	0	$-\frac{3}{4}$	12	

٦ ـ نقسم جميع عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز (4) فنحصل على السطر الرابع الجديد .

٧ ـ نجعل جميع عناصر عمود الارتكاز المتبقية مساوية للصفر (ماعدا العنصر المقابل لعنصر الارتكاز).

٨ ـ ولحساب عناصر السطر الاول نضرب عناصر السطر الرابع في الجدول الجديد بـ (2-) (أمثال x_2 في الجدول الاول في السطر الاول مصروبة بنافص) ونجمع الناتج مع عناصر السطر الاول في الجدول الاول فنحصل على عناصر السطر الاول في الجدول الجديد .

لحساب عناصر السطر الثاني نضرب عناصر السطر الرابع في الجدول الجديد بـ (2-) أيضا أمثال لـ x_2 في السطر الثاني ونجمع الناتج الى عناصر السطر الثاني في الجدول الاول فنحصل على عناصر السطر الثاني .

ولحساب عناصر السطر الثالث نضرب عناصر السطر الرابع بـ (0) (أمثال x_2 في السطر الثالث ثم نجمعها الى عناصر السطر الثالث ، وبذلك تبقى عناصر ذلك السطر مساوية لنفسها .

ولحساب عناصر السطر الاخير نضرب عناصر السطر الرابع في الجدول الجديد بـ (3-) (وهي أمثال x_2 في السطر الاخير ، ونجمع الناتج الى عناصر السطر الاخير فنحصل على عناصر السطر الاخير .

٩ ـ نعود من جديد وندرس عناصر السطر الاخير فنجد أنه يوجد عـــدد موجب وحيد هو (2) المقابل لـ (x_1) . اذن نعتبـــــر العمود الاول هو عمود ارتكاز .

١٠ـ نحسب قيمة θ فنجد أن :

$$\theta = \text{Min}[\frac{6}{2} , \frac{2}{1} , \frac{16}{4}] = \frac{2}{1}$$

أي أن السطر الثاني هو سطر الارتكاز وأن العنصر (١) هـــو عنصر الارتكاز .

١١ـ نعد جدولا جديدا لاستقبال الاعداد الجديدة :

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الثوابت الحـــرة	θ_i
1	0	0	½	-2	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	2	$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4^*$
2	1	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	2	—
3	0	0	0	-4	1	2	8	$\frac{8}{2} = 4^*$
4	0	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$
تابع الهدف	0	0	[illegible]	-2	[illegible]	[illegible]	7	13

١٢ ـ نقسم جميع عناصر الارتكار على عنصر الارتكار ونسجل النتائج في الجدول الجديد .

١٣ـ نجعل جميع عناصر عمود الارتكار المتبقية أصفارا .

١٤ـ لحساب عناصر السطر الاول نضرب عناصر السطر الثاني في الجدول الجديد بـ (2-) (أمثال x_1 في السطر الاول في الجدول السابق) ونجمع الناتج الى عناصر السطر الاول السابق فنحصل على عناصر السطر الاول الجديد.

ولحساب عناصر السطر الثالث نضرب عناصر السطر الثاني الجديد بـ (4-) وهي (أمثال x_1 في السطر الثالث السابق) ونجمع الناتج الى عناصر السطر الثالث السابق فنحصل على عناصر السطر الثالث الجديد .

ولحساب عناصر السطر الرابع نضرب عناصر السطر الثاني الجديد بـ (0) ونجمع الناتج الى عناصر السطر الرابع القديم فنحصل على نفس العناصر السابقة .

ولحساب عناصر السطر الاخير نضرب عناصر السطر الثاني الجديد بـ (2-) ونجمع الناتج الى السطر الاخير السابق فنحصل على عناصر السطر الاخير الجديده .

١٥ـ نعود من جديد وندرس عناصر السطر الاخير فنجد أن هناك عددا موجبا هو ($\frac{1}{4}$) المقابل لـ y_4 ، لذلك نعتبر العمود السادس عمود الارتكاز .

١٦ـ نحسب θ فنجد أن :

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{2}{\frac{1}{2}} , \frac{8}{2} , \frac{3}{\frac{1}{4}}\right] = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{2}$$

أي أن سطر الارتكاز يمكن أن يكون السطر الاول أو الثالث .

ولنعتبر أن السطر الاول هو سطر الارتكاز ، وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو العنصر ($\frac{1}{2}$) .

١٧ـ نقوم بحساب العناصر الجديده وفقا للطريقه السابقة فنحصل على الجدول التالي

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الطرف الحر
1	0	0	2	-4	0	1	4
2	1	0	1	-1	0	0	4
3	0	0	-4	4	1	0	0
4	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	2
تابع الهدف	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	$Z - 14$

وبدراسة عناصر السطر الاخير نلاحظ أنها أصبحت كلها غير موجبة، اذن نكون قد توصلنا الى الحل المثالي .

ونحصل على الحل المثالي بوضع المتحولين اللذين يدخلان في عبارة Z (مساويين للصفر أي نضع $y_1 = 0, y_2 = 0$).

ونحسب المتحولات الاخرى من الجدول بعد غض النظر عن العمودين الثالث والرابع فنجد أن :

$$y_4 = 4 \quad , \quad x_1 = 4 \quad , \quad y_3 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$

وبذلك نحصل على الحل المثالي التالي :

$$x_1 = 4 \qquad \text{و} \qquad x_2 = 2$$

حيث يأخذ التابع Z أكبر قيمة له هي $Z = 14$.

مثال (6 - 5) أوجد ($\hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 , \hat{x}_4$) التي تعطينا أكبر قيمة للتابع :

$$Z = 2x_1 + x_2 \longrightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط التالية :

$$x_1 - x_2 + x_4 \leq 0$$

$$x_2 + x_3 \leq 2$$

$$- x_3 - x_4 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \qquad x_4 \geq 0$$

الحـــل : نحول المسألة الى الشكل النظامي فنجد أن الشروط تأخـــذ الشكل التالي :

$$x_1 - x_2 + x_4 + y_1 = 0$$

$$x_2 + x_3 + y_2 = 2$$

$$-x_3 + x_4 + y_3 = 1$$

كما يمكننا كتابة تابع الهدف كمايلي :

$$Z = +2x_1 + x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3$$

نضع هذه العناصر في جدول كالتالي :

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	الثوابت	Θ_i
1	[1]	-1	0	1	1	0	0	0	$\frac{0}{1}$ *
2	0	1	1	0	0	1	0	2	—
3	0	0	-1	-1	0	0	1	1	—
تابع الهدف	2	1	0	0	0	0	0	Z	

ثم نقوم بدراسة عناصر السطر الاخير فنجد أن هنـــــاك عنصرا موجبا مقابل المتحول x_1 . اذن نعتبر عمود x_1 هوعمود الارتكاز.

ولتحديد سطر الارتكاز نلاحظ أننا أمام حالة انحلال لوجود صفر في عمود الثوابت كما أنه لايمكننا اختيار سطر غير سطر ذلك الصفر ليكون سطر ارتكاز بسبب انعدام العناصر المقابلة في عمود x_1 . وبذلك نجد أن عنصر الارتكاز الذي يجب أن نعتمد عليه هو العنصر (١) المشار اليه بمربع .

نقوم باجراء الحسابات فنحصل على الجدول التالي :

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	الثوابت	θ_i
1	1	-1	0	1	1	0	0	0	—
2	0	[1]	1	0	0	1	0	2	$\frac{2}{1}$ *
3	0	0	-1	-1	0	0	1	1	
تابع الهدف	0	3	0	-2	-2	0	0	$z = 0$	

نعود وندرس عناصر السطر الاخير فنجد أن هناك عنصرا موجبا مقابل المتحول x_2 لذلك نعتبر عمود x_2 عمود ارتكاز ونحسب θ من

(6 ,4 ,3) فنجد أن عنصر الارتكاز هو العنصر (١) المشار اليه بمربع . نقوم باجراء الحسابات فنحصل على الجدول التالي :

	الثوابت	y_3	y_2	y_1	x_4	x_3	x_2	x_1	المتحولات / المعادلات
	2	0	1	1	1	1	0	1	1
	2	0	1	0	0	1	1	0	2
	1	1	0	0	-1	-1	0	0	3
	Z = 6	0	-3	-2	-2	-3	0	0	تابع الهدف

وبذلك نكون قد توصلنا الى الحل المثالي ، لأن جميع عناصر السطر الاخير أصبحت غير موجبة ونحصل عليه بوضع :

$$x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 0 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 0$$

فنحصل على أن :

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad y_3 = 1$$

وعندها نجد أن الحل المثالي (2, 2, 0, 0) يعطينا قيمة التابع $Z = 6$.



تمـريـنـــــــــــــات

أوجد الحل المثالي للمسائل التالية :

١- $L = -x_1 + x_2 \longrightarrow Min$

ضمن الشروط

$$2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

٢- $Z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \longrightarrow Max$

ضمن الشروط

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \leq 0 \ , \ x_4 \leq 0$$

٣- $\sum_{j=1}^{4} j.x_j \longrightarrow Max$

ضمن الشروط

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,3,\ldots n)$$

٤ - $$Z = 3x_1 + 2x_2 \longrightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط :

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

٥ - $$Z = x_1 - 4x_2 + 5x_3 \longrightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_j \geq 0 \qquad j: 1, 2, 3$$

٦ - $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \text{Max}$

ضمن الشروط :

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_j \geq 0 \qquad j: 1,2,3,4$$

٧ - $Z = x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \longrightarrow \text{Max}$

ضمن الشروط :

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 12x_5 = 12$$

$$x_j \geq 0 \qquad j: 1,2,3,4,5$$

٨ - $L = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \longrightarrow \text{Min}$

ضمن الشروط :

$$x_1 + x_2 - x_{33} + x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 2$$

$$x_1 - x_3 \leq 3$$

$x_1 \geq 0$ $\quad x_2 \leq 0$ $\quad x_3$ غير مقيد

٩ - $Z = x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \longrightarrow \text{Max}$

ضمن الشروط :

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + 6x_6 \leq 0$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0$ $\quad x_3, x_5$ غير مقيدين

الفصل السابع

أهم نماذج البرمجة الخطية في الاقتصاد

ان عملية البحث عن الخطط المثالية في القطاعات والمؤسسات مرتبطة بنماذج البرمجة الخطية ، حيث ان ما استعرضناه في بحث المدخلات والمخرجات كان يتناول مسألة البحث عن الخطط الانتاجية المقابلة لبديل واحد (أو أكثر) من المنتجات النهائية ، وذلك دون الأخذ بعين الاعتبار الشروط المفروضة على المواد المستخدمة ، في الانتاج وعلى الموارد المتوفرة في المجتمع . وهنا يمكننا أن نميز نوعين من الشروط المفروضة هما :

* الشروط الموضوعية :

وهي الشروط التي لاترتبط بحالة أو بنية المواد الأساسية الداخلة في الانتاج في بداية الفترة المخطط لها ، ولابمقدار الطلب والعرض في الأسواق الخارجية ولابمستوى تقنية الانتاج . ولا بموارد قوة العمل المتوفرة في بداية الفترة المخطط لها ... الخ .

* الشروط المحيطة .

وهي الشروط التي تحدد بواسطة قرارات أو ضرورات اقتصادية واجتماعية . ويذكر من هذه الشروط حجم الاستهلاك والطلب وحجم الفوائد في الانتاج ، ومستوى الأجور والأسعار .... الخ.

وسنستعرض في هذا الفصل أهم النماذج الاقتصادية التي قد نصادفها في عمليات التخطيط وهي

I - نموذج الخطة المثالية للانتاج بين القطاعات :

لنفترض أن

- عدد القطاعات التي تشترك في عملية الانتاج هو n قطاعا .
- قيمة الصيحات الاجمالية لهذه القطاعات هي :

$$X_1, X_2, X_3 \dots X_n$$

قيمة الصيحات النهائية لها هي .

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_n$$

- مصفوفة المعاملات الفنية (لقيم المنتجات) هي المصفوفة B حيث :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

قيمة المنتجات النهائية خلال الفترة الماضية كانت :

$$x_1^{(o)} \ , \ x_2^{(o)} \ , \ x_3^{(o)} \ , \ldots \ x_n^{(o)}$$

والمطلوب : ايجاد النموذج الرياضي لهذه المسألة ، بحيث لاتقل قيم المنتجات النهائية لهذه الفترة عن قيمها خلال الفترة الماضية .

يمكن النظر الى هذه المسألة من عدة زوايا ، وذلك حسب المعيار الاقتصادي الذي نريد تحقيقه والذي يشكل تابع الهدف ، ولكن قبل أن نناقش قضية ايجاد النموذج الرياضي نلاحظ أن قيم المنتجات الاجمالية X_j والنهائية x_j ترتبط مع بعضها بعضا وفق العلاقة (18,2, 5) السابقة والتي تأخذ الشكل التالي :

$$\begin{aligned} X_1 &= b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \ldots + b_{1n}X_n + x_1 \\ X_2 &= b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + \ldots + b_{2n}X_n + x_2 \qquad (1,1,7) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= b_{n1}X_1 + b_{n2}X_2 + \ldots + b_{nn}X_n + x_n \end{aligned}$$

وسنناقش قضية ايجاد النموذج الرياضي حسب المعايير الاقتصادية التالية :

١ ـ عندما نريد أن تكون قيمة المنتجات الاجمالية أكبر مايمكن ،

في هذه الحالة نجد أن تابع الهدف هو التابع التالي :

$$\Sigma = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n \longrightarrow Max \qquad (1,2,7)$$

أما الشروط فهي الشروط المفروضة على قيم المنتجات النهائية وهي :

$$x_1 \geqslant x_1^{(o)}$$

$$x_2 \geqslant x_2^{(o)} \qquad (3,1,7)$$

$$x_3 \geqslant x_3^{(o)}$$

.....

$$x_n \geqslant x_n^{(o)}$$

وشـــروط عدم سالبية قيم المنتجات الاجمالية :

$$X_1 \geqslant o \ , \ X_2 \geqslant o \ , \ X_3 \geqslant o \ \ldots \ X_n \geqslant o$$

واذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلات (1, 1, 7) فان النموذج الرياضي لهذه الحالة يأخذ الشكل التالي :

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n \longrightarrow \text{Max} \qquad (4,1,7)$$

$$X_1 - b_{11}X_1 - b_{12}X_2 \ldots - b_{1n}X_n \geqslant x_1^{(o)}$$

$$X_2 - b_{21}X_1 - b_{22}X_2 \ldots - b_{2n}X_n \geqslant x_2^{(o)} \qquad (5,1,7)$$

.....

$$X_n - b_{n1}X_1 - b_{n2}X_2 \ldots - b_{nn}X_n \geqslant x_n^{(o)}$$

$$X_j \geqslant o \qquad (j = 1,2 \ldots n)$$

ولحل هذا النموذج نحوله الى الشكل النظامي ثم نطبق عليـــه طريقة السمبلكس .

عندما نريد أن تكون نفقات العمل الاجتماعي المصروفة على المنتجات أقل مايمكن :

لنفترض أن L_j هو مقدار العمل الاجتماعي اللازم لانتاج ماقيمته واحدة من منتجات القطاع j وان حجم العمالة غير الانتاجية هو L_o . فاذا كانت X_j هي قيمة منتجات القطاع j فان اجمالي نفقات العمل الاجتماعي على الانتاج في جميع القطاعات يساوي :

$$\sum_{j=1}^{n} L_j X_j$$

واذا كانت الموارد المتوفرة من القوى العاملة تساوي Z_o فان نفقات العمل الاجتماعي يجب أن تحقق الشرط التالي :

$$\sum_{j=1}^{n} L_j X_j + L_o \leqslant Z_o$$

كما أن قيم المنتجات الاجمالية X_j والنهائية x_j ترتبط مع بعضها بعضا بعلاقات التوازن التالية :

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j + x_i \qquad (i = 1,2,3... n)$$

فاذا كانت قيم المنتجات النهائية محددة وتساوي :

$$x_1^{(o)} , x_2^{(o)} , x_3^{(o)} , \ldots x_n^{(o)}$$

فان النموذج الرياضي المطلوب يأخذ الشكل التالي

$$\sum_{j=1}^{n} L_j X_j \longrightarrow \text{Min} \qquad (6,1,7)$$

ضمن الشروط التالية :

$$\sum_{j=1}^{n} L_j X_j + L_o \leqslant Z_o \qquad (7,1,7)$$

$$X_i - \Sigma b_{ij} X_j = x_i^{(o)} \qquad (i = 1,2,3,..n)$$

$$X_j \geqslant o \qquad (j = 1,2,3...n)$$

ولحل هذا النموذج تحوله الى الشكل النظامي ونطبق عليـــــه طريقة (السمبلكس).

٣ ـ عندما نريد أن تكون قيم المنتجات النهائية أكبر مايمكن :

لنفترض أن مصفوفة المعاملات الفنية هي المصفوفـــــــة $B = [b_{ij}]$ وأن الموارد المتوفرة من أدوات العمل هـــو P ومن وسائل العمل هو M ومن القوة العاملة هـو S ، و أن مصفوفة المعايير لنفقات هذه الموارد على انتاج ماقيمتـــه واحدة من المنتجات النهائية هي :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1n} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots & S_{1n} \end{bmatrix}$$

واذا رمزنا بـ X_j لقيم المنتجات الاجمالية و x_i لقيم المنتجات النهائية فانه يمكننا صياغة النموذج الرياضي الذي يسعى لجعـل المنتجات النهائية أكبر مايمكن على الشكل التالي :

تابع الهدف هو :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow Max \qquad (8,1,7)$$

والشروط هي :

$$x_i \geqslant x_i^{(o)} \qquad (i = 1,2,3,...n)$$

$$P_{11}x_1 + P_{12}x_2 + P_{13}x_3 +...+ P_{1n}x_n \leqslant P$$

$$m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 +...+ m_{2n}x_n \leqslant M \qquad (9,1,7)$$

$$S_{31}x_1 + S_{32}x_2 + S_{33}x_3 +...+ m_{3n}x_n \leqslant S$$

حيث ان $x_i^{(o)}$ هو الحد الادنى لقيمة المنتجات النهائية في القطاع i وان الشـــــروط (9,1,7) تعني أن نفقات عوامل الانتاج يجـــــب أن لاتتجاوز المقادير المتوفرة منها .

ولحل هذا النموذج نحوله الى الشكل النظامي ونطبق على طريقـــــة (السمبلكس)والتي منها نحصل على حل مثـالي لقيم المنتجـــات النهائية $(\hat{x_1} , \hat{x_2}...\hat{x_n})$.

وبناء على ذلك الحل المثالي يمكننا الحصول على قيم المنتجـــات الاجمالية من العلاقة :

$$X = (I - B)^{-1}.x .$$

II ـ نموذج الخطة المثالية للقطاع أو الاتحاد :

لنفترض أن القطاع أو الاتحاد مؤلف من n مؤسسة تنتج كل منها m نوعا من المنتجات ، واذا كانت كميات الانتاج قد حددتها السلطات العليا للاتحاد ، حسب الانواع على الشكل التالي :

$$A_1, A_2, A_3 \dots A_m$$

واذا كانت طاقة تلك المؤسسات من القوى العاملة (ساعة عمل) هي :

$$T_1, T_2, T_3 \dots T_n$$

وكانت تكلفة واحدة المنتجات من النوع i في المؤسسة j هي c_{ij} حيث :

$$(j = 1,2,3\dots n \ , \ i = 1,2,3\dots m)$$

وكانت المصفوفة $t = [t_{ij}]$ هي مصفوفة المعاملات الفنية لنفقات العمل.واذا فرضنا أن x_{ij} هو مقدار مايجب انتاجه من النوع i في المؤسسة j وكان هدفنا جعل تكلفة الانتاج أصغر مايمكن . فان تابع الهدف يساوي :

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \text{Min} \qquad (1,2,7)$$

وذلك ضمن الشروط التي تعبر عن أن كميات الانتاج من كل نوع يجب أن تساوي الكميات المحددة :

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = A_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = A_2 \qquad (2,2,7)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = A_m$$

ولقد وضعنا هذه الشروط على شكل مساواه وليس على شكل متراجحات $\geq$ لأن أي زياده في كميه الانتاج ستؤدي الى زياده التكلفه. أما الشروط التي تعترض أن نفقات العمل في كل مؤسسه يجب أن لاتتجاوز المقادير المتوفرة هي

$$t_{11}x_{11} + t_{21}x_{21} + \ldots + t_{m1}x_{m1} \leq T_1$$

$$t_{12}x_{12} + t_{22}x_{22} + \ldots + t_{m2}x_{m2} \leq T_2 \qquad (3,2,7)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{1n}x_{1n} + t_{2n}x_{2n} + \ldots + t_{mn}x_{mn} \leq T_n$$

أما الشروط الفردية فهي :

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1,2,3\ldots m, j = 1,2\ldots n) \qquad (4,2,7)$$

أما اذا كان هدفنا الاستفادة العظمى من الطاقة الانتاجية (الآلية أو العمالية) في كل مؤسسة فان تابع الهدف يصبح التابع التالي:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \longrightarrow Max \qquad (5,2,7)$$

وذلك ضمن الشروط (7 ,2 ,3) و (7 ,2 ,4) السابقة فقط .

وبتحويل هذا النموذج الى الشكل النظامي يمكننا ايجاد حله المثالي بواسطة طريقة (السمبلكس).

مثـــال(7 ـ 1) : لدى اتحاد الصناعات الغذائية ثلاثة مصانـــع لانتاج السكر وان كل منها يمكن أن ينتج نوعين من السكر A و B وان الطاقة الانتاجية (بالطن) لهذه المصانع خلال واحدة الزمـــن (الشهر) وحسب هذين النوعين هي :

المصنع / النوع	1	2	3	ملاحظـــــــات
A	100	120	360	فيما إذ المينتج من النوع B
B	200	240	120	فيما إذ المينتج من النوع A

والمطلوب : ايجاد الخطة الاقتصادية التي تسمح بالاستفادة الكاملة من الطاقة الانتاجية المتوفرة في المصانع الثلاثة .

الحـــل : نلاحظ قبل كل شيء أن مصفوفة المعاملات الفنية للنفقـــات غير معطية في نص المسألة ، ولكن يمكننا حسابها كمايلي :

لنفترض أن اجمالي الطاقة الانتاجية للمصنع الاول تساوي

(١) فعندها نجد أن انتاج واحدة من منتجات النوع الاول تتطلب $\frac{1}{100}$ من طاقة المصنع الاجمالية ، وكما أن انتاج واحدة من منتجات النوع الثاني تتطلب $\frac{1}{200}$ من طاقته الاجمالية ،واذا فعلنا نفس الأمر بالنسبة للمصنعين الثاني والثالث نحصل على المعاملات الفنية المعروضة في الجدول التالي :

المصنع / النوع	1	2	3
A	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{360}$
B	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{120}$

واذا رمزنا بـ x_{ij} لمقدار مايجب انتاجه من النوع i في المصنع j . فاننا نجد أن تابع الهدف الذي يسعى للاستفادة العظمى من الطاقه الانتاجية هو التابع التالي :

$$Z = \frac{1}{100} x_{11} + \frac{1}{120} x_{12} + \frac{1}{360} x_{13} + \frac{1}{200} x_{21} + \frac{1}{240} x_{22} + \frac{1}{120} x_{23} \longrightarrow \text{Max}$$

أما الشروط التي تفرضها الطاقة الانتاجية للمصانع الثلاثة فهي :

$$\frac{1}{100} x_{11} + \frac{1}{200} x_{21} \leq 1$$

$$\frac{1}{120} x_{12} + \frac{1}{240} x_{22} \leqslant 1$$

$$\frac{1}{360} x_{13} + \frac{1}{120} x_{23} \leqslant 1$$

وذلك لاننا افترضنا أن اجمالي طاقة كل مصنع يساوي (١) . واذا أضفنا شروط عدم السالبية $x_{ij} \geqslant 0$. فاننا نحصل على النموذج الرياضي للمسألة السابقة .

ولمتابعة الحل نقوم باصلاح هذه المعادلات فنحصل على :

$$3600\ Z = 36x_{11} + 30x_{12} + 10x_{13} + 18x_{21} + 15x_{22} + 36x_{23} \longrightarrow Max$$

وذلك ضمن الشروط التالية :

$$2x_{11} + x_{21} \leqslant 200$$

$$2x_{12} + x_{22} \leqslant 240$$

$$x_{13} + 3x_{23} \leqslant 360$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

نضع $\grave{Z} = 3600\ Z$ ونضيف الى كل المتراجحات السابقة متحولا اضافيا لنحولها الى الشكل النظامي فنحصل على الشكل التالي :

$$\grave{Z} = 36x_{11} + 30x_{12} + 10x_{13} + 18x_{21} + 15x_{22} + 36x_{23} \longrightarrow Max$$

وذلك ضمن الشروط :

$$2x_{11} + x_{21} + y_1 = 200$$

$$2x_{12} + x_{22} + y_2 = 240$$

$$x_{13} + 3x_{23} + y_3 = 360$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ,$$

نضع هذه النتائج في جدول السمبلكس التالي :

المتحولات / المعادلات	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
1	[2]	0	0	2	0	0	1	0	0	200
2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	240
3	0	0	1	0	0	3	0	0	1	360
تابع الهدف	36	30	10	18	15	30	0	0	0	z'

من دراسة عناصر السطر الاخير نجد أن أكبر عنصر فيه هو (36) المقابل لـ x_{11}. اذن ، يكون عمود x_{11} هو عمود الارتكاز ، وبتقسيم عناصر عمود الثوابت الحرة على عناصر عمود الارتكاز نجد أن العنصر (2) هو عنصر الارتكاز ، وباجراء الحسابات المطلوبة نحصل على الجدول التالي *

---

* نلاحظ أن عناصر السطرين (2) و (3) لم تتغير وذلك لأن عنصرها المتقاطع مع عمود الارتكاز يساوي الصفر ، ويمكن الاستفادة من هذه الملاحظة في الحسابات.

المتحولات / المعادلات	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
1	1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
2	0	[2]	0	0	1	0	0	1	0	240
3	0	0	1	0	0	3	0	0	1	360
تابع الهدف	0	30	10	-18	15	30	-18	0	0	$\hat{z}$-3600

نعود وندرس عناصر السطر الاخير فنجد أن أكبر عنصر فيها هو(30) المقابل لـ x_{12} (أو 30 المقابل لـ x_{23}) لذلك نعتبر عمود x_{12} عمـــود الارتكاز ونجد أن عنصر الارتكاز هو بالضرورة العنصر(2)من السطر الثاني ، نقوم باجراء الحسابات فنحصل على الجدول التالي :

المتحولات / المعادلات	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
1	1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	120
3	0	0	[1]	0	0	3	0	0	1	360
تابع الهدف	0	0	10	-18	0	-30	-18	-30	0	$\hat{z}$-7200

وبالانتقال الى جدول آخر نحصل على الجدول التالي :

المتحولات / المعادلات	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
1	1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	120
3	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	120
تابع الهدف	0	0	-20	-18	0	0	-18	-30	-30	Z-10800

وبدراسة عناصر السطر الاخير نلاحظ أنه قد توصلنا الى الحل المثالي وقبل أن نحسب قيم ذلك الحل نلاحظ أن السطر الاخير يتضمن صفرا في عمود غير أعمدة المتحولات القاعدية وهذا مايدل على وجود أكثر من حل مثالي واحد (لانهاية من الحلول المثالية).

ونحصل على هذه الحلول المثالية بوضع المتحولات ذات الامثال السالبة في السطر الاخير مساوية للصفر ، أي بوضع :

$$x_{13} = 0 \quad , \quad x_{21} = 0 \quad , \quad y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

ومن الجدول نجد أن معادلاته تعطينا :

$$x_{11} = 100$$

$$x_{12} + \frac{1}{2} x_{22} = 120$$

$$x_{23} = 120$$

وهنا نلاحظ أن : x_{12} و x_{22} مرتبطان بالعلاقة السابقة والتي يمكن

كتابتها كمايلي :

$$x_{12} = -\frac{1}{2} x_{22} + 120$$

وهذا يعني أنه مقابل كل قيمة لـ x_{12} نحصل على قيمة لـ x_{22} والعكس بالعكس . فاذا وضعنا $x_{22} = 0$ فاننا نحصل على الحل المثالي التالي:

(1)

المصانع / النوع	1	2	3	المجموع
A	100	120	0	220
B	0	0	120	120

واذا وضعنا $x_{12} = 0$ فاننا نحصل على الحل المثالي التالي :

(2)

المصانع / النوع	1	2	3	المجموع
A	100	0	0	100
B	0	240	120	360

وبين هذين الحلين لانهاية من الحلول المثالية ، فمثلا نجد أنه اذا وضعنا $x_{12} = 50$ فاننا نجد أن $x_{22} = 140$ وبذلك نحصل على الحل المثالي التالي :

المصانع / النوع	1	2	3	المجموع
A	100	50	0	150
B	0	[illegible]	120	[illegible]

(3 1)

وهكذا يمكننا أن نعطي x_{12} القيم المختلفة* فنحصل على قيم مختلفة لـ x_{22} وعند الضرورة يمكننا تحديد قيمة x_{12} أو x_{22} بحيث تكون كمية الانتاج لكلا أو لاحد هذين النوعين متطابقة مع حاجيات المجتمع أو بحيث تكون قد : الانتاج أكبر مايمكن .

وأخيرا نشير الى أن جميع تلك الحلول المثالية تعطينا نفس القيمة للتابع Z حيث نجد أن :

$$Z^{`} - 10800 = o \quad \Longrightarrow \quad Z^{`} = 10800$$

وبالعودة الى Z نجد أن:

$$3600\, Z = 10800 \quad \Longrightarrow \quad Z = 3$$

وهذا يعني أن كامل طاقة المصانع قد استغلت لأننا افترضنا أن اجمالي الطاقة لكل منها يساوي (1) . كما يدل على ذلك انعدام المنحولات الاضافية .

---

* ان x_{12} يمكن أن تأخذ جميع القيم الواقعة في المجال من o الى 120 . كما أن x_{22} تأخذ جميع القيم من o الى 240 (انظر الحلين (1) و (2).

III ـ نموذج الخطة المثالية للمؤسسة :

يوجد عدة أشكال لنموذج خطة المؤسسة ،وسنستعرض هنا نموذج الربح الاعظمي فقط .

لنفترض أن المؤسسة تنتج m نوعا من المنتجات وانها تتألف من n قسما ،طاقة كل منها تساوي :

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots a_n$$

وأن مصفوفة المعاملات الفنية لنفقات الطاقة الانتاجية (العمالية) على واحدة منتجات الاقسام تساوي :

$$B = [b_{ij}] \qquad \begin{matrix}(i = 1,2,3\dots n)\\ (j = 1,2,3\dots m)\end{matrix}$$

حيث :

وأن الربح الناجم عن تسويق واحدة من منتجات النوع j يساوي c_j حيث $(j = 1,2\dots m)$.

واذا رمزنا بـ x_j لمقدار مايجب انتاجه من النوع j في جميع الاقسام ، فان تابع الهدف يأخذ الشكل التالي :

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \longrightarrow Max \qquad (1,3,7)$$

وأما الشروط الخطية فتحددها الطاقة الانتاجية للاقسام ، حيث يجب أن يكون اجمالي ماينفقه كل قسم على الانتاج أقل أو يساوي قدراته ، أي أن ماينفقه القسم i يجب أن يساوي :

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + b_{i3}x_3 + \dots + b_{in}x_n \leq a_i \qquad (2,3,7)$$

حيث $(i = 1,2,3,\dots n)$

كما أن هناك شروط عدم السالبية :

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,3 \ldots m)$$

كما يمكن انشاء نماذج لخطط المؤسسات شبيهة بالنماذج التي عرضناها للقطاع أو الاتحاد في الفقرة السابقة.

مثال(7 – 2) : تقوم احدى المؤسسات بانتاج نوعين من المنتجات هما A و B وذلك في ثلاثة أقسام هي d_1, d_2, d_3 طاقتها الانتاجية في الشهر هي 27000 , 40000 , 24000 ساعة، فاذا كانت مصفوفة معايير الزمن اللازم لانتاج واحدة من المنتجات A و B حسب الاقسام هي :

المنتجات	الأقسام		
	1	2	3
A	3	8	9
B	6	4	3

وادا كان مقدار الربح الناتج عن واحدة منتجات النوع A يساوي 5 ل.س والناتج عن واحدة منتجات النوع B يساوي 6 ل.س المطلوب حساب الخطة التي تجعل الربح أكبر مايمكن.

الحل : لنرمز بـ x_1 و x_2 لمقدار مايجب انتاجه من

النوعين A و B على الترتيب ، وبذلك نجد أن تابع الهدف يأخذ الشكل التالي :

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \longrightarrow Max$$

أما الشروط التي تفرضها الطاقة الانتاجية للاقسام فهي :

$$3x_1 + 6x_2 \leqslant 24000$$

$$8x_1 + 4x_2 \leqslant 40000$$

$$9x_1 + 3x_2 \leqslant 27000$$

بالاضافة الى شروط عدم السالبية .

$$x_1 \geqslant 0 \quad و \quad x_2 \geqslant 0$$

لايجاد الخطة المطلوبة (المثالية) نحول هذا النموذج الى الشكل النظامي ونطبق عليه خوارزمية (السمبلكس). لذلك نقوم باضافة متحول موجب y_i الى كل من المتراجحات السابقة فيأخذ النموذج الشكل التالي :

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط :

$$3x_1 + 6x_2 + y_1 = 24000$$

$$8x_1 + 4x_2 + y_2 = 40000$$

$$9x_1 + 3x_2 + y_3 = 27000$$

$$x_1 \geqslant 0 \ , \ x_2 \geqslant 0 \ , \ y_1 \geqslant 0 \ , \ y_2 \geqslant 0 \ , \ y_3 \geqslant 0$$

ثـم نضع هذه المعلومات في جدول السمبلكس فنحصل على الجدول التالي:

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	الثوابت الحرة	Θ
1	3	6	1	0	0	24000	$\frac{24000}{3}$
2	8	4	0	1	0	40000	$\frac{40000}{8}$
3	[9]	3	0	0	1	27000	$\frac{27000}{9}$ *
تابع الهدف	9	6	0	0	0	Z	

ومن دراسة عناصر السطر الاخير نلاحظ أن أكبر عنصر موجب فيها هـو (9) المقابل لـ x_1 ، لذلك نعتبر عمود x_1 عمود الارتكاز ثـم نقسم عناصر السطر الاخير على عناصر عمود الارتكاز فنجد أن :

$$\Theta = \text{Min}\left[\frac{24000}{3} , \frac{40000}{8} , \frac{27000}{9}\right] = \frac{27000}{9}$$

اذن العنصر (9) المسار اليه بمربع هو عنصر الارتكار .

نقوم بـ ... الحسابات حسب خوارزمية السمبلكس فنحصل على جـدول

التالـــــي :

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	الثوابت الحـــرة	θ	
1	0	[5]	1	0	$-\frac{1}{3}$	15000	$\frac{15000}{5}$	*
2	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{8}{9}$	16000	$\frac{16000}{\frac{4}{3}}$	
3	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{9}$	3000	$\frac{3000}{\frac{1}{3}}$	
تابع الهدف	0	3	0	0	-1	Z-27000		

ومن دراسة عناصر السطر الاخير نلاحظ أنه لم نصل الى الحل المثالي وذلك لوجود عنصر موجب فيه هو (3) المقابل لـ x_2، لذلـك نعتبر عمود x_2 هو عمود الارتكاز ونحسب θ فنجد أن :

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{15000}{5} \ , \ \frac{16000}{\frac{4}{3}} \ , \ \frac{3000}{\frac{1}{3}}\right] = \frac{15000}{5}$$

لذلك نعتبر العنصر (5) عنصر الارتكاز ثم تحسب الجدول الجديـد

فنحصل على الجدول التالي :

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	الثوابت الحرة	θ
1	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{15}$	3000	
2	0	0	$-\frac{4}{15}$	1	$-\frac{36}{45}$	12000	
3	1	0	$-\frac{1}{15}$	0	$\frac{6}{45}$	2000	
تابع الهدف	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$Z - 36000$	

وبدراسة عناصر السطر الاخير نلاحظ أنها لاتتضمن أي عنصر موجـــــب اذن نكون قد توصلنا الى الحل المثالي ونحصل عليه بوضع المتحولين $y_1 = o$ ، $y_2 = o$ وبذلك نحصل على :

$$x_1 = 2000 \ , \quad x_2 = 3000 \ , \quad y_2 = 12000$$

أما تابع الهدف فيبلغ عند هذا الحل :

$$o = Z - 36000 \quad \Longrightarrow \quad Z = 36000$$

اي أن المؤسسة ستحقق أكبر ربح ممكن اذا تبنت الخطة التي تتضمن انتاج 2000 وحدة من النوع الاول و3000 وحدة من النوع الثاني وهو يبلغ 36000 ل.س ،ويبقى 12000 ساعة غير مستغلة في القسم الثاني.

IV- نماذج النقـــــل :

يمكن معالجة مسألة النقل على شكلين : كمسألة لنقـــل المواد أو كمسألة لتوزيع وسائل النقل :

أ ـ نموذج نقل المواد من مراكز الانتاج الى مراكز الاستهـــــلاك بأقل تكلفة .

لنفترض أنه لدينا n مركزا لانتاج أو تخزين سلعة ما ، وأن هـــذه السلعـــة متوفرة في هذه المراكز بكميات تساوي :

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n$$

كما نفترض أنه لدينا m مركزا لاستهلاك هذه السلعة وهي تحتاج الى كميات منها تساوي :

$$b_1, b_2, b_3 \dots b_m$$

ولنفترض أن اجمالي الكميات المتوفرة يساوي اجمالي الكميـــــات المطلوبة أي نفترض أن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \qquad (1,4,7)$$

ولنفترض أن تكلفة نقل الواحدة من هذه السلعة من المركـــــز الانتاجي i الى المركز الاستهلاكي j تساوي c_{ij} .

والمطلوب : تحديد حجم عمليات النقل من مراكز الانتاج الى مراكـــز الاستهلاك بحيث تكون التكلفة أقل مايمكن .

لمعالجة هذه المسألة نرمز بـ x_{ij} لحجم ماينقل من السلعة من المركز الانتاجي i الى المركز الاستهلاكي j فيكون تابع الهدف هو التابع التالي .

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow Min \qquad (2,4,7)$$

أما الشروط فتحددها الكميات المتوفرة والمطلوبة من السلعة في كل مركز حيث يجب أن يكون مجموع مايُنقل من المركز الانتاجي i الى جميع المراكز الاستهلاكية مساويا لما هو متوفر فيه ، اذن يجب أن يكون

$$x_{i1}+ x_{i2}+ x_{i3} +... x_{in}= a_i \quad (i=1,2,3,...n) \quad (3,4,7)$$

كما يجب أن يكون مجموع مايصل الى المركز الاستهلاكي j من جميع المراكز الانتاجية مساويا لما يحتاجه ذلك المركز.أي يجب أن يكون :

$$x_{1j}+ x_{2j}+ x_{3j} +... x_{nj}= B_j \quad (j=1,2,3... m) \quad (4,4,7)$$

* ملاحظة : اذا لم يكن الشرط (1,4,7) محققا فاننا نكون أمام مايسمى بالنموذج المفتوح ، وهنا نميز بين الحالتين التاليتين :

ا ـ اذا كانت الكميات المتوفرة أكبر من الكميات المطلوبة، فاننا نضيف الى المراكز الاستهلاكية المحددة في المسألة مركزا وهميا اضافيا ونجعل استهلاكه يساوي b_{m+1} حيث :

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5,4,7)$$

أما تكلفة النقل اليه فنضعها مساوية للصفر أي نضـــــــع

$$c_{im+1} = o \quad .$$

٢- اذا كانت الكميات المتوفرة أقل من الكميات المطلوبة فاننـــا نضيف الى المراكز الانتاجية المحددة في المسألة مركزا وهميـــا اضافيا ونجعل انتاجـــه يساوي a_{n+1} حيث :

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (6,4,7)$$

كمع نضع $c_{n+1j} = o$

وبذلك تعود المسألة الى حالتها الاولى ، ويكون نموذجها نفس النموذج السابق مع اضافة المركز الجديد .

ب ـ نموذج توزيع وسائل النقل على الخطوط :

لنفترض أنه لدينا n نوعا من وسائل النقل (مـــــن الطائرات أو السفن أو الشاحنات أو القافلات ... الخ) ونريـــــد توزيعه على m خطا .

ولنفترض أن طاقة واحدة النوع i على الخط j هي a_{ij} في واحدة الزمن ، وأن نفقات النقل المترتبة على واحدة النقل هـــي c_{ij} وأن متطلبات الخط j تساوي a_j في واحدة الزمن وأن عدد وسائـــل النوع i محدودة وتساوي N_i .

والمطلوب : ايجاد التوزيع المثالي الذي يلبي متطلبات الخطوط بأفضل تكلفة ممكنة .

لنرمز لعدد وسائل النقل من النوع i التي يجب أن تعمل على الخط j بالرمز x_{ij} ، فعندها نجد أن تابع الهدف يأخذ الشكل التالي :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow Min \qquad (7,4,7)$$

أما الشروط فتحددها متطلبات الخطوط وعدد وسائل النقل حيث نجد أن اجمالي مايجب نقله على الخط j بجميع الوسائل الممكنة يجب أن يساوي متطلبات ذلك الخط a_i أي أن :

$$a_{1j}x_{1j} + a_{2j}x_{2j} + a_{3j}x_{3j} + \ldots a_{nj}x_{nj} = a_j \qquad (8,4,7)$$

حيث ان : $(j = 1,2, \ldots m)$

كما نجد أن عدد وسائل النقل من النوع i والعاملة على جميع الخطوط يجب أن يساوي N_i ، أي أن :

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots x_{im} = N_i \qquad (9,4,7)$$

حيث أن : $(i = 1,2,3, \ldots n)$

اضافة الى شروط عدم السالبية وهي :

$$x_{ij} \geqslant o \qquad (i = 1,2,\ldots n \ , \ j = 1,2,3,\ldots m)$$

ملاحظه : كان بالامكان وضع الشروط (7 , 4 , 8) و (7 , 4 , 9) على شكل متراجحات من الشكل $\geq$ و $\leq$ على الترتيب وعندها يجب أن ندخل متحولا آخر الى كل من المعادلات (7,4,8) للتعبير عن متطلبات الخط وحجم النقليات ونرمز لهذه المتحولات بـ $x_{n+1,j}$ وندخلها على المعادلات السابقة .

كما نفعل نفس الشيء بالنسبة للمعادلات (7 , 4 , 9) حيث يجب أن نضيف الى كل معادلة منها متحولا x_{im+1} ليعبر عن عدد وسائل النقل التي لم تستخدم في عملية النقل من النوع i كما ندخل هذه المتحولات على عبارة تابع الهدف بأمثال تساوي الصفر ، وبذلك يصبح النموذج السابق على الشكل التالي :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + o. \sum_{j=1}^{m} x_{n+1j} + o \sum_{i=1}^{n} x_{im+1} \qquad (10,4,7$$

ضمن الشروط :

$$a_{1j}x_{1j} + a_{2j}x_{2j} + \dots a_{nj}x_{nj} + x_{n+1j} = a_j \qquad (11,4,7)$$

$$(j = 1,2,3,\dots m)$$

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \dots x_{im} + x_{im+1} = N_i \qquad (12,4,7)$$

$$(i = 1,2,3,\dots n)$$

ويمكن أن نحل هذا النموذج بواسطة السمبلكس علما بأنه يوجد طرق أخرى خاصة لحل مسائل النقل . ويجب أن نشير الى أن الحل المثالي لهذا النموذج يجب أن يكون مؤلفا من أعداد صحيحة لأن عدد وسائل النقل لا يمكن أن يكون الا عددا صحيحا ، ومع أن هذه المسألة وما شابهها يخضع لنوع آخر من البرمجة يسمى بالبرمجة التامة . الا أنه عند بعض عن غير صحيح يمكننا أن نقرب الى الاعلى أو الى

الأسفل لنحصل على حل صحيح يحقق الشروط السابقة ولكن يجب التحقق من ذلك الحل لأن عملية التقريب قد توصلنا الى أرقام لا تحقق الشروط المفروضة .

V ـ نموذج توزيع التكوين الرأسمالي بين القطاعات :

لنفترض أن عدد القطاعات هو n قطاعا ، وأن I_j هو مقدار التكوين الرأسمالي المخصص للقطاع j . واذا رمزنا لاجمالي حجم التكوين الرأسمالي بـ I فان :

$$I = \sum_{j=1}^{n} I_j$$

ولندخل مفهوم تزايد صافي القيمة المضافة في القطاع j ونرمز له بالرمز Δ_j حيث $\Delta_j = d_j - \grave{d}_j$ حيث d_j و $\grave{d}_j$ هما صافي القيمة المضافة في نهاية فترة الخطة وبدايتها على الترتيب نتيجة لاستثمار التكوين الرأسمالي I_j.

كما ندخل مفهوم مؤشر الفعالية الاقتصادية للتكوين الرأسمالي في القطاع j وهو عبارة عن مقدار تزايد صافي القيمة المضافة نتيجة استثمار واحدة نقدية في القطاع j وهو يساوي :

$$K_j = \frac{\Delta_j}{I_j} \qquad (1,5,7)$$

وهي مقادير يجب أن تكون معلومة احصائيا من السنوات السابقة .
ومن الطبيعي أن يكون تابع الهدف في هذه المسألة هو تعظيم اجمالي تزايد صافي القيمة المضافة في جميع القطاعات والذي نرمز له بـ

الذي يأخذ الشكل التالي :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j = \sum_{i=1}^{n} K_j I_j \longrightarrow \text{Max} \qquad (2,5,7)$$

واذا رمزنا بـ b_{ij} لقيمة منتجات القطاع i اللازمة لزيادة صافي القيمة المضافة في القطاع j بمقدار واحدة نقدية فقط، فان قيمة منتجات القطاع i اللازمة لزيادة صافي القيمة المضافة في القطاع j بـ Δ_j تساوي $b_{ij}\Delta_j$. وبذلك نجد أن اجمالي مايلزم من القطاع i لجميع القطاعات الاخرى يساوي :

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta_j$$

ومن المعلوم أن قيمة منتجات القطاع i التي يمكن أن تخصص للتكوين الرأسمالي لايمكن لها أن تتجاوز قيمة المنتوج النهائي V_i لذلك القطاع ، أي يجب أن يكون :

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta_j \leqslant V_i$$

حيث ان : $(i = 1,2,3,\ldots n)$

وبتعويض Δ_j من العلاقة (1, 5, 7) نحصل على الشروط الخطية التالية :

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}K_jI_j \leqslant V_i \qquad (3,5,7)$$

وهي الشروط الخطية لتابع الهدف (7 , 5 , 2) والتي تدخل فيها I_j كمتحولات مجهولة وتتميز بعدم سالبيتها .

VI – نموذج تركيب الوجبات الغذائيـــة :

ان مسألة تركيب الوجبات الغذائية هي من أول المسائـــل التي عالجتها البرمجة الخطية وان هذه الخصة مهمة جدا للمستشفيات والمعكسرات والمطاعم العامة والخاصة ولها نفس الأهمية بالنسبـــــه لمربي الحيوانات حين تحضير العليقة العلفية .

لنفترض أننا نريد أن نركب وجبة غذائية من n مادة من المـــواد الغذائية (كالخبز واللحم والخضار ... الخ) وأن كل منها يحتـــوي على m عنصرا غذائيا (بروتين – كربوناب – فيتامين ... الخ)وذلك بشرط أن لاتقل كمية العنصر الغذائي i في الوجبه عن المقدار الضروري b_i وبحيث تكون تكلفة تلك الوجبـــه أقل مايمكن .

لايجاد النموذج الرياضي لهذه المسأله نفترض أن كل واحده مـــن المادة الغذائية J تحتوي على مقدار من العنصر الغذائي i يساوي a_{ij} وأن سعر المادة j يساوي c_j .
واذا رمزنا لمقدار مايجب أن يدخل في الوجبة من الماده j بالرمز x_j عندها نجد أن تابع الهدف يساوي :

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots c_nx_n \longrightarrow Min \quad (1,6,7)$$

أما الشروط فتحددها اجمالي كمية العنصر i المطلوبـــه فـــي الوجبة والمجتمـــع من جميع المواد الغذائية وهو يساوي بالنســـــه للعنصر i مايلي :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots a_{in}x_n \geqslant a_i \quad (2,6,7)$$

حيث ($i = 1,2,3,\dots m$).

وهناك شروط عدم السالبية :

$$x_i \geqslant o \qquad (j = 1,2,3... n)$$

VII – نموذج الاستغلال الأمثل للأراضي الزراعية :

لنفترض أنه لدينا n منطقة زراعية (سهل أو مزروعة) مساحة كل منها تساوى $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$

ويريد زراعتها m نوعا من المحاصيل الزراعية وذلك لتأمين متطلبات المجتمع حيث يلزمنا من المحصول i المقدار b_i .

واذا كان متوسط انتاجية واحده المساحة في السهل j من المحصول i يساوي a_{ij} / طن / هكتار ، وكان الربح الحاصل من كل واحدة من المحصول i يساوي P_i .

والمطلوب تحديد مقدار المساحه اللازمة زراعتها بكل من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحقيق أكبر ربح ممكن ولتلبية حاجات المجتمع.

لنرمز بـ x_{ij} لمقدار المساحة من المنطقة j التي يجب زراعتها بالمحصول i وعندها نجد أن الشروط المفروضة على هذه المحصولات هي :

ا – شروط المساحات : حيث يجب أن يكون اجمالي المساحة المخصصة لمختلف المحاصيل في المنطقة j مساويا لمساحة تلك المنطقه a_j أي أنه يجب أن يكون :

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + \dots x_{mj} = a_j \qquad (1,7,7)$$

حيث ($j=1,2,3 \dots n$)

٢ ـ شروط تلبية متطلبات المجتمع : حيث يجب أن لايقل اجمالـــــي الانتاج من المحصول i في جميع المناطق عن المقـــــدار b_i ، اي أنه يجب أن يكون

$$a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + a_{i3}x_{i3} + \dots a_{in}x_{in} \geq b_i \qquad (2,7,7)$$

حيث ($i=1,2,3 \dots m$)

أما الربح الحاصل من انتاج المحصول i فقط فيساوي :

$$P_i(a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \dots \ a_{in}x_{in})$$

وبذلك نجد أن تابع الهدف الذي يعبر عن الربح الاجمالـــــي الناتج عن جميع المحاصيل يساوي :

$$Z=P_1(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_{1j})+P_2(\Sigma a_{2j}x_{2j})+\dots P_n(\Sigma a_{mj}x_{mj}) \qquad (3,7,7)$$

وذلك ضمن الشروط (2, 7, 7) و (1, 7, 7).

وشروط عدم السالبية :

$$x_{ij} \geq o \qquad (i = 1,2,3,\dots m)$$

$$(j = 1,2,3,\dots n)$$

تمرينـــــــــــــات

١ ـ ينتج مصنع نوعين من المنتجات A و B ويستخدم لذلك نوعين من الآلات U و V وأن أقصى طاقة للآلة U هو ٤ ساعات وللآلة V هو 12 ساعة في اليوم ، كما أن النفقات الزمنية (في الساعات) لهذين النوعين من الآلات لانتاج واحدة من أحد المنتجات معطية بالجدول التالي :

الآلة / المنتجات	آلات	
	U	V
A	1	2,5
B	4	2

وأن الربح الناجم عن كل واحدة من A يساوي 30 ل.س وعن كل واحدة من النوع B يساوي 40 ل.س

والمطلوب : ايجاد الخطة الانتاجية المثالية التي تحقق أكبر ربح ممكن في اليوم .

٢ ـ دخلت الميناء ثلاث سفن : الاولى تحمل 6000 طن اسمنت والثانية 4000 طن حديد والثالثة 3000 طن رقام، ويمكن تفريغ هذه البواخر بطريقتين هما :

- تفريغ مباشر الى القطار .
- تفريغ الى المستودعات .

ويمكن تفريغ 8000 طن فقط وفق الطريقة الاولى أما الباقي (5000) طن فينقل الى المستودعات .

واذا كانت تكلفة تفريغ الطن الواحد الى القطار مباشرة تساوي 4 و 5 و 2 على الترتيب وكانت تكلفة نقل الطن الواحد الى المستوع تساوي 7 و 6 و 3 على الترتيب .

ماهي الخطة المثالية لتفريغ محتويات السفن الثلاث بأقل تكلفة ممكنة ؟

٣ - تنألف احدى المؤسسات من قسمين A و B ، تقم بأمين المادة الأولية لهما من ثلاثه مراكز C و D و E. فاذا كانت تكلفه نقل واحدة الماده الاولية كما في الجدول التالي :

القسم الى / من المركز	A	B
C	16	17
D	18	21
E	19	20

وكانت الطاقة الانتاجية للمراكز في واحده الزمن هي 4 و5 و5

على الترتيب . والطاقة الانتاجية لقسمي المؤسسة هي 7 و 6 على الترتيب .

وكان الربح الناجم عن كل واحدة من المادة الاولية يتم تصنيعها في المؤسسة بدون الأخذ بعين الاعتبار تكلفة النقل يساوي 30 ل.س عن كل واحدة . والمطلوب : ايجاد الخطة المثالية لتأمين المواد الاولية التي تحقق أكبر ربح ممكن للمؤسسة .

حاول أيضا أن تجد الخطة المثالية لأقل تكلفة لنقل 100 طن من المركز الاول و 200 طن من المركز الثاني و 300 طن من المركز الثالث الى قسمي المؤسة اللذين يتطلبان 200 طن و 400 طن على الترتيب .

الفصل الثامن

مبادئ التخطيط الشبكي

I - مقدمة وتعاريف :

ان التخطيط الشبكي هو نظام للتخطيط والادارة ، يتناول تخطيط العمليات المعقدة وادارة تنفيذها بأقصر زمن وأقل كلفة . وهو يعطينا امكانية لاكتشاف نقاط الاختناق ولاجراء التصحيحات اللازمة وبعتد هذا النظام على تجزئة المشروع أو أية عملية معقده الى عمليات بسيطة ثم وضعها على شبكه تعكس ترتيب جميع تلك العمليات وتوضح العلاقه بينها ، وتسمى هذه الشبكة بشبكة الاعمال Network وهي تتألف من عنصرين أساسيين هما : الانشطه والحوادث .

لذلك نبدأ بتعريف كل من هذين العنصرين والقضايا المتعلقة بهما :

* النشاط (العملية) :

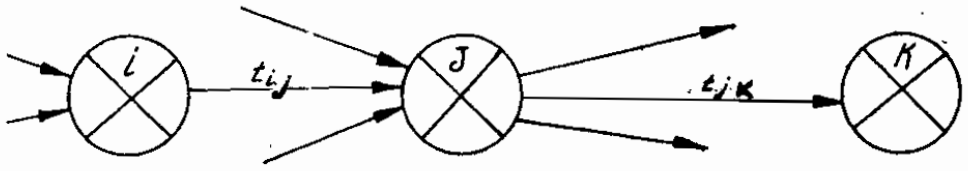
وهو أي اجراء لتنفيذ عمل ما . والنشاط يكون مصحوبا بزمن ومقرونا بكلفه. أي أن لكل نشاط مدة زمنية محددة (أوعشوائية)

ويتطلب موارد انسانية مادية لتنفيذه. ويُرسم كل نشاط على الشبكة على شكل سهم تعلوه المدة الزمنية (t_{ij}) اللازمة لتنفيذه ، ويتجه من حادث بدايته الى حادث نهايته .

* الحـــادث :

وهو واقعة تشير الى بداية نشاط ما أو نهايته . ولايرافق الحادث أي زمن أو تكلفة . ونرسم الحادث على الشبكة على شكل دائرة تتضمن رقمه (j). والحادث قد يكون نتيجة لنهاية عدد من الانشطة أو يكون بداية لعدد آخر منها .

وتسمى الانشطة التي تنتهي بذلك الحادث (j) بالانشطة السابقة له . أما الانشطة التي تبدأ من (j) فتسمى بالانشطة اللاحقة له . وسنرمز للنشاط بدليلي حادثي انطلاقه واستقراره كمايلي : $\overrightarrow{(i,j)}$, $\overrightarrow{(J,K)}$ .....الخ . ويمكننا تمثيل ذلك على الشكل التالي :



الشكل رقم(8 - 1) تمثيل الانشطة والحوادث .

فالنشاط (i, j) على الشكل (8 - 1) وكل نشاط في حكمه يعتبر من الانشطة السابقة للحادث (J) وهو يبدأ من (i)

وينتهي في (J).

أما النشاط (K ، J)وكل نشاط في حكمه يعتبر نشاطا لاحقـــــا بالحادث (J) وهو يبدأ من (J) وينتهي في (K).

أما t_{ij} و t_{jk} فهمامدتا تنفيذ النشاطين (J , i)و(K , J) على الترتيب ، كما يمكن أن نرسم الانشطة والحوادث على الشبكـــــة باستخدام رموز واصطلاحات أخرى . كأن نرسم الحوادث على شكل مربعات أو مستطيلات أو معينات .... الخ . وهناك أسلوب آخر مغاير لرســـم الانشطة حيث ترسم الانشطة على نفسهـا شكل مستطيلات أو دوائـر وتتصل فيما بينها بواسطة أسهم عبر عن العلاقـات بيـن تلـــك الانشطـــة .

* النشاط الوهمـــي :

هو نشاط فرضي لايرافقه زمن ولاتكلفه نستخدمه أحيانـــا للتخلص من بعض الحالات الشاذة ، ونرسمه على الشبكة بسهـــــم متقطـــع .

* الحادث الوهمـــي :

هو حادث فرضي نستخدمه للتخلص من بعض الحالات

* الشبكـــــة :

وهي التمثيل المتشابك والمتتالي لمجموعة الانشطـــــــة ، المتفصلة فيما بينها بواسطة حوادث تتفق مع شروط الاسبقية .
وعند تشكيل الشبكات يجب أن نراعي فيها القواعد الاساسية التالية :

1 - أن يكون للشبكة حادث بداية وحيد ولايسبقه أي نشـــــاط ونرمز لهذا الحادث بالرمز P_o ونعطيه الرقم(o).

2 - أنلاتتضمن الشبكة أي حادث ليس له أنشطه سابقـــــة (غيـــر حادثالبداية P_o). واذا صدف واعترضتنا حوادث بـــــدون أنشطة سابقة لها فاننا نقوم بادخال أنشطة وهميـــــــة تصلهابحادث البداية أوبأي حادث آخر مناسب أي ونرمـــــز لهذه الانشطة الوهمية بأسهم متقطعه ولانضع لها زمنـــــا ولاكلفة .

3 - أن يكون للشبكة حادث نهاية وحيدا ، ويسمى الهـــــدف ، ولايلحق به أي نشاط كان ، ونرمز لهذا الحادث الاخيـــــر بالرمز P_n .

4 - أن لاتتضمن الشبكة أية حوادث ليس لها أنشطة لاحقة بهـــا (غير حادث النهاية P_n) . واذا اعترضتنا حوادث بدون أنشطة لاحقة فاننا ندخل على الشكبة أنشطة وهمية لوصـــل تلك الحوادث بالحادث الاخير أوبـــأيحادث آخر مناسب .

5 - أن يكون توالـي الحوادث وتشابك الانشطة في الشبكةمنسجما

مع القاعدة الاساسية الهامة والتي تنص على مايلي:
لايمكن أن يتحقق الحادث مالم تنجز جميع الانشطة السابقة له ، كما لايمكن البدء في تنفيذ أي نشاط مالم يكن حادث بدايته قد تحقق تماما .

6 - أن لاتتضمن الشبكة أي دوار ناجم عن اتجاهات الاسهم فيها .

* خطوات انشاء الشبكة :

1 - نقوم باعداد قائمة بجميع الحوادث والانشطة في جدول خاص بحيث يتم توضيح الانشطة السابقة واللاحقة لكل حادث .

ونقوم باجراء ذلك على مثال لبناء بيت منفرد ، فنجد أنها تتألف من الانسطه التالية (مثال فرضي) الحصول على الرخصة ،حفر الاساس . تدعيم الاساس،أقامة الاعمده ، تمديد المجاري . سكب السطح وتسديد الجدران . تركيب النوافذ والابواب . تمديد شبكة الكهرباء تمديد شكه المياه ،ردم الارضيه ،تلبيس الجدران ،تبليط الارض ،دهان المنزل .

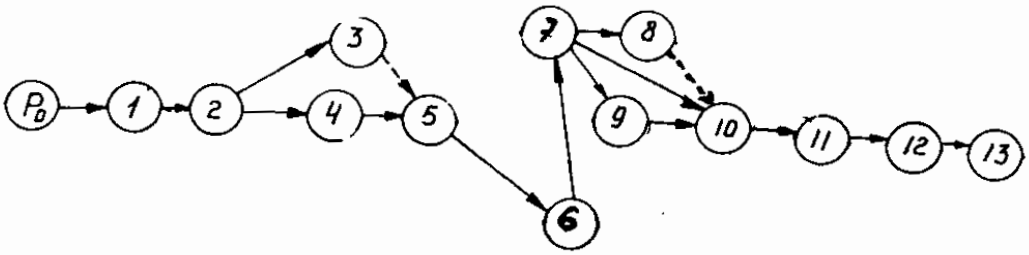
ولترتيب هذه الانسطه ودراسة علاقاتها نضعها في جدول كالجدول التالي :

جدول ترتيب الانشطة وبيان علاقاتهـــــــــا

اســـم النشـــــاط	حـــادث انطلاقـــه	حـــادث استقراره	الانشطة السابقـــة	الانشطة اللاحقـــــة	مدة التنفيذ	الكلفـــة
الحصول على الرخصـــه	P_o	1	——	(1,2)	t_{01}	C_{01}
حفر الأســـــاس	1	2	(0,1)	(2,3) , (2,4)	t_{12}	C_{12}
تمديد المجـــــاري	2	3	(1,2)	——	t_{23}	C_{23}
تدعيم الاســـاس	2	4	(1,2)	(4,5)	t_{24}	C_{24}
اقامة الأعمـــــده	4	5	(2,4)	(5,6) , (5,7)	t_{45}	C_{45}
تشييد الجـــــدران	5	6	(4,5)	(6,7),	t_{56}	C_{56}
سكـــب السطـــح	6	7	(5,6)	(7,8),(7,9),(7,10)	t_{67}	C_{67}
تمديد شبكه الكهربـــاء	7	8	(6,7)	——	t_{78}	C_{78}
تمديد شبكة المياـــاه	7	9	(6,7)	(9,10)	t_{79}	C_{79}
تركيب النوافذ والابواب	7	10	(6,7)	(10,11)	$t_{7,10}$	$C_{7,10}$
ردم الارضيـــــة	9	10	(7,9)	(10,11)	$t_{9,10}$	$C_{9,11}$
تلبيس الجـــــدران	10	11	(9,10) (7,10)	(11,12)	$t_{10,11}$	$C_{10,11}$
تبليـــــط الأرض	11	12	(10,11)	(12,13)	$t_{11,12}$	$C_{11,12}$
دهان المنـــــزل	12	13	(11,12)	——	$t_{12,13}$	$C_{12,13}$

2- نقوم برسم الشبكة انطلاقا من حادث البداية P_o حتى حادث النهاية P_n وابتداء من اليسار الى اليمين ، وبحيث نراعي جميع العلاقات بين كل نشاط والانشطة السابقة واللاحقة له والوارده في الجدول .

وكمثال على ذلك نقوم برسم شبكة الانشطة للمثال السابق فنحصل على الشكل رقم(8 - 2):



الشكل رقم(8 - 2) : شبكة الانشطة للمثال السابق .

حيث قمنا برسم الانشطة على التوالي ابتداء من P_o حتى حادث النهاية (13) ولقد أضفنا نشاطين وهميين هما : (5 , 3) و (10 , 8) وذلك حتى لاتتضمن الشبكة حوادث لالواحق لها .

وأخيرا نشير الى أنه يمكننا أن نستخدم رموز أخرى لرسم الشبكات حيث يمكننا أن نمثل الانشطة بدوائر أو مربعات أو مستطيلات أما الاسهم فنستخدمها للدلالة على العلاقات بين تلك الانشطة. ولكننا لن نستخدم هذه الرموز الاخيرة في عملنا هذا .

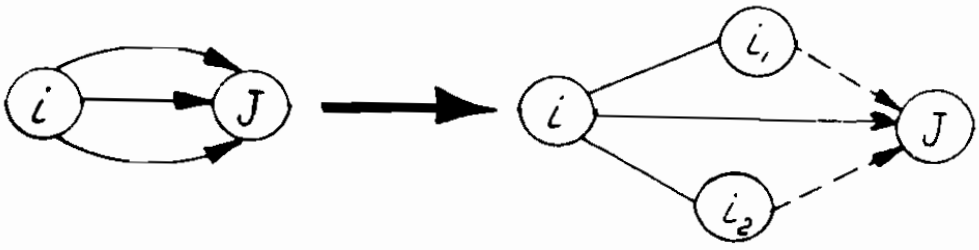
* المســـــار :

وهو أية مجموعة من الانشطة المتتالية والتي تبدأ مـــن حادث البداية وتنتهى عند حادث النهاية . أي أنه أي طريق ينقلنـــا وفقا لاتجاه الأسهم من حادث البداية الى حادث النهاية .

* معالجة بعض الحالات الخاصة :

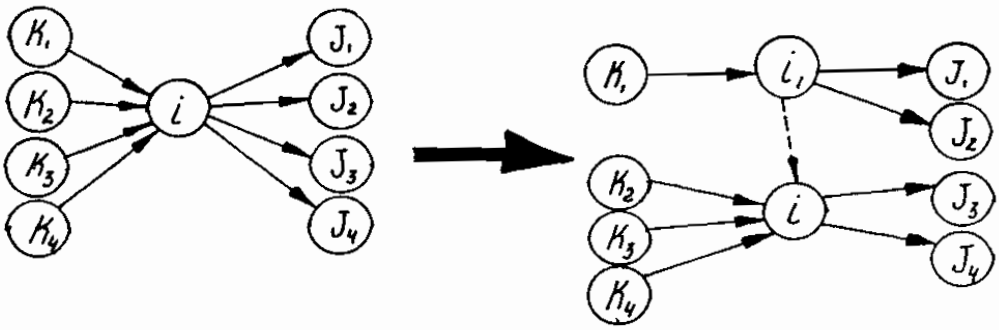
عند رسم الشبكة قد نصادف حالات غير عادية منها :

أ - الحالة التي يكون فيها عدة أنشطـــة (K نشاطا) نشترك بنفس حادث الانطلاق (i) وبنفس حادث الاستقرار (J) : فلتمييز هذه الانشطة عن بعضها بعضا ، نقوم بادخـــــال (K - 1) حادثا وهميا ثم نصلهم بالحادث (J) بواسطة (K - 1) نشاطا وهميا كما في الشكل رقم (8 - 3) (عندما K = 3) :



الشكل رقم (8 - 3)

ب ـ الحالة التي يكون فيها للحادث (i) عدد من الأنشطة السابقة له وعدد من الانشطة اللاحقة به ويكون بعض الانشطة اللاحقة لايشترط تنفيذ الاّ بعض الانشطة السابقة له. فعندها يمكننا فصل هذه الانشطة الى زمرتين وذلك بادخال نشاط وهمي على الشكل رقم(8 - 4):



الشكل رقم(8 - 4)

* تحديد المدةالزمنية لكل نشاط :

ان المدة الزمنية لكل نشاط قد تكون محددة تماما، وعندها نعتبر أن مدة النشاط (i.j) هي $t_{ij} = d_{ij}$ حيث أن d_{ij} هي كمية غير عشوائية.

أما عندما تكون المدةالزمنية t_{ij} عشوائية فاننا نأخذ التوقع الرياضي لـ t_{ij} كأفضل تقدير لتلك المدة ويرمز له بـ $\bar{t}_{ij}$ ولكن حساب هذا التوقع يحتاج الى معرفة قانون التوزيع الاحتمالي لـ t_{ij} والذي يتضمن ثوابت عددية تختلف من نشاط لآخر. وانأكثر

قوانين التوزيع الاحتمالية استخداما في التخطيط الشبكي هو توزيع بيتا $\beta_{p.q}(x)$ المعرف على المجال $[a\ ,\ b]$. لذلك فلايجاد تقدير لمتوسط المدة الزمنية t_{ij} نقوم باستقصاء حول الحد الادنى a_{ij} والحد الاعلى b_{ij} الذي يمكن أن يستغرقه النشاط $(i\ ,\ j)$. حيث يسمى المقدار a_{ij} بالتقدير المتفائل والمقدار b_{ij} بالتقدير المتشائم لتلك المدة t_{ij}. وفي هذه الحالة يمكننا حساب $\bar{t}_{ij}$ من العلاقة التالية :

$$\bar{t}_{ij} = \frac{3a_{ij} + 2b_{ij}}{5} \qquad (1,1,8)$$

وهذه العلاقة ماهي الا منوال التوزيع (بيتا) الذي فيه ($q = 4$ و $p = 3$) وعندها يكون تباين t مساويا :

$$\sigma_t^2 = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{12} \qquad (2,1,8)$$

أما اذا كنا نعلم بالاضافة الى a_{ij} و b_{ij} القيمة الاكثر احتمالا m_{ij} (المنوال) فاننا نحسب $\bar{t}_{ij}$ من العلاقة :

$$\bar{t}_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6} \qquad (3,1,8)$$

وهذه العلاقة ماهي الا التوقع الرياضي للتوزيع (بيتا) الذي فيه ($q = 3 - \sqrt{2}$ و $p = 3 + \sqrt{2}$).وان العلاقة (3 , 1, 8) تعطينا تقديرا لمدة النشاط (i,j) ذي أصغر تباين ممكن وهو :

$$\sigma_t^2 = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36} \qquad (4,1,8)$$

ولكن التقدير (8 ,1 ,3) يحتاج الى تحديد ثلاثة أرقام بينما تكتفي (8 ,1 ,1) برقمين هما a و b . ويتم تحديد المقادير a_{ij} و b_{ij} و m_{ij} لكل نشاط (i.j) . أما عن طريق المعلومات المتراكمة لدى مراكز البحوث العلمية أو بواسطة استقصاء لدى الخبراء والعاملين عن تقديراتهم لكل من هذه الكميات.

في الحقيقة ان المخططات الشبكية تقسم حسب طبيعة المدة الزمنية للانشطة الداخلة فيها الى نوعين أساسيين هما :

- المخططات الشبكية ذات المدّد الزمنية المحددة وهي التي تكون فيها المدة الزمنية t_{ij} لكل نشاط (i,j) محددة تماما . وتنطبق هذه الحالة على الأنشطة المؤتمتة أو التي تتميز بقصر مدتها .

- المخططات الشبكية ذات المدد الزمنية العشوائية وهي التي تكون فيها المدة الزمنية t_{ij} لكل نشاط (i,j) عشوائية . وتنطبق هذه الحالة على معظم المشاريع الاقتصادية . واننا هنا لن نتناول دارستها بالتفصيل ونكتفي بأن نحسب المدة الزمنية لأنشطتها من أحد العلاقتين (8 ,1 ,1) أو (8 ,1 ,3) السابقتين ونعتبر المدة الزمنية للأنشطة وكأنها مدة محددة كما في الحالة الاولى .

* ترقيم حوادث الشبكـــــة :

تتم اعادة ترقيم حوادث الشبكة بعد الانتهاء من عمليـــة رسمها باعطاء الحوادث أرقاما متزايدة من اليسار الى اليميـــــن أي أننا سنبحث عن ترقيم للحوادث بحيث يكون فيه رقم حادث انطـــلاق كل نشاط أصغر من رقم حادث نهايته . أي بحيث يكون اتجاه السهـــــم من الرقم الأصغر الى الاكبر .

لذلك نفترض أنه لدينا شبكة فيها (n + 1) حادثا ونريد اعـــادة ترقيم حوادثها بحيث يكون i < J لكل نشاط (i , J).

ويتم اعادة ترقيم الحوادث بواسطة ايجاد صفوف الشبكـــــة وبمـــــا أن الشبكة تبدأ بحادث واحد ، اذن نقوم بمايلي :

1 ـ نضع الرقم(o) لحادث البداية P_o .

2 ـ نحذف جميع الاسهم الصادرة عن الحادث P_o (ويتم الحـذف بشكل تصوري) فنحصل على عدد من الحوادث لايدخل فيهـــا أي سهم . نسمي مجموعة هذه الحوادث بمجموعة حـــــوادث الصف الاول .ونرمـز لها بالرمز U_1 ، وليكن عددهـــا K_1 حادثا . وعندها نقوم بترقيم حوادث هذه المجموعـــــة باعطائها الارقام :

$$1, 2, 3, 4 \ldots K_1$$

3 ـ بعدالانتهاء منترقيمحوادث الصف الاول ننتقلالى ترقيمحوادث الصف الثانـــي فنقوم بحذف تصوري لجميع الأسهم الصـــادره

عن جميع حوادث الصف الاول فنحصل على جملة من الحوادث التي لاتدخل فيها أي سهم . نسمي هذه المجموعة من الحوادث بحوادث الصف الثاني ونرمز لها بالرمز U_2. ولنفترض أن عددها هو K_2 . وعندها نقوم بترقيم هذه الحوادث باعطائها الارقام: $K_1+1, K_1+2, \ldots, K_1+K_2$ ودلك لأن K_1 هو آخر رقم لحوادث الصف الأول .

٤ - ولترقيم حوادث الصف الثالث نحدد جميع الأسهم الصادره عن جميع حوادث الصف الثاني فنحصل على حوادث الصف الثالث U_3 والتي نفترض أن عددها هو K_3 . وعندها نقوم بترقيم حوادث هذه المجموعه باعطائها الارقام:

$$K_1+K_2+1,\ K_1+K_2+2,\ K_1+K_2+3,\ \ldots\ K_1+K_2+K_3$$

وهكذا نتابع العمل حتى نصل الى حادث النهاية الذي يأخذ الرقم n . ويمكن البرهان على أنه عندما نحدد جميع الاسهم الصادره عن جميع حوادث أي صف مثل U_i فانه يوجد حادث واحد على الأقل لاتدخل فيه أي سهم ، أي يوجد حادث واحد على الأقل في الصف الثاني U_{i+1}. ومنه نستنتج أن المجموعة U_i هي غير خالية مهما تكن i . وهذا مايضمن استمرار عملية الترقيم حتى النهاية . أما عندما تكون الشبكة كبيرة ومعقدة فان ترقيمها يمكن أن يتم بواسطة برامج خاصة ونذكر منها خوارزمية (فورد).

يتمثل الأن الى جوهر الموضوع وهو دراسه الشبكات وتحليلها . ويتم تحليل المخططات الشبكيه حسب هدف الدراسه ومن عده جوانب أهمها :

- تحليل المخطط الشبكي بالنسبه للزمن .
- تحليل الشبكه بالنسبه للتكلفه
- تحليل الشبكات بالنسبه للمواد الاوليه (ماديه أوبشريه).
- تحليل الشبكه بالنسبه للتدفق الاعظمي

وسنعالج الفقرتين الاولى والثانيه كمايلي

II-تحليل المخططات الشبكية بالنسبة للزمن :

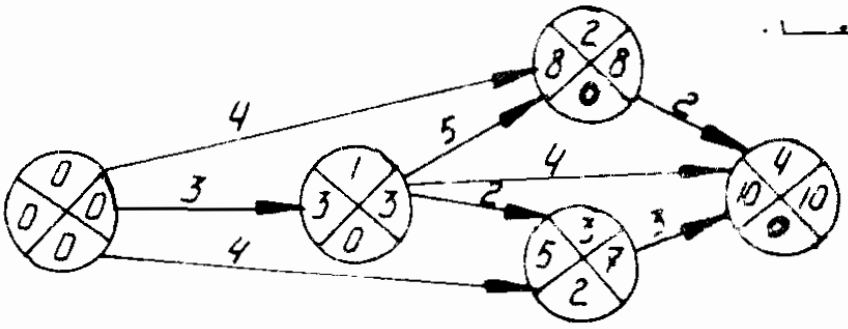
سنحاول في هذه الفقره مسأله تحديد زمن وقوع كل حادث (J) وخاصه حادث النهايه P_n ، حيث يعتبر زمن وقوع ذلك الحادث هو زمن انجاز المشروع . وعندها نجد أن زمن وقوع الحادث (J) يرتبط بزمن وقوع الحوادث السابقه له من مختلف الصفوف وبمدد الأنشطه السابقه له مباشرة . ولاجراء تحليل زمني لجميع حوادث الشبكه نقوم بتعريف المفاهيم التالية :

أ - أبكر زمن لوقوع الحادث (J) :

وهو اللحظة التي لايمكن للحادث ان يتحقق قبلها . ويتم حساب هذا الزمن انطلاقا من حادث البداية P_o ، لذلك فاننا نعتبر أن زمن وقوع حادث البداية P_o هو $T_o = o$

ولنأخذ الشبكة البسيطة التالية (الأرقام التي فوق الأسهم أو على يسارها هي t_{ij}) :

واعتمادا على خواص الشبكات نجد أنه لايمكن للحادث (2) أن يتحقق قبل أن يتم انجاز النشاطين السابقين له وهما (2 , 0)و(2 ,1) معـــا .



الشكل رقم(8 - 5)

ونلاحظ أن مدة انجاز النشاط (2 ,0) هي 4 واحدات زمنية ، ولكن هذا لايؤدي الى تحقق الحـــادث (2) المشروط بانجاز النشـــاط (1,2)أيضا . ومن جهة أخرى نجد أن النشاط (2 , 1) لايمكن أن يبدأ مالم يتحقق الحادث (1) والذي لايمكن أن يتحقـــق الا اذا تم انجاز النشاط (1 ,0)، أي أن الحادث (1) لايمكـــن أن يتحقق قبل 3 واحدات زمنية ، وحتى يتحقق الحادث (2) يجب أن يتم انجاز النشاط (2 , والذي مدته 4 واحدات زمنيـــة وأن يتم انجاز النشاطين(1 , 0) ثم(2 , 1) واللذين يتطلبـــان 5 + 3 . 8 واحدات زمنية . ومن هنا نستنتج أن الحادث (2) لا يمكن أن يتحقق قبل انقضاء 8 واحدة زمنيه وذلك لأن المدة الثانيـــة أكبر من الاولى . لذلك نسمي العدد 8 بأبكر زمن لتحقيـــق

الحادث (2).

وهكذا نجد أن الحادث رقم (3) لايمكن أن يتحقق قبل أن يتم انجاز النشاط (3 ,0) والذي مدته 4واحدات ويتم انجاز النشاطين (3 ,1) و (1 , 0) واللذين يتطلبان مدة 3 + 2 = 5واحدات زمنية . وهي مايسمى بأبكر زمن لتحقيق الحادث (3) . أما لحساب أبكر زمن لتحقق الحادث 4 فنجد أنه مرتبط بأكبر زمن لتحقق الحوادث التي تسبقه وبمدد الانشطة الداخله فيه . فعن طريق النشاط (4 , 3) نجد أن تحقق (4) يحتاج الى3 + 5 = 8 واحدات . أما عن طريق النشاط (4 , 1) فان الحادث (4)لايحتاج الا الى4 + 3 = 7 واحدات زمنية . ولكنه يحتاج عن طريق(4 , 2) الى 2+ 8 =10 واحدات زمنية .

وهكذا نجد أن حادث النهاية (4) لايمكن أن يتحقق قبل انقضاء أطول هذه الازمنه وهو 10 واحدات زمنية . وهو أيضا أبكر زمن لتحقق الحادث (4) وأبكر زمن لانجاز المشروع بكامله .

ولاستنباط قانون عام لحساب أبكر زمن لتحقق الحادث (J) نفترض أن الحادث (J) مسبوق مباشرة بـ K نشاطا هي :

$$(i_1,j),\ (i_2,j),\ (i_3,j)\ \ldots\ (i_K,j)$$

وأن أبكر زمن لوقوع الحوادث $(i_1),(i_2),(i_3)\ldots(i_K)$ هو:

$$T_1,\ T_2,\ T_3\ \ldots\ T_k$$

على الترتيب ، وأن المدد الزمنية للانشطة السابقة على الترتيب هي

$$t_{1j},\ t_{2j},\ t_{3j} \cdots t_{kj}$$

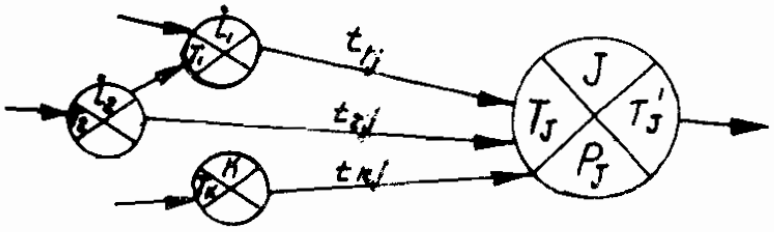
وعندها نجد أن أبكر زمن لتحقق الحادث (J) والذي سنرمز لـه بالرمز T_J يساوي :

$$T_J = \max_{i=1}^{k} (T_i + t_{ij}) \qquad (1,2,8)$$

وهو اذن يساوي أكبر المقادير $T_i + t_{ij}$ المأخوذة من جميع الاسهم والحوادث التي تسبق الحادث (J) مباشرة .

ولتسهيل الحسابات نقوم بتقسيم الدائرة التي تمثل الحادث الى أربعة أقسام كما يلي ، انظر الشكل (8 - 6) . ونضع في القسم الاعلى رقم الحادث (J) ونضع في القسم الايسر أبكر زمن لتحقق الحادث T_J .

أما القسم الايمن فنتركه لما يسمى أقصى زمن لتحقق الحادث (J). وان القسم الاسفل سنخصصه لمايسمى بالاحتياطي الكلي الزمني للحادث J



الشكل رقم ((8 - 5)

ويتم اجراء الحسابات على الشبكة مباشرة وذلك بأن نقوم باضافة T_i

من الحادث (i) الى المدة الزمنية t_{ij} ثم نأخذ أكبر هـــذه النتائج فنحصل على T_J ونسجلها في المكان المشار اليه .

وكمثال على ذلك قمنا بحساب T_J للشبكة التي على الشكل (8 - 5)، وهي المسجلة في الربع الايسر . لقد أشرنا الى أن الحادث (J) لايمكن أن يتحقق قبل اللحظة T_J وذلك لأن الحوادث والانشطة السابقة له تعيق تحققه قبل هذه اللحظة T_J . ولكن هذا لايعني أنه سيتحقـــق في تلك اللحظة تماما ، بل يمكن أن يتأجل تحققه الى لحظة تلـــي اللحظة T_J .

وأخيرا نشير الى أنه يتم حساب أبكر زمن لتحقق جميع حوادث الشبكة انطلاقا من حادث البداية (P_o) حتى حادث النهاية (P_n) .ويكون أبكر زمن T_n لتحقق حادث النهاية (P_n) هو أبكر زمن لانجـــاز المشروع بكامله .

ب ـ أقصى زمن لتحقق الحادث (i) .

وهو اللحظة التي لايجوز أن يتأخر عندها تحقق الحادث(i) عنها . لحساب هذه اللحظات نسير باتجاه معاكس لما فعلناه في حساب T_J حيث ننطلق من حادث النهاية حتى حادث البداية (P_o) . وحتى نتمكن من اجراء الحسابات يجب أن تكون اللحظة التي لانريـــد للمشروع أن يتأخر عنها معلومة . ولهذا وحتى لانترك المجـــــال مفتوحا للتهاون في تنفيذ المشاريع نعتبر أن أبكر زمن لتحقـــق حادث النهاية هو نفسه اقصى زمن لانجاز المشروع ككل . واذا رمزنا

لأقصى زمن لتحقق حادث النهاية (P_n) بالرمز $\hat{T}_n$ وقمنا وفقا لما سبق بوضع المساواة التالية

$$\hat{T}_n = T_n \qquad (2,2,8)$$

فان T_n تكون هي اللحظة التي لانريد أن يتأخر تنفيذ المشروع عنهـــــا .

ولحساب أقصى زمن لتحقق الحوادث الاخرى نلاحظ أن بعض الحـــوادث السابقة للحادث (P_n) يمكن أن تتأخر أو تؤجل أو تمـــــدد بتنفيذها الى لحظة متأخرة عن اللحظة المبكرة T_i لها . ولكـــن أقصى زمن لتأخر الحادث (n - 1) الذي يسبق مباشرة الحادث(P_n) هو اللحظة التالية :

$$\hat{T}_{n-1} = \hat{T}_n - t_{in}$$

ولحساب أقصى زمن لتأخر أي حادث (i) نفترض أن عددا ما مـــن الانشطة (الاسهم) تنطلق من ذلك النشاط وهي :

$$(i,j_1),(i,j_2),(i,j_3)\ldots\ (i,j_\ell)$$

وأن المدة الزمنية لتلك الانشطة على الترتيب هي :

$$t_{i1},\ t_{i2},\ t_{i3},\ldots\ t_{i\ell}$$

وأن أقصى زمن لتحقق الحوادث اللاحقة $J_1,J_2,J_3,\ldots\ J_\ell$ علـــى الترتيب هو :

$$\hat{T}_1,\ \hat{T}_2,\ \hat{T}_3\ \ldots\ \hat{T}_\ell$$

وبناء على ذلك يمكننا أن نحسب أقصى زمن لتحقق الحادث (i) من العلاقة التالية :

$$T'_i = \min_{j=1} (T'_J - t_{ij}) \qquad (3,2,8)$$

وينتهي حساب هذه الأزمنة انطلاقا من حادث النهاية (P_n) حتى حادث البداية (P_o). حيث سنجد أن أقصى زمن للحادث (P_o) يساوي أيضا إلى أبكر زمن له : أي أن .

$$T'_o = T_o = o \qquad (4,2,8)$$

أما عملية الحساب فيمكن أن تتم على الشبكة مباشرة بأن نقوم بطرح المدة الزمنية t_{ij} للنشاط (i , j) من أقصى زمن للحادث (j) ولجميع الأنشطة اللاحقة بالحادث (i) ثم نأخذ أصغرها فنحصل على T'_i .

وكمثال على ذلك حسبنا T_1 لحوادث الشكل الذي على شكل (5 - 2) ووضعنا الناتج في المربع الأيمن لدوائر الحوادث .

جـ - احتياط الزمن عند الحادث (J) (مجال التعويم) :

بما أن أبكر زمن لتحقق الحادث يختلف بصورة عامة عن أقصى زمن يسمح به لحدوثه ، فإن ذلك يؤدي إلى ظهور احتياط زمني لمعظم حوادث الشبكة . وإن هذا الاحتياطي الزمني بالنسبة للحادث (J) يساوي :

$$R_J = \grave{T}_J - T_J \qquad (5,2,8)$$

وهو عبارة عن مجال $[T_J, \grave{T}_J]$ يسمى مجال التعويم لأنه المجـــال الذي يمكن أن يتحقق ضمنه الحادث (J) دون أن يؤثر ذلك علـــى مدة تنفيذ المشروع T_n .

وعند اجراء الحسابات على الشبكة نضع قيمة R_J في الربع الاسفل لدائرة (J).

د ـ الاحتياطي الكلي للزمن عند النشاط (i , j):

ويحسب هذا الاحتياطي من العلاقة التالية :

$$r_{ij} = \grave{T}_J - T_i - t_{ij} \qquad (6,2,8)$$

وان هذا الاحتياطي هو أكبر مقدار زمني يمكن أن يستخدم لزيـــادة مدة تنفيذ النشاط (i,j) (طبعا اذا كانت طبيعة ذلك النشـــاط تسمح بذلك) . وبدون أن يؤدي ذلك الى زيادة مدة تنفيذ المشـــروع ككل ، أي بدون أن يؤثر على لحظة تحقق الحادث الاخير (T_n).

ويمكن النظر اليه على أنه أكبر مقدار زمني يمكننا أن نستخدمـــه لتأخير بداية النشاط (i , j) عن أبكر زمن لتحقق الحادث (i) وهو T_i وذلك بدون أن نزيد من لحظة تحقق الحادث الاخير T_n . ولكن تأخير بداية النشاط (i , j) بمقدار يساوي الى كامـــل الاحتياطي r_{ij} يقتضي أن تبدأ جميع الانشطة اللاحقة مباشرة لـــه،

في لحظة أقصى زمن للحادث (J) التي تبدأ منه . وان أي تأخير أو تأجيل للحظة بداية النشاط (i , j) أو أي تمديد لمدته الزمنية بمقدار Δ_{ij} يزيد عن r_{ij} سيؤدي حتما الى تأخير حادث النهاية P_n أي سيؤدي الى تأخير تنفيذ المشروع بأكمله .

كما يمكن اعتبار الاحتياطي الكلي r_{ij} على أنه الفرق بين مدة تنفيذ المشروع T_n ومدة أطول مسار يمر عبر ذلك النشاط (i , j). وأخيرا نشير الى أن r_{ij} لايخص النشاط (i , j) وحده بل قد تشترك به جميع الانشطة الواقعة مع (i , j) على مسار واحد ما .

هـ - الاحتياطي الزمني الحر عند النشاط (i , j).

ويحسب هذا الاحتياطي من العلاقة التالية

$$r_{ij} = T_J - T_i - t_{ij} \qquad (7,2,8)$$

وان هذا الاحتياطي هو أكبر مقدار زمني يسمح لنا به لأن نستخدمه لزيادة مدة النشاط (i , j). وبدون أن يغير ذلك امكانية أن تبدأ الانشطة اللاحقة للحادثة (J) في أكبر زمن لها وهو T_J.

(يسمى بالنوع I حيث يسمى النوع السابق بالنوع II) ويعـــــرف بالعلاقة التالية :

$$r^{*}_{ij} = T'_j - T'_i - t_{ij}$$

وهو عبارة عن أكبر مقدار يسمح به لزيادة مدة النشاط (i , j)، بدون أن نعيق امكانية أن تنتهي الانشطة السابقة مباشرةللحـــــادث (i) في أقصى زمن محدد لانجازها وهو T'_i .

ولكننا سوف نقتصر في تحليلنا على النوع المعرف بالعلاقة (7,2,8).

و ـ الاحتياطي الزمني المستقل أو الخاص بالنشاط (i, j) :

وهو يحسب من العلاقة التالية :

$$\tilde{r}_{ij} = \text{Max}[0,(T_j - T'_i - t_{ij})] \qquad (8,2,8)$$

وهو أكبر مقدار زمني يسمح لنا به لزيادة مدةالنشاط (i , j)، أو لتأخيربدايـــه بحيث تنتهي جميع الانشطةالسابقة مباشرة لحادثـــه (i) في أقصى زمن محدد لها وهو T'_i ، وبحيث تبدأ جميـــــع الانشطة اللاحقة مباشرة لحادثة (J) في أبكر زمن محدد لهـــــا وهو T_j .

وهكذا نجد أن استخدام الاحتياطي $\tilde{r}_{ij}$ لصالح النشاط(i , j) وحده لن يؤثر على احتياطي أي من الانشطه الاخرى .

* ملاحظة هامـــــة :

من العلاقتين (8 ,6, 7)و(8 ,2, 7) يمكننا ببساطة

أن نستنتج أن :

$$r_{ij} - r'_{ij} = T'_j - T_j = R_j \qquad (9,2,8$$

أي أن الفرق بين الاحتياطيين الكلي والحر يساوي احتياطي الحادث ز . كما نستنتج أن $r_{ij} \geq r'_{ij}$. وعندما تكون $R_j = o$ فان $r_{ij} = r'_{ij}$ وهذا يعني أنه عندما تكون $R_j = o$ فان الاحتياطيين r_{ij} و r'_{ij} متساويان لجميع الانشطة الداخله في الحادث (ل) .

ومن جهة أخرى نجد من العلاقتين (8 ,2 ,7)و(8 , 2 , 8)أن :

$$r'_{ij} - r''_{ij} = \begin{cases} T'_i - T_i = R_i : r''_{ij} = T_j - T'_i - t_{ij} > o \\ r'_{ij} \qquad : r''_{ij} = o \end{cases} \qquad (10,2,8)$$

وهذا يعني أنه عندما تكون $R_i = o$ فان $r'_{ij} = r''_{ij}$ لجميع الانشطة المنبثقة عن الحادث (i) . كما نستنتج أن :

$$r'_{ij} \geq r''_{ij} \quad .$$

ز ـ المسار الحرج :

ان تحديد المسار الحرج يعتبر هدفا أساسيا في التحليل الزمني للمخططات الشبكية ، ونتيجة مرجوه لجميع الحسابات السابقة . فاذا قمنا بدراسة أي مخطط شبكي لوجدنا أنه يتألف من عدد من

المسارات التي تصل حادث بدايته (P_o) وباتجاه الاسهم، بحادث نهايته (P_n) . وان كل من هذه المسارات يتألف من عـــــــدد من الانشطة ، وان المدة الزمنية لكل مسار تساوي مجموع المـــــــدد الزمنية للانشطة الواقعة عليه . ولهذا فانه يمكننا أن نعـــــرف المسار الحرج بمايلي : هو المسار ذو أطول مدة من بين جميـــــع المسارات الممكنة للشبكة، أي الذي مدته تساوي T_n .

ولكن من الأسهل أن نحدد المسار الحرج عن طريق تحديد الانشطة الواقعة عليه ، لذلك فانه يعرف كمايلي :

المسار الحرج: هو أي مسار مؤلف من أنشطة حرجة فقـــــط. ومن التعريف الاخير يتضح أنه يمكن أن نصادف أكثر من مسار حـــــرج في المخطط الشبكي . ولتحديد المسار الحرج علينا أذن نحـــــدد النشاط الحرج والذي نعرفه كمايلي :

النشاط الحرج : هو النشاط الذي ينعدم عنده الاحتياطـــي الكلي للزمن :أي أن النشاط(i , j) يكون حرجا اذا كان $r_{ij} = o$ ، كما يكون الحادث(J) حرجا اذا كان فيه $R_j = o$.

ولكن العلاقة (8 ,2 ,9) تعطينا أن $r_{ij} \geq r'_{ij}$ وبمـــــــا أن $r'_{ij} \geq o$ اذن فعندما يكون $r_{ij} = o$ فان $r'_{ij} = o$ وينجم عـــن هذا أن $R_j = o$ أيضا . ومن العلاقة (8 ,2 ,10) يمكننـــــا أن نستنتج أنه عندما تكون $r'_{ij} = o$ فـــان $r''_{ij} = o$ وينجـــم عنهما أيضا أن $R_i = o$.

مما تقدم نخلص الى **النتيجة التالية** : اذا كان النشاط (i , j)،

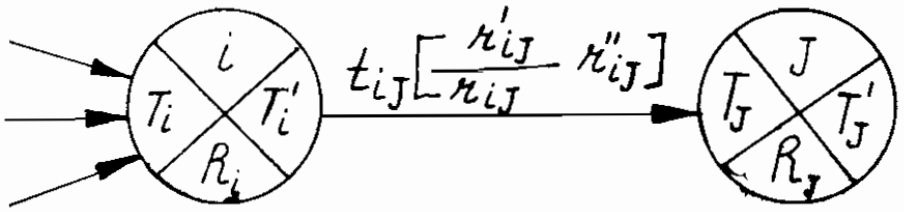
حرجا فان $R_i = R_j = o$ كما أن $r_{ij} = r'_{ij} = r''_{ij} = o$

اذن فلتحديد المسار (أو المسارات) الحرج نبحث عن الانشطة الحرجة انطلاقا من حادث البداية (P_o) متتبعين الانشطة التي يكـــــون احتياطها الكلي r_{ij} معدوما ، حتى نصل الى حادث النهاية (P_n). ونشير عادة الى الأنشطة الحرجة بسهم مضاعف لتمييزه عن الانشطـــة الاخـــرى .

وبذلك يكون طول المسار الحرج هو مجموع مدد الانشطة الحرجة الواقعة عليه ويساوي T_n . ويستفاد من تحديد الانشطة الحرجة في معرفة الانشطة التـــــي لاتتحمل أي تأخير في تنفيذها للتركيز عليها عند التنفيذ .

كما يستفاد من الاحتياطات الزمنية المختلفة في اعادة النظر فـــي توزيع الموارد ووسائل العمل على الانشطة الاخرى لاختصار مدة تنفيذهـــا . وان هذه الاحتياطات هي التي تعبر عن مرونة المخطط الشبكـــي. وكلما تضاءلت هذه المجالات كلما أصبح المخطط صلبا . ويصبح المخطط صلبا تماما عندما تكون جميع أنشطته حرجة ، وعندها لن يكون فـــي هذا المخطط أي مجال للتسامح في تأخير أي نشاط من أنشطة المخـــطط المذكـــور .

وأخيرا نشير الى أننا سنصطلح عند اجراء الحسابات على الشبكـــة كتابة النتائج على الشكل التالي :



الشكل رقـــــــم (8 - 7) .

ح ـ احتمال انجاز المشروع قبل موعد محـــــدد T_F :

لقد أشرنا سابقاً أن مدة انجاز المشروع هي T_n زمن تحقق حادثه الاخير (اعتباراً من زمن P_o) . وبما أن هذه المدة هـــي مجموع مدد الانشطة الواقعه على المسار الحرج ، وبما أن مدد كـــل نشاط يمكن أن تكون محددة أو عشوائيه ، فان مسأله حساب احتمـــال تحقق المشروع قبل الموعد T_F وفي حاله عشوائية المدد الزمنيه لانشطه المشروع ينظر اليها كمايلي :

اذا كانت t_{ij} المدة الزمنيه للنشاط (i , j) عشوائيه فان توقعها ويباشر يحسبان من العلاقـــــــــــــــــــــ (3, 1, 8) و (4, 1, 8) على الترتيب .

وان توقع المشروع لمدة انجاز المشروع يساوي الى مجموع توقعات المدد الزمنيه للانشطه التي تقع على المسار الحرج أي أن

$$T_E = \sum_{(i,j)\in L} t_{ij}$$

$$\sigma_t^2 = \Sigma \sigma_{t_{ij}}^2$$

واذا كان عدد تلك الانشطة كافيا فان احتمال تحقق المشروع قبل الموعد المحدد T_F يمكن حسابه من جدول تابع الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري ϕ حيث نجد أن :

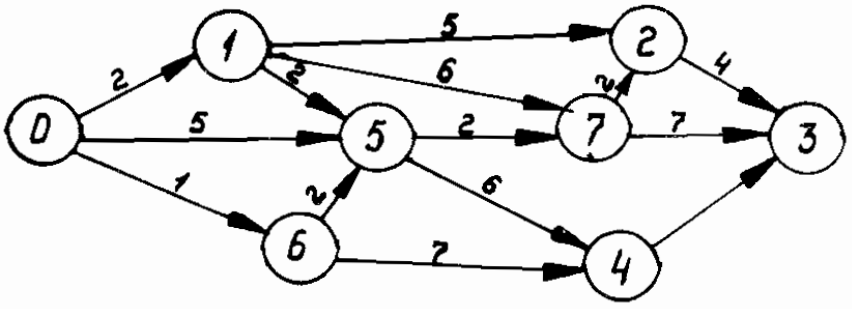
$$P(t \leq T_F) = \phi\left(\frac{T_F - T_n}{\sqrt{\Sigma \sigma_{t_{ij}}^2}}\right) \qquad (12,2,8)$$

ويمكننا أيضا حساب احتمال تحقق أي حادث (J) قبل موعد محدد T_f فنجد أن :

$$P(t_j \leq T_f) = \phi\left(\frac{T_f - T_j}{\sqrt{\Sigma \sigma_{t_{ij}}^2}}\right) \qquad (13,2,8)$$

حيث أن T_j هو أبكر زمن لتحقق (J) وان للمجموع مأخوذ على أنشطة أطول طريق يصل (J) بحادث البداية P_o .

مثال (8 - 2) : ليكن لدينا المخطط الشبكي التالي :



الشكل رقم(8 - 8)

حيث تشير الاعداد التي فوق الاسهم الى مدة النشاط . والمطلـــــوب

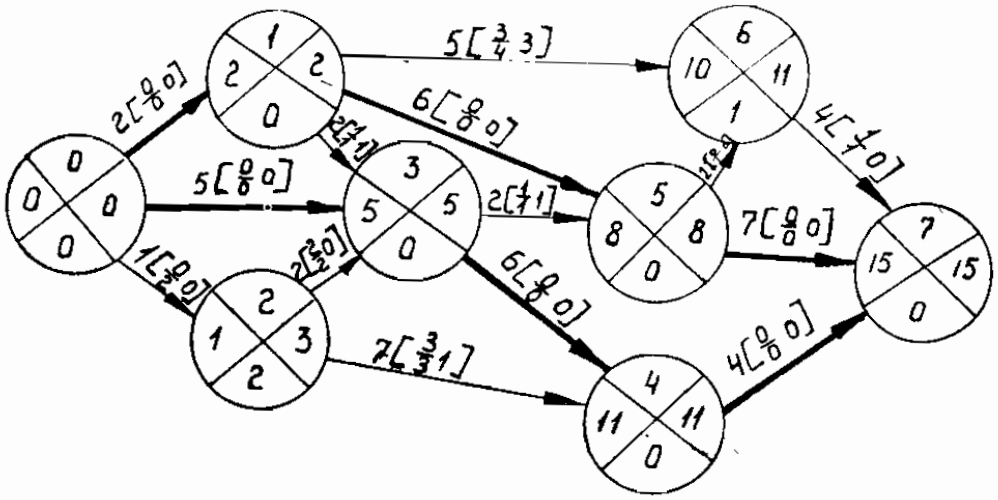
1 ـ اعادة ترقيم حوادث هذه الشبكـــــة .

2 ـ حساب T و $\grave{T}$ و R و r و $\grave{r}$ و $\breve{r}$

3 ـ تحديد المسار الحـــــرج .

الحـــل: 1 ـ لاجراء عملية اعادة الترقيم بحيث يكون $j > i$ لكـــــل نشاط (i , j) نبدأ من حادث البداية فنعطيه الرقم(o) ، ثـــم نحذف جميع الأسهم المنبثقة عنه فيظهر لنا الحادثان (1)و(6) بدون سوابق لذلك نعطيهما الرقمين 2,1 و [1 لـ (1) , 2 لـ (6)] ثم نقوم بحذف جميع الاسهم المنبثقة عن (1) فلم نجد أي حـــادث بدون سوابق ، لذلك ننتقل الى (6) ونحذف جميع الاسهم المنبثقـة عنه فيظهر لنا الحادث (5) لذلك فنعطيه الرقم(3) [3 لـ(5)] وبعدها نحذف الاسهم الصادره عن (5) فيظهر لنا الحادثان (4)و (7) فنعطيهما الرقيمن 4 و 5 [4 لـ (4) و 5 لـ(7)]. وعندما نحذف الأسهـــــم المنبثقة عن (7) سيظهر لنا الحادث (2) فنعطيه الرقم 6 ويبقى الحادث الاخير الذي يأخذ الرقـــم 7 . وبذلك تأخذ الشبكة المرقمه حسب ترتيب الانشطة فيها الشكـــــل (8 - 9).

2 ـ نقوم بحساب المؤشرات الزمنية ونسجلها على الشبكة مباشرة حيث نجد أنه عندما نضع $T_o = o$ فان أبكر زمن لتحقق الحـــــوادث المختلفه ، يحسب حسب ترتيبها في الترقيم الجديد وانطلاقا مـــن حادث البداية وهي تساوي



الشكل (8 - 9)

$$T_1 = \text{Max}(T_o + t_{01}) = \text{Max}(0 + 2) = 2$$

$$T_2 = \text{Max}(T_o + t_{02}) = \text{Max}(0 + 1) = 1$$

$$T_3 = \text{Max}(T_o + t_{03}, T_1 + t_{13}, T_2 + t_{23}) = \text{Max}(0+5, 2+2, 1+2) = 5$$

$$T_4 = \text{Max}(T_3 + t_{34}, T_2 + t_{24}) = \text{Max}(5 + 6,\ 1 + 7) = 11$$

$$T_5 = \text{Max}(T_1 + t_{15}, T_3 + t_{35}) = \text{Max}(2 + 6,\ 5 + 2) = 8$$

$$T_6 = \text{Max}(T_1 + t_{16}, T_5 + t_{56}) = \text{Max}(2 + 5,\ 8 + 2) = 10$$

$$T_7 = Max(T_4 + t_{47}, T_5 + t_{57}, T_6 + t_{67}) = Max(11+4, 8+7, 10+4) = 15$$

أي أن أبكر مدة زمنية لانجاز المشروع بأكمله هي 15 وحدة زمنيـــة.

ولحساب أقصى زمن لتحقق الحوادث نضع $\overleftarrow{T_7} = T_7 = 15$ ونبـــدأ بحساب هذه الازمنة انطلاقا من حادث النهاية حتى نصل P_o.

$$\overleftarrow{T_6} = Min(\overleftarrow{T_7} - t_{67}) = Min(15 - 4) = 11$$

$$\overleftarrow{T_5} = Min(\overleftarrow{T_7} - t_{57}) = Min(15 - 7) = 8$$

$$\overleftarrow{T_4} = Min(\overleftarrow{T_7} - t_{47}) = Min(15 - 4) = 11$$

$$\overleftarrow{T_3} = Min(\overleftarrow{T_4} - t_{34}, \overleftarrow{T_5} - t_{35}) = Min(11 - 5, 8 - 2) = 5$$

$$\overleftarrow{T_2} = Min(\overleftarrow{T_3} - t_{23}, \overleftarrow{T_4} - t_{24}) = Min(5 - 2, 11 - 7) = 3$$

$$\overleftarrow{T_1} = Min(\overleftarrow{T_3} - t_{13}, \overleftarrow{T_5} - t_{15}, \overleftarrow{T_6} - t_{16}) = Min(5-2, 8-6, 11-5) = 2$$

$$\overleftarrow{T_0} = Min(\overleftarrow{T_1} - t_{01}, \overleftarrow{T_2} - t_{02}, \overleftarrow{T_3} - t_{03}) = Min(2-2, 3-1, 5-5) = 0$$

وان هذه الازمنة هي المسجلة في الربع الايمن لدوائر الحـــــوادث.

أما بالنسبة لاحتياطي الحوادث فنحسبها من العلاقه :

$$R_i = T'_i - T_i \qquad (i = 0,1,2...7)$$

ونسجلها على الشبكة مباشرة . وهي الارقام في الربع الاسفل .

ولحساب الاحتياطي الكلي للزمن عند مختلف الانشطة نعتمد علـــــى (8 , 2 , 6) فنجد أن :

$$r_{01} = T'_1 - T_0 - t_{01} = 2 - 0 - 2 = 0$$

$$r_{02} = T'_2 - T_0 - t_{02} = 3 - 0 - 1 = 2$$

$$r_{03} = T'_3 - T_0 - t_{03} = 5 - 0 - 5 = 0$$

$$r_{13} = T'_3 - T_1 - t_{13} = 5 - 2 - 2 = 1$$

$$r_{15} = T'_5 - T_1 - t_{15} = 8 - 2 - 6 = 0$$

$$r_{16} = T'_6 - T_1 - t_{16} = 11 - 2 - 5 = 4$$

$$r_{23} = T'_3 - T_2 - t_{23} = 5 - 1 - 2 = 2$$

$$r_{24} = T'_4 - T_2 - t_{24} = 11 - 1 - 7 = 3$$

$$r_{34} = T'_4 - T_3 - t_{34} = 11 - 5 - 6 = 0$$

$$r_{35} = T'_5 - T_3 - t_{35} = 8 - 5 - 2 = 1$$

$$r_{47} = T'_7 - T_4 - t_{47} = 15 - 11 - 4 = 0$$

$$r_{56} = T'_6 - T_5 - t_{56} = 11 - 8 - 2 = 1$$

$$r_{57} = T'_7 - T_5 - t_{57} = 15 - 8 - 7 = 0$$

$$r_{67} = T'_7 - T_6 - t_{67} = 15 - 10 - 4 = 1$$

وهي الارقام المسجلة في أسفل الكسر ضمن القوسين وفوق أسهمالشبكة .

أما بالنسبة للاحتياطين الاخرين r'_{ij} و r''_{ij} فنلاحظ أن كل منهما معدوم عندما تكون $r_{ij} = 0$ ولهذا يكفي أن نحسبهما للحالات التي تكون فيها $r_{ij} \neq 0$ وهي :

$$r'_{02} = T_2 - T_0 - t_{02} = 1 - 0 - 1 = 0$$

$$r'_{13} = T_3 - T_1 - t_{13} = 5 - 2 - 2 = 1$$

$$r'_{16} = T_1 - t_{16} = 10 - 2 - 5 = 3$$

$$T_2 - t_{23} = 5 - 1 - 2 = 2$$

$$\hat{r}_{24} = T_4 - T_2 - t_{24} = 11 - 1 - 7 = 3$$

$$\hat{r}_{35} = T_5 - T_3 - t_{35} = 8 - 5 - 2 = 1$$

$$\hat{r}_{56} = T_6 - T_5 - t_{56} = 10 - 8 - 2 = 0$$

$$r_{67} = T_7 - T_6 - t_{67} = 15 - 10 - 4 = 1$$

وهي الارقام المسجلة في أعلى الكسر ضمن القوسين وفوق أسهمالشبكة .

أما $\tilde{r}_{ij}$ فنجد أنه تساوي :

$$\tilde{r}_{02} = \text{Max}[0, (T_2 - \hat{T}_0 - t_{02})] = \text{Max}[0, (1 - 0 - 1)] = 0$$

$$\tilde{r}_{13} = \text{Max}[0, (T_3 - \hat{T}_1 - t_{13})] = \text{Max}[0, (5 - 2 - 2)] = 1$$

$$\tilde{r}_{16} = \text{Max}[0, (T_6 - \hat{T}_1 - t_{16})] = \text{Max}[0, (10 - 2 - 5)] = 3$$

$$\tilde{r}_{23} = \text{Max}[0, (T_3 - \hat{T}_2 - t_{23})] = \text{Max}[0, (5 - 3 - 2)] = 0$$

$$\tilde{r}_{24} = \text{Max}[0, (T_4 - \hat{T}_2 - t_{24})] = \text{Max}[0, (11 - 3 - 7)] = 1$$

$$\tilde{r}_{35} = \text{Max}[0, (T_5 - \hat{T}_3 - t_{35})] = \text{Max}[0, (8 - 5 - 2)] = 1$$

$$\overset{\frown}{r}_{56} = \text{Max}[0, (T_6 - \overset{\frown}{T}_5 - t_{56})] = \text{Max}[0, (10 - 8 - 2)] = 0$$

$$\overset{\frown}{r}_{67} = \text{Max}[0, (T_7 - \overset{\frown}{T}_6 - t_{67})] = \text{Max}[0, (15 - 11 - 4)] = 0$$

وهي الارقام المسجلة على يمين الكسر ضمن القوسين فوق أسهم الشبكة .

3 ـ لتحديد المسار الحرج نقوم بتحديد الانشطة الحرجة انطلاقا من حادث البداية متتبعين الانشطة التي يكون فيها $r_{ij} = 0$ فنجد أن الانشطه الحرجة هي :

$$(0 , 1), (0 , 3), (1 , 5), (3 , 4), (4 , 7), (5 , 7)$$

وهي تشكل مسارين حرجين هما المسار البهما بأسهم مضاعفة وهما المسار :

(0,3) + (3,4) + (4,7) والمسار (0,1) + (1 , 5) + (5 , 7)

أما بقية الانشطة فهي غير حرجة لأن احتياطها الكلي غير معدوم.

III ـ تحليل المخطط الشبكي من حيث التكلفة :

آ ـ مدرج الانشطـــة :

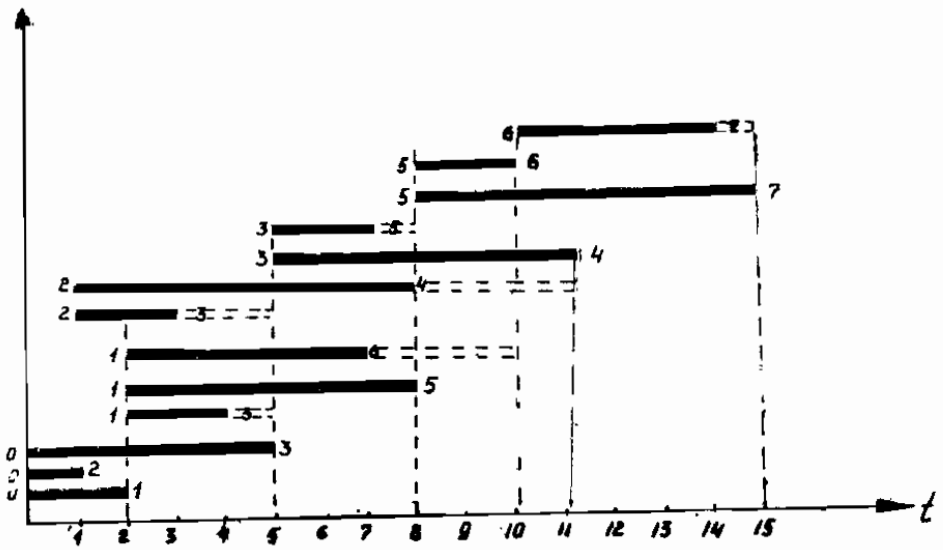
بعد أن نكون قد حسبنا T_j و $\overset{\frown}{T}_j$ و R_j و r_{ij} و $\overset{\frown}{r}_{ij}$ ثم $\overset{\frown}{\overset{\frown}{r}}_{ij}$ لجميع حوادث وأنشطة الشبكة ، نقوم بعرض أنشطة هذه الشبكة على شكل مدرج بياني ، محوره الافقي هو الزمن الذي مبدؤه في النقطة $T_o = 0$. ونمثل كل نشاط (i , j) بشريط

يبدأ من النقطة التي فاصلتها الزمنية $t_i = T_i$ وينتهي في النقطة التي فاصلتها $t_j = T_i + t_{ij}$ أي نمثل كل نشاط بشريط طوله يساوي لمدة ذلك النشاط t_{ij} ويبدأ من نقطة مقابلة لابكر زمن لتحقق حادثه (i).

ونرفق طرفي كل شريط ممثل لنشاط (i , j) بالدليلين i و j بحيث نضع i في بدايته و j في نهايته . وحتى يتسنى تنسيق الاشرطة نقوم بترتيبها من الاسفل الى الاعلى وذلك حسب تزايد رقم الحادث (i) ثم حسب تزايد الحادث (j).ونتيجة لهذا الاستعراض نحصل على مايسمى بمدرج الانشطة والذي فيه يتوضح لنا طول مدة كل نشاط ومكانه الطبيعي في عملية تنفيذ المشروع . ويستفاد من هذا المدرج في دراسة الموارد البشرية أو المادية اللازمة لتنفيذ الانشطة التي سيجري تنفيذها بأن واحد (فوق بعضها بعضا) وبالتالي اعادة توزيع تلك الانشطة بحيث لاتتطلب موارد أكثر من المواد المتاحة .

ومع أننا لن نتطرق هنا لمثل هذه المسائل وسنكتفي باستخدام المدرج لتوضيح فكرة النموذج الرياضي الذي سنستعرضه لاحقا .

وكمثال على المدرجات نرسم مدرج الانشطة للمثال (8 - 1) فنحصل على الشكل التالي :



الشكل رقم(8 - 10) مدرج الانشطـــــــــــة

ومن هذا الشكل يتضح لنا أن هناك امكانية لزحزحة أماكـــــــــن بعض الأنشطة،كما أن هناك امكانيةلتحديدهـا بمقادير معينة (الاشرطة المنقطة) بدون أن يؤثر ذلك على المدة الزمنية لانجاز المشـــروع T_n . وان مثل هذه الزحزحة أو التمديد يساعدنا في ايجاد الوضعية الملائمة لجميع الانشطة والتي تجعل تكلفة المشروع أقل مايمكـــن أو تخفض من استخدامه للموارد البشرية أو المادية .....الخ.

وسنبحث فيمايلي عن التوضع الامثل للانشطة والذي يعطينا أصغـــــر كلفة ممكنة للمشروع وذلك في الحالات التالية :

- أصغر تكلفة عندماتكون مدة المشروعمحدده بالمدة الحرجة T_n

- أصغر تكلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بمدة T .
- أصغر تكلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بـ T' وتكـــون مدد الانشطة عشوائية.
- أقصر مدة للمشروع عندما تكون التكلفة محددة بـ C .

ب ـ النموذج الرياضي لأصغر كلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بالمدة الحرجة للمشروع T_n .

لنفترض أن المدة الزمنية لكل نشاط (i , j) محددة تماما وتساوي : $t_{ij} = d_{ij}$ (أو $t_{ij} = \bar{t}_{ij}$) . وبناء على ذلك قمنا بحساب أبكر زمن لتحقق الحادث (i) وهو T_i وأبكر زمن لتحقـــق الحادث (j) وهو T_j وتوصلنا الى أن مدة المشروع تساوي T_n وأن الانشطة الحرجة أصبحت معلومة .....الخ.

كما نفترض أن تكلفة النشاط (i , j) في ظل مدتـــــه المحددة d_{ij} هي C_{ij} . ولكن هذه التكلفة تزداد اذا أردنـــا الاسراع في تنفيذ ذلك النشاط وتنقص اذا مددنا من مدة تنفيـــــذه. أي أن C_{ij} تتناسب عكسا مع t_{ij} . ويمكن التعبير عن علاقتهما بأحدى العلاقتين :

$$C_{ij} = \frac{a_{ij}}{t_{ij}} \qquad (a_{ij} \geq 0) \qquad (1,3,8)$$

$$C_{ij} = -\alpha_{ij} t_{ij} + \beta_{ij} \qquad (\alpha_{ij} > 0, \beta_{ij} > 0) \qquad (2,3,8)$$

ولكن العلاقة الاولى لاتصلح لمسائل البرمجه الخطيه (لأنها منحبسه) لذلك فاننا نعتبر أن C_{ij} مرتبطه مع t_{ij} وفق العلاقه الثانيه (2, 3, 8).

وبما أن جميع الانشطه غير الحرجة مصحوبه باحتياطي زمني ما ، اذن فانه بمكننا استخدام هذا الاحتياطي لتمديد المده الزمنية لمعظم الانشطه غير الحرجه بدون أن يؤثر ذلك على المده الحرجة T_n للمشروع . وهذا مايقلل من تكلفه تلك الانشطه ويقلص من تكلفه المشروع ككل .

وهكذا يمكننا أن نصيغ المسأله على الشكل التالي :

نطلب استخدام احتياطي الزمن المحسوب ضمن الشروط السابقه وضمن المده الحرجه للمشروع T_n ، للحصول على مخطط مثالي لأنشطه المشروع ذي أقل كلفة ممكنه .

ان مثل هذا المخطط المثالي يعني أن نجعل معظم الانشطه حرجه أي أنه اذا ثبتنا لحظه بدايه النشاط T_i فان لحظه نهايته T_j يمكن اعتبارها مجهولا يجب تحديده بحيث يؤدي الى تمديد المده t_{ij} مع البقاء على T_n ثابته . وهذا مايمكن تطبيقه على جميع الانشطه غير الحرجة (باستثناء التي تقع على حادثين حرجين).

وننطلق من أن مدة النشاط (i , j) تساوي :

$$t_{ij} = T_j - T_i \qquad (3,3,8)$$

ومن أن $T_o = o$ وأن $T_n = const$ وأن أبكر زمن T_i لجميع

حوادث أي مسار حرج يبقى هو الآخر ثابتا . وان مدة أي نشاط حـــرج (أو كان طرفاه واقعين على مسار حرج) هي الأخرى ستبقى ثابتة .

ولهذا نقسم حوادث وأنشطة الشبكة الى مجموعتين هما :

المجموعة K : وهي مجموعة الحوادث الواقعة على مسار حرج ومـــن الواضح هنا أن $P_o \in K$ وكذلك $P_n \in K$.

المجموعة R : وهي مجموعة الانشطة التي يكون أحد طرفيها علـــى الأقل غير واقع على مسار حرج : أي أن R هي:

$$R = \{(i , j) \quad : \quad i \notin K \quad \text{أو} \quad j \notin K\}$$

وهكذا يمكننا صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة على الشكـــل التالي :

يطلب ايجاد الحل الذي يعطينا أصغر قيمة لتابع الهدف التالي:

$$L = \sum_{(i,j)\in R} C_{ij} = \sum_{(i,j)\in R} \left[-\alpha_{ij}(T_j - T_i) + \beta_{ij}\right] \Rightarrow \text{Min} \quad (4,3,8)$$

ضمن الشروط التالية :

$$T_j - T_i \geqslant d_{ij} \qquad : \forall (i , j) \in R \qquad (5,3,8)$$

$$T_j = \hat{T_j} = \text{const} \qquad : \forall\ j \in K \qquad (6,3,8)$$

$$\left.\begin{aligned} T_o &= o \\ T_n &= \text{const} \end{aligned}\right\} \qquad (7,3,8)$$

والشروط الفردية :

$$T_j \geq o \qquad (8,3,8)$$

وهو نموذج عادي من نماذج البرمجه الخطية . وعندما نقوم بحله (حسب السمبلكس) نحصل على قيم للمتحولات المجهولة $(T_1, T_2, \ldots T_{n-1})$ تعطينا أبكر زمن لكل حادث غير واقع على مسار حرج بحيث تكون تكلفة المشروع أقل مايمكن .

وهذا مايعطينا المخطط المثالي ذا التكلفة الدنيا من بين المخططات التي يمكن تنفيذها ضمن المدة المحدده بالمده الحرجة T_n .

جـ ـ النموذج الرياضي لأصغر تكلفه عندما نحدد مدته بمدة T : (حيث T أكبر (أو أصغر) من المدة الحرجة T_n):

لنفترض أن المدة الحرجة للمشروع قد حسبت ضمن الشروط التي نعتبر أن مدة أي نشاط (i , j) محدده بالمقدار d_{ij} وكانت تساوي T_n . ونريد الآن أن نجد المخطط المثالي ذا التكلفة الدنيا والذي يتم تنفيذه ضمن مدة زمنيه T .وما هذه المسألة الا تعميم للمسألة السابقة ، ولكنها تختلف عنها بمايلي :

ـ يجوز لنا أن نتصرف بالمدة الزمنية لجميع الانشطة ، بما فيها الانشطة الحرجة ، ولكن بشرط أن تبقى مدة المشروع مساوية للمدد المحددة مسبقا وهي T . واذا رمزنا لمجموعة

أنشطة الشبكة بـ U ، فان تابع الهدف يأخذ الشكل التالي :

$$L = \sum_{(i,j)\in U} [-\alpha_{ij}(T_j - T_i) + \beta_{ij}] \Longrightarrow Min \qquad (9,3,8)$$

أما الشروط الخطية فتصبح أعقد مما كانت عليه حيث انها لم تعد تقتصر على بعض الأنشطة وأصبحت تشمل جميع الانشطة في الشبكة بما فيها الانشطة الحرجة نفسها .

وهكذا نجد أن الشروط الخطية تأخذ الشكل التالي :

$$T_j - T_i \geq d_{ij} \quad : \quad \forall (i,j) \in U \qquad (10,3,8)$$

$$\left.\begin{array}{l} T_o = o \\ T_n = T \end{array}\right\} \qquad (11,3,8)$$

والشروط :

$$T_j \geq o \qquad (12,3,8)$$

وهو أيضا نموذج عادي من نماذج البرمجة الخطية يتم حله بطريقة (السمبلكس)فنحصل على المخطط المثالي ذي التكلفة الدنيا من بين جميع المخططات التي يمكن وضعها وتنفيذها خلال مدة لاتتجاوز المدة المحددة T . .

مثال (8 - 3) : لنأخذ معطيات المثال(8 - 2) والذي كنا قد حسبنا فيه كل من T_j و T_n وحددنا الانشطة الحرجة.... الخ.

لنفترض الآن أننا نريد أن نجد المخطط المثالي لهذا المثال بحيث يتم تنفيذه في مدة T = 25 وبأقل تكلفة ممكنة .

ولنفترض أن تكلفة كل نشاط فيه مرتبطة مع مدته وفق العلاقات التالية :

$C_{01} = -10t_{01} + 200$ $\qquad$ $C_{15} = -t_{15} + 80$

$C_{02} = -3t_{02} + 40$ $\qquad$ $C_{35} = -5t_{35} + 120$

$C_{03} = -5t_{03} + 150$ $\qquad$ $C_{16} = -2t_{16} + 60$

$C_{13} = -2t_{13} + 70$ $\qquad$ $C_{56} = -5t_{56} + 50$

$C_{23} = -6t_{23} + 170$ $\qquad$ $C_{47} = -9t_{47} + 180$

$C_{34} = -4t_{34} + 140$ $\qquad$ $C_{57} = -5t_{57} + 140$

$C_{24} = -4t_{24} + 140$ $\qquad$ $C_{67} = -9t_{67} + 200$

الحـــل : من الواضح أن هذا المثال ينطبق على الحالة (ج) لأن مدة المشروع $T = 25$ أكبر من مدته الحرجة $T_n = 15$. كما أن تكلفته وفقا للمدد الزمنية المحددة على الشبكة وللمعادلات السابقة تساوي 1467 . ونصوغ المسألة كمايلي :

بطلب ايجاد قيم المتحولات $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ التي تعطينا أصغر تكلفة أو قيمة لتابع الهدف التالي :

$$L = \sum_{(i,j)\in U} (-\alpha_{ij} t_{ij} + \beta_{ij}) \Longrightarrow Min$$

ولكن بما أن $t_{ij} = T_j - T_i$ وأن $T_o = o$ و $T_7 = 25$ فانه

لو قمنا بتعويض هذه القيم في تابع الهدف والشروط لوجدنـــــا أن المسألة تصبح كمايلي :

يطلب ايجاد الحل الذي يعطينا أصغر قيمة للتابع :

$$L = -5T_1 + 7T_2 - 6T_3 + 3T_4 + 4T_5 + 2T_6 + 1115 \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط التالية :

$T_1 \geqslant 2$ $\qquad$ $T_5 - T_1 \geqslant 6$

$T_2 \geqslant 1$ $\qquad$ $T_5 - T_3 \geqslant 2$

$T_3 \geqslant 5$ $\qquad$ $T_6 - T_1 \geqslant 5$

$T_3 - T_1 \geqslant 2$ $\qquad$ $T_6 - T_5 \geqslant 2$

$T_3 - T_2 \geqslant 2$ $\qquad$ $25 - T_4 \geqslant 4$

$T_4 - T_3 \geqslant 6$ $\qquad$ $25 - T_5 \geqslant 7$

$T_4 - T_2 \geqslant 7$ $\qquad$ $25 - T_6 \geqslant 4$

والشروط $T_j \geqslant 0$.

ويمكننا تخفيض عدد الشروط الخطية بالتخلص من المتراجحات التـــي

تحوي على متحول واحد (الثلاثة الاولى والثلاثة الاخيرة) فنفترض أن :

$$t_1 = T_1 - 2 \qquad t_2 = T_2 - 1 \qquad t_3 = T_3 - 5$$

$$t_4 = 21 - T_4 \qquad t_5 = 18 - T_5 \qquad t_6 = 21 - T_6$$

ومن الملاحظ من هذه الفرضيات أن : $t_i \geq 0$

واذا قمنا بتعويض هذه القيم في تابع الهدف وفي الشروط السابقة فاننا نحصل على النموذج المكافئ التالي :

$$L = -5t_1 + 7t_2 - 6t_3 - 3t_4 - 4t_5 - 2t_6 + 1259 \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط التالية :

$$t_3 - t_1 + 1 \geq 0 \qquad -t_5 - t_1 + 10 \geq 0$$

$$t_3 - t_2 + 2 \geq 0 \qquad -t_5 - t_3 + 11 \geq 0$$

$$-t_4 - t_3 + 10 \geq 0 \qquad -t_6 - t_1 + 14 \geq 0$$

$$-t_4 - t_2 + 13 \geq 0 \qquad -t_6 + t_3 + 1 \geq 0$$

والشروط $t_j \geq 0$.

ولايجاد الحل المثالي لهذا النموذج الخطي نحله بواسطة طريقة السمبلكس ، لذلك نقوم بادخال ثمانية متحولات اضافية على المتراجحات السابقة وهي $y_1, y_2, \ldots y_8$ ، ثم نحوله الى أكبر قيمة فيأخذ الشكل التالي :

$$Z + 1259 = 5t_1 - 7t_2 + 6t_3 + 3t_4 + 4t_5 + 2t_6 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط التالية :

$$t_1 - t_3 + y_1 = 1 \qquad t_1 + t_5 + y_5 = 10$$

$$t_2 - t_3 + y_2 = 2 \qquad t_3 + t_5 + y_6 = 11$$

$$t_3 + t_4 + y_3 = 10 \qquad t_1 + t_6 + y_7 = 14$$

$$t_2 + t_4 + y_4 = 13 \qquad t_5 + t_6 + y_8 = 1$$

والشروط $t_j \geq 0$.

نضع هذه المعادلات في جدول السمبلكس التالي .

المتحولات / المعادلات	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	الثوابت
1	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13
5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
6	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	11
7	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	14
8	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
تابع هدف	5	-7	6	3	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	z +1259

وبملاحظة أن أكبر عنصر في السطر الاخير هوال (6) المقابل لـ t_3 اذن يكون عمود t_3 هوعمود الارتكاز ،وبحساب θ من جرا ،تقسيم عناصر عمود الثوابت على عناصر الارتكاز واختيار أصغرها نجد أن عنصر الارتكاز سيكون هو العنصر (1) في السطر الثالث والعمود الثالث. نجري العمليات فنحصل على الجدول التالي:

المتحولات / المعادلات	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	الثوابت
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	11
2	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	12
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13
5	[1]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
6	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	1
7	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	14
8	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
تابع الهدف	5	-7	0	-3	4	2	0	0	-6	0	0	0	0	0	z + 1199

وبملاحظه أن أكبر عنصر في السطر الاخير هو الـ (5) المقابل t_1

اذن يكون عمود t_1 هو عمود الارتكاز . ومن اجراء تقسيم عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود الاول واختيار أصغرها نجد أن عنصر الارتكاز هو العنصر (1) الواقع في السطر الخامس ، بقومها اجراء الحسابات فنحصل على الجدول التالي :

المتحولات / المعادلات	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	الثوابت
1	0	0	0	1	-1	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	12
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13
5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
6	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	1
7	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	14
8	0	0	0	0	-1	[1]	0	0	0	0	0	0	0	1	1
تابع الهدف	0	-7	0	-3	-1	2	0	0	-6	0	-5	0	0	0	z + 1149

وبملاحظة أن العنصرالموجب الذي بقي في السطر الاخير هو العنصر (2) المقابل لـ t_6 ، اذن نجدأن عنصرالارتكاز هو (1) في السطر الثالث وباجراء الحسابات نحصل على الجدول التالي :

المتحولات / المعادلات	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	الثوابت
1	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	12
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13
5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
6	0	0	0	-1	[1]	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	-1	13
8	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
تابع الهدف	0	-7	0	-3	+1	0	0	0	-6	0	-5	0	0	-2	z +1147

كما نلاحظ أنه بقي عنصر موجب هو (1) المقابل لـ t_5 وبعد تحديد عنصر الارتكاز المسار الذي نقوم بحساب عناصر الجدول التالي .

[illegible]	[illegible]	t_3	t_4	t_5	t_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	الثوابت
[illegible]	[illegible]	0	0	0	0	1	0	-2	0	-1	1	0	0	2
[illegible]	[illegible]	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	12
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
[illegible]	[illegible]	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13
[illegible]	[illegible]	0	1	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	9
[illegible]	[illegible]	0	-1	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	1
[illegible]	[illegible]	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	-1	13
[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	1	2
[illegible]	[illegible]	0	-2	0	0	0	0	-5	0	-5	-1	0	-2	z +1146

وبذلك نكون قد توصلنا الى الحل المثالي المطلوب ونحصل عليه بوضع :

$$t_2 = t_4 = y_3 = y_5 = y_6 = y_8 = 0$$

وهذا يعطينا أن المتحولات الاخرى تساوي :

$$t_1 = 9 \qquad t_3 = 10 \qquad t_5 = 1 \qquad t_6 = 2$$

$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 12 \qquad y_4 = 13 \qquad y_7 = 13$$

ومنها نجد أن الحل المثالي هو :

$$t_1 = 9 \ , \ t_2 = 0 \ , \ t_3 = 10 \ , t_4 = 0, \ t_5 = 1 \ , \ t_6 = 2$$

وهو يعطينا قيمة كبرى للتابع Z تساوي

$$Z + 1146 = 0$$

$$Z = -L = -1146$$

$$L = 1146$$

ومن هذا الحل ومن الفرضيات السابقة نجد أن أبكر زمن لحوادث الشبكة يساوي :

$$T_1 = 11 \ , \ T_2 = 1 \ , \ T_3 = 15, \ T_4 = 21, \ T_5 = 17, \ T_6 = 19$$

أما T_7 فهو محددة منذ البداية (كشرط للمسألة) وتساوي $T_7 = 25$

وهكذا نجد أن تمديدا معينا لمدة المشروع ولمدد الانشطة فيه أدى الى انقاص في تكلفة المشروع حتى بلغت 1146 .

وحتى نستطيع رسم مدرج لأنشطة الشبكة نحسب المدد الجديدة للانشطة فنجد أن .

$$t_{01} = T_1 - T_0 = 11 \qquad t_{24} = T_4 - T_2 = 20$$

$$t_{02} = T_2 - T_0 = 1 \qquad t_{34} = T_4 - T_3 = 6$$

$t_{03} = T_3 - T_0 = 15$ $\quad$ $t_{34} = T_5 - T_3 = 2$

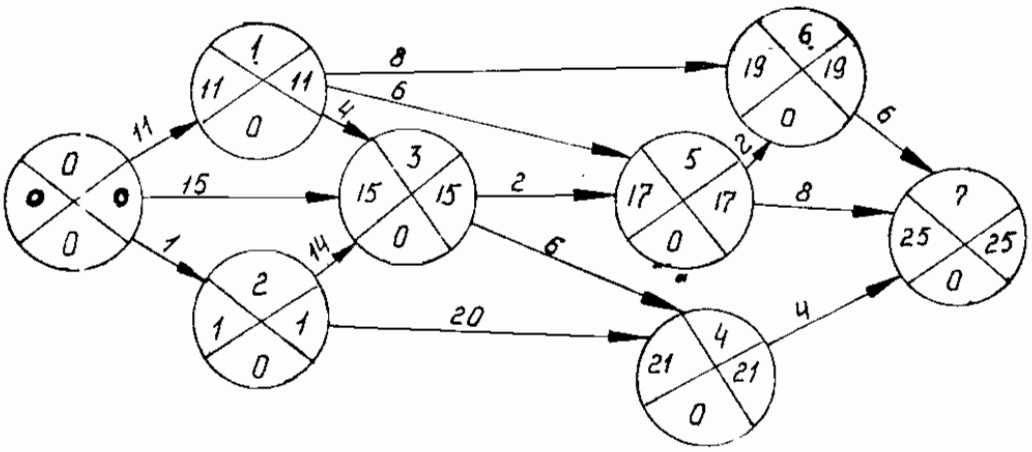
$t_{13} = T_3 - T_1 = 4$ $\quad$ $t_{47} = T_7 - T_4 = 4$

$t_{15} = T_5 - T_1 = 6$ $\quad$ $t_{56} = T_6 - T_5 = 2$

$t_{16} = T_6 - T_1 = 8$ $\quad$ $t_{57} = T_7 - T_5 = 8$

$t_{23} = T_3 - T_2 = 14$ $\quad$ $t_{67} = T_7 - T_6 = 6$

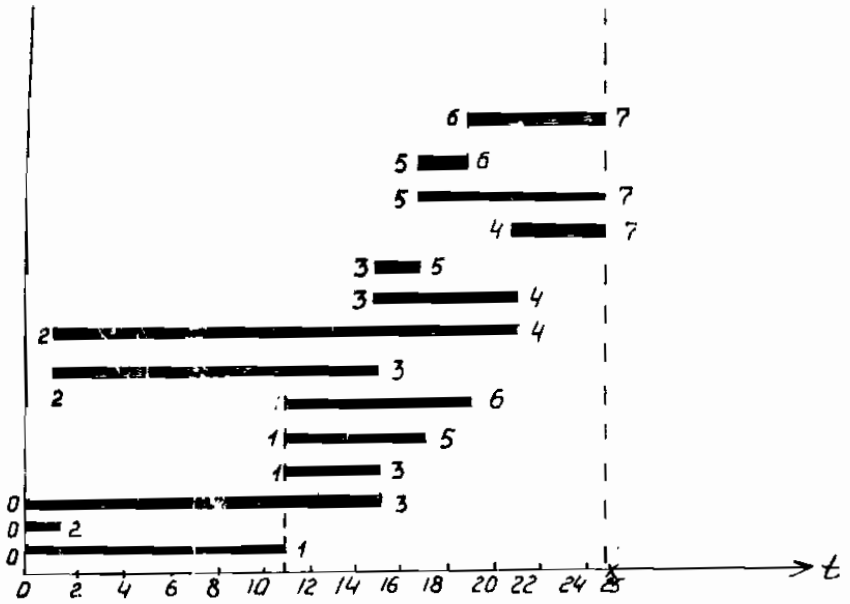
أي أن المخطط المثالي لأصغر تكلفة عندما $T_7 = 25$ هو المخطط التالي:



الشكل رقم(8 - 11)

ومن الواضح أن جميع أنشطة هذه الشبكة أصبحت حرجة ،أي أن المخطط الشبكي أصبح مخططا صلبـــا .

وسنقوم الآن برسم مدرج لانشطة هذا المخطط الاخير فنحصل على المـــــدرج المبين على الشكل رقم(8 - 12):



الشكل رقم(8- 12)

وأخيرا نشير الى أن هذه المسألة تأخذ طابعا مختلفا تماما عمـــا سبق عندما نشترط أن تكون مدةالمشروع أصغر من المدة الحرجـــــــة ($T < T_n = 15$)ونترك أمر البحث عن الحل المثالي لهذه الحالـــة ولنفس المثال للقارئ .

د ـ النموذج الرياضي لأصغر تكلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بمدة ونكون المدد الزمنية للانشطة عشوائية .

عندما تكون t_{ij} لكل نشاط (i , j) عشوائية ولكنها محصوره بين حدين أدنى ونرمز له بـ a_{ij} وأعلى ونرمز له بـ b_{ij} أي أن .

$$a_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant b_{ij}$$

وعندما تكون مده المشروع محدده مسبقا بالمدة T فان هدفنا يصبح البحث عن أصغر قيمه للتابع التالي :

$$L = \sum_{(i,j)\in U} (-\alpha_{ij} t_{ij} + \beta_{ij}) \Longrightarrow Min \qquad (13,3,8)$$

ضمن الشروط التاليه :

$$\left.\begin{array}{l} T_j - T_i - t_{ij} \geqslant o \\ o < a_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant b_{ij} \end{array}\right\} \quad \forall (i,j) \in U \qquad (14,3,8)$$

$$T_o = o \quad , \quad T_n = T$$

$$T_i \geqslant o$$

حيث أن مجهولات هذا النموذج هي : $T_1, T_2, T_3 \ldots T_n$

وهي لحظات تحقق الحوادث 1, 2, 3 ... n ثم المدد الزمنية للانشطه وهي t_{ij} والتي يجب أن لاتتجاوز $(T_j - T_i)$ لأن أي نشاط

(i , j) يجب أن ينفذ خلال الفترة الواقعة بين T_i و T_j .

وان أكبر المدد الزمنية t_{ij} ستأخذ في المخطط المثالي أكبر القيم المقبوله أو المسموح بها . لذلك فان :

$$t_{ij} = \text{Min}[b_{ij} , (T_j - T_i)] \qquad (15,3,8)$$

وبما أن مدة تنفيذ المشروع T محدده مسبقا فان المسألة قد تكون غير قابله للحل ، (في بعض حالات $T < T_n$) ،لذلك فانه يجدر بنا أن نبحث عن قابلية حلها ضمن المدة المحددة T . لذلك نضع مدد الانشطة $t_{ij} = d_{ij}$ ثم نحسب المدة الحرجة لتنفيذ المشروع في هذه الحالة ولنرمز لها بالرمز m . فاذا كانت $T \geqslant m$ فان المسألة تكون قابله للحل، أما اذا كانت $T \leqslant m$ فان المسألة تكون غير قابلة للحل لتعارض الشروط .

والدلالة : ان هذه المسألة نموذج عادي من نماذج البرمجة الخطية ولكن مايميزه عن غيره هو وجود المتراجحات المزدوجة :

$d_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant D_{ij}$ والتي يمكن تحويلها الى الشكل

$o \leqslant t_{ij}-d_{ij} \leqslant D_{ij}-d_{ij}$ وبفرض أن $\grave{t}_{ij} = t_{ij} - d_{ij}$ نجد أنه يمكننا أن نحصل من المتراجحة السابقة على المتراجحتين التاليتين :

$t_{ij} \leqslant D_{ij} - d_{ij}$ وهي متراجحة تدخل ضمن الشروط الخطية .

$t_{ij} \geqslant o$ وهي تدخل ضمن الشروط الافراديه للمتحولات .

هـ ـ النموذج الرياضي لأقصر مدة للمشروع عندما تكون التكلفة محـــددة بقيمة مثل C :

ان هذا النموذج يعالج المسألة المعاكسة للمسائل السابقة وهي :

مسألة البحث عن أقصر مدة للمشروع عندما تكون التكلفـــــة محددة . وان النموذج الرياضي لهذه المسألة يأخذ الشكل التالي :

يطلب ايجاد الحل المثالي الذي يعطينا أصغر قيمة للتابع :

$$Z = T_n \Longrightarrow Min \qquad (16,3,8)$$

ضمن الشروط التالية :

$$\left.\begin{array}{l} T_j - T_i - t_{ij} \geqslant o \\ \\ o \leqslant a_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant b_{ij} \end{array}\right\} \forall (i,j) \in U \qquad (17,3,8)$$

$$\sum_{(i,j)\in U} (-\alpha_{ij} t_{ij} + \beta_{ij}) \leqslant C \qquad (18,3,8)$$

$$T_j \geqslant o$$

وهو نموذج من نماذج البرمجه الخطيه متحولاته هي T_j و t_{ij} .

ويمكننا قبل البدء في حل مسائل هذا النموذج أن نبحث عن قابليتها

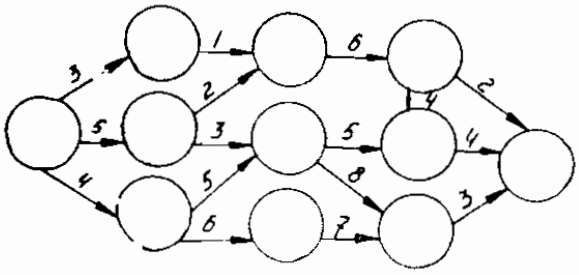
للحل . ولذلك نقوم بوضع $t_{ij} = b_{ij}$ ثم نبحث عن تكلفة المشروع في هذه الحالة (من معادلة التكلفة) ولنفرض انها كانت تساوي C_D .

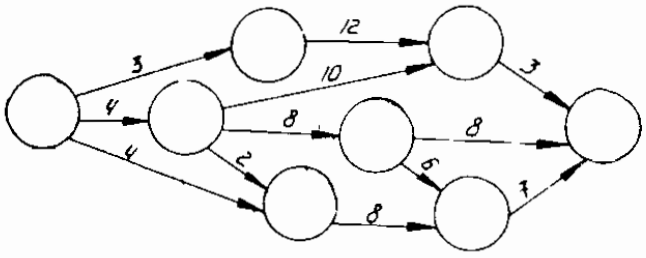
فاذا كانت $C_D > C$ فإن المسأله تكون غير قابلة للحل لأن هذه النتيجة تتعارض من الشرط (8 , 3, 18).

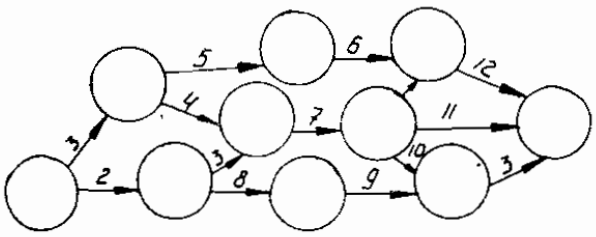
واذا وضعنا $t_{ij} = a_{ij}$ ووجدنا أن تكلفة المشروع في هذه الحالة هي C_d . فانه اذا كان $C_d < C$ (تحقق 18,3,8) فان هذا يعني أن T_n المدة الحرجة المحسوبة في هذه الحالة هي أقصر زمن ممكن وبذلك يكون قد تم الحل .

تمرينـــــــــــات

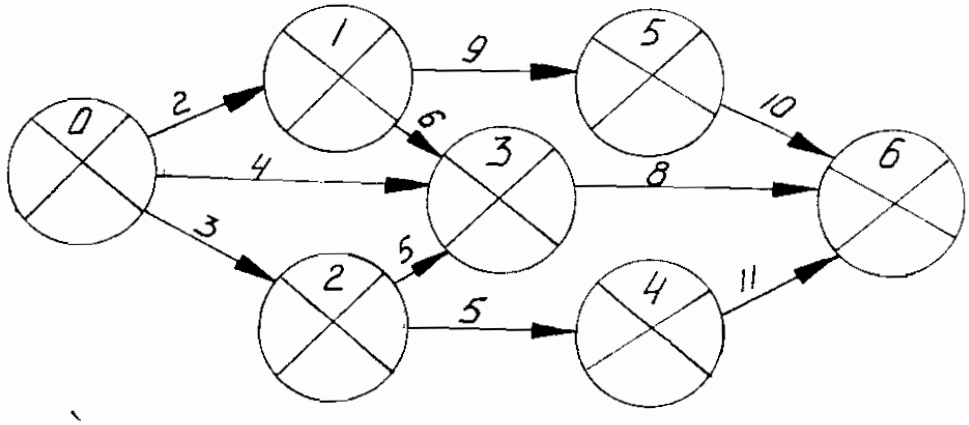
١ ـ أوجد المسار الحرج للشكلات التالية بعد ترقيم حوادثهـــــ علما بأن الارقام التي على الأسهم هي مدد الأنشطـــــة .







ب ـ أوجد المخطط ذي التكلفة الصغرى لانجاز الشبكة التالية :

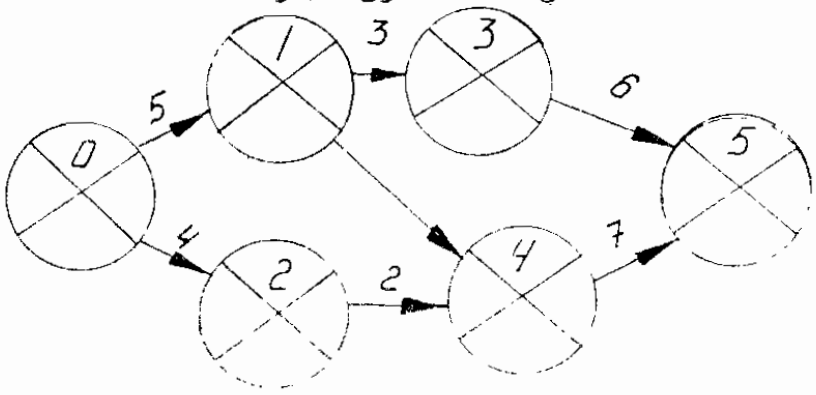


وذلك في مدة تساوي المده الحرجة T_n ، وبفرض أن تكلفة الانشطه C_{ij} مرتبطة مع مددها الزمنية وفق العلاقة :

$$C_{ij} = - \frac{i}{i + j} t_{ij} + 5$$

حيث أن i و j هما دليلا الانشطة غير الحرجة والتي يمكن تحديد مددها الزمنية .

حـ ـ أوجد المخطط ذي التكلفه الصغرى لانجاز الشبكه التالية :



وذلك ضمن مدة محددة $T = 18$ وبفرض أن تكلفة الأنشطه مرتبطه مع مددها الزمنية بالعلاقة التالية :

$$C_{ij} = - \frac{j}{i + 1} t_{ij} + 10$$

حيث أن i و j هما دليلا الانشطه الحرجة وغير الحرجة التي ستدخل في النموذج الرياضي لهذه المسأله .

جدول رقم(٥٠) : جدول قيم r^n حسب سعر الفائدة P وحسب عدد السنوات n ، حسب أن $r = 1 + P$.

السنوات n \ P	6,50 %	7 %	7,50 %	8 %
1	1,065 000	1,070 000	1,075 000	1,080 000
2	1,134 225	1,144 900	1,155 625	1,166 400
3	1,207 950	1,225 043	1,242 297	1,259 712
4	1,286 466	1,310 796	1,335 469	1,360 489
5	1,370 087	1,402 552	1,435 629	1,469 328
6	1,459 142	1,500 730	1,543 302	1,586 874
7	1,553 987	1,605 871	1,659 049	1,713 824
8	1,654 996	1,718 186	1,783 478	1,850 930
9	1,762 570	1,838 459	1,917 239	1,999 005
10	1,877 137	1,967 151	2,061 032	2,158 925
11	1,999 151	2,104 852	2,215 609	2,331 639
12	2,129 096	2,252 192	2,381 780	2,518 170
13	2,267 487	2,409 845	2,560 413	2,719 624
14	2,414 874	2,578 534	2,752 444	2,937 194
15	2,571 841	2,759 032	2,958 877	3,172 169
16	2,739 011	2,952 164	3,180 793	3,425 943
17	2,917 046	3,158 815	3,419 353	3,700 018
18	3,106 654	3,379 932	3,675 804	3,996 019
19	3,038 587	3,616 528	3,951 489	4,315 701
20	3,523 645	3,869 684	4,247 851	4,660 957
21	3,752 682	4,140 562	4,566 644	5,033 834
22	3,996 606	4,430 402	4,908 923	5,436 540
23	4,256 386	4,740 530	5,277 092	5,871 464
24	4,533 051	5,072 367	5,672 874	6,341 181
25	4,827 699	5,427 433	6,098 340	6,848 475
26	5,141 500	5,807 353	6,555 715	7,396 353
27	5,475 697	6,213 868	7,047 394	7,988 061
28	5,831 617	6,648 838	7,575 948	8,627 106
29	6,210 672	7,114 257	8,144 144	9,317 275
30	6,614 366	7,612 255	8,754 955	10,062 657
35	9,062 255	10,676 581	12,568 870	14,785 344
40	12,416 075	14,974 458	18,044 239	21,724 522
45	17,011 098	21,002 452	25,904 839	31,920 449
50	23,306 679	29,457 025	37,189 746	46,901 613

المصدر : المرجع رقم(١١) في المراجع .

تابع جدول رقم (٠٠) . جدول قيم r^n حسب سعر الفائدة P وحسب عـــدد السنوات n حيث أن $r = 1 + P$.

السنوات n \ P	8,50 %	9 %	9,50 %	10 %
1	1,085 000	1,090 000	1,095 000	1,100 000
2	1,177 225	1,188 100	1,199 025	1,210 000
3	1,277 289	1,295 029	1,312 932	1,331 000
4	1,385 859	1,411 582	1,437 661	1,464 100
5	1,503 657	1,538 624	1,574 239	1,610 510
6	1,631 468	1,677 100	1,723 791	1,771 561
7	1,770 142	1,828 039	1,887 552	1,948 717
8	1,920 604	1,992 563	2,066 869	2,143 589
9	2,083 856	2,171 893	2,263 222	2,357 948
10	2,260 983	2,367 364	2,478 228	2,593 742
11	2,453 167	2,580 426	2,713 659	2,853 117
12	2,661 686	2,812 665	2,971 457	3,138 428
13	2,887 930	3,065 805	3,253 745	3,452 271
14	3,133 404	3,341 727	3,562 851	3,797 498
15	3,399 743	3,642 482	3,901 322	4,177 248
16	3,688 721	3,970 306	4,271 948	4,594 973
17	4,002 262	4,327 633	4,677 783	5,054 470
18	4,342 455	4,717 120	5,122 172	5,559 917
19	4,711 563	5,141 661	5,608 778	6,115 909
20	5,112 046	5,604 411	6,141 612	6,727 500
21	5,546 570	6,108 808	6,725 065	7,400 250
22	6,018 029	6,658 600	7,363,946	8,140 275
23	6,529 561	7,257 874	8,063 521	8,954 302
24	7,084 574	7,911 083	8,829 556	9,849 733
25	7,686 762	8,623 081	9,668 364	10,834 706
26	8,340 137	9,399 158	10,586 858	11,918 177
27	9,049 049	10,245 082	11,592 610	12,109 994
28	9,818 218	11,167 140	12,693 908	14,420 994
29	10,652 766	12,172 182	13,899 829	15,863 093
30	11,558 252	13,267 678	15,220 313	17,449 402
35	17,379 642	20,413 968	23,960 406	28,102 437
40	26,133 016	31,409 420	37,719 399	45,259 256
45	39,295 084	48,327 286	59,379 340	72,890 484
50	59,086 316	74,357 520	93,477 257	117,390 853

المصدر السابق نفسه .

الجدول رقم (١) : جدول قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب عددالسنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

السنوات n \ P	1,50 %	2 %	2,50 %	3 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,015 000	2,020 000	2,025 000	2,030 000
3	3,045 225	3,060 400	3,075 625	3,090 900
4	4,090 903	4,121 608	4,152 516	4,183 627
5	5,122 267	5,204 040	5,256 328	5,309 136
6	6,229 551	6,308 121	6,387 737	6,468 410
7	7,322 994	7,434 283	7,547 430	7,662 462
8	8,432 839	8,582 969	8,736 116	8,892 336
9	9,559 332	9,754 628	9,954 519	10,159 106
10	10,702 722	10,949 721	11,203 382	11,463 879
11	11,863 262	12,168 715	12,483 466	12,807 796
12	13,041 211	13,412 090	13,795 553	14,192 030
13	14,236 830	14,680 331	15,140 442	15,617 790
14	15,450 382	15,973 938	16,518 953	17,086 324
15	16,682 138	17,293 417	17,931 927	18,598 914
16	17,932 370	18,639 285	19,380 225	20,156 883
17	19,201 355	20,012 071	20,864 730	21,761 588
18	20,489 376	21,412 312	22,386 349	23,414 435
19	21,796 716	22,840 559	23,946 007	25,116 868
20	23,123 667	24,297 370	25,544 658	26,870 374
21	24,470 522	25,783 317	27,183 274	28,676 486
22	25,837 580	27,298 983	28,862 856	30,536 780
23	27,225 144	28,844 963	30,584 427	32,452 884
24	28,633 521	30,421 862	32,349 038	34,426 470
25	30,063 024	32,030 300	34,157 764	36,459 264
26	31,513 969	33,670 906	36,011 708	38,553 042
27	32,986 678	35,344 324	37,912 001	40,709 633
28	34,481 479	37,051 210	39,859 801	42,930 923
29	35,998 701	38,792 234	41,856 296	45,218 850
30	37,538 681	40,568 079	43,902 703	47,575 416
35	45,592 088	49,994 478	54,928 207	60,462 082
40	54,267 894	60,401 983	67,402 554	75,401 260
45	63,614 201	71,892 710	81,516 131	92,719 861
50	73,682 828	84,579 401	97,484 349	112,796 867

* المصدر رقم (11) في المراجع .

تابع للجدول رقم(١): جدول قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حسب قيم معدل الفائدة P

وحسب عدد السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	3,25 %	3,50 %	3,75 %	4 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,032 500	2,035 000	2,037 500	2,040 000
3	3,098 556	3,106 225	3,113 906	3,121 600
4	4,199 259	4,214 943	4,230 678	4,246 464
5	5,335 735	5,362 466	5,389 328	5,416 323
6	6,509 147	6,550 152	6,591 428	6,632 975
7	7,720 694	7,779 407	7,838 607	7,898 294
8	8,971 616	9,051 687	9,132 554	9,214 226
9	10,263 194	10,368 496	10,475 025	10,582 795
10	11,596 748	11,731 393	11,867 838	12,006 107
11	12,973 642	13,141 992	13,312 882	13,486 351
12	14,395 285	14,601 962	14,812 116	15,025 805
13	15,863 132	16,113 030	16,367 570	16,626 838
14	17,378 684	17,676 986	17,981 354	18,291 911
15	18,943 491	19,295 681	19,655 654	20,023 588
16	20,559 155	21,971 030	21,392 742	21,824 531
17	22,227 327	22,705 016	23,194 969	23,697 512
18	23,949 715	24,499 691	25,064 781	25,645 413
19	25,728 081	26,357 180	27,004 710	27,671 229
20	27,564 244	28,279 682	29,017 387	29,778 079
21	29,460 082	30,269 471	31,105 539	31,969 202
22	31,417 534	32,328 902	33,271 996	34,247 970
23	33,438 604	34,460 414	35,519 696	36,617 889
24	35,525 359	36,666 528	37,851 685	39,082 604
25	37,679 933	38,949 857	40,271 123	41,645 908
26	39,904 531	41,313 102	42,781 290	44,311 745
27	42,201 428	43,759 060	45,385 588	47,084 214
28	44,572 975	46,290 627	48,087 548	49,967 583
29	47,021 596	48,910 799	50,890 831	52,966 286
30	48,549 798	51,622 677	53,799 237	56,084 938
35	63,478 033	66,674 013	70,061 381	73,652 225
40	79,821 583	84,550 278	89,610 100	95,025 516
45	98,999 290	105,781 673	113,109 612	121,029 392
50	121,502 630	130,997 910	141,358 371	152,667 084

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(١) : جدول قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائـــدة P

وحسب عدد السنـــوات n حيث أن $r = 1 + P$

n السنوات / P	4,50 %	5 %	5,50 %	6 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,045 000	2,050 000	2,055 000	2,060 000
3	3,137 025	3,152 500	3,168 025	3,183 600
4	4,278 191	4,310 125	4,342 266	4,374 616
5	5,470 710	5,525 631	5,581 091	5,637 093
6	6,716 892	6,801 913	6,888 051	6,975 319
7	8,019 152	8,142 008	8,266 894	8,393 838
8	9,380 014	9,549 109	9,721 573	9,897 468
9	10,802 114	11,026 564	11,256 260	11,491 316
10	12,288 209	12,577 893	12,875 354	13,180 795
11	13,841 179	14,206 787	14,583 498	14,971 643
12	15,464 032	15,917 127	16,385 591	16,869 941
13	17,159 913	17,712 983	18,286 798	18,882 138
14	18,932 110	19,598 632	20,292 572	21,015 066
15	20,784 054	21,578 564	22,408 663	23,275 970
16	22,719 337	23,657 492	24,641 140	25,672 528
17	24,741 707	25,840 366	26,996 403	28,212 880
18	26,855 084	28,132 385	29,481 205	30,905 653
19	29,063 562	30,539 004	32,102 671	33,759 992
20	31,371 423	33,065 954	34,868 318	36,785 591
21	33,783 137	35,719 252	37,786 076	39,992 727
22	36,303 378	38,505 214	40,864 310	43,392 290
23	38,937 030	41,430 475	44,111 847	46,995 828
24	41,689 196	44,501 999	47,537 998	50,815 578
25	44,565 210	47,727 099	51,152 588	54,864 512
26	47,570 645	51,113 454	54,965 981	59,156 383
27	50,711 324	54,669 126	58,989 109	63,705 766
28	53,993 333	58,402 583	63,233 510	68,528 112
29	57,423 033	62,322 712	67,711 354	73,639 798
30	61,007 070	66,438 848	72,435 478	79,058 186
35	81,496 618	90,320 307	100,251 364	111,434 780
40	107,030 323	120,799 774	136,605 614	154,761 966
45	138,849 965	159,700 156	184,119 165	212,743 514
50	178,503 028	209,347 996	246,217 476	290,335 905

* المصدر السابق نفسه ،

تابع للجدول رقم (١) : جدول قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حسب قيم سعر العائدة P

وحسب السنوات n، حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات \ P	6,50 %	7 %	7,50 %	8 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,065 000	2,070 000	2,075 000	2,080 000
3	3,199 225	3,214 900	3,230 625	3,246 400
4	4,407 175	4,439 943	4,472 922	4,506 112
5	5,693 641	5,750 739	5,808 391	5,866 601
6	7,063 728	7,153 291	7,244 020	7,335 929
7	8,522 870	8,654 021	8,787 321	8,922 803
8	10,076 856	10,259 371	10,466 371	10,636 628
9	11,731 852	11,977 989	12,229 849	12,487 558
10	13,494 423	13,816 448	14,147 087	14,486 562
11	15,371 560	15,783 599	16,208 119	16,645 487
12	17,370 711	17,888 451	18,423 728	18,977 126
13	19,499 808	20,140 643	20,805 508	21,495 297
14	21,767 295	22,550 488	23,365 921	24,214 920
15	24,182 169	25,129 022	26,118 365	27,152 114
16	26,754 010	27,888 054	28,077 242	30,324 283
17	29,493 021	30,840 217	32,258 035	33,750 226
18	32,410 067	33,999 033	35,677 388	37,450 244
19	35,516 722	37,378 965	39,353 192	41,446 263
20	38,825 309	40,995 492	43,304 681	45,761 964
21	42,348 954	44,865 177	47,552 532	50,422 921
22	46,101 636	49,005 739	52,118 972	55,456 755
23	50,098 242	53,436 141	57,027 895	60,893 296
24	54,354 628	58,176 611	62,304 987	66,764 759
25	58,887 679	63,249 038	67,977 861	73,105 940
26	63,715 378	68,676 470	74,076 201	79,954 415
27	68,856 877	74,483 823	80,631 916	87,350 768
28	74,332 574	80,697 691	87,679 310	95,338 830
29	80,164 192	87,346 529	95,255 258	103,965 936
30	86,374 864	94,460 786	103,399 403	113,283 211
35	124,034 690	138,236 878	154,251 606	172,316 804
40	175,631 916	199,635 112	227,256 520	259,056 519
45	246,324 587	285,749 311	332,064 515	386,505 617
50	343,179 672	406,528 929	482,529 947	573,770 165

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(١) : جدول قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حسب قيم سعرالفائدة P

وحسب عددالسنوات n حيث أن $r = 1 + P$

n السنوات \ P	8,50 %	9 %	9,50 %	10 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,085 000	2,090 000	2,095 000	2,100 000
3	3,262 225	3,278 100	3,294 025	3,310 000
4	4,539 514	4,573 129	4,605 957	4,641 000
5	5,925 373	5,984 711	6,044 618	6,105 100
6	7,429 030	7,523 335	7,618 857	7,715 610
7	9,060 497	9,200 435	9,342 648	9,487 171
8	10,830 639	11,028 474	11,230 200	11,435 888
9	12,751 244	13,021 036	13,297 069	13,579 477
10	14,835 099	15,192 930	15,560 291	15,937 425
11	17,096 083	17,560 293	18,038 518	18,531 167
12	19,549 250	20,140 720	20,752 178	21,384 284
13	22,210 936	22,953 385	23,723 634	24,522 712
14	25,098 866	26,019 189	26,977 380	27,974 983
15	28,232 269	29,360 916	30,540 231	31,772 482
16	31,632 012	33,003 399	34,441 553	35,949 730
17	35,320 733	36,973 705	38,713 500	40,544 703
18	39,322 995	41,301 338	43,391 283	45,599 173
19	43,665 450	46,018 458	48,513 455	51,159 090
20	48,377 013	51,160 120	54,122 233	57,274 999
21	53,489 059	56,764 530	60,263 845	64,002 499
22	59,035 629	62,873 338	66,988 910	71,402 749
23	65,053 658	69,531 939	74,352 856	79,543 024
24	71,583 219	76,789 813	82,416 378	88,497 327
25	78,667 792	84,700 896	91,245 934	98,347 059
26	86,354 555	93,323 977	100,914 297	109,181 765
27	94,694 692	102,723 135	111,501 156	121,099 942
28	103,743 741	112,968 217	123,093 766	134,209 936
29	113,561 959	124,135 456	135,787 673	148,630 930
30	124,214 725	136,307 539	149,687 502	164,494 023
35	192,701 675	215,710 755	241,688 483	271,024 368
40	295,682 536	337,882 445	386,519 992	442,592 556
45	450,530 397	525,858 735	614,519 364	718 904 837
50	683 368 119	815 083 556	973 444 808	1 163,908 529

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(١) : جدول قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حيث قيم سعر الفائدة P

وحسب عدد السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	10,5 %	11 %	11,5 %	12 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,105 000	2,110 000	2,115 000	2,120 000
3	3,326 250	3,342 100	3,358 225	3,374 400
4	4,675 258	4,709 731	4,744 421	4,779 328
5	6,166 160	6,227 801	6,290 029	6,352 847
6	7,813 606	7,912 860	8,013 383	8,115 189
7	9,634 035	9,783 274	9,934 922	10,089 012
8	11,645 609	11,859 434	12,077 438	12,299 693
9	13,868 398	14,163 972	14,466 343	14,775 656
10	16,324 579	16,722 009	17,129 972	17,548 735
11	19,038 660	19,561 430	20,099 919	20,654 583
12	22,037 720	22,713 187	23,411 410	24,133 133
13	25,351 680	26,211 638	27,103 722	28,029 109
14	29,013 607	30,094 918	31,220 650	32,392 602
15	33,060 035	34,405 359	35,811 025	37,279 715
16	37,531 339	39,189 948	40,929 293	42,753 280
17	42,472 130	44,500 843	46,636 161	48,883 674
18	47,931 703	50,395 936	52,999 320	55,749 715
19	53,964 532	56,939 488	60,094 242	63,439 681
20	60,630 808	64,202 832	68,005 080	72,052 442
21	67,997 043	72,265 144	76,825 664	81,698 736
22	76,136 732	81,214 309	86,660 615	92,502 584
23	85,131 089	91,147 884	97,626 586	104,602 894
24	95,069 854	102,174 151	109,853 643	118,155 241
25	106,052 188	114,413 307	123,486 812	133,333 870
26	118,187 668	127,998 771	138,687 796	150,333 934
27	131,597 373	143,078 636	155,636 892	169,374 007
28	146,415 097	159,817 286	174,535 135	190,698 887
29	162,788 683	178,397 187	195,606 675	214,582 754
30	180,881 494	199,020 878	219,101 443	241,332 684
35	304,158 792	341,589 555	383,879 238	431,663 496
40	507,251 579	581,826 066	667,849 607	767,091 420
45	841,836 132	986,638 559	1 157,230 898	1 358,230 032
50	1 393,046 373	1 668,771 152	2 000,607 793	2 400,018 249

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(١): حسب قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائـــدة P.

وحسب السنوات n، حيث أن $r = 1 + P$

n السنوات / P	13 %	14 %	15 %	16 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,130 000	2,140 000	2,150 000	2,160 000
3	3,406 900	3,439 600	3,472 500	3,505 600
4	4,849 797	4,921 144	4,993 375	5,066 496
5	6,480 271	6,610 104	6,742 381	6,877 135
6	8,322 706	8,535 519	8,753 738	8,977 477
7	10,404 658	10,730 491	11,066 799	11,413 873
8	12,757 263	13,232 760	13,726 819	14,240 093
9	15,415 707	16,085 347	16,785 842	17,518 508
10	18,419 749	19,337 295	20,303 718	21,321 469
11	21,814 317	23,044 516	24,349,276	25,732 904
12	25,650 178	27,270 749	29,001 667	30,850 169
13	29,984 701	32,088 654	34,351 917	36,786 196
14	34,882 712	37,581 065	40,504 705	43,671 987
15	40,417 464	43,842 414	47,580 411	51,659 505
16	46,671 735	50,980 352	55,717 472	60,925 026
17	53,739 060	59,117 601	65,075 093	71,673 030
18	61,725 138	68,394 066	75,836 357	84,140 715
19	70,749 406	78,969 235	88,211 811	98,603 230
20	80,946 829	91,024 928	102,443 583	115,379 747
21	92,469 917	104,768 418	118,810 120	134,840 506
22	105,491 006	120,435 996	137,631 638	157,414 987
23	120,204 837	138,297 035	159,276 384	183,601 385
24	136,831 465	158,658 620	184,167 841	213,977 607
25	155,619 556	181,870 827	212,793 017	249,214 024
26	176,850 098	208,332 743	245,711 970	290,088 267
27	200,840 611	238,499 327	283,568 766	337,502 390
28	227,949 890	272,889 233	327,104 080	392,502 773
29	258,583 376	312,093 725	377,169 693	456,303 216
30	293,199 215	356,786 847	434,745 146	530,311 731
35	546,680 819	693,572 702	881,170 156	1 120,712 955
40	1 013,704 243	1 342,025 099	1 779,090 308	2 360,757 241
45	1 874,164 630	2 590,564 800	3 585,128 460	4 965,273 911
50	3 459,507 117	4 994,521 346	7 217,716 277	10 435,648 773

* المصدر السابق نفسه.

تابع للجدول رقم(١) : جدول قيم $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ حسب سعر الفائدة P

وحسب السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n / P السنوات	17 %	18 %	19 %	20 %
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,170 000	2,180 000	2,190 000	2,200 000
3	3,538 900	3,572 400	3,606 100	3,640 000
4	5,140 513	5,215 432	5,291 259	5,368 000
5	7,014 400	7,154 210	7,296 598	7,441 600
6	9,206 848	9,441 968	9,682 952	9,929 920
7	11,772 012	12,141 522	12,522 713	12,915 904
8	14,773 255	15,326 996	15,902 028	16,499 085
9	18,284 708	19,085 855	19,923 413	20,798 902
10	22,393 108	23,521 309	24,708 862	25,958 682
11	27,199 937	28,755 144	30,403 546	32,150 419
12	32,823 926	34,931 070	37,180 220	39,580 502
13	39,403 993	42,218 663	45,244 461	48,496 603
14	47,102 672	50,818 022	54,840 909	59,195 923
15	56,110 126	60,965 266	66,260 682	72,035 108
16	66,648 848	72,939 014	79,850 211	87,442 129
17	78,979 152	87,068 036	96,021 751	105,930 555
18	93,405 608	103,740 283	115,265 884	128,116 666
19	110,284 561	123,413 534	138,166 402	154,740 000
20	130,032 936	146,627 970	165,418 018	186,688 000
21	153,138 535	174,021 005	197,847 442	225,025 600
22	180,172 086	206,344 785	236,438 456	271,030 720
23	211,801 341	244,486 847	282,361 762	326,236 863
24	248,807 569	289,494 479	337,010 497	392,484 236
25	292,104 856	342,603 486	402,042 492	471,981 083
26	342,762 681	405,272 113	479,430 565	567,377 300
27	402,032 337	479,221 093	571,522 372	681,852 760
28	471,377 835	566,480 890	681,111 623	819,223 312
29	552,512 066	669,447 450	811,522 831	984,067 974
30	647,439 118	790,947 991	966,712 169	1 181,881 569
35	1 426,491 022	1 816,651 612	2 314,213 721	2 948,341 146
40	3 134,521 839	4 163,213 027	5 529,828 982	7 343,857 840
45	6 879,290 650	9 531,577 105	13 203,424 228	18 281,309 940
50	15 089,501 673	21 813,093 666	31 515,336 327	45 497,190 750

■ المصدر السابق نفسه .

الجدول رقم(٢) : جدول قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائـــــدة P

وحسب السنـــوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات \ P	1,50 %	2 %	2,50 %	3 %
1	0,985 222	0,980 392	0,975 610	0,970 874
2	1,955 883	1,941 561	1,927 424	1,913 470
3	2,912 200	2,883 883	2,856 024	2,828 611
4	3,854 384	3,807 729	3,761 974	3,717 098
5	4,782 645	4,713 459	4,645 828	4,579 707
6	5,697 187	5,601 431	5,508 125	5,417 191
7	6,598 214	6,471 991	6,349 391	6,230 283
8	7,485 925	7,325 481	7,170 137	7,019 692
9	8,360 517	8,162 237	7,970 865	7,786 109
10	9,222 185	8,982 585	8,752 064	8,530 203
11	10,077 118	9,786 848	9,714 209	9,252 624
12	10,907 505	10,575 341	10,257 756	9,954 004
13	11,731 532	11,348 374	10,983 185	10,634 955
14	12,543 381	12,106 249	11,690 912	11,296 073
15	13,343 233	12,849 263	12,381 378	11,937 935
16	14,131 264	13,577 709	13,055 003	12,561 102
17	14,907 649	14,291 872	13,712 198	13,166 118
18	15,672 561	14,992 031	14,353 364	13,753 513
19	16,426 168	15,678 462	14,978 891	14,323 799
20	17,168 639	16,351 433	15,589 162	14,877 475
21	17,900 137	17,011 209	16,184 549	15,415 024
22	18,620 824	17,658 048	16,765 413	15,936 917
23	19,330 861	18,292 204	17,332 110	16,443 608
24	20,030 405	18,913 926	17,884 986	16,935 542
25	20,719 611	19,523 456	18,424 376	17,413 148
26	21,398 632	20,121 036	18,950 111	17,876 842
27	22,037 617	20,706 898	19,464 011	18,327 031
28	22,726 717	21,281 272	19,964 889	18,764 108
29	23,376 076	21,844 385	20,453 550	19,188 455
30	24,015 838	22,396 456	20,930 293	19,600 441
35	27,075 595	24,998 619	23,145 157	21,487 220
40	29,915 845	27,355 479	25,102 775	23,114 772
45	32,552 337	29,490 160	26,833 024	24,518 713
50	34,500 156	31,423 606	28,362 312	25,729 764

■ المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٢) : جدول قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n ، حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	3,25 %	3,50 %	3,75 %	4 %
1	0,968 523	0,966 184	0,963 855	0,961 538
2	1,906 560	1,899 694	1,892 873	1,886 095
3	2,815 070	2,801 637	2,788 311	2,775 091
4	3,694 983	3,673 079	3,651 384	3,629 895
5	4,547 199	4,515 052	4,483 262	4,451 822
6	5,372 590	5,328 553	5,285 072	5,242 137
7	6,172 000	6,114 544	6,057 900	6,002 055
8	6,946 247	6,873 955	6,802 795	6,732 745
9	7,696 123	7,607 686	7,520 767	7,435 332
10	8,422 395	8,316 605	8,212 787	8,110 896
11	9,125 806	9,001 551	8,879 795	8,860 477
12	9,807 076	9,663 334	9,522 694	9,385 074
13	10,466 902	10,302 738	10,142 356	9,985 648
14	11,105 958	10,920 520	10,739 620	10,563 123
15	11,724 899	11,517 411	11,315 296	11,118 387
16	12,324 358	12,094 117	11,870 165	11,652 296
17	12,904 947	12,651 321	12,404 978	12,165 669
18	13,467 261	13,189 682	12,920 461	12,659 297
19	14,011 875	13,709 837	13,417 312	13,133 939
20	14,539 346	14,212 403	13,896 204	13,590 326
21	15,050 214	14,697 974	14,357 787	14,029 160
22	15,545 002	15,167 125	14,802 686	14,451 115
23	16,024 215	15,620 410	15,231 505	14,856 842
24	16,488 343	16,058 368	15,644 824	15,246 963
25	16,937 863	16,481 515	16,043 204	15,622 080
26	17,373 233	16,890 352	16,427 184	15,982 769
27	17,794 899	17,285 364	16,797 286	16,329 586
28	18,203 292	17,667 019	17,154 011	16,663 063
29	18,598 830	18,035 767	17,497 842	16,983 715
30	18,981 917	18,392 045	17,829 245	17,292 033
35	20,723 893	20,000 661	19,315 013	16,664 613
40	22,208 433	21,355 072	20,550 990	19,792 774
45	23,473 582	22,495 450	21,579 172	20,720 040
50	24,551 762	23,455 618	22,434 493	21,482 185

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٢): جدول قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات \ P	4,50 %	5 %	5,50 %	6 %
1	0,956 938	0,952 381	0,947 867	0,943 396
2	1,872 668	1,859 410	1,846 319	1,833 393
3	2,748 964	2,723 248	2,697 933	2,673 012
4	3,587 526	3,545 950	3,505 150	3,465 106
5	4,389 977	4,329 477	4,270 284	4,212 364
6	5,157 872	5,075 692	4,995 530	4,917 324
7	5,892 701	5,786 373	5,682 967	5,582 381
8	6,595 886	6,463 213	6,334 566	6,209 794
9	7,268 790	7,107 822	6,952 195	6,801 692
10	7,912 718	7,721 735	7,537 626	7,360 087
11	8,528 917	8,306 414	8,092 536	7,886 875
12	9,118 581	8,863 252	8,618 518	8,383 844
13	9,682 852	9,393 573	9,117 079	8,852 683
14	10,222 825	9,898 641	9,589 648	9,294 984
15	10,739 546	10,379 658	10,037 581	9,712 249
16	11,234 015	10,837 770	10,462 162	10,105 895
17	11,707 191	11,274 066	10,864 609	10,477 260
18	12,159 992	11,689 587	11,246 075	10,827 603
19	12,593 294	12,085 321	11,607 654	11,158 116
20	13,007 936	12,462 210	11,950 383	11,469 921
21	13,404 724	12,821 153	12,275 245	11,764 077
22	13,784 425	13,163 003	12,583 171	12,041 582
23	14,147 775	13,488 574	12,875 044	12,303 379
24	14,495 478	13,798 642	13,151 701	12,550 358
25	14,828 209	14,093 945	13,413 935	12,783 356
26	15,146 611	14,375 185	13,662 498	13,003 166
27	15,451 303	14,643 034	13,898 102	13,210 534
28	15,742 873	14,898 127	14,121 424	13 406 164
29	16,021 888	15,141 074	14,333 103	13,590 721
30	16,288 888	15,372 451	14,533 747	13,764 831
35	17,461 012	16,374 194	15,390 552	14,498 246
40	18,401 584	17,159 086	16,046 125	15,046 297
45	19,156 347	17,774 070	16,547 726	15,455 832
50	19,762 008	18,255 925	16 931 519	15,761 861

* المصدر: السابق نفسه.

تابع للجدول رقم (٣) حسب قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائـــده P

وحسب السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$ ،

n السنوات / P	6,50 %	7 %	7,50 %	8 %
1	0,938 967	0,934 579	0,930 233	0,925 926
2	1,820 626	1,808 018	1,795 565	1,783 265
3	2,648 476	2,624 316	2,600 526	2,577 097
4	3,425 799	3,387 211	3,349 326	3,312 127
5	4,155 679	4,100 197	4,045 885	3,992 710
6	4,841 014	4,766 540	4,693 846	4,622 880
7	5,484 520	5,389 289	5,296 601	5,206 370
8	6,088 751	5,971 299	5,857 304	5,746 639
9	6,656 104	6,515 232	6,378 887	6,246 888
10	7,188 830	7,023 582	6,864 081	6,710 081
11	7,689 042	7,498 674	7,315 424	7,138 964
12	8,158 725	7,942 686	7,735 278	7,536 078
13	8,599 742	8,357 651	8,125 840	7,903 776
14	9,013 842	8,745 468	8,489 154	8,244 237
15	9,402 669	9,107 914	8,827 120	8,559 479
16	9,767 764	9,446 649	9,141 507	8,851 369
17	10,110 577	9,763 223	9,433 960	9,121 638
18	10,432 466	10,059 087	9,706 009	9,371 887
19	10,734 710	10,335 595	9,959 078	9,603 599
20	11,018 507	10,594 014	10,194 491	9,818 147
21	11,284 983	10,835 527	10,413 480	10,016 803
22	11,535 196	11,061 241	10,617 191	10,200 744
23	11,770 137	11,272 187	10,806 689	10,371 059
24	11,990 739	11,469 334	10,982 967	10,528 758
25	12,197 877	11,653 583	11,146 946	10,674 776
26	12,392 373	11,825 779	11,299 485	10,809 978
27	12,574 998	11,986 709	11,441 381	10,935 165
28	12,746 477	12,137 111	11,573 378	11,051 078
29	12,907 490	12,277 674	11,696 165	11,158 406
30	13,058 676	12,409 041	11,810 386	11,257 783
35	13,686 957	12,947 672	12,272 511	11,654 568
40	14,145 527	13,331 708	12,594 409	11,924 613
45	14,480 228	13,605 522	12,818 629	12,108 402
50	14,724 521	13,800 746	12,974 812	12,233 485

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٢) : جدول قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات \ P	8,50 %	9 %	9,50 %	10 %
1	0,921 659	0,917 431	0,913 242	0,909 091
2	1,771 114	1,759 111	1,747 253	1,735 537
3	2,554 022	2,531 295	2,508 907	2,486 852
4	3,275 597	3,239 720	3,204 481	3,169 865
5	3,940 642	3,889 651	3,839 709	3,790 787
6	4,553 587	4,485 919	4,419 825	4,355 261
7	5,118 514	5,032 953	4,949 612	4,868 419
8	5,639 183	5,534 819	5,433 436	5,334 926
9	6,119 063	5,995 247	5,875 284	5,759 024
10	6,561 348	6,417 658	6,278 798	6,144 567
11	6,968 984	6,805 191	6,647 304	6,495 061
12	7,344 686	7,160 725	6,983 839	6,813 692
13	7,690 955	7,486 904	7,291 178	7,103 356
14	8,010 097	7,786 150	7,571 852	7,366 687
15	8,304 237	8,060 688	7,828 175	7,606 080
16	8,575 333	8,312 558	8,062 260	7,823 709
17	8,825 192	8,543 631	8,276 037	8,021 533
18	9,055 476	8,755 625	8,471 266	8,201 412
19	9,267 720	8,950 115	8,649 558	8,364 920
20	9,463 337	9,128 546	8,812 382	8,513 564
21	9,643 628	9,292 244	8,961 080	8,648 694
22	9,809 796	9,442 425	9,096 876	8,771 540
23	9,962 945	9,580 207	9,220 892	8,883 218
24	10,104 097	9,706 612	9,334 148	8,984 744
25	10,234 191	9,822 580	9,437 578	9,077 040
26	10,354 093	9,928 972	9,532 034	9,160 945
27	10,464 602	10,026 580	9,618 296	9,237 223
28	10,566 453	10,116 128	9,697 074	9,306 567
29	10,660 326	10,198 283	9,769 018	9,369 606
30	10,746 844	10,273 654	9,834 719	9,426 914
35	11,087 781	10,566 821	10,086 995	9,644 159
40	11,314 520	10,757 360	10,247 247	9,779 051
45	11,465 312	10,881 197	10,349 043	9,862 808
50	11,565 595	10,961 683	10,413 707	9,914 814

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٢): جدول قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	10,5 %	11%	11,5 %	12 %
1	0,904 977	0,900 901	0,896 861	0,892 857
2	1,723 961	1,712 523	1,701 221	1,690 051
3	2,465 123	2,443 715	2,422 619	2,401 831
4	3,135 858	3,102 446	3,069 614	3,037 349
5	3,742 858	3,695 897	3,649 878	3,604 776
6	4,292 179	4,230 538	4,170 294	4,111 407
7	4,789 303	4,712 196	4,637 035	4,563 757
8	5,239 188	5,146 123	5,055 637	4,967 640
9	5,646 324	5,537 048	5,431 064	5,328 250
10	6,014 773	5,889 232	5,767 771	5,650 223
11	6,348 211	6,206 515	6,069 750	5,937 699
12	6,649 964	6,492 356	6,340 583	6,194 374
13	6,923 045	6,749 870	6,583 482	6,423 548
14	7,170 176	6,981 865	6,801 329	6,628 168
15	7,393 825	7,190 870	6,996 708	6,810 864
16	7,596 221	7,379 162	7,171 935	6,973 986
17	7,779 386	7,548 794	7,329 090	7,119 630
18	7,945 146	7,701 617	7,470 036	7,249 670
19	8,095 154	7,839 294	7,596 445	7,365 777
20	8,230 909	7,963 328	7,709 816	7,469 444
21	8,353 764	8,075 070	7,811 494	7,562 003
22	8,464 945	8,175 739	7,902 685	7,644 646
23	8,565 561	8,266 432	7,984 471	7,718 434
24	8,656 616	8,348 137	8,057 822	7,784 316
25	8,739 019	8,421 745	8,123 607	7,843 139
26	8,813 592	8,488 058	8,182 607	7,895 660
27	8,881 079	8,547 800	8,235 522	7,942 554
28	8,942 153	8,601 622	8,282 979	7,984 423
29	8,997 423	8,650 110	8,325 542	8,021 806
30	9,047 442	8,693 793	8,363 715	8,055 184
35	9,234 654	8,855 240	8,503 041	8,175 504
40	9,348 292	8,951 051	8,583 887	8,243 777
45	9,417 271	9,007 910	8,630 799	8,282 516
50	9,459 140	9,041 653	8,658 020	8,304 498

* المصدر السابق نفسه .

تابع الجدول رقم(٢): جدول قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n حيث أن $r = 1 + P$

n السنوات / P	13 %	14 %	15 %	16 %
1	0,884 956	0,877 193	0,869 565	0,862 069
2	1,668 102	1,646 661	1,625 709	1,605 232
3	2,361 153	2,321 632	2,283 225	2,245 890
4	2,974 471	2,913 712	2,854 978	2,798 181
5	3,517 231	3,433 081	3,352 155	3,274 294
6	3,997 550	3,888 668	3,784 483	3,684 736
7	4,422 610	4,288 305	4,160 420	4,038 565
8	4,798 770	4,638 864	4,487 322	4,343 591
9	5,131 655	4,946 372	4,771 584	4,606 544
10	5,426 243	5,216 116	5,018 769	4,833 227
11	5,686 941	5,452 733	5,233 712	5,028 644
12	5,917 647	5,660 292	5,420 619	5,197 107
13	6,121 812	5,842 362	5,583 147	5,342 334
14	6,302 488	6,002 072	5,724 476	5,467 529
15	6,462 379	6,142 168	5,847 370	5,575 456
16	6,603 875	6,265 060	5,954 235	5,668 497
17	6,729 093	6,372 859	6,047 161	5,748 704
18	6,839 905	6,467 420	6,127 966	5,817 848
19	6,937 969	6,550 369	6,198 231	5,877 455
20	7,024 752	6,623 131	6,259 331	5,928 841
21	7,101 550	6,686 957	6,312 462	5,973 139
22	7,169 513	6,742 944	6,358 663	6,011 326
23	7,229 658	6,792 057	6,398 837	6,044 247
24	7,282 883	6,835 137	6,433 771	6,072 627
25	7,329 985	6,872 927	6,464 149	6,097 092
26	7,371 668	6,906 077	6,490 564	6,118 183
27	7,408 556	6,935 155	6,513 534	6,136 364
28	7,441 200	6,960 662	6,533 508	6,152 038
29	7,470 088	6,983 037	6,550 877	6,165 551
30	7,495 653	7,002 664	6,565 980	6,177 199
35	7,585 572	7,070 045	6,616 607	6,215 338
40	7,634 376	7,105 041	6,641 778	6,233 497
45	7,660 865	7,123 217	6,654 293	6,242 143
50	7,675 242	7,132 656	6,660 515	6,246 259

* المصدر السابق نفسه.

تابع الجدول رقم(٢) : جدول قيم $\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات \ P	17 %	18 %	19 %	20 %
1	0,854 701	0,847 458	0,840 336	0,833 333
2	1,585 214	1,565 642	1,546 501	1,527 778
3	2,209 585	2,174 273	2,139 917	2,106 481
4	2,743 235	2,690 062	2,638 586	2,588 735
5	3,199 346	3,127 171	3,057 635	2,990 612
6	3,589 185	3,497 603	3,409 777	3,325 510
7	3,922 380	3,811 528	3,705 695	3,604 592
8	4,207 163	4,077 566	3,954 366	3,837 160
9	4,450 566	4,303 022	4,163 332	4,030 967
10	4,658 604	4,494 086	4,338 935	4,192 472
11	4,836 413	4,656 005	4,486 500	4,327 060
12	4,988 387	4,793 225	4,610 504	4,439 217
13	5,118 280	4,909 513	4,714 709	4,532 681
14	5,229 299	5,008 062	4,802 277	4,610 567
15	5,324 187	5,091 578	4,875 863	4,675 473
16	5,405 288	5,162 354	4,937 700	4,729 561
17	5,474 605	5,222 334	4,989 664	4,774 634
18	5,533 851	5,273 164	5,033 331	4,812 195
19	5,584 488	5,316 241	5,070 026	4,843 496
20	5,627 767	5,352 747	5,100 862	4,869 580
21	5,664 758	[illegible] 683	5,126 775	4,891 316
22	5,696 375	,409 901	5,148 550	4,909 430
23	5,723 397	5,432 120	5,166 849	4,924 525
24	5,746 493	5,450 949	5,182 226	4,937 104
25	5,766 234	5,466 906	5,195 148	4,947 587
26	5,783 106	5,480 429	5,206 007	4,956 323
27	5,797 526	5,491 889	5,215 132	4,963 602
28	5,809 851	5,501 601	5,222 800	4,969 668
29	5,820 386	5,509 831	5,229 243	4,974 724
30	5,829 390	5,516 806	5,234 658	4,978 936
35	5,858 196	5,538 618	5,251 215	4,991 535
40	5,871 335	5,548 152	5,258 153	4,996 598
45	5,877 327	5,552 319	5,261 061	4,998 633
50	5,880 061	5,554 141	5,262 279	4,999 451

المصدر السابق نفسه .

الجدول رقم ( ) جدول قيمة $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ أو معامل رأس المال P

وحسب السنوات المختلفة $r = i + F$

السنوات n \ F	2,50 %	3 %		
1	1,0250 000	1,0300 000		
2	0,5188 272	0,5226 108		
3	0,3501 372	0,3535 304		
4	0,2658 179	0,2690 270		
5	0,2152 469	0,2183 546		
6	0,1818 500	0,1845 975		
7	0,1574 954	0,1605 368		
8	0,1391 673	0,1424 564		
9	0,1254 569	0,1284 139		
10	0,1142 638	0,1172 305		
11	0,1051 060	0,1080 774		
12	0,0974 871	0,1004 621		
13	0,0910 483	0,0942 295		
14	0,0855 365	0,0885 263		
15	0,0807 665	0,0837 666		
16	0,0765 940	0,0796 108		
17	0,0729 278	0,0759 525		
18	0,0696 701	0,0727 087		
19	0,0667 606	0,0698 139		
20	0,0641 471	0,0672 158		
21	0,0617 873	0,0648 718		
22	0,0596 466	0,0627 474		
23	0,0576 964	0,0608 139		
24	0,0559 128	0,0590 474		
25	0,0542 759	0,0574 279		
26	0,0527 687	0,0559 383		
27	0,0513 769	0,0545 642		
28	0,0500 879	0,0532 932		
29	0,0488 913	0,0521 147		
30	0,0477 776	0,0510 193		
35	0,0432 056	0,0465 393		
40	0,0398 362	0,0432 624		
45	0,0372 675	0,0407 852		
50	0,0352 581	0,0388 655		

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٣): جدول قيم $\frac{r - 1}{1 - r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n حيث أن: $r = 1 + P$

n السنوات \ P	3,25 %	3,50 %	3,75 %	4 %
1	1,0325 000	1,0350 000	1,0375 000	1,0400 000
2	0,5245 049	0,5264 005	0,5282 975	0,5301 961
3	0,3552 309	0,3569 342	0,3586 400	0,3603 485
4	0,2706 372	0,2722 511	0,2738 687	0,2754 900
5	0,2199 156	0,2214 814	0,2230 519	0,2246 271
6	0,1861 300	0,1876 682	0,1892 122	0,1907 619
7	0,1620 220	0,1635 445	0,1650 737	0,1666 096
8	0,1439 626	0,1454 766	0,1469 984	0,1485 278
9	0,1299 355	0,1314 460	0,1329 652	0,1344 930
10	0,1187 311	0,1202 414	0,1217 613	0,1232 909
11	0,1095 794	0,1110 920	0,1126 152	0,1141 490
12	0,1019 672	0,1034 839	0,1050 123	0,1065 522
13	0,0955 392	0,0970 616	0,0985 964	0,1001 437
14	0,0900 418	0,0915 707	0,0931 132	0,0946 690
15	0,0852 886	0,0868 251	0,0883 760	0,0899 411
16	0,0811 401	0,0826 848	0,0842 448	0,0858 200
17	0,0774 897	0,0790 431	0,0806 128	0,0821 985
18	0,0742 541	0,0758 168	0,0773 966	0,0789 933
19	0,0713 680	0,0729 403	0,0745 306	0,0761 386
20	0,0687 789	0,0703 611	0,0719 621	0,0735 817
21	0,0664 442	0,0680 366	0,0696 486	,0712 801
22	0,0643 294	0,0659 321	0,0675 553	0,0691 988
23	0,0624 055	0,0640 188	0,0656 534	0,0673 091
24	0,0606 489	0,0622 728	0,0639 189	0,0655 868
25	0,0590 393	0,0606 740	0,0623 317	0,0640 120
26	0,0575 598	0,0592 054	0,0608 747	0,0625 674
27	0,0561 959	0,0578 524	0,0595 334	0,0612 385
28	0,0549 351	0,0566 026	0,0582 954	0,0600 130
29	0,0537 668	0,0554 454	0,0571 499	0,0588 799
30	0,0526 817	0,0543 713	0,0560 876	0,0578 301
35	0,0482 535	0,0499 983	0,0517 732	0,0535 773
40	0,0450 279	0,0468 273	0,0486 594	0,0505 235
45	0,0426 011	0,0444 534	0,0463 410	0,0482 624
50	0,0407 303	0,0426 337	0,0445 742	0,0465 502

* المصدر السابق نفسه.

تابع للجدول رقم (٢) . جدول قيم $\frac{r - 1}{1 - r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائده P

وحسب السنوات n، حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	4,25 %	4,50 %	4,75 %	5 %
1	1,0425 000	1,0450 000	1,0475 000	1,0500 000
2	0,5320 961	0,5339 976	0,5359 005	0,5378 049
3	0,3620 596	0,3637 734	0,3654 897	0,3672 086
4	0,2771 150	0,2787 436	0,2803 759	0,2820 118
5	0,2262 070	0,2277 916	0,2293 809	0,2309 748
6	0,1923 173	0,1938 784	0,1954 451	0,1970 175
7	0,1681 522	0,1697 015	0,1712 573	0,1728 198
8	0,1500 649	0,1516 096	0,1531 620	0,1547 218
9	0,1360 294	0,1375 745	0,1391 280	0,1406 901
10	0,1248 301	0,1263 788	0,1279 370	0,1295 046
11	0,1156 934	0,1172 482	0,1188 134	0,1203 889
12	0,1081 035	0,1096 662	0,1112 402	0,1128 254
13	0,1017 034	0,1032 753	0,1048 595	0,1064 558
14	0,0962 381	0,0978 203	0,0994 156	0,1010 240
15	0,0915 204	0,0931 138	0,0947 211	0,0963 423
16	0,0874 102	0,0890 154	0,0906 353	0,0922 699
17	0,0838 002	0,0854 176	0,0870 506	0,0886 991
18	0,0806 068	0,0822 369	0,0838 834	0,0855 462
19	0,0777 643	0,0794 073	0,0810 677	0,0827 450
20	0,0752 198	0,0768 761	0,0785 505	0,0802 426
21	0,0729 308	0,0746 006	0,0762 891	0,0779 961
22	0,0708 623	0,0725 456	0,0742 485	0,0759 705
23	0,0689 855	0,0706 825	0,0723 997	0,0741 368
24	0,0672 763	0,0689 870	0,0707 187	0,0724 709
25	0,0657 145	0,0674 390	0,0691 851	0,0709 525
26	0,0642 831	0,0660 214	0,0677 819	0,0695 643
27	0,0629 674	0,0647 195	0,0664 944	0,0682 919
28	0,0617 549	0,0635 208	0,0653 102	0,0671 225
29	0,0606 350	0,0624 146	0,0642 183	0,0660 455
30	0,0595 982	0,0613 915	0,0632 095	0,0650 514
35	0,0554 100	0,0572 704	0,0591 579	0,0610 717
40	0,0524 184	0,0543 431	0,0562 967	0,0582 782
45	0,0502 166	0,0522 020	0,0542 176	0,0562 617
50	0,0485 600	0,0506 021	0,0526 749	0,0547 767

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٣) : جدول قيم $\frac{r - 1}{1 - r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n، حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	5,25 %	5,50 %	5,75 %	6 %
1	1,0525 000	1,0550 000	1,0575 000	1,0600 000
2	0,5397 107	0 5416 180	0,5435 267	0,5454 369
3	0 3689 300	0,3706 541	0,3723 807	0,3741 098
4	0,2836 514	0,2852 945	0,2869 412	0,2885 915
5	0,2325 733	0,2341 764	0,2357 841	0,2373 964
6	0,1985 954	0,2001 789	0,2017 680	0,2033 626
7	0,1743 888	0,1759 644	0,1775 465	0,1791 350
8	0,1562 892	0,1578 640	0,1594 463	0,1610 359
9	0,1422 606	0,1438 395	0,1454 267	0,1470 222
10	0,1310 815	0,1326 678	0,1342 633	0,1358 680
11	0,1219 747	0,1235 706	0,1251 768	0,1267 929
12	0,1144 218	0,1160 292	0,1176 477	0,1192 770
13	0,1080 640	0,1096 843	0,1113 163	0,1129 601
14	0,1026 452	0,1042 791	0,1059 257	0,1075 849
15	0,0979 771	0,0996 256	0,1012 875	0,1029 628
16	0,0939 190	0,0955 825	0,0972 603	0,0989 521
17	0,0903 630	0,0920 420	0,0937 360	0,0954 448
18	0,0872 251	0,0889 199	0,0906 305	0,0923 565
19	0,0844 392	0,0861 500	0,0878 773	0,0896 209
20	0,0819 423	0,0836 793	0,0854 235	0,0871 846
21	0,0797 214	0,0814 648	0,0832 259	0,0850 045
22	0,0777 115	0,0794 712	0,0812 493	0,0830 456
23	0,0758 936	0,0776 696	0,0794 647	0,0812 785
24	0,0742 434	0,0760 358	0,0778 478	0,0796 790
25	0,0727 407	0,0745 493	0,0763 782	0,0782 267
26	0,0713 682	0,0731 931	0,0750 386	0,0769 043
27	0,0701 113	0,0719 523	0,0738 144	0,0756 972
28	0,0689 574	0,0708 144	0,0726 929	0,0745 925
29	0,0678 958	0,0697 686	0,0716 633	0,0735 796
30	0,0669 169	0,0688 054	0,0707 162	0,0726 489
35	0,0630 110	0,0649 749	0,0669 628	0,0689 739
40	0,0602 864	0,0623 203	0,0643 791	0,0664 615
45	0,0583 334	0,0604 313	0,0625 540	0,0647 005
50	0,0569 061	0,0590 615	0,0612 413	0,0634 443

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٢) جدول قيم $\frac{r-1}{1-r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n، حيث أن $r = 1 + P$

n السنوات / P	6,50 %	7 %	7,50 %	8 %
1	1,065 000	1,070 000	1,075 000	1,080 000
2	0,549 261	0,553 092	0,556 928	0,560 769
3	0,377 576	0,381 052	0,384 538	0,388 033
4	0,291 903	0,295 228	0,298 568	0,301 921
5	0,240 635	0,243 891	0,247 165	0,250 456
6	0,206 568	0,209 796	0,213 045	0,216 315
7	0,182 332	0,185 553	0,188 800	0,192 072
8	0,164 237	0,167 468	0,170 727	0,174 015
9	0,150 238	0,153 486	0,156 767	0,160 080
10	0,139 105	0,142 377	0,145 686	0,149 029
11	0,130 055	0,133 357	0,136 697	0,140 076
12	0,122 568	0,125 902	0,129 278	0,132 695
13	0,116 283	0,119 651	0,123 064	0,126 522
14	0,110 940	0,114 345	0,118 797	0,121 297
15	0,106 353	0,109 795	0,113 287	0,116 830
16	0,102 378	0,105 858	0,109 391	0,112 977
17	0,098 906	0,102 425	0,106 000	0,109 629
18	0,095 855	0,099 413	0,103 029	0,106 702
19	0,093 156	0,096 753	0,100 411	0,104 128
20	0,090 756	0,094 393	0,098 092	0,101 852
21	0,088 613	0,092 289	0,096 029	0,099 832
22	0,086 691	0,090 406	0,094 187	0,098 032
23	0,084 961	0,088 714	0,092 535	0,096 422
24	0,083 398	0,087 189	0,091 050	0,094 978
25	0,081 981	0,085 811	0,089 711	0,093 679
26	0,080 695	0,084 561	0,088 500	0,092 507
27	0,079 523	0,083 426	0,087 402	0,091 448
28	0,078 453	0,082 392	0,086 405	0,090 488
29	0,077 474	0,081 449	0,085 498	0,089 619
30	0,076 577	0,080 586	0,084 671	0,088 827
35	0,073 062	0,077 234	0,081 483	0,085 803
40	0,070 694	0,075 009	0,079 400	0,083 860
45	0,069 060	0,073 500	0,078 011	0,082 587
50	0,067 914	0,072 460	0,077 072	0,081 743

* المصدر السابق نفسه.

تابع للجدول رقم(٣) : جدول قيم $\frac{r-1}{1-r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n، حيث أن: $r = 1 + P$

n السنوات / P	8,50 %	9 %	9,50 %	10 %
1	1,085 000	1,090 000	1,095 000	1,100 000
2	0,564 616	0,568 469	0,572 327	0,576 190
3	0,391 539	0,395 055	0,398 580	0,402 115
4	0,305 288	0,308 669	0,312 063	0,315 471
5	0,253 766	0,257 092	0,260 436	0,263 797
6	0,219 607	0,222 920	0,226 253	0,229 607
7	0,195 369	0,198 691	0,202 036	0,205 406
8	0,177 331	0,180 674	0,184 046	0,187 444
9	0,163 424	0,166 799	0,170 205	0,173 641
10	0,152 408	0,155 820	0,159 266	0,162 745
11	0,143 493	0,146 947	0,150 437	0,153 963
12	0,136 153	0,139 651	0,143 188	0,146 763
13	0,130 023	0,133 567	0,137 152	0,140 779
14	0,124 842	0,128 433	0,132 068	0,135 746
15	0,120 420	0,124 059	0,127 744	0,131 474
16	0,116 614	0,120 300	0,124 035	0,127 817
17	0,113 312	0,117 046	0,120 831	0,124 664
18	0,110 403	0,114 213	0,118 046	0,121 930
19	0,107 901	0,111 730	0,115 613	0,119 547
20	0,105 671	0,109 546	0,113 477	0,117 460
21	0,103 695	0,107 617	0,111 594	0,115 624
22	0,101 939	0,105 905	0,109 928	0,114 005
23	0,100 372	0,104 832	0,108 449	0,112 572
24	0,098 970	0,103 023	0,107 134	0,111 300
25	0,097 712	0,101 806	0,105 959	0,110 168
26	0,096 580	0,100 715	0,104 909	0,109 159
27	0,095 560	0,099 735	0,103 969	0,108 258
28	0,094 639	0,098 852	0,103 124	0,107 451
29	0,093 806	0,098 056	0,102 364	0,106 728
30	0,093 051	0,097 336	0,101 681	0,106 079
35	0,090 189	0,094 636	0,099 138	0,103 690
40	0,088 382	0,092 960	0,097 588	0,102 259
45	0,087 220	0,091 902	0,096 627	0,101 391
50	0,086 463	0,091 227	0,096 027	0,100 859

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٣): جدول قيم $\frac{r-1}{1-r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n، حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	10,5 %	11 %	11,5 %	12 %
1	1,105 000	1,110 000	1,115 000	1,120 000
2	0,580 059	0,583 934	0,587 813	0,591 698
3	0,405 659	0,409 213	0,412 776	0,416 349
4	0,318 892	0,322 326	0,325 774	0,329 234
5	0,267 176	0,270 570	0,273 982	0,277 410
6	0,232 982	0,236 377	0,239 791	0,243 226
7	0,208 799	0,212 215	0,215 655	0,219 118
8	0,190 869	0,194 321	0,197 799	0,201 303
9	0,177 106	0,180 602	0,184 126	0,187 679
10	0,166 257	0,169 801	0,173 377	0,176 984
11	0,157 525	0,161 121	0,164 751	0,168 415
12	0,150 377	0,154 027	0,157 714	0,161 437
13	0,144 445	0,148 151	0,151 895	0,155 677
14	0,139 467	0,143 228	0,147 030	0,150 871
15	0,135 248	0,139 065	0,142 924	0,146 824
16	0,131 644	0,135 517	0,139 432	0,143 390
17	0,128 545	0,132 471	0,136 443	0,140 457
18	0,125 863	0,129 843	0,133 868	0,137 937
19	0,123 531	0,127 563	0,131 641	0,135 763
20	0,121 493	0,125 576	0,129 705	0,133 879
21	0,119 707	0,123 838	0,128 016	0,132 240
22	0,118 134	0,122 313	0,126 539	0,130 811
23	0,116 747	0,120 971	0,125 243	0,129 560
24	0,115 519	0,119 787	0,124 103	0,128 463
25	0,114 429	0,118 740	0,123 098	0,127 500
26	0,113 461	0,117 813	0,122 210	0,126 652
27	0,112 599	0,116 989	0,121 425	0,125 904
28	0,111 830	0,116 257	0,120 730	0,125 244
29	0,111 143	0,115 605	0,120 112	0,124 660
30	0,110 528	0,115 025	0,119 564	0,124 144
35	0,108 288	0,112 927	0,117 605	0,122 317
40	0,106 971	0,111 719	0,116 497	0,121 304
45	0,106 188	0,111 014	0,115 864	0,120 736
50	0,105 718	0,110 599	0,115 500	0,120 417

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٣): جدول قيم $\frac{r-1}{1-r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n، حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات / P	13 %	14 %	15 %	16 %
1	1,130 000	1,140 000	1,150 000	1,160 000
2	0,599 484	0,607 290	0,615 116	0,622 963
3	0,423 522	0,430 731	0,437 977	0,445 258
4	0,336 194	0,343 205	0,350 265	0,357 375
5	0,284 315	0,291 284	0,298 316	0,305 409
6	0,250 153	0,257 158	0,264 237	0,271 390
7	0,226 111	0,233 192	0,240 360	0,247 613
8	0,208 387	0,215 570	0,222 850	0,230 224
9	0,194 869	0,202 168	0,209 574	0,217 082
10	0,184 290	0,191 714	0,199 252	0,206 901
11	0,175 841	0,183 394	0,191 069	0,198 861
12	0,168 986	0,176 669	0,184 481	0,192 415
13	0,163 350	0,171 164	0,179 110	0,187 184
14	0,158 668	0,166 609	0,174 688	0,182 898
15	0,154 742	0,162 809	0,171 017	0,179 358
16	0,151 426	0,159 615	0,167 948	0,176 414
17	0,148 608	0,156 915	0,165 367	0,173 952
18	0,146 201	0,154 621	0,163 186	0,171 885
19	0,144 134	0,152 663	0,161 336	0,170 142
20	0,142 354	0,150 986	0,159 761	0,168 667
21	0,140 814	0,149 545	0,158 417	0,167 416
22	0,139 479	0,148 303	0,157 266	0,166 353
23	0,138 319	0,147 231	0,156 278	0,165 447
24	0,137 308	0,146 303	0,155 430	0,164 673
25	0,136 426	0,145 498	0,154 699	0,164 013
26	0,135 655	0,144 800	0,154 070	0,163 447
27	0,134 979	0,144 193	0,153 526	0,162 963
28	0,134 387	0,143 664	0,153 057	0,162 548
29	0,133 867	0,143 204	0,152 651	0,162 192
30	0,133 411	0,142 803	0,152 300	0,161 886
35	0,131 829	0,141 442	0,151 135	0,160 892
40	0,130 986	0,140 745	0,150 562	0,160 424
45	0,130 534	0,140 386	0,150 279	0,160 201
50	0,130 289	0,140 200	0,150 139	0,160 096

* المصدر السابق نفسه .

تابع للجدول رقم(٢). جدول قيم $\frac{r-1}{1-r^{-n}}$ حسب قيم سعر الفائدة P

وحسب السنوات n، حيث أن : $r = 1 + P$

n السنوات \ P	17 %	18 %	19 %	20 %
1	1,170 000	1,180 000	1,190 000	1,200 000
2	0,630 829	0,638 716	0,646 621	0,654 545
3	0,452 574	0,459 924	0,467 308	0,474 725
4	0,364 533	0,371 739	0,378 991	0,386 289
5	0,312 564	0,319 778	0,327 050	0,334 380
6	0,278 615	0,285 910	0,293 274	0,300 706
7	0,254 947	0,262 362	0,269 855	0,277 424
8	0,237 690	0,245 244	0,252 885	0,260 609
9	0,224 691	0,232 395	0,240 192	0,248 079
10	0,214 657	0,222 515	0,230 471	0,238 523
11	0,206 765	0,214 776	0,222 891	0,231 104
12	0,200 466	0,208 628	0,216 896	0,225 265
13	0,195 378	0,203 686	0,212 102	0,220 620
14	0,191 230	0,199 678	0,208 235	0,216 893
15	0,187 822	0,196 403	0,205 092	0,213 882
16	0,185 004	0,193 710	0,202 523	0,211 436
17	0,182 662	0,191 485	0,200 414	0,209 440
18	0,180 706	0,189 639	0,198 676	0,207 805
19	0,179 067	0,188 103	0,197 238	0,206 462
20	0,177 690	0,186 820	0,196 045	0,205 357
21	0,176 530	0,185 746	0,195 054	0,204 444
22	0,175 550	0,184 846	0,194 229	0,203 690
23	0,174 721	0,184 090	0,193 542	0,203 065
24	0,174 019	0,183 454	0,192 967	0,202 548
25	0,173 423	0,182 919	0,192 487	0,202 119
26	0,172 917	0,182 467	0,192 086	0,201 763
27	0,172 487	0,182 087	0,191 750	0,201 467
28	0,172 121	0,181 765	0,191 468	0,201 221
29	0,171 810	0,181 494	0,191 232	0,201 016
30	0,171 545	0,181 264	0,191 034	0,200 846
35	0,170 701	0,180 550	0,190 432	0,200 [illegible]
40	0,170 319	0,180 240	0,190 181	0,200 [illegible]
45	0,170 145	0,180 103	0,190 076	0,200 [illegible]
50	0,170 066	0,180 046	0,190 032	0,200 [illegible]

- D -

Demond	طلب

- E -

Echange	احلال،ابدال
Economics	علم الاقتصاد
Economy	اقتصاد
Elasticity	مرونه
Equation	معادلة
Equilibrium	توازن
Export	تصدير

- F -

Factor	عامل
Final	نهائي
Final Product	منتوج نهائي
Firm	منشأه
Fixed	ثابت محدد
Function	دالة

- G -

Goods	سلع
Gross	اجمالي
Growth	نمو
Growth Coefficient	معامل النمو

- I -

Input	مدخلات
Implicit	ضمني
Implicit Function	تابع ضمني
Import	استيراد
Income	دخل
Intermediate Goods	سلع وسيطية
Inventory	مخـــــزون
Investment	استثمـــــار

- L -

Labour	عمل (قوة عمل)
Lavel	مستـــــوى
Limit	حد ،نهايـــــة
Linear	خطـــــي
Linear Function	تابع خطـــــي

- M -

Marginal Productivity	انتاجية حدية
Matrix	مصفوفة
Maximization	تعظيم
Maximum	قيمة عظمى
Minimization	تصغير
Minimum	قيمة صغرى
Minor	مصغر (لمصفوفة)
Model	نموذج
Multiple	ضارب

Multiplier Lagrange	ضارب لاغرانج

- N -

Norm	معدل،معيار
Norm of Matrix	معيار مصفوفة
Nul	صفري

- O -

Optimization	إمثال (جعلهامثاليه)
Optimum	مثالي
Optimum Selation	الحل المثالي
Order	مرتبة ـ صنف ،نوع
Output	مخرجات

- P -

Partial	جزيء
Path	مسار
Programming	برمجة
Plan	خطة
Planing	تخطيط
Price	سعـــــر
Private	خاص
Product	منتوج
Production	انتاج
Production Function	تابع انتاجي
Productivity	انتاجية

Profit	ربـــــــح
Programming	برمجه
Progress	تقدم

- R -

Rank	مرتبة
Rank of Matrix	مرتبة مصفوفة
Rate	معدل
Ray	شعاع
Resource	مورد
Row	سطر
Root	حل – جذر

- Q -

Quantity	كمية

- S -

Sectar	قطاع
Square	مربع
Static	سكوني/ثابت
Static Model	نموذج سكوني
Surface	سطح
System	نظام

- T -

Technical	فني تقني
Technique	تقنية

Theorem	نظريه
Total	اجمالي كلي
Total Derivative	مشتق كلي
Total Differential	تفاضل كلي

- U -

Unit	واحدة (قياس)

- V -

Value	قيمة
Value added	قيمة مضافة
Variabl	متحول
Vactor	شعاع

المراجع

آ ـ بالعربية :

١ـ د٠ ابراهيم العلي ٠ د٠ أمل كابوس : الرياضيات العالية ـ جامعة حلب ١٩٨٢ ٠

٢ ـ د٠ ابراهيم العلي ، نظرية الارتباط ـ جامعة حلب ١٩٨٠ ٠

٣ ـ د٠ ابراهيم العلي ، نظرية العينات ـ جامعة حلب ١٩٨٠ ٠

٤ ـ د٠ ابراهيم العلي ٠ د٠ أمل كابوس ٠ د٠ عمر حلاق ٠ نظرية الاحتمالات ـ جامعة حلب ١٩٨٥ ٠

٥ ـ د٠ ابراهيم العلي ٠ د٠ أمل كابوس : الاحصاء الرياضي ـ جامعة حلب ١٩٨٥ ٠

٦ ـ د٠ ابراهيم العلي ،بحوث العمليات أملية غير منشورة ٠جامعة الجزائر ١٩٨٢٠

٧ ـ د٠ أحمد الاشقر ، الاقتصاد الرياضي ـ جامعة حلب ١٩٨٢

٨ ـ د٠ سمير دركزنلي، الرياضيات العاليه ـ جامعة حلب ١٩٨٥

٩ ـ د٠ عبد القادر أفندي ، الرياضيات الاقتصادية ـ جامعة حلب، ١٩٨٣ ٠

١٠ـ د٠ عصام عزيز الشريف ،تحليل المدخلات والمخرجات / ديوان المطبوعات الجزائري ١٩٨٣٠

١١- د. وليد قطايه ،الرياضيات الاقتصادية والادارية - جامعة حلب ١٩٨١ .

١٢- د. محمد غسان صنوبر ، التحليل (٤) - جامعة حلب ١٩٨٣

١٣- د. أحمد رفيق قاسم ، التحليل الاقتصادي الكلي - الامارات العربية ١٩٨١ .

ب - بالانكليزية :

14- Corn A.G. Corn A.T. Mathematical Hand book McGrow-Hill Company, New York, 1968

15- Demidovich B.P.(Red) Problems in Mathematical Analysis Mir. Moscow

ج - بالروسية :

16- Воробьев Н.Н. Теория рядов. Изд-во „Наука" Москва 1975г.

17- Двайт Г.Б Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского. Изд-во „Наука" Москва 1973г

18- Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. Изд-во „Наука" Москва 1969г

19- Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование Изд-во „Наука" Москва 1967

20- Крыньский К.З. Математика для экономистов Перевод с польского Изд-во „Статистика" Москва 1970

21- Романовский П.И. Ряды Фурье Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. Изд-во „Наука" Москва 1973г

22- Смирнов В.И. Курс высшей математики. т II Изд-во „Наука" Москва 1965г

23- Терехов Л.Л. Производственные функции Изд-во „Статистика" Москва 1974г

الفهرس

المقدمـــــــــة	آ
الفصل الاول : المتواليات و السلاســـــل	١
I – المتواليات	١
II – السلاسل العددية	١٧
III – مؤشرات تقارب السلاسل	٢٤
IV – السلاسل التابعية	٣٨
* تمرينـــــات	٤٦
الفصل الثاني : الحسابات المالية	٤٩
I – الايداع العـــــام	٤٩
II – الاستثمار المنتظم	٦٣
III – الاستهلاك المنتظم	٨٤
IV – القروض طويلة الأجل	٩١
V – الاهتلاك	١٠٥
* تمرينـــــات	١٠٩
الفصل الثالث : التوابع لمتحولين ولعدة متحولات	١١٣
I – تعاريف	١١٣
II – النقاط الحرجة الموضعية والشرطية	١٣١
III – التكامل الثنائي	١٤٩
IV – التوابع لعدة متحولات	١٦١
* تمرينـــــات	١٧٥

الفصل الرابع : التوابع الانتاجية ١٧٩

I ـ التوابع الانتاجيه لمتحول واحد ١٨١

II ـ التوابع الانتاجية لعدة متحولات ١٩٢

III ـ أهم التوابع الانتاجية ٢٠٢

IV ـ حساب ثوابت التوابع الانتاجية ٢١٤

* تمرينـــــات ٢٢٤

الفصل الخامس : المدخلات والمخرجـــــات ٢٢٥

I ـ مقدمة عن المصفوفات ٢٢٥

II ـ نموذج التشابك القطاعي للكميات ثم للقيم ٢٣٤

III ـ نموذج نفقات العمل ٢٥٥

IV ـ نموذج تحديد الاسعار ٢٦٤

V ـ نموذج توازن الانتاج ٢٧١

VI ـ الشكل العام لجدول المدخلات والمخرجات ٢٧٤

VII ـ نموذج الخطة الاقتصادية للمنشأة . ٢٨٢

* تمرينـــــات ٢٩٢

الفصل السادس : مبادىء البرمجة الخطية ٢٩٧

I ـ تمهيـــــد ٢٩٨

II ـ الحل البياني ٣٠٣

III ـ نماذج البرمجة الخطية ٣٠٨

IV ـ طريقة السمبلكس ٣٠٩

* تمرينـــــات ٣٥١

الفصل السابع : أهم نماذج البرمجة الخطية في الاقتصاد ٣٥٥
I – نموذج الخطة المثالية للانتاج في القطاعات ٣٥٦
II – نموذج الخطة المثالية في الاتحاد أو القطاع ٣٦٣
III – نموذج الخطة المثالية للمؤسسة ٣٧٢
IV – نماذج النقل ٣٧٨
V – نموذج توزيع التكوين الرأسمالي ٣٨٣
VI – نموذج تركيب الوجبات الغذائية ٣٨٥
VII – نموذج الاستغلال الامثل للاراضي الزراعية ٣٨٦
* تمرينـــات ٣٨٨
الفصل الثامن : التخطيط الشبكي . ٣٩١
I – تعاريـــف ٣٩١
II – تحليل المخططات الشبكية بالنسبة للزمن ٤٠٤
III – تحليل المخطط الشبكي من حيث التكلفة . ٤٢٥
* تمرينـــات ٤٤٩
الجداول الماليـــة ٤٥٣
المصطلحات العلمية ٤٨٣
المراجـــع ٤٨٩
الفهـــرس ٤٩٣