جامعة تشرين
التعليم المفتوح
إدارة الأعمال

أسس الرياضيات المالية للتجاريين (2)

الدكتور
إبراهيم محمد العلي
أستاذ في كلية الاقتصاد

مديرية الكتب الجامعية

2004 -2003

الفهرس

الجزء الأول: مبادئ عامة		
الفصل الأول: أهم المفاهيم والمصطلحات المالية		
1	أنواع الأموال.	
2	مؤسسات الإيداع.	
3	أنظمة الإيداع والادخار.	
4	سعر الفائدة السنوي.	
5	مدة الإيداع.	
6	إرشادات حول استخدام الآلات الحاسبة	
7	الأرقام العشرية ورموزها المختلفة.	
8	الأحرف الأبجدية العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها.	
9	بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية	
الفصل الثاني: المتواليات والسلاسل العددية		
1	مفهوم المتوالية العددية.	
2	المتوالية الحسابية وتطبيقاتها.	
3	المتوالية الهندسية وتطبيقاتها.	
4	المتواليات غير المنتهية.	
5	السلاسل العددية.	
6	نهاية السلاسل المتقاربة.	
7	السلسلة الهندسية.	
8	خواص السلاسل المتقاربة	
9	تمرينات	
الجزء الثاني: نظام الفائدة البسيطة		
الفصل الثالث: حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة)		
1	تعاريف أولية.	
2	حساب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ واحد.	
3	حساب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة لعدة مبالغ.	
4	حساب مقدار الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ واحد.	
5	حساب حصيلة مبلغ واحد K.	
6	حساب حصيلة عدة مبالغ.	
7	الحسابات الجارية والطرائق المستخدمة فيها.	
8	تمرينات.	
الفصل الرابع: حساب القيمة الحالية والخصم (بفائدة بسيطة).		
1	المفاهيم العامة.	
2	العلاقات الأساسية.	
3	تطبيقات عملية.	
4	تمرينات	
الفصل الخامس: تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة).		

1	أسس التسوية.	
2	حالات التسوية.	
3	تسديد الدين قبل موعده.	
4	تسوية دين واحد بآخر جديد.	
5	تسوية عدة ديون بدين واحد.	
6	تسوية عدة ديون بدفعة نقدية ودين جديد بالباقي.	
7	استبدال عدة ديون بدين موحد وتاريخ استحقاق متوسط .	
8	استبدال عدة ديون بدين موحد وبتاريخ استحقاق مناسب.	
9	تمرينات.	
الفصل السادس: حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).		
1	حصيلة الدفعات الدورية العادية.	
2	حصيلة الدفعات الدورية الفورية.	
3	تمرينات.	
الفصل السابع: حساب القيمة الحالية الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).		
1	العلاقات الأساسية لحساب القيمة الحالية.	
2	تطبيقات مختلفة.	
3	تمرينات.	
الفصل الثامن: حسابات القروض قصيرة الأجل وطرق تسديدها (بفائدة بسيطة).		
1	المبدأ العام والطرائق المتبعة.	
2	طريقة تسديد كامل القرض مع فوائده في آخر المدة ودفعة واحدة.	
3	طريقة تسديد قيمة الفائدة المستحقة مقدماً في بداية المدة وتسديد قيمة القرض في آخر المدة.	
4	طريقة تسديد قيمة الفائدة مقدماً وتسديد القرض على أقساط دورية متساوية.	
5	طريقة تسديد الفائدة على دفعات دورية متساوية وتسديد القرض في نهاية المدة.	
6	طريقة تسديد القرض وفوائده على أقساط والقرض في آخر المدة	
7	طريقة تقسيم القرض إلى أجزاء متساوية وتسديده مع الفوائد المستحقة عليها.	
8	طريقة تسديد أصل القرض على أقساط متساوية والفوائد على المتبقي.	
9	طريقة تسديد القرض وفوائده على دفعات غير متساوية وغير دورية.	
10	تمرينات.	
الجزء الثالث . نظام الفائدة المركبة		
الفصل التاسع . حصيلة المبالغ المودعة وفوائدها:		
1	تعاريف عامة	
2	حصيلة إيداع مبلغ K.	
3	حساب الفائدة المستحقة المبلغ K.	
4	حصيلة الإيداع عند حساب الفائدة m مرة في العام.	
5	السعر الاسمي والسعر الحقيقي للفائدة.	
6	مقارنة الحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة	
7	الحسابات الجارية حسب الفائدة المركبة.	
8	تمرينات	

الفصل العاشر . القيمة الحالية والخصم:		
1	مفاهيم عامة	
2	العلاقات الأساسية بين القيمتين الحالية والاسمية والخصم	
3	تطبيقات عملية	
4	تمرينات	
الفصل الحادي عشر . تسوية الديون طويلة الأجل:		
1	أسس التسوية	
2	حالات التسوية	
3	تمرينات	
الفصل الثاني عشر . حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة مركبة)		
1	مقدمة	
2	حصيلة الدفعات العادية السنوية.	
3	حصيلة الدفعات العادية الجزئية.	
4	حصيلة الدفعات الفورية السنوية	
5	قضايا مختلفة	
6	حصيلة الدفعات الفورية الجزئية	
7	حصيلة الدفعات المؤجلة	
8	تمرينات	
الفصل الثالث عشر . القيمة الحالية للدفعات الدورية:		
1	القيمة الحالية للدفعات العادية المحدودة.	
2	القيمة الحالية للدفعات العادية الجزئية المحدودة.	
3	القيمة الحالية للدفعات الفورية العادية الدائمة.	
4	القيمة الحالية للدفعات الفورية المحدودة	
5	القيمة الحالية للدفعات الفورية الجزئية	
6	القيمة الحالية للدفعات الفورية الدائمة	
7	القيمة الحالية للدفعات المؤجلة.	
8	الاستهلاك المنتظم.	
9	تمرينات	
الفصل الرابع عشر . التكلفة الرأسمالية والاستبدال والاستهلاك		
1	التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والإصلاح.	
2	التكلفة الرأسمالية مع الاستبدال.	
3	التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والاستبدال .	
4	الاهتلاك.	
الفصل الخامس عشر . القروض طويلة الأجل وطرق تسديدها		
1	العلاقة العامة مع القرض والأقساط السنوية.	
2	العلاقة الخاصة بين القرض والأقساط الجزئية.	
3	طرائق تسديد القروض طويلة الأجل.	
4	تمرينات	
الفصل السادس عشر . السندات والأسهم.		

1	تعارف عامة حول الأسهم.	
2	السندات الاستثمارية.	
3	استهلاك السندات الاستثمارية وطرق تسديدها.	
4	تمرينات	
المصطلحات العلمية		
المراجع		
الجداول المالية		

جامعة تشرين
التعليم المفتوح
إدارة الأعمال

أسس الرياضيات المالية للتجاريين (2)

الدكتور
إبراهيم محمد العلي
أستاذ في كلية الاقتصاد

مديرية الكتب الجامعية

2004 -2003

الفهرس

الجزء الأول: مبادئ عامة		
الفصل الأول: أهم المفاهيم والمصطلحات المالية		
1	أنواع الأموال.	
2	مؤسسات الإيداع.	
3	أنظمة الإيداع والادخار.	
4	سعر الفائدة السنوي.	
5	مدة الإيداع.	
6	إرشادات حول استخدام الآلات الحاسبة	
7	الأرقام العشرية ورموزها المختلفة.	
8	الأحرف الأبجدية العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها.	
9	بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية	
الفصل الثاني: المتواليات والسلاسل العددية		
1	مفهوم المتوالية العددية.	
2	المتوالية الحسابية وتطبيقاتها.	
3	المتوالية الهندسية وتطبيقاتها.	
4	المتواليات غير المنتهية.	
5	السلاسل العددية.	
6	نهاية السلاسل المتقاربة.	
7	السلسلة الهندسية.	
8	خواص السلاسل المتقاربة	
9	تمرينات	
الجزء الثاني: نظام الفائدة البسيطة		
الفصل الثالث: حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة)		
1	تعاريف أولية.	
2	حساب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ واحد.	
3	حساب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة لعدة مبالغ.	
4	حساب مقدار الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ واحد.	
5	حساب حصيلة مبلغ واحد K.	
6	حساب حصيلة عدة مبالغ.	
7	الحسابات الجارية والطرائق المستخدمة فيها.	
8	تمرينات.	
الفصل الرابع: حساب القيمة الحالية والخصم (بفائدة بسيطة).		
1	المفاهيم العامة.	
2	العلاقات الأساسية.	
3	تطبيقات عملية.	
4	تمرينات	
الفصل الخامس: تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة).		

1	أسس التسوية.	
2	حالات التسوية.	
3	تسديد الدين قبل موعده.	
4	تسوية دين واحد بآخر جديد.	
5	تسوية عدة ديون بدين واحد.	
6	تسوية عدة ديون بدفعة نقدية ودين جديد بالباقي.	
7	استبدال عدة ديون بدين موحد وتاريخ استحقاق متوسط .	
8	استبدال عدة ديون بدين موحد وبتاريخ استحقاق مناسب.	
9	تمرينات.	
الفصل السادس: حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).		
1	حصيلة الدفعات الدورية العادية.	
2	حصيلة الدفعات الدورية الفورية.	
3	تمرينات.	
الفصل السابع: حساب القيمة الحالية الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).		
1	العلاقات الأساسية لحساب القيمة الحالية.	
2	تطبيقات مختلفة.	
3	تمرينات.	
الفصل الثامن: حسابات القروض قصيرة الأجل وطرق تسديدها (بفائدة بسيطة).		
1	المبدأ العام والطرائق المتبعة.	
2	طريقة تسديد كامل القرض مع فوائده في آخر المدة ودفعة واحدة.	
3	طريقة تسديد قيمة الفائدة المستحقة مقدماً في بداية المدة وتسديد قيمة القرض في آخر المدة.	
4	طريقة تسديد قيمة الفائدة مقدماً وتسديد القرض على أقساط دورية متساوية.	
5	طريقة تسديد الفائدة على دفعات دورية متساوية وتسديد القرض في نهاية المدة.	
6	طريقة تسديد القرض وفوائده على أقساط والقرض في آخر المدة	
7	طريقة تقسيم القرض إلى أجزاء متساوية وتسديده مع الفوائد المستحقة عليها.	
8	طريقة تسديد أصل القرض على أقساط متساوية والفوائد على المتبقي.	
9	طريقة تسديد القرض وفوائده على دفعات غير متساوية وغير دورية.	
10	تمرينات.	
الجزء الثالث . نظام الفائدة المركبة		
الفصل التاسع . حصيلة المبالغ المودعة وفوائدها:		
1	تعاريف عامة	
2	حصيلة إيداع مبلغ K.	
3	حساب الفائدة المستحقة المبلغ K.	
4	حصيلة الإيداع عند حساب الفائدة m مرة في العام.	
5	السعر الاسمي والسعر الحقيقي للفائدة.	
6	مقارنة الحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة	
7	الحسابات الجارية حسب الفائدة المركبة.	
8	تمرينات	

الفصل العاشر . القيمة الحالية والخصم:		
1	مفاهيم عامة	
2	العلاقات الأساسية بين القيمتين الحالية والاسمية والخصم	
3	تطبيقات عملية	
4	تمرينات	
الفصل الحادي عشر . تسوية الديون طويلة الأجل:		
1	أسس التسوية	
2	حالات التسوية	
3	تمرينات	
الفصل الثاني عشر . حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة مركبة)		
1	مقدمة	
2	حصيلة الدفعات العادية السنوية.	
3	حصيلة الدفعات العادية الجزئية.	
4	حصيلة الدفعات الفورية السنوية	
5	قضايا مختلفة	
6	حصيلة الدفعات الفورية الجزئية	
7	حصيلة الدفعات المؤجلة	
8	تمرينات	
الفصل الثالث عشر . القيمة الحالية للدفعات الدورية:		
1	القيمة الحالية للدفعات العادية المحدودة.	
2	القيمة الحالية للدفعات العادية الجزئية المحدودة.	
3	القيمة الحالية للدفعات الفورية العادية الدائمة.	
4	القيمة الحالية للدفعات الفورية المحدودة	
5	القيمة الحالية للدفعات الفورية الجزئية	
6	القيمة الحالية للدفعات الفورية الدائمة	
7	القيمة الحالية للدفعات المؤجلة.	
8	الاستهلاك المنتظم.	
9	تمرينات	
الفصل الرابع عشر . التكلفة الرأسمالية والاستبدال والاستهلاك		
1	التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والإصلاح.	
2	التكلفة الرأسمالية مع الاستبدال.	
3	التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والاستبدال .	
4	الاهتلاك.	
الفصل الخامس عشر . القروض طويلة الأجل وطرق تسديدها		
1	العلاقة العامة مع القرض والأقساط السنوية.	
2	العلاقة الخاصة بين القرض والأقساط الجزئية.	
3	طرائق تسديد القروض طويلة الأجل.	
4	تمرينات	
الفصل السادس عشر . السندات والأسهم.		

1	تعارف عامة حول الأسهم.	
2	السندات الاستثمارية.	
3	استهلاك السندات الاستثمارية وطرق تسديدها.	
4	تمرينات	
المصطلحات العلمية		
المراجع		
الجداول المالية		

جامعة تشرين
التعليم المفتوح
إدارة الأعمال



أسس الرياضيات المالية للتجاريين (2)

الدكتور
إبراهيم محمد العلي
أستاذ في كلية الاقتصاد

مديرية الكتب الجامعية
2004 -2003

الجزء الأول

مبادئ عامة

وتتضمن الفصلين الآتيين:

الفصل الأول: أهم المفاهيم والمصطلحات المالية

الفصل الثاني: المتواليات والسلاسل العددية

الفصل الأول
أهم المفاهيم والمصطلحات المالية

ويشمل المفاهيم التالية:

1 ـ أنواع الأموال.
2 ـ مؤسسات الإيداع.
3 ـ أنظمة الإيداع والادخار.
4 ـ سعر الفائدة السنوي.
5 ـ مدة الإيداع والجدول التراكمي.
6 ـ إرشادات حول استخدام الآلات الحاسبة.
7 ـ الأرقام العشرية ورموزها المختلفة.
8 ـ الأحرف العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها.
9 ـ بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية.

الفصل الأول

أهم المفاهيم والمصطلحات المالية

إن الرياضيات المالية تتناول بالدراسة والتحليل جميع العمليات الممكنة على النقود والأوراق المالية، وحسب مختلف الأنظمة والشروط، ولذلك سنقوم بتعريف بعض المفاهيم والمصطلحات المتعلقة بذلك.

1-1- أنواع الأموال:

تصنف الأموال حسب المفهوم القانوني إلى نوعين هما:

- أموال منقولة: وهي الأموال التي يمكن نقلها والتصرف بها مباشرةً، كالنقود والمعادن الثمينة والسندات..إلخ.
- أموال غير منقولة: وهي الأموال التي تكون مجسدة في أصول ثابتة عقارية أو زراعية، كالمنازل والمحلات والأراضي الزراعية والمعامل الصناعية ...الخ.

إن الأموال المنقولة هي التي تقع ضمن موضوع اهتمامنا في هذا الكتاب، ويتداول الناس هذه الأموال على عدة أشكال أهمها:

- الأموال النقدية بالعملات المحلية أو الأجنبية.
- المعادن الثمينة، كالذهب والفضة والبلاتين ..إلخ.
- سندات الديون الشخصية (كمبيالات).
- سندات الخزينة الحكومية.
- أسهم الشركات المساهمة.
- الحوالات والتسهيلات الائتمانية العادية والإلكترونية.
- القروض المختلفة.
- الشيكات الصادرة عن الأشخاص والمؤسسات.

ونورد فيما يلي جدولاً بأهم العملات العربية والأجنبية وأسعار صرفها بالنسبة لليرة السورية في 2003/1/30:

جدول (1): أهم العملات العربية والأجنبية وأسعار صرفها بالنسبة لليرة السورية

الدولة	اسم العملة	سعر الصرف (ل.س)
لبنان	ليرة	0.029
مصر	جنيه	9.45
الأردن	دينار	72.00
السعودية	الريال	13.60
الإمارات	الدرهم	13.90
الكويت	دينار	166.75
قطر	ريال	14.50
البحرين	دينار	133.90
عُمان	ريال	131.35

الدولة	اسم العملة	سعر الصرف (ل.س)
الولايات المتحدة	دولار	51.50
بريطانيا	جنيه إسترليني	83.05
الاتحاد الأوربي	يورو	55.45
تركيا	ليرة	–
سويسرا	فرنك	37.45
كندا	دولار كندي	33.05
اليابان	ين	0.4365
الدانمارك	كورون	7.30
السويد	كورون	5.90
النرويج	كورون	7.25

المصدر: جريدة الثورة السورية، العدد 1202، تاريخ 2003/1/30.

كما نورد فيما يلي جدولاً بأسعار الفائدة السنوية على بعض العملات العربية والأجنبية %، وذلك حسب طول مدة الإيداع (الحد الأعلى لهذه الأسعار).

كما نورد جدولاً آخر بأسعار المعادن الثمينة (دولار لكل أونصة، علماً بأن الأونصة = 28.35 غراماً)

جدول (2): أسعار المعادن الثمينة (دولار لكل أونصة)

المعدن	الذهب	الفضة	البلاتين
السعر بالدولار	364	4.77	647

المصدر: جريدة الحياة، العدد 14552، تاريخ 2003/1/25

جدول (3): أسعار الفائدة السنوية على بعض العملات العربية والأجنبية % (وذلك حسب طول مدة الإيداع)

مدة الإيداع / العملة	شهر	ثلاثة أشهر	ستة أشهر	سنة
الدينار الكويتي	2.05	2.05	2.10	2.20
الريال السعودي	1.74	2.04	0.27	2.56
الدرهم الإماراتي	1.52	1.52	1.56	1.60
الريال القطري	-	-	-	-
الدينار البحريني	5.5	1.49	1.5	1.57
الليرة السورية	8	9	9	9
الدولار الأمريكي	1.34	1.34	1.34	1.40
الجنيه الإسترليني	3.97	3.97	3.95	3.95
اليورو	2.85	2.83	2.76	2.65
الفرنك السويسري	0.61	0.62	0.62	0.71
الين الياباني	0.02	0.03	0.07	0.09

المصدر: جريدة الحياة، العدد 14552، تاريخ 2003/1/25

1-2- مؤسسات الإيداع والادخار:

معلوم لدى الجميع أنه في كل دولة توجد مؤسسات مالية تتعامل مع الأوراق المالية بكل أنواعها؛ وأهم هذه المؤسسات هي:

- المصارف الحكومية والخاصة.
- صناديق الادخار.
- صناديق التوفير.
- صناديق البريد.

ولكل من هذه المؤسسات أنظمتها الخاصة في الإيداع والادخار، ولكنها تشترك جميعاً في طرق الحساب، وفي الاعتماد على الرياضيات المالية في حل جميع مشكلاتها.

1-3- أنظمة الإيداع والادخار:

توجد عدة أنظمة للإيداع والادخار أهمها:

1 - نظام الإيداع دون فائدة: وهذا النوع من الإيداع لا يقدم للمودع أية فوائد مالية عن المبالغ التي يودعها لدى المصرف، ويعتبرها شبه أمانات.

2 - نظام الإيداع بفائدة بسيطة: وهذا النوع من الإيداع يتم فيه حساب فوائد على المبالغ التي تودع في المصرف، ولكن تلك الفوائد لا تضم إلى المبلغ الأصلي لتحصل على فوائد جديدة؛ بل تحسب على الرصيد عند إجراء التسوية أو عند إغلاق الحساب، ويطبق هذا النظام على الإيداعات قصيرة الأجل (أقل من السنة).

3 - نظام الإيداع بفائدة مركبة: وهذا النظام يمنح المبالغ المودعة فائدة، ويعمل على إضافة تلك الفائدة في نهاية كل عام (أو كل نصف عام، أو كل فصل) إلى المبلغ الأصلي ليتم حساب الفائدة الجديدة على الناتج، أي إن الفائدة المستحقة تضاف إلى

المبلغ لتأخذ فائدةً عليها أيضاً، ويطبق هذا النظام في معظم المصارف الحكومية والخاصة في جميع أنحاء العالم، كما يستخدم في عمليات خصم الأوراق المالية، وعند إجراء دراسات الجدوى الاقتصادية، وحساب القيم الحالية والتكاليف الاستثمارية وغيرها.

1-4- سعر الفائدة السنوي:

وهو نسبة مئوية تستخدم لحساب مقدار الفائدة المستحقة على المبلغ المودع بعد مرور سنة واحدة على إيداعه، ويتم ذلك بضرب تلك النسبة المئوية بقيمة المبلغ المودع؛ فمثلاً إذا أودعنا مبلغ 1000 ل.س بفائدة سنوية 9%، فإن مقدار الفائدة المستحقة على ذلك المبلغ بعد مرور سنة واحدة هو:

$$I = 1000.\frac{9}{100} = 90\ L.S.$$

فإذا كان نظام الإيداع حسب الفائدة البسيطة، فإن تلك الفائدة لا تضاف إلى المبلغ الأصلي /1000/ حتى لا تأخذ فائدة جديدة، ولكنها تبقى من حق المودع، وتحسب في رصيده العام. أما إذا كان نظام الإيداع حسب الفائدة المركّبة، فإن تلك الفائدة تضاف إلى المبلغ الأصلي /1000/ لتأخذ فائدة جديدة، ويصبح المبلغ الجديد /1090/، ويحسب مقدار الفائدة الجديدة في العام التالي على المبلغ الجديد كما يلي:

$$I_2 = 1090.\frac{9}{100} = 108.10\ L.S.$$

1-5- مدة الإيداع:

وتحسب مدة الإيداع بالسنوات حتى تتناسب مع المصطلحات الأخرى، وأهمها سعر الفائدة السنوي، أما إذا كانت تلك المدة محسوبة بالأشهر أو الأسابيع أو الأيام، فإننا نقوم بتحويل تلك المدة إلى سنوات، بتقسيمها على عدد الأشهر أو الأسابيع أو الأيام في السنة، وهنا نذكّر القارئ ببعض المفاهيم المختلفة عن السنوات المستخدمة في الحسابات المالية وهي:

السنة الميلادية (الشمسية) = 12 شهراً = 52 أسبوعاً = 365.25 يوماً.

ويتم حساب ربع اليوم السابق بإضافة يوم إلى شهر شباط كل أربع سنوات، وعندها تسمى تلك السنة الميلادية بالسنة الكبيسة، وتساوي 366 يوماً، وهي تكون في الأعوام التي رقمها يقبل القسمة على العدد 4، مثل عام 2000 ثم 2004 ثم 2008 ...إلخ. وعندما يكون التعامل مع الأيام فإنه يكون ثمة مفهومان للسنة وهما:

- السنة الصحيحة: وهي التي تحسب 365 يوماً (أو 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة).
- السنة التجارية: وهي التي تحسب 360 يوماً فقط.

وهنا نشير إلى أنه عند حساب مدة الإيداع فإن يوم الإيداع لا يدخل ضمن مدة الإيداع، بينما يدخل يوم السحب ضمن مدة الإيداع، ويستخدم لحساب مدة الإيداع جدول خاص يتضمن الرقم التراكمي لأيام السنة؛ ويتم ذلك بطرح العدد التراكمي ليوم الإيداع

من العدد التراكمي ليوم السحب (مع ملاحظة أنه إذا كانت تلك المدة تضم يوم 29 شباط من سنة كبيسة فإننا نضيف يوماً إلى المدة المحسوبة).
أنظر الجدول (5) وقم بإجراء عدة تطبيقات عليه.

جدول (4):الرقم التراكمي لأيام السنة الميلادية

1-6- إرشادات حول استخدام الآلات الحاسبة:

نظـراً لانتشـار الآلات الحاسـبة واسـتخدامها فـي مختلـف العمليـات الحسـابية والمعالجات الإحصائية، فإنه يمكننا الاستغناء عن الجداول المالية التي تستخدم لحساب بعض التراكيب الرياضية، لأن تلك الجداول لا تقدم لنا إلا حلولاً لبعض الحالات الخاصة الصحيحة.

وسنعتمد في تدريس هذا المقرر، وفي التدريب على حل مسائله وتمارينه، على استخدام الآلات الحاسبة العلمية، التي تحوي مختلف التوابع الرياضية والإحصائية؛ لذلك ننصح الطالب باقتناء آلة حاسبة علمية تحوي تلك التوابع، وتتضمن النظام *SD* الإحصائي، لأن مثل تلك الآلات ستكون ضرورية للطالب في المقررات الأخرى.

ونقدم هنا للطالب الإرشادات التالية حول أهم مواصفات الآلة المناسبة له، وهي:

1 ـ أن تحتوي الآلة على نظام *SD* الإحصائي وغيره من التوابع الرياضية.

2 ـ أن تكون تغذية الآلة على الطاقة الشمسية، أو على بطاريات الليثيوم.

3 ـ أن تكون بسيطة المنظر، وسهلة الاستعمال، بغض النظر عن ماركتها.

4 ـ أن يتم التدرب على استخدامها، وعلى الاستفادة من جميع توابعها وخصائصها خلال العام.

5 ـ أن تحتوي هذه الآلات على عدّة أنظمة، ونستطيع تحديد النظام الذي نرغب العمل عليه بواسطة المفتاح *Mode* ورقم آخر مرافق له، وهو مختلف من آلة لأخرى.

وأخيراً نشير إلى أنه يمكن الاستفادة من هذه الآلات لإجراء العمليات الحسابية البسيطة ولحساب التوابع التالية:

أ ـ التوابع الرياضية مثل: اللوغاريتم العشري *lg*، اللوغاريتم النيبري *ln*، وكذلك التوابع الأسية $10^x, e^x$ والتوابع العكسية لها، وذلك باستخدام *Shift* أو *INV*.

ب ـ القوى والجذور التربيعية والتكعيبية والتي يرمز لها بـ x^2 و $\sqrt{\ }$ و x^3 و $\sqrt[3]{x}$.

جـ ـ القوى والجذور من المراتب العليا أو الكسرية بواسطة x^y و $x^{\frac{1}{y}}$ أو $\sqrt[y]{x}$.

د ـ المتوافقات *nCr*، أو المتبادلات *nPr*.

هـ ـ التوابع المثلثية *Sin, cos, tg*، وتوابعها العكسية.

و ـ المقلوب $\frac{1}{x}$ والعاملي $x!$.

ز ـ المتوسط $\bar{x}$ والمتوسط $\bar{y}$ للمتحولين x وy.

حـ ـ الانحراف المعياري σxn و σyn أو الانحراف المعياري المصحح σxn_{-1} و σyn_{-1} للمتحولين x وy.

ط ـ معامل الارتباط البيرسوني r، ومعاملي مستقيم الانحدار a وb بين المتحولين x وy.

ي ـ المجاميع اللازمة لبعض الحسابات الإحصائية.

$$\sum y_i^3 \quad \sum x_i^3 \quad \sum x_i \cdot y_i \qquad \sum y_i^2 \quad \sum x_i^2 \quad \sum y_i \quad \sum x_i$$

وهناك العديد من الوظائف الأخرى التي يمكن يستفيد منها الطالب في حياته الدراسية والعملية.

1 - 7 - الأرقام العشرية ورموزها:

لقد مر الإنسان بمراحل متعددة حتى توصل إلى الأرقام العشرية المستخدمة حالياً، وكان اختراعها فتحاً علمياً كبيراً في تاريخ الإنسانية، واستخدم للتعبير عنها عدة أشكال أهمها: الرموز الحالية المنتشرة في جميع أنحاء العالم والتي تسمى بالأرقام العربية.

أما الرومان فكانوا يستخدمون رموزاً أخرى معقدة وغير عملية ولذلك لم تعد تستخدم إلا في عمليات التصنيف والتبويب والتأليف.

وحرصاً منا على تعريف الطالب بهذه الرموز نضع جدولاً مقارناً لرموز الأرقام العشرية حسب النظام العربي والروماني.

كما نورد في الصفحة التالية جدولاً بالأحرف الأبجدية العربية (حسب الترتيب القديم) وبالأحرف اللاتينية واليونانية وأسمائها حسب لفظها باللغة الإنكليزية.

جدول (6) الأرقام العشرية ورموزها:

الرموز العربية	الرموز الرومانية المقابلة	الرموز الهندية أو الشرقية
1	I	1
2	II	2
3	III	3
4	IV	4
5	V	5
6	VI	6
7	VII	7
8	VIII	8
9	IX	9
10	X	10
50	L	50
100	C	100
500	D	500

1000	м	100

8-1- الأحرف الأبجدية العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها:

جدول (6) الأحرف الأبجدية العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها:

الأحرف الأبجدية العربية مرتبة بحسب الترتيب الأبجدي القديم	أحرف الأبجدية اللاتينية			أحرف الأبجدية اليونانية		
	شكل الحرف		اسمه أو لفظه بالإنكليزية	شكل الحرف		اسمه أو لفظه بالإنكليزية
	حرف صغير	حرف كبير		حرف صغير	حرف كبير	
أ	*a*	*A*	اَ	α	Α	ألفا
ب	*b*	*B*	بي	β	Β	بيتا
ج	*c*	*C*	سي	γ	Γ	غاما
د	*d*	*D*	دي	δ	Δ	ديلتا
هـ	*e*	*E*	إي	ε	Ε	إبسيلون
و	*f*	*F*	إف	ζ	Ζ	زيتا
ز	*g*	*G*	جي	η	Η	إيتا
ح	*h*	*H*	أتش	θ	Θ	تيتا
ط	*i*	*I*	آي	ι	Ι	يوتا
ي	*j*	*J*	جي	κ	Κ	كبّا
ك	*k*	*K*	كي	λ	Λ	لمدا
ل	*l*	*L*	إل	μ	Μ	ميو
م	*m*	*M*	إم	ν	Ν	نيو
ن	*n*	*N*	إن	ξ	Ξ	كسي
س	*o*	*O*	أو	o	Ο	أوميكرون
ع	*p*	*P*	بي	π	Π	بي
ف	*q*	*Q*	كيو	ρ	Ρ	رو
ص	*r*	*R*	أر	σ	Σ	سيكما
ق	*s*	*S*	إس	τ	Τ	تاو
ر	*t*	*T*	تي	υ	Υ	يوبسيلون
ش	*u*	*U*	يو	φ	Φ	فاي
ت	*v*	*V*	في	χ	Χ	كاي
ث	*w*	*W*	دبل يو	ψ	Ψ	بسي
خ	*x*	*X*	إكس	ω	Ω	أوميغا
ذ	*y*	*Y*	واي			
ض	*z*	*Z*	زد			
ظ						
غ						

1-9- بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية:

جدول (7) بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية:

الرمز أو المصطلح	اسم الرمز ولفظه	مثال رياضي أو لفظي على استخدام الرمز أو المصطلح
Φ	المجموعة الخالية	مجموعة البشر على سطح القمر
Ω	المجموعة الكلية (أوميغا)	مجموعة الأشياء في الكون
$\exists$	توجد حالة واحدة على الأقل	يوجد واحد على الأقل مستيقظ
$\forall$	مهما يكن	مهما تكن X من B $\forall x \in B$
$\prod$	جداء حدود	$\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1.x_2.x_3$
$\sum$	مجموع حدود (سيغما)	$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$
!	عاملي	$4! = 4.3.2.1$
!!	العاملي الفردي أو الزوجي	$5!! = 5.3.1, \qquad 6!! = 6.4.2$
Δ	مثلث	مثلث قائم Δ
$\angle$	زاوية	زاوية قائمة $\llcorner$
$\perp$	التعامد	$\overline{ab} \perp \overline{cd}$
$\sim$	التشابه	$\Delta_1 \sim \Delta_2$
π	عدد ويمثل نسبة محيط الدائرة إلى قطرها	$\pi \approx 3{,}1416....$
e	العدد النيبري -	$e \approx 2{,}728\ ...$
^{o}	الدرجة للزوايا	$120^{\circ}, 30', 45''$
$^{'}$	الدقيقة للزوايا	$120^{\circ}, 30', 45''$
$^{''}$	الثانية للزوايا	$120^{\circ}, 30', 45''$
ln	اللوغاريتم الطبيعي (بالنسبة لـ e)	$\ln e = 1, \qquad \ln 225 = 5{,}4161004$
log_b	اللوغاريتم بالنسبة للأساس b	$log_b\ b=1$
$\log_{10}$	اللوغاريتم بالنسبة للأساس 10	$\mathrm{Log}225 = 2{,}3521825\ , \qquad \mathrm{Log}_{10}\ 10 = 1$
Lim	نهاية مقدار ما	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
ct	المقدار الثابت	
sin	جيب	$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$
cos	تجيب	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
tg	ظل	$tg\frac{\pi}{4} = 1$
$arc\ sin$	الزاوية التي تقابل الجيب	$arc\sin\frac{1}{2} = 30^{\circ}$

arc cos	الزاوية التي تقابل التجب	$arc\cos\frac{1}{2}=60^\circ$
arc tg	الزاوية التي تقابل الظل	$arc\,tg(1)=\frac{\pi}{4}$

الفصل الثاني
المتواليات والسلاسل العددية

1 ـ مفهوم المتوالية العددية.
2 ـ المتوالية الحسابية وتطبيقاتها.
3 ـ المتوالية الهندسية وتطبيقاتها.
4 ـ المتواليات غير المنتهية.
5 ـ السلاسل العددية.
6 ـ نهاية السلاسل المتقاربة.
7 ـ السلسلة الهندسية.
8 ـ خواص السلسة المتقاربة.

الفصل الثاني

المتواليات والسلاسل العددية

2-1- مفهوم المتوالية العددية:

تعريف: نقول عن كل كميات عددية من الشكل:

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,.....a_k,.....a_n,$$

إنها متوالية عددية إذا كانت تنشأ حدودها عن بعضها بعض وفق علاقة أو قانون معين، ونسمي a_1 حدها الأول، و a_n حدها الأخير، و a_k حدها العام وn عدد حدودها.

وعندما يكون عدد الحدود n محدوداً تسمى المتوالية متوالية منتهية، أما إذا كان عدد الحدود n غير محدود فتسمى المتوالية متوالية غير منتهية، وإذا كانت الحدود متزايدة، أي إذا كان:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le .....a_k \le .....a_n$$

فإننا نسمي المتوالية متوالية متزايدة.

أما إذا كانت الحدود متناقصة، أي إذا كان:

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge .....a_k \ge .....a_n$$

فإننا نسمي المتوالية متوالية متناقصة.

وسنميز هنا بين عدد من أنواع المتواليات المنتهية، وهي:

2-2- المتوالية الحسابية وتطبيقاتها:

2-2-1- تعريف: نقول عن المتوالية:

$$a_1, a_2, a_3,.....a_k,.....a_n$$

إنها متوالية حسابية إذا كان كل حد ينشأ عن سابقه بإضافة عدد ثابت $r(r \ne 0)$ ويسمى r أساس المتوالية الحسابية، أي إنه حتى تكون المتوالية حسابية يجب أن يكون:

$$a_k = a_{k-1} + r \qquad (1-2)$$

وذلك مهما تكن k رقم الترتيب، وحيث إن $(k:2,3,...,n)$.

ومن العلاقة (1-2) نلاحظ أنه يمكننا كتابة جميع حدود المتوالية الحسابية بدلالة حدها الأول a_1 وأساسها r كما يلي:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k = a_{k-1} + r = a_1 + (k-1)r$$
$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r$$

وبذلك تأخذ حدود المتوالية الحسابية الشكل التالي:

$$a_1 \quad (a_1 + r) \quad ,(a_1 + 2r) \quad ,(a_1 + 3r),\ldots\ldots(a_1 + (k-1)r) \quad ,(a_1 + (n-1)r)$$

2-2-2- خواص حدود المتوالية الحسابية:

1 ـ من التعريف ينتج أن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي مقداراً ثابتاً r أي إن:

$$a_k - a_{k-1} = r$$

2 ـ إن مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً، وذلك لأن:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-2} = a_1 + 2r + (n-3)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وهكذا يتضح أن مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a_1 + (n-1)r$ ، وهو يساوي مجموع أي حدين متقابلين آخرين.

2-2-3- مجموع حدود المتوالية الحسابية:

إذا رمزنا لمجموع حدود المتوالية الحسابية بـ P_n، فيكون لدينا أن:

$$Pn = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots a_k + \ldots\ldots\ldots a_n$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل المختصر الآتي:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

لحساب هذا المجموع نكتب حدود المتوالية مرتين وبشكل متعاكس على النحو التالي:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3,\ldots\ldots a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n$$
$$a_n, \quad a_{n-1}, \quad a_{n-2}\ldots\ldots a_3, \quad a_2, \quad a_1$$

ثم نأخذ مجموع كل حدين متقابلين ولجميع الحدود، فنحصل على العلاقة التالية:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ...(a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = 2P_n$$

وبالاستفادة من الخاصة الثانية السابقة حول مجموع الحدود المتقابلة، وبملاحظة أن جميع الأزواج في الطرف الأيسر متساوية وتساوي $[2a_1 + (n-1)r]$ وأن عدد هذه الأزواج يساوي n زوجاً، فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$n[2a_1 + (n-1)r] = 2P_n$$

ومنها نجد أن المجموع P_n يساوي:

$$P_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r] \qquad (2-2)$$

وبما أن المقدار $[2a_1 + (n-1)r]$ يساوي مجموع أي حدين متقابلين مثل الحدين $(a_1 + a_n)$، وبالتعويض في العلاقة (2-2) نجد أن مجموع حدود المتوالية الحسابية يمكن أن يحسب من العلاقة التالية:

$$P_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (3-2)$$

مثال1:

أوجد نوع وأساس ومجموع حدود المتوالية التالية:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

الحل:

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية حسابية، لأن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي 2، وأن حدها الأول $a_1 = 2$، وحدها الأخير $a_n = 20$، وعدد حدودها *n=10*، وبذلك نجد أن مجموع حدودها:

$$P_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(2 + 20) = 110$$

مثال 2 :

أوجد مجموع المتوالية التالية:

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38

الحل:

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية حسابية أساسها يساوي $r = 5$، وحدها الأول $a_1 = 3$ وحدها الأخير $a_n = 38$، وعدد حدودها *n=8*، وبذلك نجد أن مجموع حدودها يساوي:

$$P_8 = \frac{8}{2}(3+38) = 164$$

مثال 3 :

أوجد مجموع عشرة الحدود الأولى لمتوالية حسابية أساسها *r=6*، وحدها الأول $a_1 = 5$:

الحل:

من العلاقة (2-2) نجد أن:

$$P_{10} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

$$P_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 5 + 9 \cdot 6) = 320$$

2-2-4- مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية التالية:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., (n-2), (n-1), n

لحساب مجموع حدود هذه المتوالية نلاحظ أنها متوالية حسابية، لأن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي مقداراً ثابتاً *r*، (هنا *r=1*) وأن حدها الأول $a_1 = 1$ ، وحدها الأخير $a_n = n$، وعدد حدودها *n*، وبذلك نجد أن مجموعها حسب العلاقة (2-3) يساوي:

$$P_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1+n) \qquad (4-2)$$

وهي علاقة هامة تستخدم كثيراً في حساب مجموع الأعداد الطبيعية من *1* حتى أي عدد *n*.

ومن الواضح أنه يمكننا حساب مجموع حدود هذه المتوالية باستخدام العلاقة (2-2) فيكون:

$$P_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1] = \frac{n}{2}(n+1)$$

وهي العلاقة (2-4) السابقة نفسها.

2-2-5- مجموع حدود متوالية الأعداد الفردية ومتوالية الأعداد الزوجية الطبيعية:

أوجد العلاقة التي تعطينا مجموع الأعداد الفردية، من *1* حتى *(2n-1)*، أي مجموع الـ *n* حداً الأولى منها، ثم العلاقة التي تعطينا مجموع الأعداد الزوجية من *2* حتى الحد *2n*.

الحل:

إن متوالية الأعداد الفردية هي: *1, 3, 5, 7, 9,.....,(2n-1)* لحساب مجموعها نلاحظ أنها متوالية حسابية أساسها *r=2* ، وحدها الأول $a_1 = 1$ ، وحدها الأخير $a_n = (2n-1)$، وعدد حدودها *n* حداً، وبذلك يكون:

$$P_n = \frac{n}{2}[1+(2n-1)] = n^2 \qquad (5-2)$$

وبطريقةٍ مشابهة نجد أن مجموع الأعداد الزوجية من *2* حتى *2n* يعطى بالعلاقة:

$$P_n = n(n+1) \qquad (6-2)$$

2-2-6- مجموع حدود متوالية مربعات الأعداد الطبيعية، وهي المتواليات التي حدودها:

$$1^2,\ \ 2^2,\ \ 3^2,\ \ 4^2,\ \ 5^2,\ldots\ldots\ldots,k^2,\ldots\ldots\ldots n^2,$$

نرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز S_n فيكون:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2$$

ولحساب مجموع حدود هذه المتوالية نأخذ المتطابقة التالية:

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

ثم نعطي *k* قيماً مختلفة من *1* حتى *n* فنحصل على ما يلي:

عندما يكون *k=1* يكون: $1^3 - 0^3 = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1$

عندما يكون *k=2* يكون: $2^3 - 1^3 = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1$

عندما يكون *k=3* يكون: $3^3 - 2^3 = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1$

عندما يكون *k=4* يكون: $4^3 - 3^3 = 3\cdot 4^2 - 3\cdot 4 + 1$

عندما يكون *k=5* يكون: $5^3 - 4^3 = 3\cdot 5^2 - 3\cdot 5 + 1$

....

عندما يكون *k=n* يكون: $n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1$

نجمع شاقولياً حدود كل طرف على حدة فنحصل على:

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots\ldots + 1^2) - 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + n) + n$$

وبما أن مجموع مربعات الحدود يساوي S_n ، وأن مجموع الحدود نفسها يساوي $\frac{n}{2}(1+n)$ فالطرف الثاني يساوي:

$$n^3 = 3S_n - 3\frac{n}{2}(n+1) + n$$

ومنها نجد:

$$3S_n = n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n$$

$$S_n = \frac{n}{3}[n^2 + \frac{3}{2}(n+1) - 1]$$

$$S_n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1}{6} \qquad (6-2)$$

وبتحليل القوس الذي في البسط إلى عوامله نجد أن مجموع مربعات n عدد طبيعي يعطى بالعلاقة:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (7-2)$$

مثال 4:

أوجد مجموع مربعات الأعداد الطبيعية من *1* حتى *20*:

الحل:

إن متوالية المربعات العشرين هي:

$$1^2,\ \ 2^2,\ \ 3^2,\ \ 4^2,\ \ 5^2,.....,20^2$$

وإن مجموعها S_n يساوي:

$$S_n = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

2-2-7- مجموع حدود متواليات مكعبات الأعداد الطبيعية، وهي المتوالية:

$$1^3,\ \ 2^3,\ \ 3^3,\ \ 4^3,\ \ 5^3,.....,k^3,.....n^3,$$

نرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز σ_n فيكون:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3$$

ولحساب هذه المتوالية نأخذ المتطابقة التالية:

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

ويمكننا التوصل إلى ما نريد باتباع الأسلوب الذي اتبعناه في متوالية المربعات، ولكننا هنا ومن أجل الاستفادة سنتبع أسلوباً آخر للبرهان، فنأخذ المجموع النوني لكلا الطرفين، فيكون:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^4 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - n$$

وبملاحظة أن الطرف الأيسر يساوي n^4 يكون لدينا:

$$n^4 = 4\sigma_n - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n}{2}(1+n) - n$$

ومنه يكون لدينا:

$$4\sigma_n = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(1+n) + n$$

وبإجراء بعض الإصلاحات نجد أن:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (8-2)$$

مثال 5:

أوجد مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية من 1 إلى 20.

الحل:

إن متوالية المكعبات هي:

$$1^3,\ \ 2^3,\ \ 3^3,\ \ 4^3,\ \ 5^3,\ldots\ldots\ldots,20^3$$

ومجموع حدودها يساوي:

$$\sigma_n = \left[\frac{20.21}{2}\right]^2 = 44100$$

2-3- المتوالية الهندسية وتطبيقاتها:

2-3-1- تعريف: نقول عن المتوالية:

$$a_1, a_2,\ \ a_3,\ \ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n$$

إنها متوالية هندسية إذا كانت نسبة كل حد على سابقه تساوي دائماً مقداراً ثابتاً q، (بشرط أن يكون $q \neq 1$)، ويسمى q أساس المتوالية الهندسية؛ أي إنه في المتوالية الهندسية يكون دينا:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \qquad (9-2)$$

وذلك مهما تكن رقم الترتيب k، حيث *(k: 2, 3,.....,n)*.

ومن العلاقة (2-9) يتضح لنا أنه يمكننا كتابة الحد العام للمتوالية الهندسية على الشكل:

$$a_k = q \cdot a_{k-1}$$

أي أن كل حد من حدود المتوالية الهندسية ينشأ عن سابقه بالضرب بعدد ثابت q (حيث $q \neq 1$)، ومنه نجد أن الحدود المنفردة والمفصلة تساوي:

$$a_2 = qa_1 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$
.....
$$a_k = a_{k-1} q = a_1 q^{k-1}$$
.....
$$a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}$$

كما يمكن كتابة الحدود كما يلي:

$$a_1,\quad a_1 q,\quad a_1 q^2,\quad a_1 q^3, \ldots\ldots a_1 q^{k-1}, \ldots\ldots a_1 q^{n-1} \qquad (10-2)$$

2-3-2- مجموع حدود المتوالية الهندسية:

لنرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز G_n فيكون:

$$G_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots\ldots + a_1 q^{k-1} + \ldots\ldots + a_1 q^{n-1} \qquad (11-2)$$

ولحساب هذا المجموع نضرب طرفي العلاقة (2-11) بالأساس q فنحصل على العلاقة:

$$qG_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots\ldots + a_1 q^k + \ldots\ldots + a_1 q^n \qquad (12-2)$$

ثم نطرح المجموع (2-11) من المجموع (2-12) فنجد أن:

$$qG_n - G_n = a_1 q^n - a_1$$
$$G_n (q-1) = a_1 (q^n - 1)$$

وبذلك نجد أن المجموع G_n يساوي:

$$G_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (q \neq 1) \qquad (13-2)$$

مثال 6:

أوجد أساس ومجموع المتوالية:

2, 6, 18, 54, 162, 486

الحل:

نلاحظ أن نسبة أي حد على سابقه تساوي *3*؛ أي إن المتوالية هي متوالية هندسية أساسها $q=3$ ، وحدها الأول $a_1 = 2$ ، وعدد حدودها $n=6$. وبذلك يكون مجموع حدود هذه المتوالية الهندسية مساوياً لـ:

$$G_6 = 2\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728$$

مثال 7:

يحكى أن مخترع الشطرنج طلب من السلطان مقابل اختراعه جائزة تتمثل في أن يضعوا له حبة قمح في المربع الأول، ثم ضعفها في الثاني، ثم ضعف ذلك في الثالث ...إلخ. فلم يتمكن السلطان من أداء هذه الجائزة.

فما هو مجموع عدد حبات القمح اللازمة لذلك؟

الحل:

إن متوالية عدد حبات القمح هي:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ldots\ldots\ldots\ldots,a_{64}$$

وهي عبارة عن متوالية هندسية، وحدها الأول $a_1 = 1$، أساسها $q=2$، وعدد حدودها $n=64$ (عدد المربعات)، وبذلك نجد أن مجموع حبات القمح اللازمة يساوي:

$$G_{64} = 1.\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 184467{,}44 \cdot 10^{15}$$

أي إن الجائزة بلغت أكثر من 184467440 تريليون حبة قمح، وهو أمر كان أكبر من استطاعة ذلك السلطان.

مثال 8:

إذا كان مجموع حدود متوالية هندسية يساوي 242، وكان أساسها $q=3$، وعدد حدودها $n=5$، فما هو حدها الأول؟

الحل:

من العلاقة (13-2) نجد أن:

$$242 = a_1.\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121a_1$$

$$a_1 = \frac{242}{121} = 2$$

مثال 9:

إذا علمنا أن مجموع حدود متوالية هندسية يساوي 728، وأن أساسها $q=3$، وأن حدها الأول $a_1 = 2$ ، فما هو عدد حدودها؟

الحل:

من العلاقة (13-2) نجد أن:

$$728 = 2\frac{3^n - 1}{3-1} = 3^n - 1$$

$$729 = 3^n$$

لحساب n نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$\lg(729) = n\,\lg(3)$$

$$n = \frac{\lg(729)}{\lg(3)} = \frac{2{,}862727528}{0{,}4771212547} = 6$$

2-4- المتواليات غير المنتهية:

إن المتواليات غير المنتهية هي التي تتضمن لا نهاية من الحدود، وتكتب على الشكل التالي:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n + \ldots\ldots$$

وعند حساب مجموع حدود هذه المتواليات يجب أن نلاحظ أن قيمة ذلك المجموع قد تكون لا نهائية أيضاً، لذلك فمن المهم جداً أن ندرس هذه الحالات، وأن نبحث عن قيمة مجموع حدود المتواليات غير المنتهية إذا كانت موجودة.

وهنا نشير إلى أن مجموع المتوالية الحسابية وغير المنتهية يكون لا نهائياً مهما يكن أساسها، وحدها الأول [انظر العلاقتين (2-1) و(3-1)]، أما بالنسبة للمتوالية الهندسية غير المنتهية فإننا نلاحظ من العلاقة (3-2) أن مجموعها G_n يكون معيناً فقط عندما يكون أساسها $|q|<1$، أما عندما يكون $|q|\geq 1$ فإن ذلك المجموع G_n يصبح لا نهائياً أو غير معين، وسنصادف مثل هذه الحالات في فقرة السلاسل التالية:

2-5- السلاسل العددية:

2-5-1-تعريف السلسلة:

إن السلسلة هي المجموع اللانهائي لحدود متوالية غير منتهية.
فإذا كانت لدينا المتوالية غير المنتهية التالية:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n + \ldots\ldots\ldots$$

فإن السلسلة هي المجموع اللانهائي لحدودها، ونرمز له بـ S، فيكون لدينا:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (14-2)$$

وبما أن a_k هو الحد العام للمتوالية غير المنتهية السابقة، فسنصطلح على أن نرمز للسلسلة التي حدها العام a_k بالرمز $\{a_k\}$.
وهنا نميز بين نوعين من السلاسل هما:

1 ـ السلاسل المتقاربة:

وهي السلاسل التي يكون فيها للمجموع السابق S قيمة معينة، ونسمي هذه القيمة بنهاية السلسلة المفروضة.

2 ـ السلاسل المتباعدة:

وهي السلاسل التي يكون فيها للمجموع السابق S قيمة غير معينة أو لا نهائية؛ أي إنه لا يمكننا حساب قيمة S للسلاسل المتباعدة.

2-6- نهاية السلاسل المتقاربة:

نلاحظ أن حساب قيمة المجموع S ـ وحتى في السلاسل المتقاربة ـ يعتبر أمراً مستحيلاً، وذلك لأنه يتضمن لا نهاية من الحدود، لذلك فإننا نقوم بأخذ الـ n حداً الأولى من حدود المتوالية، ونحسب مجموعها ـ إن أمكن ـ بدلالة n، ثم ننهي n إلى اللانهاية، فنحصل على قيمة المجموع اللانهائي S، أو على نهاية السلسلة عندما تنتهي n إلى اللانهاية.

فإذا رمزنا إلى الـ n حداً الأولى من حدود المتوالية بالرموز:

$$a_1,\ \ a_2,\ \ a_3,\ \ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n$$

ولمجموعها بالرمز S_n فيكون:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (15-2)$$

ومن الواضح أن نهاية S_n عندما تنتهي n إلى اللانهاية ـ إذا كانت هذه النهاية موجودة ـ تساوي المجموع الحقيقي S، أو نهاية السلسلة المفروضة؛ أي إن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (16-2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

ويمكن أن يكتب ذلك على الشكل التالي:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \qquad (17-2)$$

وهنا نشير إلى أن الكلام عن مجموع لا نهائي لحدود متوالية ما لن يكون له معنى إلا عندما تكون السلسلة متقاربة.

وعندما يكون n كبيراً بشكلٍ كافٍ، وتكون السلسلة متقاربة، فإن المجموع S_n يعتبر قيمة تقريبية مقبولة للمجموع S. والخطأ R_n المرتكب من جراء ذلك التقريب يساوي:

$$R_n = S - S_n \qquad (18-2)$$

ويسمى R_n بباقي السلسلة، وهو عبارة عن مجموع لا نهائي أيضاً، نحصل عليه من السلسلة الأصلية بعد حذف الـ n حداً الأولى منها؛ أي إن:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (19-2)$$

وتبقى قيمة الخطأ R_n في أغلب الأحيان مجهولة، وتستبدل ـ إذا كانت السلسلة متقاربة ـ بقيمة تقريبية لها.

2-7- السلسلة الهندسية:

لتكن لدينا المتوالية الهندسية غير المنتهية التالية:

$$aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ldots\ldots aq^n,\ aq^{n+1}\ldots\ldots$$

ومجموعها S يساوي:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots\ldots + aq^n + aq^{n+1} + \ldots\ldots$$

ويطلق عليه اسم السلسلة الهندسية.

ولإيجاد قيمة S هذه نأخذ مجموع الـ n حداً الأولى منها S_n فيكون:

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{n-1}$$

واعتماداً على العلاقة (13-21) نجد أن S_n يساوي:

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (20-2)$$

ولحساب قيمة S ننهي n إلى اللانهاية، ونبحث عن نهاية S_n ، وهنا نميز الحالات التالية:

1 ـ عندما يكون $|q|<1$، في هذه الحالة يكون:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

وتكون نهاية S_n تساوي:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}$$

أي إن قيمة السلسلة الهندسية في هذه الحالة تساوي:

$$S = \frac{a}{1-q} \qquad |q|<1 \qquad (21-2)$$

وبما أن المقدار الأخير محدود، فإن السلسلة تكون متقاربة في هذه الحالة.

2 ـ عندما تكون $|q|>1$ فإن:

$$q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

وعندها تكون السلسلة متباعدة ولا يمكن التعامل معها.

3 ـ عندما $q=1$ فإننا نجد أن:

$$S_n = \underbrace{a+a+a+a+\ldots\ldots\ldots\ldots+a}_{n \text{ مرة}} = n\cdot a$$

وبذلك نجد أيضاً:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

وتكون السلسلة متباعدة أيضاً.

4 ـ عندما $q=-1$ فإننا نجد أن:

$$S_n = \underbrace{a-a+a-a+\ldots\ldots\ldots\ldots+a}_{n \text{ مرة}}$$

وبذلك يكون:

$$S_n = \begin{cases} a & \text{إذا كان } n \text{ فردياً} \\ o & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً} \end{cases} \qquad (22\text{-}2)$$

أي إن نهاية S_n غير معينة، لأنها تتناوب بين إحدى القيمتين (a وصفر) ولذلك تعتبر السلسلة متباعدة أيضاً.

ولتقدير الخطأ المرتكب R_n من جراء تقريب S بواسطة S_n عندما تكون السلسلة متقاربة ($|q|<1$) ـ ولا معنى للبحث عن الخطأ في حالة السلاسل المتباعدة ـ نجد أنه:

بما أن $|q|<1$ لأن السلسلة متقاربة فرضاً، يكون لدينا في هذه الحالة أن:

$$R_n = S - S_n = \frac{a}{1-q} - a\frac{q_n-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}\left[1+q^n-1\right] = a\frac{q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{q^n}{q-1} = 0 \qquad (24-2)$$

أي إن الخطأ المرتكب R_n يقترب من الصفر كلما ازداد عدد الحدود n.

مثال 10:

كتطبيق على ما سبق احسب مجموع حدود المتوالية غير المنتهية التالية:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2^{n-1}},\ldots\ldots\ldots$$

الحل:

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية هندسية غير منتهية حدها الأول $a=1$، أساسها $q=\frac{1}{2}$. وبذلك يكون مجموعها S هو السلسلة التالية:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

ملاحظة:

مما سبق نلاحظ أن عملية التعبير عن المجموع S_n بواسطة علاقة رياضية ليست بالأمر السهل، بل هي عملية معقدة في كثير من الأحيان، لذلك فإن دراسة تقارب السلاسل عن طريق إيجاد تلك العلاقة بدلالة n، ثم إنهاء n إلى اللانهاية ليست دائماً طريقة عملية، وقد لا تؤدي بنا إلى نتيجة محددة، عدا عن أن حساب S_n بدلالة n لا يعتبر ضرورياً في كثير من الحالات، وحيث يكون همنا الأول معرفة فيما إذا كانت السلسلة متقاربة أم لا، وبعده نأخذ عدداً محدوداً من المجموع، ونعتبره قيمة تقريبية لـ S، وذلك دون الاهتمام بقيمة نهاية S_n عندما تنتهي n إلى اللانهاية.

وأخيراً نذكّر بأهمّ خواص السلاسل المتقاربة، وهي:

2-8- خواص السلاسل المتقاربة:

1 ـ إن مجموع ـ أو طرح ـ سلسلتين متقاربتين هو سلسلة متقاربة.

2 ـ إن جداء أي سلسلة متقاربة بعدد ثابت ومحدود هو سلسلة متقاربة.

3 ـ إن حذف ـ أو إضافة ـ عدد محدود من حدود سلسلة متقاربة لا يؤثر على تقاربها.

4 ـ إن الحد العام للسلسلة المتقاربة ينتهي إلى الصفر؛ أي إن: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (وهو شرط لازم فقط).

إن البرهان على هذه الخواص سهل جداً، وخاصةً إذا علمنا أن قيمة المجموع اللانهائي تبقى محدودة ومعينة في كل الحالات السابقة.

تمرينات

1 ـ أوجد نوع وأساس ومجموع المتواليات التالية:

أ ـ متوالية الأعداد الفردية من *1* حتى *99*.

ب ـ المتوالية *3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24*.

جـ ـ المتوالية التي حدها الأول $a_1 = 5$ ، وأساسها *r=2*، وعدد حدودها *n=15*.

د ـ المتوالية التالية:

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64}$$

هـ ـ المتوالية التي حدها الأول $a = 4$ ، وأساسها *q=2*، وعدد حدودها *n=10*.

و ـ المتوالية التي حدودها:

$$1,\ 2x,\ 3x^2,\ 4x^3,\ 5x^4,\ldots\ldots\ldots\ldots,nx^{n-1}$$

ز ـ المتوالية:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

2 ـ أوجد الحد العام للسلاسل التالية وحاول أن تجد قيمة مجموعها *S*:

أ ـ السلسلة:

$$2+4+6+8+10+12+\ldots..$$

ب ـ السلسلة:

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\ldots\ldots\ldots$$

الجزء الثاني
نظام الفائدة البسيطة

ويتضمن الفصول الآتية:

الفصل الثالث: حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة).
الفصل الرابع: حساب القيمة الحالية والخصم للمبالغ والسندات (بفائدة بسيطة).
الفصل الخامس: حساب حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).
الفصل السادس: حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).
الفصل السابع: حسابات تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة).
الفصل الثامن: حسابات القروض قصيرة الأجل وطرق تسديدها (بفائدة بسيطة).

الفصل الثالث

حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات التالية:

1 ـ تعاريف أولية: المبلغ الأصلي، سعر الفائدة السنوية، مدة الإيداع، مقدار الفائدة الصحيحة ، مقدار الفائدة التجارية.
2 ـ حساب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ واحد.
3 ـ حساب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة لعدة مبالغ.
4 ـ حساب مقدار الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ واحد.
5 ـ حساب حصيلة مبلغ واحد.
6 ـ حساب حصيلة عدة مبالغ.
7 ـ الحسابات الجارية وطرائقها، الطريقة المباشرة، طريقة النمر، طريقة حساب الفائدة على أقل رصيد خلال الشهر.
8 ـ تمرينات.

الفصل الثالث

حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة)

3-1- تعاريف أولية:

أ ـ المبلغ الأصلي: هو المبلغ الأساسي الذي يقوم الشخص بإيداعه في المصرف، أو عند أحد الناس مقابل فائدة محددة، ونرمز لهذا المبلغ بالرمز k.

ب ـ سعر الفائدة السنوية: وهو النسبة المئوية التي يستحقها المودع على المبلغ الأصلي k مقابل إيداعه لمدة سنة كاملة، ونرمز لسعر الفائدة السنوية بالرمز p، ويكون عادةً نسبة مئوية مثل 8%، أو 9%، أو غير ذلك.

جـ ـ مدة الإيداع: وهي الفترة الزمنية التي يودع بها المبلغ الأصلي، وتحسب عادةً بالسنوات، وإذا كانت المدة أقل من سنة، أو تشمل أجزاء أخرى من السنة، فيتم حسابها بالأيام، ثم تحويلها إلى سنوات بتقسيمها على 365 يوماً (أو على 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة)، علماً أن يوم الإيداع لا يدخل في حساب المدة، بينما يدخل يوم السحب في حساب مدة الإيداع. ويمكن الاستعانة بالجدول (4) للرقم التراكمي لأيام السنة عند حساب مدة الإيداع.

أما إذا كانت المدة مؤلفة من أشهر صحيحة فيتم حساب مدة الإيداع بالأشهر، ثم يتم تقسيمها على 12 لتحويلها إلى سنوات كاملة أو كسرية، ونرمز للمدة الزمنية المحسوبة بالسنوات بالرمز n.

د ـ مقدار الفائدة الصحيحة: وهو المبلغ الإضافي الذي يستحقه المودع مقابل إيداع المبلغ الأصلي k لمدةٍ ما؛ وهو يحسب بنفس الوحدات النقدية للمبلغ الأصلي k، وعندها تحسب السنة 365 يوماً (أو 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة)، أي عند حساب المدة بالأيام نقسمها على 365 يوماً.

هـ ـ مقدار الفائدة التجارية: وهو المبلغ الإضافي الذي يستحقه المودع مقابل إيداع المبلغ الأصلي k لمدةٍ ما؛ وذلك عندما تحسب السنة 360 يوماً فقط.

3-2- حساب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ واحد:

لحساب مقدار الفائدة المستحقة لمبلغ ما نلاحظ أن ذلك المقدار يتأثر بعدة عوامل هي:

سعر الفائدة السنوية p، وحجم المبلغ الأصلي k، ومدة الإيداع n بالسنوات، وبما أننا نقوم بإجراء الحسابات على أساس نظام الفائدة البسيطة نجد أنه:

في نهاية السنة الأولى يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p$ ليرة سورية.

وفي نهاية السنة الثانية يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p.2$ ليرة سورية.

وفي نهاية السنة الثالثة يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p.3$ ليرة سورية.

.....

وفي نهاية السنة n يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p.n$ ليرة سورية.

فإذا رمزنا لمقدار الفائدة الصحيحة المستحقة عند إيداع مبلغ k بفائدة سنوية p لمدة n بالرمز In، فإننا نحصل على العلاقة التالية:

$$In = k.p.n \qquad (1-3)$$

وهي معادلة تتضمن أربعة متحولات؛ إذا عرفنا ثلاثة منها نستطيع حساب الرابع.

مثال 1:

احسب مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 5000 ليرة سورية بفائدة 8% ولمدة 3 سنوات.

الحل:

لدينا: $k=5000$، و$p=0,08$، و$n=3$، ولكن $In=?$

وبذلك نجد:

$$In = 5000(0,08).3 = 1200\,L.S.$$

مثال 2:

أودع أحدهم مبلغ 10000 ليرة سورية لمدة سبعة أشهر بفائدة سنوية 9%، والمطلوب حساب مقدار الفائدة المستحقة.

الحل:

لدينا: $k=10000$، و$p=0,09$، و $n = \frac{7}{12}$، ولكن $In=?$

وبذلك نجد:

$$In = 10000(0,09).\frac{7}{12} = 525\,L.S.$$

مثال 3:

أودع أحمد مبلغ 25000 ليرة سورية بتاريخ 2002/1/12 وسحبه يوم 2002/9/17 فاحسب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة له إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية 10%.

الحل:

نلاحظ أن: $k=25000$، و$p=0,10$، ولحساب المدة n بالسنوات نحسبها أولاً بالأيام، ونلاحظ قبل كل شيء أن سنة 2002 ليست كبيسة، وعدد أيام شهر شباط يساوي 28 يوماً فقط، وبذلك نجد أن مدة الإيداع بالأيام حسب الأشهر المتتالية تساوي:
19 يوماً من كانون الثاني + 28 من شباط + 31 من آذار + 30 من نيسان + 31 من آيار + 30 من حزيران +31 من تموز + 17 يوماً من أيلول = مدة الإيداع بالأيام

$$M=19+28+31+30+31+30+31+31+17$$

$$M=248 \text{ يوماً}$$

وكان يمكننا حساب هذه المدة باستخدام الجدول التراكمي لأيام السنة ـ وهو الجدول (4) الوارد في الفصل الأول من هذا الكتاب ـ وذلك بإتباع القاعدتين التاليتين:

$$d=260-12=248 \text{ يوماً}$$

وبذلك نجد أن مدة الإيداع بالسنوات $n=\dfrac{248}{365}=$

وأن مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة يساوي:

$$In=25000(0,10).\frac{248}{365}=1698,63\,L.S.$$

مثال 4:

أودع حسام مبلغ 15000 ليرة سورية بتاريخ 2002/3/15 وسحبه بتاريخ 2002/8/25، وبلغ مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة له 550 ليرة سورية، فما هو سعر الفائدة السنوية للإيداع؟

الحل:

لدينا: $k=15000$، و$In=550$، ولكن $p=?$.

أما المدة بالأيام فنحسبها من الجدول الرقم التراكمي لأيام السنة فنجد أن:

$$d = 237 - 74 = 163 \text{ يوماً}$$

$$n = \frac{163}{365} = \text{سنة}$$

ولإيجاد سعر الفائدة الصحيحة نعوض في العلاقة (1-3) فنجد أن:

$$550 = 15000 \cdot P \cdot \frac{163}{365}$$

$$550 = 6698{,}63 \cdot P$$

وبذلك نجد أن:

$$p = \frac{550}{6698{,}63} = 0{,}082 \Rightarrow 8{,}2\%.$$

أي إن سعر الفائدة السنوية كان 8.2%.

مثال 5:

لقد توفر لدى حسين مبلغ 7000 ليرة سورية، وأراد أن يودعه في المصرف ليحصل على مبلغ من الفائدة قدره: 3000 ليرة سورية. فما هي المدة اللازمة لذلك إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية للإيداع 9%؟

الحل:

لدينا: $k=7000$، و$p=0.09$ ولكن $n=?$

غير أن مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة المستهدفة $In=3000$، وبتعويض هذه المعطيات في العلاقة (1-3) نجد أن:

$$3000 = 7000(0.09)n$$

$$3000 = 630.n$$

$$n = \frac{3000}{630} = 4{,}7619 \text{ سنة}$$

ولحساب كسر السنة بالأيام نضرب ذلك الكسر بـ 365، فنجد أن:

$$m = 0{,}7619 \times 365 = 278{,}09 \approx 279 \text{ يوماً}$$

أي إن المدة اللازمة ليحصل على مقدار فائدة *3000* ليرة سورية هي 4 سنوات و279 يوماً.

ملاحظة:

يتم تقريب كسر اليوم إلى يوم كامل مهما كان صغيراً. أي أن تقريب كسور الأيام يتم إلى الأعلى دائماً.

مثال 6:

ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه لمدة 3 سنوات وبفائدة 8% للحصول على مقدار للفائدة مساوٍ لـ 5000 ليرة سورية.

الحل:

لدينا: $k=?$، و$p=0.08$ ولكن $n=3$، $In=5000$.

وبتعويض هذه المعطيات في العلاقة (1-3) نجد أن:

$$5000 = k(0.08).3$$

$$5000 = 0{,}24k$$

$$k = 20833{,}33 \qquad L.S. \text{ سنة}$$

3 - 3 - حساب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة لعدة مبالغ:

وتحسب من خلال القاعدة التالية:

إن إجمالي الفائدة المستحقة لعدة مبالغ = مجموع مقادير الفوائد المستحقة لكل مبلغ. فمثلاً، نجد أنه إذا أودع أحدهم عدة مبالغ هي:

k_1 و k_2 و k_3 و k_4 ، وذلك بأسعار فائدة سنوية مختلفة أو متساوية، ولتكن p_1 و p_2 و p_3 و p_4 ولمدد زمنية مختلفة محسوبة بالسنوات، ولتكن n_1 و n_2 و n_3 و n_4، فإنه سيحصل على مقادير للفوائد المستحقة تساوي In_1 و In_2 و In_3 و In_4 ، وإن هذه المقادير تساوي:

مقدار الفائدة للمبلغ الأول: $In_1 = k_1.p_1.n_1$

مقدار الفائدة للمبلغ الثاني: $In_2 = k_2.p_2.n_2$

مقدار الفائدة للمبلغ الثالث: $In_3 = k_3.p_3.n_3$

مقدار الفائدة للمبلغ الرابع: $In_4 = k_4.p_4.n_4$

.....

وبذلك نجد أن إجمالي الفائدة المستحقة يساوي: $I = In_1 + In_3 + In_3 + In_4$

وبصورة عامة يمكننا أن نكتب ذلك على الشكل التالي:

$$I = In_1 + In_3 + In_3 + In_4 + ... \qquad (2-3)$$

مثال 7:

أودع أحد التجار مبلغ 5000 ليرة سورية بتاريخ 2002/3/15، ثم أودع مبلغ 3000 ليرة سورية بتاريخ 2002/5/25، وأودع مبلغ 4000 ليرة سورية بتاريخ 2002/7/5.

فما هو إجمالي الفائدة الصحيحة المستحقة عن هذه المبالغ في نهاية عام 2002علماً بأن سعر الفائدة السنوية ثابت وموحد ويساوي 8%؟

الحل:

نلاحظ أن المبالغ $k_1 = 5000$ و $k_2 = 3000$ و $k_3 = 4000$

وأن سعر الفائدة السنوية $p_1 = 0.08$ و $p_2 = 0.08$ و $p_3 = 0.08$

نحسب مدد الإيداع بالأيام من جدول الرقم التراكمي [جدول رقم (1)] فنجد أنها تساوي على الترتيب:

$n_1 = 365 - 74 = 291$ يوماً

$n_2 = 365 - 145 = 220$ يوماً

$n_3 = 365 - 186 = 169$ يوماً

وهكذا نجد أن هذه المدد بالسنوات تساوي على الترتيب:

$$n_1 = \frac{291}{365}$$

$$n_2 = \frac{220}{365}$$

$$n_3 = \frac{169}{365}$$

وبتعويض هذه المعطيات في العلاقة (1-3) نجد أن:

$$In_1 = 5000(0{,}08)\frac{291}{365} = 318{,}90\,L.S$$

$$In_2 = 3000(0{,}08)\frac{220}{365} = 144{,}66\,L.S$$

$$In_3 = 4000(0{,}08)\frac{169}{365} = 148{,}16\,L.S$$

وبذلك نجد أن إجمالي الفائدة المستحقة يساوي:

$$I = 318{,}90 + 144{,}66 + 148{,}16$$

$$I = 611{,}72 L.S.$$

3 - 4 - حساب مقدار الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ واحد:

إن حساب الفائدة التجارية يختلف عن حساب الفائدة الصحيحة، حيث إن التجار في السوق يعتبرون أن السنة مؤلفة من 360 يوماً فقط، وبذلك فإنهم عندما يحولون المدة المحسوبة بالأيام إلى سنوات يقسمونها على 360 يوماً فقط. فإذا رمزنا لعدد أيام

مـدة الإيـداع بـــ D، فـإن مـدة الإيـداع بالسـنوات تصـبح مسـاوية لـــ $n = \frac{D}{365}$ للفائـدة الصحيحة، ومساوية لـ $n = \frac{D}{360}$ للفائدة التجاريـة، وبـذلك تأخـذ العلاقـة (1-3) الشكلين التاليين:

$$I_n = k.p.\frac{D}{365}$$ لمقدار الفائدة الصحيحة (3-3)

$$It = k.p.\frac{D}{360}$$ لمقدار الفائدة التجارية (4-3)

ولإيجاد العلاقة التي تربط بين المقدارين نقسم بعضهما على بعض فنجد أن:

$$\frac{I_t}{I_n} = \frac{k.p\frac{D}{360}}{k.p\frac{D}{365}}$$

$$\frac{I_t}{I_n} = \frac{365}{360} =$$

$$\frac{I_t}{I_n} = \frac{73}{72} \qquad (5-3)$$

ومنها نجد أن:

$$It = \frac{73}{72}.In \qquad (6-3)$$

أو أن:

$$I_n = \frac{73}{72}.I_t \qquad (6-3)$$

وهنـا نلاحـظ أن مقدار الفائـدة التجاريـة It أكبـر مـن مقدار الفائـدة الصـحيحة In لأن In مضروب بعدد أكبر من الواحد $\left(\frac{73}{72} > 1\right)$، ويمكن استخراج علاقة أخرى تربط بين المقدارين It و In وذلك بحساب الفرق بينهما بدلالة In، حيث نجد أن:

$$It - In = \frac{73}{72}In - It$$

$$It - In = \frac{1}{72}In \qquad (7-3)$$

ويمكن استخراج الفرق بينهما بدلالة It، حيث نجد من (3-6) ، أن $I_n = \frac{72}{73}.I_t$ وبذلك يكون:

$$It - In = It - \frac{72}{73}It$$

$$It - In = \frac{1}{73}It \qquad (8-3)$$

ملاحظة هامة:

إن مقدار الفائدة التجارية لا يختلف عن مقدار الفائدة الصحيحة إذا كانت المدة محسوبة بالسنوات الكاملة مباشرةً، لأن العلاقة (3-1) لا تتأثر بذلك إلا إذا كانت المدة محسوبة بالأيام ثم حولت إلى سنوات. اما إذا كانت المدة محسوبة بالأشهر ثم حولت إلى سنوات, فإن الفائدة تكون تجارية حكماً , لأن الاشهر عندها تعتبر متساوية وتكون السنة 360يوماً.

مثال 10:

أوجد مقدار الفائدة التجارية ومقدار الفائدة الصحيحة لمبلغ 15000 ليرة سورية أودع لمدة 260 يوماً بفائدة سنوية بسيطة قدرها 9%، ثم احسب الفرق بين هذين المقدارين ونسبة كلٍ منهما إلى الآخر.

الحل:

لدينا $k=15000$، $p=0,09$،

ولدينا المدة الحقيقية $n = \frac{260}{365}$ ولكن $In=?$

ولدينا المدة التجارية $nt = \frac{260}{360}$ ولكن $It=?$

وبتعويض هذه المعطيات في العلاقتين (3-3) ثم في (3-4) نجد أن:

$$In = 15000(0,09)\frac{260}{365} = 961,64\,L.S.$$

$$It = 15000(0,09)\frac{260}{360} = 975\,L.S.$$

وكان يمكننا حساب It من العلاقة (3-6) حيث نجد أن:

$$It = \frac{73}{72}In = \frac{73}{72}(961,64) = 975\,L.S.$$

ولحساب الفرق بين المقدارين It وIn نطرحهما مباشرةً فنجد أن:

$$It - In = 975 - 961,64 = 13,36\,L.S.$$

ونجد أن النسبة بينهما تساوي:

$$\frac{It}{In} = \frac{975}{961,64} = 1,01389$$

وكان يمكننا حساب الفرق والنسبة من العلاقتين (7-3) و(5-3)، حيث نجد أن:

$$It - In = \frac{1}{72} In = \frac{1}{72}(961,64) = 13,36\, L.S.$$

$$\frac{It}{In} = \frac{73}{72} = 1,01389$$

وهنا نلاحظ أن مقدار الفائدة التجارية المستحقة It أكبر من مقدار الفائدة الصحيحة In بمقدار 13.36 ليرة سورية، وهذا ما أشرنا إليه بشكل عام في الملاحظة السابقة.

3 - 5 - حساب حصيلة مبلغ واحد k:

حصيلة مبلغ واحد k أودع لمدة n عاماً وبفائدة بسيطة سنوية p يساوي ذلك المبلغ k مضافاً إليه مقدار الفائدة المستحقة In. وإذا رمزنا لحصيلة المبلغ k بعد n عاماً بالرمز Sn ، يكون لدينا:

$$Sn = k + I_n \qquad (9-3)$$

وبما أن $In = k.p.n$ نجد أن:

$$Sn = k + k.p.n$$

$$Sn = k(1 + p.n) \qquad (10-3)$$

وهي علاقة تتضمن أربعة متحولات إذا عرفنا منها ثلاثة أمكننا حساب الرابع.

مثال11:

أوجد حصيلة مبلغ 12000 ليرة سورية أودع لمدة 3 سنوات بفائدة بسيطة 8%.

الحل:

لدينا $k=12000$، $p=0,08$، $n=3$، ولكن $Sn=?$.

ومن (3-10) نجد حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$Sn = 12000\left(1 + \frac{8}{100}.3\right) = 14880\, L.S.$$

مثال 12:

ما هي حصيلة مبلغ 5000 ليرة سورية أودع لمدة 7 أشهر بفائدة سنوية بسيطة 9% سنوياً.

الحل:

لدينا $k=5000$، $p=0,09$، $n = \frac{7}{12}$ ، ولكن $Sn=?$.

وبذلك نجد أن حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$Sn = 5000\left(1+\frac{9}{100}.\frac{7}{12}\right) = 5262{,}5\,L.S.$$

مثال 13:

ما هي المدة التي يجب خلالها إيداع مبلغ 10000 ليرة سورية بفائدة بسيطة 7% سنوياً حتى نحصل في نهايتها على 15000 ليرة سورية؟

الحل:

لدينا *k=10000*، *p=0,07*، *Sn=15000*، ولكن *n=?*.

وبذلك نجد أن العلاقة (10-3) تعطينا أن:

$$15000 = 10000\left(1+\frac{7}{100}.n\right) = 10000 + 700.n$$

$$5000 = 700.n$$

$$n = \frac{5000}{700} = 7{,}143 \quad \text{سنة}$$

ولتحويل كسور السنة (0.143) إلى أيام نضرب ذلك الكسر بـ 365 فنجد أن:

$$D = 0{,}143 \cdot 365 = 52{,}20 \approx 53 \text{ يوماً}$$

أي إن المدة اللازمة هي 7 سنوات و53 يوماً.

مثال 14:

ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه لمدة 5 سنوات وبفائدة سنوية بسيطة 11% حتى نحصل على 20000 ليرة سورية؟

الحل:

لدينا *k=?*، *p=0,11*، *Sn=20000*، ولكن *n=5*.

وبذلك نجد أن:

$$20000 = k\left(1+\frac{11}{100}.5\right) = 1{,}55k$$

$$k = \frac{20000}{1{,}55} = 12903{,}35\,L.S.$$

مثال 15:

أودع أحدهم مبلغ 30000 ليرة سورية بتاريخ 2002/5/7 ، وعندما سحبها بتاريخ 2002/12/9 سلمه المصرف مبلغ 31500 ليرة سورية، فما هو سعر الفائدة السنوية؟

الحل:

لدينا *k=30000*، *Sn=20000*، *p=?*، *n=?*.

لذلك نقوم أولاً بحساب المدة بالأيام، وذلك بمساعدة جدول الرقم التراكمي، حيث نجد أن:

$$D = 343 - 127 = 216 \text{ يوماً}$$

ثم نجد أن:

$$31500 = 30000\left(1 + p.\frac{216}{365}\right)$$

$$31500 = 30000 + .\frac{30000 \cdot 216}{365}.p$$

$$1500 = 17753{,}42.p$$

$$p = \frac{1500}{17753{,}42} = 0{,}0845 = 8{,}45\%$$

أي أن سعر الفائدة السنوية البسيطة هو 8.45%.

3 - 6 - حساب حصيلة عدة مبالغ:

لنفترض أن أحدهم أودع عدة مبالغ k_1 و k_2 و k_3 و k_4 ، وذلك بأسعار فائدة سنوية مختلفة أو متساوية، ولتكن p_1 و p_2 و p_3 و p_4 ، ولمدد زمنية محسوبة بالسنوات، ولتكن n_1 و n_2 و n_3 و n_4، فما هي حصيلة هذه المبالغ في لحظة السحب؟

إن حصيلة هذه المبالغ تساوي مجموع حصائل المبالغ المختلفة، فإذا رمزنا للحصيلة الإجمالية بالرمز S، فإنه يكون لدينا:

$$S = Sn_1 + Sn_2 + Sn_3 + Sn_4 + ...$$

$$S = k_1(1 + p_1.n_1) + k_2(1 + p_2.n_2) + k_3(1 + p_3.n_3) + \\ + k_4(1 + p_4.n_4) + ... \qquad (11-3)$$

وهي مساوية من جهة أخرى لمجموع المبالغ مضافاً إليها إجمالي الفوائد المستحقة، لأنه يمكننا كتابة S كما يلي:

$$S = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + ... + In_1 + In_2 + In_3 + In_4 + ... \qquad (12-3)$$

مثال 16:

أودع أحمد مبلغ 5000 ليرة سورية بتاريخ 2002/2/15، بفائدة سنوية 7%.
ثم أودع مبلغ 3000 ليرة سورية بتاريخ 2002/4/25، بفائدة سنوية 8%.
ثم أودع مبلغ 4000 ليرة سورية بتاريخ 2002/11/9 بفائدة سنوية 9%.
فما هي حصيلة هذه المبالغ بتاريخ 2002/12/31؟

الحل:

نلاحظ أنه في البداية علينا حساب المدد بالأيام ثم بالسنوات، فنجد أن:

$$D_1 = 365 - 46 = 319 \Rightarrow n_1 = \frac{319}{365}$$

$$D_2 = 365 - 115 = 25 \Rightarrow n_2 = \frac{250}{365}$$

$$D_3 = 365 - 313 = 52 \Rightarrow n_3 = \frac{52}{365}$$

$$I_{n_1} = k_1.p_1.n_1 = 5000.\frac{7}{100}.\frac{319}{365} = 305{,}89\,L.S$$

$$I_{n_2} = k_2.p_2.n_2 = 3000.\frac{8}{100}.\frac{250}{365} = 164{,}38\,L.S$$

$$I_{n_3} = k_3.p_3.n_3 = 4000.\frac{9}{100}.\frac{52}{365} = 51{,}29\,L.S$$

وبذلك نجد أن:

$$S = 5000 + 3000 + 4000 + 305{,}89 + 164{,}38 + 51{,}29 = 12521{,}56\,L.S.$$

3 - 7 - الحسابات الجارية وطرائقها:

إن الحسابات الجارية هي تطبيق حسابي لإيداع عدة مبالغ مختلفة أو متساوية لمدد مختلفة أو متساوية وبأسعار فائدة مختلفة أو متساوية. وهي عمليات تجري يومياً في جميع المصارف والبنوك والصناديق وغيرها.

ولإجراء هذه الحسابات ننظم جدولاً خاصاً بحركة حساب كل زبون يتضمن المبلغ المودع، أو المبلغ المسحوب وتاريخ العملية وسعر الفائدة إذا كان متغيراً.

ولكننا نفترض أن سعر الفائدة البسيطة يبقى ثابتاً خلال الفترات القصيرة (ويمكننا تغييره بين فترة وأخرى)، ويمكن إجراء الحسابات الجارية لأي زبون بإحدى الطريقتين التاليتين:

أ - الطريقة المباشرة:

سنوضح كيفية استخدام هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال 17:

فتح أحدهم حساباً جارياً في أحد المصارف بفائدة بسيطة 5% سنوياً، وكانت عملياته كما في الجدول التالي، والمطلوب حساب الحصيلة الجارية بعد كل حركة، واستخراج حصيلته في آخر المدة.

جدول 1 المذكور في الطريقة المباشرة هنا موجود في ملف مستقل بنفس العنوان

لقد قمنا بحساب عناصر الحل وأضفناها إلى جدول الحركة متبعين الخطوات التالية:
ـ حسبنا الرصيد الجاري عند الإيداع الأول وهو 5000 ليرة سورية.
ـ حسبنا المدة التي استمر فيها هذا المبلغ بالإيداع وهي من 2002/1/5 وحتى 2002/3/20، وتساوي 74 يوماً (من جدول الرقم التراكمي).
ـ حسبنا مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع ذلك المبلغ لمدة 74 يوماً بفائدة بسيطة 5% من العلاقة:

$$k.p.n = 5000\left(\frac{5}{100}\right).\frac{74}{365} = 50,68L.S$$

ـ سجلنا تلك الفائدة مقابل الحركة الثانية لإضافتها على رصيد الحركة التالية.
ـ سجلنا الحصيلة الجارية بعد الإيداع الأول مباشرةً وهي 5000 ليرة سورية، ولم نضف للمبلغ المودع أية فائدة عليه، لأن الحصيلة الجارية تحسب بعد الحركة مباشرةً.
ـ درسنا الحركة الثانية فوجدناها إيداعاً لـ 3000 ليرة سورية؛ لذلك جمعنا تلك الدفعة مع الرصيد الجاري السابق 5000 ليرة سورية، فأصبحت قيمة الرصيد الجاري 8000 ليرة سورية.
ـ حسبنا المدة التي استمر فيها هذا الرصيد الأخير بالإيداع وهي من 2002/3/20 وحتى 2002/4/27، وتساوي 38 يوماً.
ـ حسبنا الفائدة المستحقة عن الرصيد الثاني من العلاقة:

$$k.p.n = 8000\left(\frac{5}{100}\right).\frac{38}{365} = 41,64L.S$$

ـ أضفنا هذه الفائدة إلى مقدار الفائدة المتراكمة المقابلة (50.68) فأصبح مقدار الفائدة المتراكمة 92.32 ليرة سورية، ووضعناه مقابل الحركة التالية لإضافته إلى رصيد الحركة التالية.
ـ حسبنا الحصيلة الجارية بعد لحظة الحركة الثانية مباشرةً وذلك بجمع الرصيد الجاري 8000 مع الفوائد المتراكمة 50.68 فحصلنا على 8050.68 ليرة سورية.
ـ درسنا الحركة الثالثة فوجدناها سحباً لـ 2000 ليرة سورية؛ لذلك نطرح ذلك المبلغ من الرصيد الجاري السابق فنحصل على 6000 ليرة سورية.
ـ حسبنا مدة إيداع الرصيد الجاري الثالث المستمرة من 2002/4/27، وحتى 2002/7/30 فكانت 94 يوماً.
ـ حسبنا الفائدة المستحقة من العلاقة:

$$k.p.n = 6000\left(\frac{5}{100}\right).\frac{94}{365} = 77,26L.S$$

ـ أضفنا الفائدة السابقة إلى الفائدة المتراكمة المقابلة (92.32)، فحصلنا على المقدار الجديد للفائدة المتراكمة 169.58 ليرة سورية، وسجلناه مقابل الحركة التالية لإضافته إلى رصيدها.
ـ حسبنا الحصيلة الجارية المقابلة للحركة الثالثة، وذلك بجمع الرصيد الجاري 6000 مع الفوائد المتراكمة 92.32 ، فحصلنا على 6092.32 ليرة سورية. وهكذا نتابع

العمل حتى نصل إلى الحركة الأخيرة، فنجد أنها سحب لـ 10000 ليرة سورية من الرصيد الجاري السابق 12000 ، فيبقى الرصيد الجاري 2000 ليرة سورية، وبإضافة الفائدة المتراكمة المقابلة لـ (387.25) ليرة سورية نحصل على الحصيلة الجارية والبالغة 2387.25 ليرة سورية.

وأخيراً نختم الحساب بسطر يتضمن مجاميع بعض الأعمدة والنتيجة النهاية للحصيلة الجارية بعد آخر حركة مباشرةً.

ب ـ طريقة النمر:

هي تعتمد على حساب الفوائد المستحقة باعتبار أن سعر الفائدة البسيطة يبقى ثابتاً ويساوي p ، ولنفترض أن الرصيد المتحرك للحساب الجاري هو $k_2\ ,\ k_3 \ldots . k_n$ ، وأن مدة إيداع كل منها بالأيام هي $n_1,\ n_2,\ n_3\ \ldots\ldots\ldots n_n$.

وبذلك نجد أن مجموع الفوائد المستحقة عن هذه المبالغ يساوي:

$$\sum In = k_1 \frac{d_1}{365} p + k_1 \frac{d_2}{365} p + k_1 \frac{d_3}{365} p + \ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \frac{d_m}{365} p$$

$$\sum In = \frac{p}{365}\left(k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k_m d_m\right) \quad (13-3)$$

تسمى الجداءات $k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k_m d_m$ بالنمر، ويسمى مجموعها بمجموع النمر، وإليه تنسب هذه الطريقة.

ولإيجاد حصيلة هذه الحسابات بطريقة النمر نطبق العلاقة التالية:

حصيلة الحساب الجاري=مجموع الإيداعات– مجموع السحوبات+ مجموع الفوائد المستحقة، ويمكن إجراء هذه الحسابات على الجدول مباشرةً كما في المثال التالي.

مثال18:

لنفترض أن حركة حساب أحد الزبائن كانت كما في الجدول التالي:

الرقم المسلسل	تاريخ القيد	البيان	الحركة		عناصر الحل حسب الفائدة البسيطة		
			العملية				
			سحب	إيداع	الرصيد الجاري	مدة الرصيد بالأيام n_i	النمر $k_i n_i$
1	2002/1/5	إيداع	-	5000	5000	74	370000
2	2002/3/20	إيداع	-	3000	8000	38	304000
3	2002/4/27	سحب	2000	-	6000	94	564000
4	2002/7/30	إيداع	-	2500	8500	74	629000
5	2002/10/12	إيداع	-	3500	12000	80	960000
6	2002/12/31	سحب	10000	-	2000	-	-
نتيجة الحسابات		-	12000	14000	2000	-	2827000

وبذلك نجد أن الفوائد المستحقة على المبالغ المرصودة في الحساب تساوي في حالة كون سعر الفائدة 5%:

$$\sum I_k = \frac{p}{365}\left(k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 + ...\right)$$

$$\sum I_k = \frac{0.05}{365}\left(2827000\right) = 387.26$$

وبذلك نجد أن حصيلة الحساب عند آخر حركة يساوي:

$$s = 14000 - 12000 + 387.26$$

$$s = 2387.26\, L.S$$

جـ ـ طريقة حساب الفائدة على أقل رصيد خلال الشهر:

تستخدم هذه الطريقة في بعض المصارف، وتطبق عندنا على شهادات الاستثمار (فئة أ). واعتماداً على هذه الطريقة لا يقوم البنك بحساب الفوائد على المبالغ التي تودع خلال شهر إيداعها؛ بل تؤخذ بعين الاعتبار في الشهر التالي، كما أن سحب أي مبلغ خلال شهر ما سيؤثر على رصيد ذلك الشهر، وبالتالي لا تحسب الفائدة إلا على الرصيد المتبقي والأقل.

أما في حالة شهادات الاستثمار، فإن شراء أية شهادة خلال الشهر لا يمنح صاحبها حق الفائدة عليها إلا اعتباراً من الشهر التالي لذلك، وكذلك الأمر عند إعادة أو بيع تلك الشهادة، فلا يتم حساب فائدة عليها في الشهر الذي بيعت فيه.

وكتطبيق على ذلك نأخذ المثال التالي وحساباته المرافقة، وذلك بفرض أن سعر الفائدة 8% سنوياً.

مثال 19:

أوجد الفائدة المستحقة وحصيلة الحساب الجاري التالي وحسب الطريقة (جـ) وبتاريخ إغلاقه في 2003/6/20.

ولحل هذا المثال نعتمد على المعادلة التالية:

حصيلة الحساب الجاري = مجموع مبالغ الإيداع – مجموع مبالغ السحب + إجمالي الفوائد المستحقة = الرصيد الأخير + إجمالي الفوائد المستحقة

تسلسل	تاريخ القيد	البيان	العملية		الرصيد k	أقل رصيد خلال الشهر	المدة بالأشهر	النمرة
			سحب	إيداع				
1	2003/1/10	إيداع	-	1000	1000	لا يحسب	-	-
2	2003/2/1	رصيد الشهر السابق	-	-	1000	1000	1	
	2003/2/25	إيداع	-	4000	5000			1000
3	2003/3/1	رصيد الشهر السابق	-	-	5000	3000	1	
	2003/3/15	إيداع	-	3000	8000			
	2003/3/25	سحب	5000	-	3000			3000
4	2003/4/1	رصيد الشهر السابق	-	-	3000	2000	1	
	2003/4/20	سحب	1000	-	2000			
	2003/4/27	إيداع	-	7000	9000			2000
5	2003/5/1	رصيد الشهر السابق	-	-	9000	9000	1	
	2003/5/10	إيداع	-	5000	14000			
	2003/5/20	سحب	3000	-	11000			9000
	2003/5/25	إيداع	-	2000	13000			
6	2003/6/1	رصيد الشهر السابق	-	-	13000	1300	لاتحسب	
	2003/6/10	إيداع	-	2000	15000			
	2003/6/20	الرصيد عند الإغلاق	-	-	15000			-

ومن الجدول نجد أن:

الفائدة المستحقة = سعر الفائدة الشهري × مجموع النمر

$$I = \frac{0,08}{12}(1000\times1+3000\times1+2000\times1+9000\times1) = 100 L.S.$$

وبذلك تكون حصيلة المبلغ تاريخ إغلاق الحساب 2003/6/20 تساوي:

$$S = k + I = 15000+100 = 15100 L.S.$$

تمرينات

1 ـ أوجد مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 3600 ليرة سورية لمدة 8 أشهر بفائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

2 ـ إذا كان مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ ما يساوي 250 ليرة سورية، فأوجد القيمة الأصلية لذلك المبلغ إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 7% سنوياً، وأن مدة الإيداع كانت 6 أشهر.

3 ـ أودع أحدهم مبلغ 30000 ليرة سورية بفائدة بسيطة 5% سنوياً. فاحسب المدة اللازمة لتصبح حصيلة هذا المبلغ 50000 ليرة سورية.

4 ـ أودع أحدهم في أحد المصارف مبلغ 50000 ليرة سورية، وعندما سحب مستحقاته بعد 5 أشهر استلم مبلغ 52000 ليرة سورية، فأوجد معدل الفائدة البسيطة الذي يتعامل به المصرف.

5 ـ احسب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ 15000 ليرة سورية أودع بتاريخ 2004/1/15 وسحب في 2004/9/25، علماً بأن سعر الفائدة البسيطة 5% سنوياً.

6 ـ احسب مقدار الفائدة التجارية المستحقة للمثال السابق وقارن بين النتيجتين.

7 ـ إذا كان الفرق بين الفائدتين الصحيحة والتجارية يساوي 500 ليرة سورية، فاحسب مقدار هاتين الفائدتين.

8 ـ احسب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة على المبالغ التالية:

مبلغ 2500 أودع لمدة 6 أشهر بفائدة بسيطة 6% سنوياً.

مبلغ 5000 أودع لمدة 3 أشهر بفائدة بسيطة 5% سنوياً.

مبلغ 1500 أودع لمدة 9 أشهر بفائدة بسيطة 7% سنوياً.

9 ـ احسب إجمالي الفوائد التجارية على المبالغ الواردة في المثال السابق.

10 ـ احسب حصيلة كل من المبالغ في المثال السابق ثم إجمالي حصيلتها.

الفصل الرابع

حساب القيمة الحالية والخصم (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات الآتية:

1 ـ المفاهيم العامة: القيمة الاسمية، تاريخ الاستحقاق، القيمة الحالية، الخصم الصحيح، الخصم التجاري.

2 ـ العلاقات الأساسية بين القيمتين الاسمية والحالية والخصم.

3 ـ تطبيقات عملية.

4 ـ تمرينات.

الفصل الرابع

حساب القيمة الحالية والخصم (بفائدة بسيطة)

4-1- المفاهيم العامة:

إن مفهوم القيمة الحالية يأتي من مفهوم القيمة الاسمية، وإن المفهومين معاً مرتبطان بعمليات الديون والقروض. فمثلاً، إذا استدان أحدهم مبلغ 1000 ليرة سورية من تاجر لفترة ما، فإن ذلك التاجر (الدائن) سيحرر على المدين سنداً بقيمة مالية أكبر من مبلغ الدين المذكور (1000 ليرة سورية)، وذلك لأن الدائن سيقوم بحساب حصيلة ذلك الدين عند تاريخ الاستحقاق المتفق عليه، وبسعر الفائدة السائد أو المتفق عليه أيضاً. وإذا فرضنا أن مدة ذلك القرض 7 أشهر، وأن سعر الفائدة 9%، فإن حصيلة ذلك الدين بعد 7 أشهر تساوي:

$$S = 1000\left(1 + \frac{9}{100}.\frac{7}{12}\right) = 1135\,L.S$$

وهكذا نجد أن الدائن سيقوم بتحرير سند على المدين بقيمة 1135 ليرة سورية، وسيسلمه مبلغ 1000 ليرة سورية فقط، وسيثبت على ذلك السند تاريخ الاستحقاق بعد 7 أشهر من تاريخه. ثم يطلب من المدين والشهود التوقيع على السند المحرر؛ وبذلك يأخذ السند صفة قانونية تمكن الدائن من تحصيله عبر المؤسسات القانونية.

وهكذا نجد أن القيمة الحالية لذلك السند هي مبلغ الدين 1000 ليرة سورية، وأن القيمة الاسمية هي القيمة المسجلة عليه، وتبلغ 1135 ليرة سورية. ولكن القيمة الحالية لذلك السند لا تبقى ثابتة، بل تتغير بعد مرور أي فترة زمنية، فإذا أراد المدين تسوية هذا الدين وتسديده قبل 5 أشهر من تاريخ استحقاقه، فإن قيمته الحالية حينها ستساوي مبلغاً آخر يسمى القيمة الحالية في تاريخ التسوية أو الخصم أو القطع، لذلك سيطالب الدائن بخصم مبلغ معين من القيمة الاسمية المسجلة على السند.

وهكذا نجد أن مفهوم القيمة الحالية لأي مبلغ تأتي من مفهوم القيمة الاسمية المؤجلة الدفع لذلك المبلغ، وهما أمران مرتبطان بالديون وسنداتها التي تستحق الدفع في مواعيد معينة في المستقبل، ويراد تسويتها ودفعها قبل مواعيدها، وسنورد لاحقاً بعض التعاريف الضرورية المتعلقة بهذا الأمر.

* القيمة الاسمية للدين: هي القيمة المستحقة الدفع للدائن في تاريخ الاستحقاق والمثبتة على السند الخاص بذلك، مثل سند بقيمة 1135 ليرة سورية.

* تاريخ الاستحقاق: وهو التاريخ المدون على السند أو الوثيقة المالية الذي يحدد اللحظة التي يجب أن يقوم المدين بتسديد القيمة الاسمية المثبتة للدائن.

* تاريخ الخصم أو القطع: هو التاريخ الذي يريد الدائن أو المدين تسوية الدين فيه، وهو تاريخ سابق لتاريخ الاستحقاق.

* مدة الاستحقاق: وهي الفترة الزمنية الممتدة من تاريخ الخصم أو القطع حتى تاريخ الاستحقاق، وتقاس بالسنوات.

* القيمة الحالية للدين: هي القيمة المكافئة حالياً للدين المؤجل. أو هي المبلغ الذي إذا أودع الآن (أو في لحظة التسوية) في المصرف بفائدة بسيطة p ، ولمدة تساوي مدة الاستحقاق أصبحت حصيلته تساوي القيمة الاسمية المدونة على السند.

4 ـ 2: العلاقات الأساسية بين القيمتين الاسمية والحالية والخصم:

إذا رمزنا للقيمة الاسمية بالرمز S.
وللقيمة الحالية له بالرمز V.
ولمدة الاستحقاق المحولة إلى سنوات بالرمز n.
ولسعر الفائدة البسيطة سنوياً بالرمز p.
* القيمة الحالية:
لحساب القيمة الحالية نعتمد على قانون الفائدة البسيطة (10-3) نجد أن:

$$S = V(1+np) \qquad (1-4)$$

ومنها نجد أن القيمة الحالية لمبلغ S تساوي:

$$V = \frac{S}{(1+np)} \qquad (2-4)$$

وتسمى هذه القيمة بالقيمة الحالية الصحيحة.

*** مقدار الخصم الصحيح (الحطيطة الداخلية):**

وهو فائدة القيمة الحالية، ويتم خصمه من القيمة الاسمية S عند تسوية الديون قبل مواعيد استحقاقها، وذلك بسبب الاستعجال في تسديدها، وهو يساوي:
مقدار الخصم الصحيح = القيمة الاسمية – القيمة الحالية الصحيحة
وإذا رمزنا لمقدار الخصم الصحيح بـ D نجد أن:

$$D = S - V \qquad (3-4)$$

واعتماداً على (1-4) نجد أن:

$$D = V(1+np) - V$$

$$D = V.n.p \qquad (4-4)$$

أي:
مقدار الخصم الصحيح = القيمة الحالية × مدة الاستحقاق × معدل الفائدة= فائدة القيمة الحالية
ملاحظة: يسمى مقدار الخصم الصحيح في بعض المراجع بالحطيطة الداخلية.

*** معدل الخصم الصحيح:**

هو النسبة الناتجة عن قسمة مقدار الخصم الصحيح السنوي على القيمة الاسمية S.
وحتى تستقيم الحسابات لابد من تحويل الخصم الصحيح المحسوب على مدة n سنة إلى المبلغ الذي يعادله، والمنسوب إلى سنة كاملة، وهذا يقتضي تقسيم D على n. وإذا رمزنا لمعدل الخصم الصحيح السنوي بالرمز q فإن:

$$q = \frac{\frac{D}{n}}{S} = \frac{D}{ns} \qquad (5-4)$$

وهكذا نجد أن مقدار الخصم الصحيح D من جهة أخرى يساوي:

$$D = S.n.q \qquad (6-4)$$

ومن العلاقتين (4-5) و(4-6) نجد أن q ترتبط مع p بالعلاقة التالية:

$$D = V.n.p = S.n.q$$

$$q = \frac{V}{S}.p \qquad (7-4)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{V}{S} \qquad (7-4) \text{ أو}$$

وبما أن $V > S$ فإن $q < p$ ؛ أي إن معدل الخصم الصحيح هو نسبة مئوية أقل من سعر الفائدة p، وهو يستخدم لحساب مقدار الخصم الصحيح مباشرةً، بضربه بالقيمة الاسمية S وبمدة الاستحقاق n حسب العلاقة (4-6)، وذلك لأنه لا يمكننا تطبيق العلاقة (4-4) إلا بعد حساب القيمة الحالية .

*** مقدار الخصم التجاري (الحطيطة الخارجية):**

معلوم أن التجار يستخدمون كافة الأساليب لزيادة أرباحهم، فهم عدا عن أنهم يحسبون السنة 360 يوماً، فإنهم يحسبون مقدار الخصم عند تسوية الديون قبل مواعيدها بطريقة أخرى، حيث إنهم يعتبرون أن مقدار الخصم هو الفائدة المستحقة للقيمة الاسمية S ليحصلوا على مقدار أكبر للخصم، ليحصلوا على مقدارٍ أكبر للخصم، ثم يقطعونه من القيمة الاسمية عند تسوية الديون، لذلك يقومون بحسابه باستخدام معدل الفائدة السنوية p (أو أي معدل تجاري للخصم P) وضربه بالقيمة الاسمية S وبالمدة n. فإذا رمزنا لمقدار الخصم التجاري ـ والذي يسمى أحياناً بالحطيطة الخارجية ـ بالرمز DT، نجد حسب التعريف أن:

$$Dt = S.n.p \qquad (8-4)$$

وهي علاقة تختلف عن العلاقة (4-6) للخصم الصحيح، ولكنهما يرتبطان بالعلاقة:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{S.n.q}{S.n.p} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{q}{p} \qquad (9-4)$$

وبما أن $q < p$ فإن $D < Dt$ ؛ أي إن مقدار الخصم التجاري أكبر من الخصم الصحيح، لأنه يطبق معدل الفائدة البسيطة P على القيمة الاسمية S ، وليس على القيمة الحالية V.

ويمكننا إيجاد علاقات أخرى بين أنواع الخصم، حيث نجد من العلاقة (4-7) أن:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\frac{V}{S}.p}{P}==\frac{V}{S}=\frac{V}{V(1+np)}=\frac{1}{1+np}$$

ومنها نجد أن Dt يمكن أن يحسب من إحدى العلاقتين:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{V}{S} \qquad (10-4)$$

$$Dt=D(1+np) \qquad (11-4)$$

وأخيراً، يمكننا استنتاج العلاقة الهامة التالية:

$$\frac{q}{p}=\frac{D}{Dt}=\frac{V}{S} \qquad (12-4)$$

وكذلك نجد أن الفرق بينهما يساوي:

$$Dt-D=S.p.n-V.p.n$$

$$Dt-D=p.n(S-V)$$

$$Dt-D=D.n.p \qquad (13-4)$$

أي إن الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح يساوي الفائدة المستحقة عن الخصم الصحيح.

كما يمكننا استخراج علاقة أخرى تربط بين الخصمين الصحيح والتجاري والقيمة الاسمية كما يلي:

$$S(Dt-D)=D.S.n.p=D.D.t$$

$$S=\frac{Dt.D}{Dt-D} \qquad (14-4)$$

معدل الخصم التجاري:

لحساب هذا المعدل نستخدم مقدار الخصم التجاري المنسوب إلى سنة كاملة ونقسمه على S فنجد أن:

$$q_t=\frac{\frac{Dt}{n}}{\frac{S}{}}=\frac{Dt}{n.S}=\frac{S.n.p}{n.S}=p \qquad (15-4)$$

أي إن معدل الخصم التجاري q_t يساوي معدل الفائدة P ، ولكنه يطبق عند الخصم على القيمة الاسمية، وليس على القيمة الحالية، ولذلك فإن مقدار الخصم التجاري D_t يكون أكبر من مقدار الخصم الصحيح D وهذا ما أشرنا إليه أكثر من مرة.

*** القيمة الحالية:**

إن القيمة الحالية لأي مبلغ مؤجل تحسب من العلاقة:

القيمة الحالية = القيمة الاسمية ـ مقدار الخصم

وبما أنه لدينا نوعان من الخصم، فإنه سيكون لدينا نوعان من القيمة الحالية هما:

*القيمة الحالية الصحيحة = القيمة الاسمية ـ مقدار الخصم الصحيح

$$V = S - D \qquad (16-4)$$

ومنها نجد أن:

$$V = S - S.n.q$$

$$V = S(1 - n.q) \qquad (17-4)$$

*القيمة الحالية التجارية = القيمة الاسمية ـ مقدار الخصم التجاري

$$Vt = S - Dt \qquad (18-4)$$

ومنها نجد أن:

$$Vt = S - S.n.p$$

$$Vt = S(1 - n.p) \qquad (19-4)$$

*** العلاقة بين V و VT:**

إن العلاقتين (17-4) و(19-4) تعطياننا أن:

$$\frac{V}{Vt} = \frac{1-nq}{1-np} \qquad (20-4)$$

وكذلك يمكننا استنباط علاقة أخرى أهمها:

$$V - Vt = (S - D) - (S - Dt)$$

$$V - Vt = Dt - D \qquad (21-4)$$

أي إن الفرق بين القيمتين الحاليتين الصحيحة والتجارية يساوي الفرق بين الخصمين التجاري والصحيح، ومن العلاقة (13-4) نجد كذلك أن:

$$V - Vt = D.np \qquad (22-4)$$

أي إن الفرق بين القيمتين الحاليتين يساوي الفائدة المستحقة على الخصم الصحيح.

ملاحظة 1:

عند تسوية أي دين أو قطع كمبيالة ما في المصرف فإن ذلك المصرف يفرض على المدين أو البائع عدة رسوم إضافية أهمها:

أ ـ عمولة قطع، وتحدد على شكل نسبة مئوية صغيرة من القيمة الاسمية، ونرمز لها بـ C_1.

ب ـ مصاريف تحصيل، وتحسب كنسبة مئوية أو ألفية من القيمة الاسمية، ونرمز لها بـ C_2.

وبذلك يكون إجمالي الخصم عند القطع = الخصم + العمولة + مصاريف التحصيل، ويطلق على هذا الإجمالي اسم "الإجيو". وعندها تظهر لدينا مصطلحات جديدة أهمها:

* صافي القيمة الحالية = القيمة الاسمية ـ إجمالي الخصم "الإجيو".

$$NV = S - D \qquad (23-4)$$

ومنه نجد أن:

$$\text{معدل الخصم الإجمالي} = \frac{\text{المتوسط السنوي لإجمالي الخصم "الإجيو"}}{\text{القيمة الاسمية}}$$

وهو يساوي ما يلي:

$$q^1 = \frac{\frac{D}{n} + C_1 + C_2}{S} \qquad (23-4)$$

لقد قسمنا D على n للحصول على المتوسط السنوي للخصم، أما C_1 و C_2 فتحسبان عن مدة سنة كاملة ولمرة واحدة.

ملاحظة 2:

عندما يكون لدينا عدة ديون أو كمبيالات فإننا نتعامل مع كل واحد بمفرده، ثم ندمج نتائج الحسابات ونستخلص النتائج المطلوبة. وبصورة عامة نجد أن هذه الديون مرتبطة بالعلاقات التالية:

مجموع القيم الحالية لهذه الديون =مجموع القيم الاسمية لها ـ مجموع الخصومات عنها.

مجموع الخصومات عنها بمعدل واحد=مجموع الجداء(القيمة الاسمية×المدة×معدل الخصم).

3-9- تطبيقات عملية:

مثال 1:

يريد أحد الأشخاص بيع (أو تجيير) سند لديه صالح أحد الزبائن، قيمته 10000 ليرة سورية، يستحق الدفع بعد 8 أشهر من الآن. فما هي القيمة الحالية لهذا السند؟؛ وما هو مقدار الخصم الصحيح ومعدله؟؛ وما هو مقدار الخصم التجاري؟ وما هي القيمة الحالية التجارية إذا كان سعر الفائدة البسيطة 9%؟

الحل:

لدينا القيمة الاسمية $S=10000$، $n = \frac{8}{12}$ ، $p=0.09$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية V تحسب من العلاقة:

$$V = \frac{S}{(1+np)} = \frac{10000}{1+\frac{8}{12}.\frac{9}{100}} = 9433{,}96\, L.S.$$

ويحسب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$D = S - V = 10000 - 9433{,}96 = 566{,}04\, L.S.$$

ويمكننا حساب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$D = V.n.p = 9433{,}96.\frac{8}{12}.\frac{9}{100} = 566{,}04\, L.S.$$

أما معدل الخصم الصحيح فيحسب من العلاقة:

$$q = \frac{V}{S}.p = \frac{9433,96}{10000}.\frac{9}{100} = 0,0849056$$

أي إن معدل الخصم 8.49% وهو المعدل الذي يجب تطبيقه على القيمة الاسمية S لنحصل على نفس مقدار الخصم الصحيح D، وبالتجريب نجد أن:

$$D = S.n.q. = 10000.\frac{8}{12}.\frac{8,49}{100} = 566\,L.S.$$

أما مقدار الخصم التجاري فيحسب من معدل الفائدة ومن العلاقة:

$$Dt = S.n.p = 10000.\frac{8}{12}.\frac{9}{100} = 600\,L.S.$$

وهكذا يتضح لنا أن مقدار الخصم التجاري أكبر من الخصم الصحيح، وأن الفرق بينهما يساوي:

$$Dt - D = 600 - 566,04 = 33,96\,L.S$$

وأن ذلك الفرق يساوي الفائدة المستحقة على الخصم الصحيح:

$$Dt - D = D.n.p = 566,04.\frac{8}{12}.\frac{9}{100} = 33,96\,L.S$$

أما القيمة الحالية التجارية لذلك السند فتحسب من العلاقة:

$$Vt = S - Dt = 10000 - 600 = 9400\,L.S$$

وهنا نلاحظ أن القيمة الحالية الصحيحة V أكبر من القيمة الحالية التجارية Vt. ولذلك يجب على أصحاب السندات أن يكونوا على دراية كافية بالألاعيب التي تسود في الأسواق المالية، وأن يتخذوا القرار المناسب لهم عند تسوية أو بيع أي سند مالي.

مثال 2:

كمبيالة قيمتها 20000 ليرة سورية، حررت في 2003/4/10، وتستحق الدفع يوم 2003/10/10. ولكن صاحبها سلمها في 2003/7/20 للمصرف، وقطعها (أي باعها له) بمبلغ 19500 ليرة سورية.

والمطلوب حساب مقدار الخصم الصحيح ومعدله، ثم حساب معدل الفائدة السائد في المصرف.

الحل:

لدينا القيمة الاسمية *S=20000*، والقيمة الحالية الصحيحة *V=19500*، أما المدة فنحسبها بالأيام بمساعدة جدول الرقم التراكمي، وهي الممتدة من 2003/7/20 حتى تاريخ الاستحقاق 2003/10/10 وتساوي *D=283-201=82*، وبذلك نجد أن مقدار الخصم الصحيح يحسب من العلاقة:

$$D = S - V = 20000 - 19500 = 500\,L.S.$$

ولحساب معدل الخصم الصحيح:

$$q = \frac{D}{n.s} = \frac{500}{\frac{82}{365}20000} = 0{,}11128 = (11{,}13\%)$$

أي إن معدل الخصم المستخدم 11.12%.
أما معدل الفائدة المستخدم فيحسب من العلاقة:

$$q = \frac{V}{S}.p$$

$$0{,}11128 = \frac{19500}{20000}.p \Rightarrow p = 0{,}114133 = (11{,}413\%)$$

مثال 3:
أراد أحدهم تسوية الدين الذي يستحق عليه بعد 10 أشهر من الآن، فأجرى حساباته المختلفة، فكان الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح مساوياً لـ 200 ليرة سورية.
فاحسب القيمة الحالية الصحيحة والقيمة الحالية التجارية ومعدل الخصم الصحيح، ثم القيمة الاسمية للدين، إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 12% سنوياً.
الحل:
لدينا $n = \frac{10}{12}$ و $p = \frac{12}{100}$ و $Dt - D = 200$
لحساب القيمة الحالية الصحيحة نحسب أولاً مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$Dt - D = D.n.p$$

$$200 = D.\frac{10}{12}.\frac{12}{100} = \frac{D}{10}$$

$$D = 2000\,L.S$$

وبذلك نجد أن $Dt = 2000 + 200 = 2200\,L.S.$
وبعد ذلك نقوم بحساب القيمة الحالية الصحيحة من العلاقة:

$$D = V.n.p$$

$$2000 = V.\frac{10}{10}.\frac{12}{100} = \frac{V}{10}$$

$$V = 20000\,L.S.$$

ولحساب القيمة الحالية التجارية نطبق العلاقة:

$$V - Vt = Dt - D = D.n.p$$

$$20000 - Vt = 200$$

$$Vt = 19800\,L.S.$$

ولحساب معدل الخصم نطبق العلاقة:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{q}{p}$$

$$\frac{2000}{2200}=\frac{q}{0,12}$$

$$q=0,109=(10,9\%)$$

ولحساب القيمة الاسمية للدين نطبق العلاقة:

$$S=V(1+n.p)=20000\left(1+\frac{10}{12}.\frac{12}{100}\right)$$

$$S=22000\,L.S.$$

مثال 4:

اقترض أحدهم مبلغاً من المال بفائدة بسيطة 8% سنوياً ولمدة 9 أشهر. وحرر سنداً عليه بذلك المبلغ، فما هي القيمة الاسمية المثبتة على ذلك السند، إذا كان الفرق بين القيمة الحالية الصحيحة والقيمة الحالية التجارية يساوي 1800 ليرة سورية؟

الحل:

لدينا $n=\frac{9}{12}$ و $p=0,08$ و $V-Vt=1800$

ولحساب القيمة الاسمية S نستفيد من العلاقات الوسطية، ونحسب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$V-Vt=D.n.p$$

$$1800=D.\frac{9}{12}.\frac{8}{100}=0,06.D$$

$$D=30000\,L.S$$

وبعد ذلك نقوم بحساب القيمة الحالية الصحيحة من العلاقة:

$$D=V.n.p$$

$$30000=V.\frac{9}{12}.\frac{8}{100}=0,06V$$

$$V=500000\,L.S.$$

وبذلك نجد أن القيمة الاسمية تساوي:

$$S=V+D=500000+30000=530000\,L.S.$$

مثال 5:

إذا كان مقدار الخصم الصحيح لدينٍ يساوي 900 ليرة سورية، وكان مقدار الخصم التجاري يساوي 1000 ليرة سورية، وكانت مدة الدين 8 أشهر. فما هو معدل الفائدة البسيطة؟ وما هي القيمة الاسمية لذلك الدين؟ وما هي القيمة الحالية الصحيحة له؟ وما هي القيمة الحالية التجارية له؟ وما هو معدل الخصم المستخدم؟

الحل:

لدينا $D=900$، $Dt=1000$، $n=\frac{8}{12}$.

والمطلوب حساب $p=?$، $S=?$، $V=?$، $Vt=?$، $q=$

لحساب معدل الفائدة البسيطة يمكننا تطبيق العلاقة التالية:

$$Dt-D=D.n.p$$

$$1000-900=900\frac{8}{12}.p$$

$$p=0,1666666=(16,666\%)$$

ولحساب القيمة الاسمية للدين نطبق العلاقة:

$$Dt=S.n.p$$

$$1000=S.\frac{8}{12}.(0,1666666)$$

$$S=9000\,L.S$$

ولحساب القيمة الحالية الصحيحة نطبق العلاقة:

$$V=S-D=9000-900=8100\,L.S.$$

وكان يمكن حساب V من العلاقة $D=V.n.p$ ، ونترك ذلك للطالب على سبيل التمرين.

ولحساب القيمة الحالية التجارية نطبق العلاقة:

$$Vt=S-Dt=9000-1000=8000\,L.S.$$

وكان يمكن حسابها من العلاقة $Vt=S(1+n.p)$ ونترك ذلك للطالب على سبيل التمرين.

ولحساب معدل الخصم نطبق العلاقة:

$$q=\frac{V}{S}.p=\frac{8100}{9000}(0,1666666)=0,149999=(15\%)$$

ملاحظة:

للتحقق نأخذ هذا المعدل ونطبقه على القيمة الاسمية لحساب الخصم الصحيح فنجد أن:

$$D = S.n.q = 9000.\frac{8}{12}.\frac{15}{100} = 900\,L.S.$$

وهو الخصم الصحيح المفروض.
أما معدل الفائدة فيطبق على القيمة الاسمية لحساب الخصم التجاري فنجد أن:

$$Dt = S.n.p = 9000.\frac{8}{12}.(0{,}1666666) = 1000\,L.S.$$

وهو الخصم التجاري المفروض.

مثال 6:

يدين أحد الأشخاص للمصرف بمبلغ 10000 ليرة سورية، وأراد بتاريخ 2003/4/15 أن يسدده قبل موعده، فحسب له المصرف مقدار الخصم الصحيح بمعدل خصم 5%، فكان مساوياً لـ 300 ليرة سورية. فما هو تاريخ استحقاق ذلك الدين؟ وما هو مقدار الخصم التجاري إذا أراد بيعه في السوق؟

الحل:

لدينا $S=10000$، $q = \frac{5}{100}$ ، $D=300$، $n = ?$

لحساب n نطبق العلاقة التالية:

$$D = S.n.q$$

$$300 = 10000.n.\frac{5}{100}$$

$$n = 0{,}6 \text{ سنة}$$

لحساب تاريخ الاستحقاق نحول المدة إلى أيام فنجد أن:

$$n = 0{,}6 \times 365 = 219 \text{ يوماً}$$

وبذلك يكون تاريخ الاستحقاق هو التاريخ المقابل لناتج جمع الرقم التراكمي لتاريخ التسديد 2003/4/15 وهو 105 مع مدة الدين 219 يوماً فنجد أن العدد الناتج هو:

$$105 + 219 = 324$$

وأن التاريخ المقابل للرقم التراكمي 324 هو 2003/11/20 ، وهو تاريخ استحقاق الدين المذكور.
ولحساب مقدار الخصم التجاري نطبق العلاقة:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{V}{S}$$

وهذا يقتضي حساب القيمة الحالية الصحيحة V حيث نجد أن:

$$V = S - D = 10000 - 300 = 9700$$

وبذلك نجد أن:

$$\frac{300}{Dt}=\frac{9700}{10000}\Rightarrow$$

$$Dt=\frac{300\cdot 10000}{9700}=309{,}28 L.S.$$

مثال 7:

في 2003/3/6 أراد أحد الدائنين قطع كمبيالة لديه بمبلغ 10000 ليرة سورية، وتستحق الدفع في 2003/8/12.

والمطلوب حساب صافي القيمة الحالية، ومعدل الخصم الإجمالي، إذا علمت أن معدل الفائدة في المصرف 9%، وأن المصرف يعطي يوم مهلة للمدين، ويتقاضى عمولة بمعدل 0.2%، ويستوفي مصاريف تحصيل بمعدل 0.1%، وأنه يحسب السنة 360 يوماً.

الحل:

لدينا $S=10000$، $q=\frac{9}{100}$

ولحساب المدة بالأيام نلاحظ أنها:

يوماً $160=1+65-224$=مهلة $D+1$

وبذلك نجد أن المدة $n=\frac{160}{360}$ سنة وأن الخصم التجاري يساوي:

$$Dt=S.n.p=10000.\frac{160}{360}.\frac{9}{100}=400\ L.S$$

وأن عمولة المصرف $=10000.\frac{0{,}2}{100}=20 L.S.$

وأن مصاريف تحصيل$=10000.\frac{0{,}1}{100}=10 L.S.$

وأن إجمالي الخصم عند القطع: $D'=400+20+10=430$

وأن صافي القيمة الحالية التجارية : $NVt=S-D'=10000-430=9570$

ولحساب معدل الخصم الإجمالي نجد أن:

$$q'=\frac{\frac{400}{\frac{160}{360}}+20+10}{10000}=0{,}093\quad(9{,}3\%)$$

ملاحظة:

إن معدل الخصم الإجمالي q' يختلف عن معدل الخصم العادي q الذي يساوي:

$$q=\frac{D}{n.S}=\frac{V}{S}.p$$

لحسابه نحسب القيمة الاسمية الصحيحة V من العلاقة:

$$V = \frac{S}{1+n.p} = \frac{10000}{1+\frac{160}{360}\cdot\frac{9}{100}} = 9620{,}45\,L.S.$$

وبذلك نجد أن معدل الخصم العادي:

$$q = \frac{9620{,}45}{10000}.\frac{9}{100} = 0{,}08658 \quad (8{,}658\%)$$

مثال 8:

قرر أحمد في 2003/9/13 قطع الأوراق التجارية التالية:

ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 4000 ليرة سورية وتستحق في 2003/10/12.

ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 6000 ليرة سورية وتستحق في 2003/11/11.

ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 2000 ليرة سورية وتستحق في 2003/12/21.

والمطلوب:

1 ـ حساب صافي القيمة الحالية للأوراق السابقة.

2 ـ حساب معدل الخصم الإجمالي.

وذلك إذا علمت أن المصرف يعتمد القواعد التالية:

1 ـ يحسب السنة المالية 360 يوماً.

2 ـ يعطي مهلة للمدين مقدارها يوم واحد.

3 ـ يتقاضى عمولة بمعدل 0.01% (واحد بالألف.

4 ـ يستوفي مصاريف تحصيل بمعدل 0.05% (نصف بالألف).

5 ـ يطبق معدل فائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

الحل:

لدينا: $S_1 = 4000$ ، $S_2 = 6000$ ، $S_3 = 2000$

أولاً: نقوم بحساب مدة كل من هذه الأوراق، ونأخذ بعين الاعتبار يوم المهلة فنجد أن:

$d_1 + 1 = 285 - 256 + 1 = 30$ يوماً

$d_2 + 1 = 315 - 256 + 1 = 60$ يوماً

$d_3 + 1 = 355 - 256 + 1 = 100$ يوماً

وبذلك نجد أن الخصم التجاري العادي لهذه الأوراق يساوي:

$$Dt_1 = S_1.n_1.p = 4000.\frac{30}{360}.\frac{6}{100} = 20\,L.S$$

$$Dt_2 = S_2.n_2.p = 6000.\frac{60}{360}.\frac{6}{100} = 60\,L.S$$

$$Dt_3 = S_3.n_3.p = 2000.\frac{100}{360}.\frac{6}{100} = 33{,}33\,L.S$$

وبذلك نجد أن مجموع الخصومات التجارية:

$$Dt = 20 + 60 + 33{,}33 = 113{,}33\,L.S.$$

وهنا نلاحظ أن مجموع القيم الاسمية لهذه الأوراق المالية يساوي:

$$S = 4000 + 6000 + 2000 = 12000\ L.S.$$

ولحساب صافي القيمة الحالية نقوم حساب الرسوم الإضافية وهي:

$$\text{عمولة المصرف} = 12000.\frac{1}{1000} = 12\ L.S$$

$$\text{نفقات التحصيل} = 12000.\frac{0,05}{100} = 6\ L.S$$

وبذلك نجد أن الخصم الإجمالي $D't = 113,33 + 12 + 6 = 131,33 L.S.$

وبذلك نجد أن صافي القيمة الحالية التجارية:

$$NVt = S - D't = 12000 - 131,33 = 11868,67\ L.S.$$

ثانياً: لحساب معدل الخصم الإجمالي يجب أن نلاحظ أنه كغيره من المعدلات، يحسب منسوباً إلى سنة كاملة. ولكن هذا الشرط غير محقق في بعض الخصومات السابقة، حيث نجد أن كل من الخصومات التجارية حسب منسوباً إلى مدة كل ورقة تجارية، ويجب إعادتها إلى ما يعادلها سنوياً، ولذلك نستخدم عملية التناسب التالي:

إذا تم استيفاء رسم بمقدار C عن مبلغ S ولمدة 8 سنة؛ فما هو الرسم المعادل له C' عن المبلغ S نفسه ولمدة 1 سنة؟

من خلال ما تقدم نجد أن: $C.1 = C'.n \Rightarrow C' = \frac{C}{n}$

وهذا يعني أنه حتى نحول مبالغ الخصومات القصيرة السابقة إلى مبالغ تعادلها سنوياً يجب أن نقسم كلاً منها على المدة n، وهكذا نجد أن:

$$\text{المبلغ المعادل للخصومات التجارية} = \frac{20}{\frac{30}{360}} + \frac{60}{\frac{60}{360}} + \frac{33,33}{\frac{100}{360}} = 720$$

أما المبلغ المعادل لعمولات الصرف فيبقى نفسه، مساوياً لـ $12\ L.S.$ لأنه حُسِبَ وكأنه عن سنة كاملة.

أما المبلغ المعادل لنفقات التحصيل فيبقى مساوياً لـ $6\ L.S.$ لأنه حُسِبَ وكأنه عن سنة كاملة.

وبذلك نجد أن المبلغ المعادل سنوياً لإجمالي الخصومات والعمولات والنفقات يساوي:

$$D' = 720 + 12 + 6 = 738\ L.S$$

وهكذا نجد أن معدل الخصم الإجمالي يساوي:

$$q' = \frac{D'}{S} = \frac{738}{12000} = 0,0615 = (6,15\%)$$

تمرينــات

1 ـ يريد أحدهم خصم كمبيالة قيمتها 2000 ليرة سورية خصماً تجارياً. فاحسب قيمتها الحالية إذا علمت أنها تستحق بعد 150 يوماً، وأن معدل الفائدة البسيطة7%.

2 ـ بتاريخ 2004 /6/15 تقدم أحد الأشخاص لأحد المصارف طالباً خصم الكمبيالات التالية:

1 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 4000 ليرة سورية وتستحق في 2004/9/30.
2 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 6000 ليرة سورية وتستحق في 2004/10/31.
3 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 2000 ليرة سورية وتستحق في 2004/11/30.
4 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 2000 ليرة سورية وتستحق في 2004/12/31.

علماً بأن المصرف وافق على إجراء الخصم بمعدل فائدة 6% سنوياً.

3 ـ يريد أحدهم تسديد دين عليه قدره 24000 ليرة سورية، ويستحق السداد بعد 8 أشهر من الآن. فما هي القيمة الحالية الصحيحة لهذا الدين إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً؟ ثم احسب مقدار الخصم الصحيح.

4 ـ احسب القيمة الحالية التجارية والخصم التجاري للدين الوارد في التمرين السابق.

5 ـ حضر شخص إلى المصرف بتاريخ 2004/5/20 وطلب خصم كمبيالة قيمتها 35000 ليرة سورية وتستحق بتاريخ 2005/2/30. وبعد إجراء عمليات الخصم الصحيح تبين أن قيمتها الحالية تبلغ 33500 ليرة سورية. والمطلوب حساب معدل الخصم الصحيح المطبق في المصرف.

6 ـ احسب معدل الخصم التجاري للكمبيالة المذكورة في التمرين السابق.

7 ـ عند حساب الفرق بين الخصمين التجاري والصحيح لكمبيالة تستحق بعد 8 أشهر ، كان يساوي 120 ليرة سورية. وإذا كان معدل الفائدة 8% سنوياً، فأوجد القيمة الاسمية لهذه الكمبيالة.

8 ـ حضر أحدهم بتاريخ 2004/9/3 لخصم سند تجاري قيمته الاسمية 4000 ليرة سورية. فأوجد تاريخ استحقاق هذا السند إذا علمت أن معدل الفائدة 7%، وأن الفرق بين الخصمين التجاري والصحيح كان يساوي 60 ليرة سورية.

الفصل الخامس

تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات التالية:

1 ـ أسس التسوية:

2 ـ حالات التسوية:

ـ تسديد الدين قبل موعده.

ـ تسوية دين واحد بآخر جديد.

ـ تسوية عدة ديون بدين واحد.

ـ تسوية عدة ديون بدفعة نقدية ودين جديد بالباقي.

ـ استبدال عدة ديون بدين موحد وتاريخ استحقاق متوسط .

ـ استبدال عدة ديون بدين موحد وبتاريخ استحقاق مناسب.

3 ـ تمرينات

الفصل الخامس

تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة)

2-1- أسس التسوية:

إن الظروف الحياتية المختلفة قد تجبر المدين أن يطلب من الدائن أن يعيد النظر في الديون المستحقة له، وأن يعدل في تواريخ استحقاقاتها؛ ويتم ذلك حسب أحد الأشكال التالية:

أ ـ استبدال دين واحد بدين آخر جديد وبتاريخ استحقاق جديد.

ب ـ استبدال عدة ديون بدين واحد جديد وبتاريخ استحقاق جديد يسبق تواريخ الديون الأصلية أو يقع بينها أو يأتي بعدها.

جـ ـ أن يتم تسديد جزء من الدين الأصلي وتحرير سند بدين جديد بالمبلغ المتبقي وبتاريخ جديد.

د ـ استبدال عدة ديون أصلية بدين واحد له نفس القيمة الاسمية وبتاريخ استحقاق متوسط.

هـ ـ استبدال عدة ديون بعدة ديون بتواريخ معينة.

وحتى لا يتضرر أي طرف من أطراف التعاقد (الدائن والمدين) من عملية الاستبدال والتسوية، يجب إضافة الفوائد المستحقة عن كل دين يتم تأجيل موعد استحقاقه، وأن يتم إنقاص قيمة الدين الذي يسدد قبل موعده بمقدار الخصم المستحق عن ذلك التقديم.

والقاعدة العامة المتبعة في تسوية الديون والتي تحفظ حقوق الطرفين هي أن يتم تحديد تاريخ معين لهذه التسوية، ثم حساب القيم الحالية لتلك الديون منسوبةً إلى تاريخ التسوية، ثم تطبيق المعادلة التالية

(1-5) مجموع القيم الحالية للديون قبل التسوية (في لحظة التسوية) = مجموع القيم الحالية للديون بعد التسوية (في لحظة التسوية)

وبتطبيق هذه القاعدة المعتمدة على القيم الحالية يمكننا إجراء جميع الحسابات اللازمة لتسوية الديون المختلفة، ويتم حساب القيم الحالية إما على أساس القيم الحالية الصحيحة باستخدام معدل الفائدة البسيطة p، أو على أساس القيم الحالية التجارية باستخدام معدل الخصم التجاري q_k، وهنا نذكّر بالعلاقات اللازمة لحساب القيم الحالية الصحيحة حسب استخدام معدل الفائدة P أو معدل الخصم الصحيح q عند سعر الفائدة p:

$$V = \frac{S}{1 + n.p} \qquad (2-5)$$

وعند معدل الخصم الصحيح q:

$$V = S(1 - n.q) \qquad (3-5)$$

أما عندما يكون التعامل على أساس القيم الحالية التجارية، فإنه يتم حسابها من العلاقة $Vt = S(1 - n.P)$.

وسنقوم بتوضيح كيفية تطبيق ذلك من خلال الأمثلة التالية:

2-5- حالات التسوية:

الحالة الأولى ـ تسديد الدين قبل موعده:

إذا أراد المدين تسديد أي دين عليه قبل حلول موعده، فإنه سيطلب من الدائن خصم مبلغ من الدين المسجل مقابل تسديد الدين قبل موعده، لذلك سيتفق الطرفان على حساب القيمة الحالية الصحيحة من أحد العلاقتين المتكافئتين:

$$V = \frac{S}{1 + n.p} \quad \Leftrightarrow \quad V = S(1 - n.q)$$

أما إذا كانت المعاملة بين الطرفين تجارية، فإن الطرفين يمكن أن يحسبا القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$Vt = S(1 - n \cdot p)$$

مثال 1:

أراد أحدهم تسديد السند الذي عليه قبل موعده. فإذا كانت القيمة الاسمية لذلك السند 10000 ليرة سورية، وكانت مدة الاستحقاق المتبقية 8 أشهر، وكان سعر الفائدة البسيطة $p = 0,06$ ، فاحسب المبلغ الذي يجب عليه تسديده عن قطع السند المذكور.

الحل:

لدينا $S=10000$، $n = \frac{8}{12}$ ، $p = 0,06$

نلاحظ أن المبلغ الذي يجب تسديده هو القيمة الحالية لذلك السند وهي تساوي:

$$V = \frac{S}{1+n.p} = \frac{10000}{1+\frac{8}{12}.(0,06)} = 9615\, L.S$$

مثال 2:

تقدم أحدهم بدعوى على ورثة أحمد، يطلب فيها منهم تسديد الدين الذي له على والدهم بموجب سند قيمته 20000 ليرة سورية ويستحق بعد 5 أشهر من الآن، فاحسب المبلغ الذي سيقرره القاضي لتسديد ذلك الدين، إذا علمت أن معدل الخصم التجاري 0,07.

الحل:

لدينا $S=20000$، $n = \frac{5}{12}$ ، $P = qt = 0,07$

نلاحظ أن المبلغ الذي سيقرره القاضي يساوي القيمة الحالية التجارية لذلك السند، وهي تساوي:

$$Vt = S(1-np)$$

$$Vt = 20000\left(1-\frac{5}{12}.(0,07)\right) = 19416,67\, L.S$$

الحالة الثانية: استبدال دين واحد بآخر جديد:

مثال 3:

لتسوية دين أصلي بدين جديد مجهول بتاريخ استحقاق معلوم، لنفترض أن أحدهم مدين لآخر بدين قدره 50000 ليرة سورية، ويستحق بعد 7 أشهر من الآن. وأراد استبداله بدين جديد يستحق بعد 9 أشهر. فما هي القيمة الاسمية للدين الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 8% سنوياً.

الحل:

وفقاً للقاعدة العامة يجب أن تكون:

القيمة الحالية للدين القديم = القيمة الحالية للدين الجديد.

وبفرض أن القيمة الاسمية المجهولة للدين الجديد هي X، وبتطبيق قانون القيمة الحالية الصحيحة على الدينين القديم والجديد نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{50000}{1+\frac{7}{12}.\left(\frac{8}{100}\right)}=\frac{X}{1+\frac{9}{12}.\left(\frac{8}{100}\right)}$$

وبضرب الطرفين بالوسطين نحصل على أن:

$$1{,}046667\cdot X=1{,}06\cdot 50000$$

$$X=\frac{1{,}06\cdot 50000}{1{,}046667}=50636{,}93\,L.S.$$

مثال 4:

لتسوية دين أصلي بدين جديد معلوم بتاريخ استحقاق مجهول، لنفترض أن أحدهم مدين لآخر بمبلغ قدره 70000 ليرة سورية، ويستحق بتاريخ 2003/3/15. وبتاريخ 2003/2/3 اتفق مع الدائن أن يستبدل ذلك الدين بدين آخر قيمته الاسمية 5000 ليرة سورية.

والمطلوب حساب تاريخ استحقاق الدين الجديد إذا علمنا أن سعر الفائدة البسيطة 8% سنوياً.

الحل:

نفترض مدة استحقاق الدين الجديد هي t. كما نلاحظ أن مدة استحقاق الدين القديم اعتباراً من تاريخ التسوية 2003/2/4 تساوي $74-34=40$ يوماً، وبذلك نجد أن:

$$\frac{70000}{1+\frac{40}{365}.\left(\frac{8}{100}\right)}=\frac{75000}{1+t.\left(\frac{8}{100}\right)}$$

$$75657,53=70000+5600t$$

$$t=\frac{5657,53}{5600}=1,01027 \text{ سنة}$$

ثم نقوم بتحويل كسر السنة إلى أيام فنجد أن:

$$d=0,01027(365)=3,75\approx 4 \text{ يوماً}$$

وعلى أن عام 2004 هو سنة كبيسة، ولكن تاريخ الاستحقاق الجديد ستكون بعد سنة و4 أيام؛ أي بتاريخ 2004/2/7 لأنه لايشمل يوم 29 شباط من عام 2004.

الحالة الثالثة: تسوية عدة ديون بدين واحد:

مثال 5:

أرادت إحدى الشركات بتاريخ 2003/3/15 تسوية ديونها التالية لدى المصرف:

15000 ليرة سورية ويستحق بعد 100 يوم من ذلك التاريخ.

20000 ليرة سورية ويستحق بعد 120 يوم من ذلك التاريخ.

فاتفقت مع إدارة المصرف على استبدال هذين الدينين بدين واحد قيمته 40000 ليرة سورية.

احسب تاريخ استحقاق الدين الجديد إذا علمت أن معدل الخصم التجاري هو 16% سنوياً.

الحل:

إن القيمة الحالية للدين الأول باستخدام معدل الخصم التجاري تساوي:

$$Vt_1=15000\left(1-\frac{100}{360}.\frac{16}{100}\right)=14333,33\,L.S.$$

والقيمة الحالية للدين الثاني باستخدام معدل الخصم التجاري تساوي:

$$Vt_2=20000\left(1-\frac{120}{360}.\frac{16}{100}\right)=18933,33\,L.S.$$

ولتطبيق القاعدة العامة نفترض أن مدة استحقاق الدين الجديد t يوماً، فنجد أن:

$$14333,33 + 18933,33 = 40000\left(1 - \frac{t}{360}.\frac{16}{100}\right)$$

$$33266,66 = 40000 - \frac{40000 \times 16.t}{36000}$$

$$6733,34 = 17,7778t$$

$$t = \frac{6733,34}{17,7778} = 378,75 = 379 \quad \text{يوماً}$$

$$t \approx 379 = 365 + 14 \quad \text{يوماً}$$

وبذلك نجد أن مدة الاستحقاق تعادل سنة و14 يوماً، اعتباراً من تاريخ التسوية المذكور 2003/3/15، وبما أن ذلك سيمتد إلى سنة 2004 الكبيسة، فإن جزءاً من هذه المدة سيقع في عام 2003 ، ويساوي 291 (291=74-365). أما الجزء الآخر فيقع في عام 2004، وهو يساوي 88 يوماً (88=291-379). وهو العدد التراكمي المقابل لتاريخ الاستحقاق، ولكن بما أن هذه المدة تشمل شهر شباط (فبراير) الذي يتألف في ذلك العام من 29 يوماً، فإن ذلك الرقم التراكمي المقابل لتاريخ الاستحقاق الفعلي هو 87 يوماً، وهو يقابل تاريخ 2004/3/28، وهو تاريخ استحقاق الدين الجديد.

مثال 6:

لنفترض أن شركة تدين للمصرف بالمبالغ التالية:

20000 ل.س وتستحق بعد 3 أشهر منذ الآن.

40000 ل.س وتستحق بعد 8 أشهر منذ الآن.

وتريد الآن تسوية هذين الدينين بدين واحد يستحق بعد 10 أشهر.

فما هي قيمة الدين الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 15% سنوياً.

الحل:

انطلاقاً من القاعدة السابقة يجب أن تتحقق المعادلة التالية:

القيمة الحالية للدين الأول + القيمة الحالية للدين الثاني= القيمة الحالية للدين الجديد.

وبفرض أن القيمة الاسمية للدين الجديد هي X، نقوم بحساب القيم الحالية على أساس القيم الحالية الصحيحة لكل من الديون السابقة فنجد أن:

$$V_1 + V_2 = V$$

$$\frac{20000}{1+\frac{3}{12}\cdot\frac{15}{100}} + \frac{40000}{1+\frac{8}{12}\cdot\frac{15}{100}} = \frac{X}{1+\frac{10}{12}\cdot\frac{15}{100}}$$

$$19277{,}11 + 36363{,}64 = \frac{x}{1{,}125}$$

$$X = 1{,}125\,(19277{,}11 + 36363{,}64)$$

$$X = 62595{,}84\ L.S$$

وهو القيمة الاسمية للدين الجديد الذي يستحق بعد 10 أشهر من الآن.

الحالة الرابعة: تسوية عدة ديون بدفعة نقدية ودين جديد بالباقي:

مثال 7:

شخص مدين لآخر بالمبالغ التالية:

5000 ل. س ويستحق بعد 4 أشهر.

4000 ل. س ويستحق بعد 6 أشهر.

6000 ل. س ويستحق بعد 8 أشهر.

واتفقا على تسويتها على الشكل التالي:

- يقوم المدين بتسديد مبلغ 2850 ل.س فوراً ونقداً.
- يتم تحرير سند أو كمبيالة بالمبلغ الباقي وتستحق بعد 5 أشهر.

فما هي القيمة الاسمية للدين المتبقي إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً؟

الحل:

نطبق القاعدة العامة، ونحسب القيم الحالية الصحيحة للديون قبل التسوية:

القيمة الحالية للمبلغ الأول:

$$V_1 = \frac{5000}{1+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{100}} = 4901{,}96\ \ L.S$$

$$V_2 = \frac{4000}{1+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{100}} = 3883{,}50\ \ L.S$$

$$V_3 = \frac{6000}{1+\frac{8}{12}\cdot\frac{6}{100}} = 5769{,}23\ \ L.S$$

وبذلك يكون مجموع القيم الحالية لتلك الديون مساوياً:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$V = 4901,96 + 3883,50 + 5769,23$$
$$V = 14554,69 \ \ L.S$$

وبما أن المدين سيقوم بتسديد مبلغ 2850 ل.س فوراً ونقداً، فإن المبلغ المتبقي من مجموع القيمة الحالية يساوي:

$$V' = V - 2850 = 14554,69 - 2850$$
$$V' = 11704,69 \ \ L.S$$

وهذا المبلغ المتبقي هو القيمة الحالية للدين الجديد الذي اتفق على تسديده بعد 5 أشهر. لذلك نفترض أن القيمة الاسمية لذلك الدين هي X فيكون لدينا:

$$11704,69 = \frac{X}{1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{100}} = \frac{X}{1,025}$$
$$X = 11704,69 \cdot (1,025) = 11997,31 \ \ L.S$$

مثال 8:

يدين أحد المزارعين للمصرف الزراعي بالمبالغ التالية:

3000 ل.س ويستحق في 2004/1/8

2000 ل.س ويستحق في 2004/3/19

وفي 2003/11/19 اتفق مع المصرف على تسوية هذين الدينين على الشكل التالي:

- يتم دفع مبلغ 1000 ل.س فوراً ونقداً.
- يحرر بالمبلغ المتبقي كمبيالتين، القيمة الاسمية للأولى ضعف القيمة الاسمية للثانية، وتستحق الأولى في 2003/12/29، وتستحق الثانية في 2004/2/27 .

أوجد القيمة الاسمية للكمبيالتين، علماً بأن معدل الخصم التجاري 6% سنوياً.

الحل:

نحسب المدة الزمنية بالأيام لكل من الدينين القديمين، فنجد أن:

مدة الدين الأول= 11 من تشرين أول + 31 من كانون أول + 8 من كانون الثاني = 50 يوماً.

مدة الدين الثاني= 11 من تشرين أول + 31 من كانون أول + 31+29+19 = 121 يوماً.

ثم نحسب القيمة الحالية لكلٍ منهما من العلاقة $V_t = S \cdot (1 - np)$ فنجد أن:

$$Vt_1 = 3000\left(1 - \frac{50}{360} . \frac{6}{100}\right) = 2975 \, L.S.$$

$$Vt_2 = 2000\left(1 - \frac{121}{360} . \frac{6}{100}\right) = 1959,667 \, L.S.$$

وأن مجموع هاتين القيمتين يساوي:

$$Vt = Vt_1 + Vt_2$$
$$Vt = 2975 + 1959,667$$
$$Vt = 4934,667$$

وبما أن المزارع سيدفع نقداً وفوراً مبلغ 1000 ل.س، فإن المبلغ المتبقي من مجموع القيمة الحالية يساوي:

$$4934,66 - 1000 = 3934,66 \ \ L.S$$

نفترض أن قيمة الكمبيالة الثانية X، فتكون قيمة الكمبيالة الأولى $2X$. ثم نحسب مدة كل منهما فنجد أن:

مدة الكمبيالة الأولى تساوي 11 يوماً من تشرين الأول + 29 يوماً من كانون الأول = 40 يوماً.

مدة الكمبيالة الثانية تساوي 11 يوماً من تشرين الأول + 31 من كانون الأول +31+27= 100 يوم.

ثم نضع المعادلة بين القيم الحالية للديون السابقة واللاحقة كما يلي:

$$3934,667 = 2X\left(1 - \frac{40}{360} \cdot \frac{6}{100}\right) + X\left(1 - \frac{100}{360} \cdot \frac{6}{100}\right)$$
$$3934,667 = 1,98667 \cdot X + 0,983333 \cdot X = 2,97 \cdot X$$

ومنها نجد أن قيمة الكمبيالة الثانية :

$$X = \frac{3934,667}{2,97} = 1324,8 L.S$$

ونجد أن قيمة الكمبيالة الأولى:

$$2 \cdot X = 2 \cdot (1324,8) = 2649,61$$

مثال 9:

يدين أحد التجار لإحدى المؤسسات بمبلغ 10000 ل.س. ويستحق بعد 8 أشهر من الآن. ولتسوية هذا الدين، اتفق مع المؤسسة لتسديد ذلك الدين على الشكل الآتي:

- أن يقوم بتسديد مبلغ 1466.67 ل.س نقداً وفوراً.
- أن يحرر كمبيالة بالمبلغ المتبقي وتستحق بعد 6 أشهر.

والمطلوب إيجاد القيمة الاسمية للكمبيالة، إذا علمت أن معدل الخصم التجاري 8% سنوياً.

الحل:

إن القيمة الحالية التجارية للدين الأساسي تساوي:

$$VL = 10000\left(1 - \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{100}\right) = 9466,667 \ \ L.S$$

وبما أنه سيسدد نقداً وفوراً مبلغ 1466.667 فإن المبلغ المتبقي من القيمة الحالية يساوي:

$$9466,667 - 1466.667 = 8000\ L.S.$$

تفرض أن القيمة الاسمية للكمبيالة هي X 6 وهي تستحق بعد 6 أشهر، فإن قيمتها الحالية تساوي:

$$V = X(1 - n.P) =$$

$$8000 = X(1 - \frac{6}{12} \cdot \frac{8}{100}) = 0,96 \cdot X$$

ومنه نجد أن القيمة الأسمية X تساوي:

$$X = 8333,333\ L.S$$

الحالة الخامسة: استبدال عدة ديون بدين معلوم وبتاريخ استحقاق متوسط:

إن هذه الحالة تشترط أن تكون القيمة الاسمية للدين الجديد S مساوية لمجموع القيم الاسمية للديون القديمة. أي يشترط أن يكون:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ...$$

وبتطبيق القاعدة السابقة على القيم الحالية التجارية، والتي تعنى ضرورة أن تكون القيم الحالية التجارية للدين الجديد Vt مساوية لمجموع القيم الحالية التجارية للديون القديمة، أي يجب أن يكون:

$$Vt = Vt_1 + Vt_2 + Vt_3 + ...$$

وبفرض أن المدة المتوسطة لاستحقاق الدين الجديد هي t، ومدة الديون القديمة هي n_1, n_2, n_3 ، عندها نجد أن :

$$S(1 - t \cdot p) = S_1(1 - n_1 p) + S_2(1 - n_2 p) + S_3(1 - n_3 p) + ..$$

$$S - S \cdot t \cdot p = S_1 + S_2 + S_3 + ..p \cdot (S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 + ...)$$

وبما أن $S = S_1 + S_2 + S_3 + ...$ فرضاً لذلك نختصرهما من الطرفين فنحصل على مايلي:

$$S \cdot t \cdot p = p \cdot (S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 + ...)$$

$$t = \frac{S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 + ...}{S} \qquad (4-5)$$

أي أن المدة المتوسطة للدين الموحد الجديد تساوي المتوسط المثقل لمدد القروض القديمة بواسطة القيم الأسمية لها.

مثال 10:
بتاريخ 2003/3/1 أراد أحد التجار استبدال ديونه التالية:
5000 ل.س ويستحق في 2003/9/15
4000 ل.س ويستحق في 2003/10/25
6000 ل.س ويستحق في 2003/12/10
بدين موحد مساوٍ لهم بالقيمة، والمطلوب حساب المدة المتوسطة للدين الموحد وتاريخ استحقاقه.

الحل:

نقوم أولاً بحساب المدد الزمنية لكل من الديون السابقة فنجد أن:
مدة استحقاق الدين الأول بالأيام 198 = 60 - 258
مدة استحقاق الدين الثاني بالأيام 238 = 60 - 298
مدة استحقاق الدين الثالث بالأيام 284 = 60 - 344
وبما أن $S_1 = 5000$ $S_2 = 5000,$ وأن $S_3 = 6000$ فإن :

$$S = 5000 + 4000 + 6000 = 15000 \ L.S$$

ولإيجاد المدة المتوسطة للدين الموحد نطبق العلاقة (4-5) فنجد أن:

$$t = \frac{5000 \cdot 198 + 4000 \cdot 238 + 6000 \cdot 284}{15000}$$

$$t = \frac{3646000}{15000} = 243.06 \approx 244 \text{ يوماً}$$

أي إن العدد التراكمي لتاريخ استحقاق الدين $244 + 60 = 304$
وهو يقابل تاريخ 2003/10/31.

ملاحظة:

نلاحظ إن المدة المتوسطة للدين الجديد ليست لها علاقة بسعر الفائدة أو الخصم p. ولكنها ترتبط بشكل كبير بالقيم الاسمية للديون القديمة، ومع أنها تقع بين أصغر مدة وأكبر مدة لها ولكنها تنزاح نحو القيمة الاسمية الكبيرة.

الحالة السادسة: استبدال عدة ديون بدين موحد وبتاريخ استحقاق مناسب (الحالة العامة):

يمكن معالجة هذه الحالة عن طريق القيم الحالية الصحيحة وبدون أية شروط على القيمة الاسمية للدين الجديد S أو على سعر الفائدة P. وتنطلق هذه المعالجة من القاعدة العامة حيث يجب أن يكون لدينا:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ...$$

حيث V هي القيمة الحالية الصحيحة للدين الجديد S ، و V_1, V_2, V_3 هي القيم الحالية الصحيحة للديون القديمة. وبفرض أن t هي المدة الوسطى للدين الجديد، وأن سعر الفائدة الجديد هو P'. وبإرجاع كل ذلك إلى لحظة البدء نجد أن:

$$\frac{S}{1+tp'} = V_1 + V_2 + V_3 = V$$

$$1+tp' = \frac{S}{V_1+V_2+V_3} = \frac{S}{V}$$

$$tp' = \frac{S}{V} - 1 = \frac{S-V}{V}$$

$$t = \frac{S-V}{P' \cdot V} \qquad (5-5)$$

وهنا يشترط فقط أن يكون $S \geq V$ وهو أمر يمكن تحقيقه عند الاتفاق.

مثال 11:

حتى نطبق العلاقة (5-5) نأخذ مثالاً عاماً لاتوجد فيه أية شروط. لذلك نفترض أن أحدهم مدين لآخر بالديون التالية التي تحسب عليها فائدة بسيطة بسعر 9% سنوياً.

5000 ل.س ويستحق في 2003/9/15

4000 ل.س ويستحق في 2003/10/25

6000 ل.س ويستحق في 2003/12/10

وتاريخ 2003/3/1 أراد أن يستبدل هذه الديون بدين واحد قيمته الاسمية 16000 ل.س ، وبفائدة بسيطة 12% سنوياً.

فما هو تاريخ الاستحقاق المتوسط للدين الجديد.

الحل:

لدينا:

$$S = 16000, \quad P' = 0.12 \ , P = 0.09,$$

$$S_3 = 6000 \quad S_2 = 4000, \quad S_1 = 5000$$

كما نجد أن المدد المقابلة لهذه الديون تساوي:

يوماً $n_1 = 198$ ، يوماً $n_2 = 238$ ، يوماً $n_3 = 284$ ، وبذلك نجد أن القيم الحالية لهذه الديون تساوي:

$$V_1 = \frac{S_1}{1+n_1 p} = \frac{5000}{1+\frac{198}{365}(0.09)} = \frac{5000}{1.04882} = 4767.25 \ \ L.S$$

$$V_2 = \frac{S_2}{1+n_2 p} = \frac{4000}{1+\frac{238}{365}(0.09)} = \frac{4000}{1.058685} = 3778.27 \ \ L.S$$

$$V_3 = \frac{S_3}{1+n_3 p} = \frac{6000}{1+\frac{284}{365}(0.09)} = \frac{6000}{1.07003} = 5607.33 \ \ L.S$$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الإجمالية تساوي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 4767,25 + 3778,27 + 5607,33 =$$

$$V = 14152,85 \ \ L.S$$

وبذلك نجد أن المدة المتوسطة تساوي:

$$t = \frac{S-V}{p'v} = \frac{16000-14152.85}{0.12(14152.85)} = 1.0876 \text{ سنة } = 365 + 32 \text{ يوماً}؛$$

أي إن وتاريخ الاستحقاق المتوسط سيكون بعد عام و32 يوماً اعتباراً من تاريخ الاستبدال2003/3/1؛ أي إنه سيقع في سنة 2004 الكبيسة، لذلك سيكون تاريخ الاستحقاق المتوسط في 2004/4/1 ، وهوتاريخ يقع بعد المدد المحددة للديون السابقة، وذلك بسبب أننا جعلنا *S=16000* أكبر من مجموعها *15000*.

ملاحظة:

من العلاقة العامة (5-5) يمكننا استخلاص العلاقة الخاصة التي تشترط أن يكون سعر الفائدة P موحداً، وأن تكون القيمة الاسمية للدين الجديد S مساوية لمجموع القيم الاسمية للديون القديمة؛ أي أنه عندها يشترط أن يكون:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_1 = V_1(1 + n_1 p) = V_1 + V_1 n_1 p \Rightarrow S_1 - V_1 = V_1 n_1 p$$

$$S_2 = V_2(1 + n_2 p) = V_2 + V_2 n_2 p \Rightarrow S_2 - V_2 = V_2 n_2 p$$

$$S_3 = V_3(1 + n_3 p) = V_3 + V_3 n_3 p \Rightarrow S_3 - V_3 = V_3 n_3 p$$

وبتعويض ذلك في العلاقة (5-5) والتي تحولت إلى الشكل التالي:

$$t = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - (V_1 + V_2 + V_3)}{pV} = \frac{(S_1 - V_1) + (S_2 - V_2) + (S_3 - V_3)}{pV}$$

$$t = \frac{V_1 n_1 p + V_2 n_2 p + V_3 n_3 p +}{pV} = \frac{V_1 n_1 + V_2 n_2 + V_3 n_3}{V} \ldots\ldots\ldots$$

وبذلك نحصل على علاقة أخرى لحساب المدة المتوسطة هي:

$$t = \frac{V_1 n_1 + V_2 n_2 + V_3 n_3}{V} \qquad (6-5)$$

وهي شبيهة بالعلاقة (5-4)، ولكنها بدلالة القيم الحالية للديون القديمة، وتمتاز بأنها أكثر دقةً ولكنها أطول حساباً.

مثال 12:

لنأخذ معطيات المثال 10 السابق، ولنفترض أن سعر الفائدة الموحد 9%، وأن الشرط الأساسي محقق؛ أي إن القيمة الاسمية للدين الجديد = مجموع القيم الاسمية للديون القديمة.

والمطلوب حساب المدة المتوسطة بدلالة القيم الحالية؛ أي من العلاقة (5-6).

الحل:

لدينا $S = 15000,,\quad S_3 = 6000,\quad S_2 = 4000,\quad S_1 = 5000$

ولتطبيق العلاقة (5-6) يجب حساب القيم الحالية V_1, V_2, V_3 ، وبذلك نجد أن:

$$V_1 = \frac{S_1}{1+n_1 p} = \frac{5000}{1+\frac{198}{365}(0.09)} = \frac{5000}{1.04882} = 4767.25 \ \ L.S$$

$$V_2 = \frac{S_2}{1+n_2 p} = \frac{4000}{1+\frac{238}{365}(0.09)} = \frac{4000}{1.05868} = 3778.27 \ \ L.S$$

$$V_3 = \frac{S_3}{1+n_3 p} = \frac{6000}{1+\frac{284}{365}(0.09)} = \frac{6000}{1.07003} = 5607.33 \ \ L.S$$

ثم نحسب القيمة الحالية الإجمالية، فنجد أنها تساوي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 4767,25 + 3778,27 + 5607,33 =$$

$$V = 14152,85 \ \ L.S$$

وبذلك نجد أن المدة المتوسطة تساوي:

$$t = \frac{4767,25 + \frac{198}{365} + 3778,27.\frac{238}{365} + 5607,33.\frac{284}{365}}{14152,85} = 0,6651 \text{ سنة}$$

وبتحويل ذلك العدد إلى أيام نجد أنه يساوي 243 يوماً $(365 \cdot 0,6651)$ وأن العدد التراكمي لتاريخ الاستحقاق المتوسط يصبح $303 = 60 + 243$ وأن ذلك العدد يقابل تاريخ الاستحقاق المتوسط، وهو في 2003/10/30 ، وهو تاريخ يختلف قليلاً عن التاريخ المحسوب في المثال 10 السابق.

تمرينات

1 ـ يدين أحدهم بمبلغ 60000 ليرة سورية للمصرف، ويستحق بعد 50 يوماً من الآن، ويريد استبداله بدين آخر يستحق بعد 250 يوماً، فما هي القيمة الاسمية للدين الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 7% سنوياً.

2 ـ يدين أحدهم لآخر بالمبالغ التالية:

20000 ليرة سورية ويستحق في 2004/4/30.

30000 ليرة سورية ويستحق في 2004/7/3.

50000 ليرة سورية ويستحق في 2004/10/31.

ويريد استبدال هذه الديون بدين واحد يستحق بتاريخ 2004/12/31، فما هي القيمة الاسمية لذلك الدين الجديد إذا علمت أن معامل الخصم يساوي 7% سنوياً.

3 ـ يدين أحدهم لآخر بالمبالغ التالية:

12000 ليرة سورية ويستحق بعد 150 يوماً من الآن.

16000 ليرة سورية ويستحق بعد 200 يوم من الآن.

20000 ليرة سورية ويستحق بعد 250 يوماً من الآن.

واتفق مع الدائن على أن يسدد له مبلغ 25000 ليرة سورية فوراً، وأن يحرر له سنداً جديداً يستحق بعد 300 يوم من الآن.

والمطلوب حساب القيمة الاسمية لذلك السند إذا كان سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً.

4 ـ أعد حل نفس التمرين السابق إذا كان معدل الخصم يساوي 6% سنوياً.

5 ـ يشتري تاجر بضاعته بدفع مبلغ 10000 ليرة سورية نقداً، أو بتحرير كمبيالتين متساويتين بالقيمة، تستحق الأولى بعد 60 يوماً، وتستحق الثانية بعد 120 يوماً. فاحسب القيمة الاسمية لكل من الكمبيالتين، ثم احسب ثمن البضاعة المشتراة، إذا علمت أن معدل الخصم يساوي 8% سنوياً.

الفصل السادس

حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات التالية:

1 ـ حصيلة الدفعات الدورية العادية

2 ـ حصيلة الدفعات الدورية الفورية

3 ـ تمرينات

الفصل السادس

حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة)

يعالج هذا الفصل قضايا حساب حصيلة الدفعات الدورية والفوائد المستحقة عليها، والدفعات الدورية هي الدفعات التي تودع خلال كل فترة بانتظام في أحد المصارف، وتكون متساوية بالقيمة النقدية، ويمكن أن تكون فترات الدفع كل أسبوع أو كل شهر أو كل شهرين، أو كل فصل، أو كل سنة، أو بصورة عامة كل فترة زمنية معينة.

وسنميز هنا بين نوعين أساسيين من هذه الدفعات، وهما:

الدفعات العادية:

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي تدفع في نهاية الفترات الزمنية المحددة، أي في نهاية كل أسبوع أو كل شهر أو كل شهرين، أو كل فصل، أو كل سنة، أو غير ذلك. ويتم حساب الفوائد عليها خلال هذه الفترات حسب مدة إيداع كل دفعة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة؛ أي بعد إيداع الدفعة الأخيرة مباشرةً.

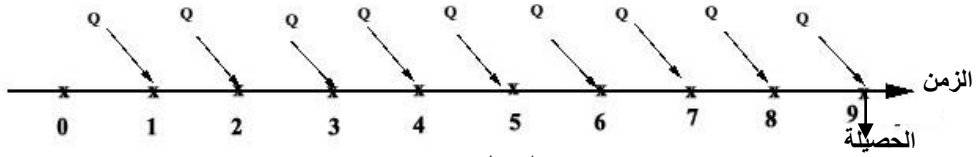
الدفعات الفورية:

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي تدفع في بداية الفترات الزمنية المحددة، أي في نهاية كل أسبوع أو كل شهر أو كل شهرين، أو كل فصل، أو كل سنة، أو غير ذلك. ويتم حساب الفوائد عليها خلال هذه الفترات حسب مدة إيداع كل دفعة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة أيضاً؛ أي بعد مرور فترة زمنية كاملة على إيداع الدفعة الأخيرة.

ونسمي التاريخ الذي نحسب فيه حصيلة تلك الدفعات بتاريخ الاستحقاق (النظري)، كما يمكن أن تُحسب حصيلة هذه الدفعات بعد فترة تأجيل معينة لتاريخ الاستحقاق الأساسي المحدد بنهاية فترات الإيداع.

6-1- حصيلة الدفعات الدورية العادية:

وهي الدفعات التي تودع في نهاية كل شهر أو فصل أو سنة أو فترة زمنية معينة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة، أي بعد إيداع الدفعة الأخيرة مباشرة وهي تمثل على المحور الزمني كما يلي (لتسع دفعات).



الشكل (1-6)

وحسب الشكل السابق نلاحظ أن عدد الدفعات هو 9 دفعات، ويتم إيداع الدفعة الأولى في نهاية الشهر الأول والثانية في نهاية الشهر الثاني ..... والتاسعة في نهاية الشهر التاسع، ونحسب حصيلة هذه الدفعات في نهاية الشهر التاسع، أي بعد إيداع الدفعة التاسعة الأخيرة مباشرة ودون انتظار.

مثال توضيحي:

لتوضيح كيفية حساب حصيلة هذه الدفعات، حيث نفترض أن أحد المواطنين يودع في نهاية كل شهر مبلغ 1000 ل. س ولمدة 9 أشهر وبفائدة بسيطة 14%. فما هي حصيلة هذا الإيداع في نهاية الشهر التاسع؟

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات عادية لأنها تدفع في نهاية كل شهر وأن عددها 9 دفعات، وإن حصيلتها = مجموع المبالغ المودعة + مجموع الفوائد المستحقة عليها.

وإن مجموع المبالغ المودعة = $1000 \times 9 = 9000$ ل.س .

أما الفوائد المستحقة فتختلف من دفعة لأخرى بسبب اختلاف مدة الإيداع، ونجد أن:

الفائدة المستحقة على الدفعة الأولى المودعة لمدة 8 أشهر فقط = $1000.\frac{14}{100}.\frac{8}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثانية المودعة لمدة 7 أشهر = $1000.\frac{14}{100}.\frac{7}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثالثة المودعة لمدة 6 أشهر = $1000.\frac{14}{100}.\frac{6}{12}$

.....

الفائدة المستحقة على الدفعة قبل الأخيرة المودعة لمدة شهر واحد = $1000.\frac{14}{100}.\frac{1}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الأخيرة لمدة صفر شهر = $1000.\frac{14}{100}.\frac{0}{12}$

وبذلك نجد أن مجموع الفوائد المستحقة يساوي:

$$I_9 = 1000 \cdot \frac{14}{100}\left(\frac{8}{12}+\frac{7}{12}+\frac{6}{12}+\frac{5}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{0}{12}\right)$$

$$I_9 = 1000 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{9}{2}\left(\frac{8}{12}+\frac{0}{12}\right) = 420 \quad L.S$$

وبملاحظة أن ما داخل القوس هو عبارة عن مجموع حدود متوالية حسابية حدها الأول $\frac{8}{12}$ والأخير $\frac{0}{12}$، وأساسها $\frac{1}{12}$ وعدد حدودها 9، لذلك يكون لدينا:

وبذلك نجد أن حصيلة هذه الدفعات العادية Q_9 تساوي

$$Q_9 = 9000 + 420 = 9420 \ L.S$$

وبناء على ماتقدم يمكننا استخلاص العلاقة الرياضية لحساب مجموع الفوائد المستحقة لـ m دفعة دورية عادية وشهرية قيمة كل منها K وكتابتها على الشكل التالي (للدفعات الشهرية):

$$I_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1}{12}+\frac{0}{12}\right) \qquad (1-6)$$

حيث إن M_1 هي مدة إيداع الدفعة الأولى بالأشهر. أما مدة الدفعة الأخيرة فتساوي الصفر. وبذلك نجد أن حصيلة هذه الدفعات العادية تساوي:

$$Q_m = K \cdot m + I_m$$

$$Q_m = K \cdot m + K \cdot P \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1}{12}+\frac{0}{12}\right) \qquad (2-6)$$

أما إذا كانت المدة الزمنية محسوبة بالأيام فإن العلاقتين السابقتين تأخذان الشكل الآتي (للدفعات المتساوية والجارية بانتظام):
الفائدة:

$$I_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{d_1+0}{365}\right) \qquad (3-6)$$

أما الحصيلة فتساوي:

$$Q_m = K.m + KP.\frac{m}{2}\left(\frac{d_1+0}{365}\right) \qquad (4-6)$$

حيث رمزنا بـ d_1 لمدة إيداع الدفعة الأولى بالأيام، أما مدة الدفعة الأخيرة فتساوي الصفر.

ملاحظة:

إذا كانت السنة كبيسة، وكانت المدد محسوبة بالأيام، فإننا نستبدل الرقم 365 بالرقم 366.

أما إذا كان المطلوب إجراء الحسابات على أساس السنة التجارية فإننا نضع مكان الرقم 365 الرقم 360 ونجري الحسابات كالعادة، كما يمكن إضافة مدة تأجيل الاستحقاق إلى مدة الإيداع في أي من العلاقات السابقة.

مثال 1:

قرر أحمد أن يودع في آخر كل شهر مبلغ 2000 ل.س من راتبه ولمدة عام، فاحسب حصيلة الإيداع والفوائد المستحقة إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 14%.

الحل:

بما أن هذه الدفعات الدورية عادية وشهرية فإننا نطبق العلاقتين (1-6) و(2-6)، فنجد أنه لدينا المعطيات التالية:

$$I_m = ? \qquad Q_m = ? \qquad P = 0{,}14 \qquad m = 12, \qquad K = 2000$$

ولحساب الحصيلة نطبق العلاقة:

$$Q_m = 2000 \cdot 12 + 2000\,\frac{14}{100}.\frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right) = 25540\ L.S$$

ولحساب الفوائد المستحقة نطبق العلاقة:

$$I_m = 2000.\frac{14}{100}.\frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right) = 1540\ L.S$$

مثال 2:

يريد محمد توفير مبلغ 20000 ل.س لشراء حاسوب، فقرر أن يقوم بإيداع دفعات شهرية عادية ولمدة خمسة عشر شهراً، فما هو مقدار الدفعة الدورية إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 18% سنوياً.

الحل:

لدينا البيانات التالية:

$$K = ? \qquad ,P = 0.18 \qquad ,n = 15, \qquad Q = 20000$$

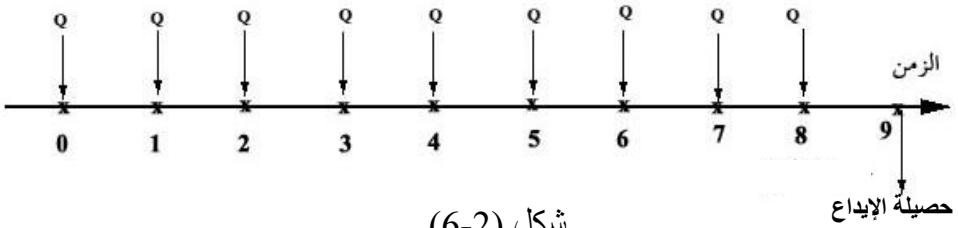
نعوض من العلاقة (2-6)، فنجد أن:

$$20000 = K.15 + K\frac{18}{100}\cdot\frac{15}{2}\left(\frac{14+0}{12}\right) = 16{,}5750\cdot k$$

$$K = \frac{20000}{16{,}5750} = 1206{,}64\ L.S$$

6-2- حصيلة الدفعات الدورية الفورية:

وهي الدفعات التي تودع في أول كل شهر أو فصل أو فترة زمنية معينة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة للإيداع، تمثل على المحور الزمني كمايلي (لتسع دفعات).



شكل (2-6)

وحسب الشكل السابق نلاحظ أن عدد الدفعات هو 9 دفعات، ويتم إيداع الدفعة الأولى في أول الشهر الأول والثانية في أول الشهر الثاني ..... والتاسعة في أول الشهر التاسع، ولكن حصيلتها تحسب في نهاية الشهر التاسع، أي بعد مرور شهر على إيداع الدفعة التاسعة الأخيرة.

ولمعالجة هذه المسألة وحساب حصيلة هذه الدفعات الدورية، نأخذ المثال العددي التالي:

مثال توضيحي:

نفترض أن أحد المواطنين قرر أن يودع مبلغ 1000 ليرة سورية في أول كل شهر ولمدة 9 أشهر وبفائدة بسيطة 14%. فما هي حصيلة إيداعه في نهاية الشهر التاسع؟

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات دورية فورية لأنها تدفع في أول كل شهر، ومن الواضح أن حصيلة ذلك الإيداع = مجموع المبالغ المودعة + الفوائد المستحقة عليها.

وأن مجموع المبالغ المودعة = $1000 \times 9 = 9000$ ل.س .

وأن مدد الإيداع موضحة كما على الشكل السابق.

أما الفوائد المستحقة فتختلف من دفعة لأخرى بسبب اختلاف مدة الإيداع، ونجد أن:

الفائدة المستحقة على الدفعة الأولى المودعة لمدة 9 أشهر فقط $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{9}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثانية المودعة لمدة 8 أشهر $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{8}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثالثة المودعة لمدة 7 أشهر $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{7}{12}$

.....

الفائدة المستحقة على الدفعة الثامنة المودعة لمدة شهرين $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{2}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة التاسعة المودعة لمدة شهر واحد$= 1000.\frac{14}{100}.\frac{1}{12}$

وبذلك نجد أن مجموع الفوائد المستحقة لهذه الدفعات، والذي سنرمز له بالرمز I يساوي:

$$I_9' = 1000.\frac{14}{100}.\frac{9}{12} + 1000.\frac{14}{100}.\frac{8}{12} 1000.\frac{14}{100}.\frac{7}{12} + ... 1000.\frac{14}{100}.\frac{1}{12}$$

$$I_9' = 1000.\frac{14}{100}.\left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \frac{7}{12} + \frac{6}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

وبملاحظة أن المجموع ضمن القوس هو مجموع حدود متوالية عددية حدها الأول $\frac{9}{12}$ والأخير $\frac{1}{12}$ وعدد حدودها 9. نجد أن:

$$I_9' = 1000 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{9}{2}\left(\frac{9}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

$$I_9' = 1000 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{90}{12} = 525\ L.S$$

وبذلك نجد أن حصيلة هذه الدفعات العادية والتي سنرمز لها بـ Q_9' تساوي:

$$Q_9' = 9000 + 525 = 9525\ L.S$$

وبناء على ماتقدم يمكننا ببساطة أن نستخلص العلاقتين الرياضيتين اللتين تعطياننا مجموع الفوائد المستحقة للدفعات الدورية الفورية وحصيلتهما التاليتين:

$$I'_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + 1}{12}\right) \qquad \text{مجموع الفوائد المستحقة} \qquad (5-6)$$

$$Q'_m = K.m + KP.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + 1}{12}\right) \qquad \text{حصيلة الإيداع} \qquad (6-6)$$

وكتطبيق على ذلك نحسب حصيلة الدفعات الواردة في المثال السابق، فنجد أن:

$$Q'_9 = 1000 \cdot 9 + 1000.\frac{14}{100}.\frac{9}{12}\left(\frac{9+1}{12}\right) = 9525\ L.S$$

ملاحظة :

يمكننا دمج العلاقتين (1-6)، (5-6) بعلاقة واحدة للدفعات العادية والفورية تتضمن رمزين لمدتي إيداع الدفعة الأولى M_1 والأخيرة M_m كما يلي:

$$I_n = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_2}{12}\right) \qquad \text{للأشهر} \qquad (7-6)$$

حيث رمزنا M_1 لمدة إيداع الدفعة الأولى، وبـ M_m لمدة إيداع الدفعة الأخيرة بالأشهر.

وكذلك نستخلص أن حصيلة تلك الدفعات الشهرية Q_n' تساوي:

$$Q_n' = K.m + KP.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right) \qquad \text{للأشهر} \qquad (8-6)$$

مع الانتباه إلى أن M_1 هي مدة إيداع الدفعة الأولى العادية أو الفورية مع أي فترة تأجيل لها، وإلى أن M_m هي مدة إيداع الدفعة الأخيرة العادية أو الفورية مع أي فترة تأجيل لها، وأن حساب هاتين المدتين يتم حسب شروط كل مسألة على حدة.

أما إذا كانت فترة الإيداع الدورية تحسب بالأيام فإن العلاقتين السابقتين تأخذان الشكل التالي:

$$I'_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{d_1 + d_m}{365}\right) \qquad \text{للأيام} \qquad (9-6)$$

حيث إن d_1 , d_n مدتا إيداع الدفعتين الأولى والأخيرة مع أي تأجيل لهما (بالأيام).

$$Q'_n = K.m + K \cdot P \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{d_1 + d_m}{365}\right) \qquad \text{للأيام} \qquad (10-6)$$

ملاحظة:

يستبدل الرقم 365 بـ 366 إذا كانت السنة كبيسة، ويمكن أن يستبدل بـ 360 إذا كانت السنة تجارية، كما يمكن استخدام العلاقات السابقة عندما يكون تاريخ الاستحقاق مؤجلاً لمدة معينة، كما سنرى لاحقاً.

مثال 4:

يودع أحد العمال في بداية كل أسبوع مبلغ 500 ل.س من أجرته في أحد المصارف. فما هي حصيلة إيداعه في نهاية الأسبوع العاشر؟ علماً بأن سعر الفائدة البسيطة 9% سنوياً.

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات دورية وفورية، وإنه لدينا:

$$Q'_n = ? \qquad P = 0,09 \qquad m = 10 \qquad K = 500$$

ولحساب الحصيلة Q'_m نطبق العلاقة (10-6)، ونحسب مدد هذا الإيداع بالأيام، ونلاحظ أن مدة الدفعة الأولى هي 70 يوماً، ومدة الدفعة الأخيرة 7 أيام، وبذلك نجد أن:

$$Q'_{10} = 500 \cdot 10 + 500 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{70+7}{365}\right) = 5047,47 \ \ L.S$$

أما الفوائد المستحقة له فبلغت مايلي:

$$I'_{10} = 500 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{70+7}{365}\right) = 47,47 \ L.S$$

وكان يمكن حسابها بطريقة أخرى فهي:

$$I_{10} = 5047,47 - 5000 = 47,47 \ L.S$$

مثال 5:

كان أحد التجار يودع في المصرف التجاري مبلغ 5000 م.س في نهاية كل شهر، وبعد مرور عام طلب من المصرف أن يحسب له رصيده فكان 62200 ل.س فما هو سعر الفائدة البسيطة التي يتعامل بها المصرف.

الحل:

لدينا $K = 5000$, $m = 12,$ $Q_n = 62200$

والمجهول هو سعر الفائدة P.

وبما أن هذه الدفعات دورية وعادية وشهرية نطبق العلاقة:

$$Q_n = K.m + kp \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + 0}{12}\right)$$

$$62200 = 5000 \cdot 12 + 5000 \cdot P \cdot \frac{12}{2} \cdot \left(\frac{11+0}{12} \right)$$

$$62200 = 60000 + 60000 \cdot \frac{11}{24} \cdot P$$

$$2200 = 27500\ P$$

$$P = \frac{2200}{27500} = 0{,}08 \Rightarrow 8\%$$

أي إن سعر الفائدة هو 8%.

مثال 6:

كان أحد الأشخاص يودع في بداية كل ثلاثة أشهر مبلغاً معيناً في المصرف وبفائدة بسيطة 6% سنوياً. وبعد انقضاء سنة ونصف على ذلك بلغ رصيده 5070 ل.س . فما هي قيمة الدفعة الفصلية التي كان يدفعها؟

الحل:

نلاحظ أن الدفعات فورية، وأن المدة الكلية للإيداع تساوي 18 شهراً، وأن عدد الدفعات $m = \frac{18}{3} = 6$ ، وأن حصيلة ذلك الإيداع $Q'_n = 5070$.

كما نلاحظ أن مدة إيداع الدفعة الأولى 18 شهراً، ومدة إيداع الدفعة الأخيرة 3 أشهر فقط، وبذلك نجد أن:

$$Q'_n = K.m + KP \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{M_1 + M_6}{12} \right)$$

$$5070 = K \cdot 6 + K \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{6}{2}\left(\frac{18+3}{12} \right) = 6{,}3150 \cdot K$$

$$K = \frac{5070}{6{,}3150} = 802{,}85\ L.S$$

مثال 7:

تعاهد زميلان ليشتريا حاسوباً لكل منهما واتفقا على أن يدخرا من راتبيهما مبلغ 500 ل.س كل شهر ولمدة ثلاث سنوات، وبفائدة بسيطة سعرها 9% سنوياً، فاحسب حصيلة كل منهما حسب مايلي:

- إذا كان الأول يودع دفعاته الشهرية في بداية كل شهر.
- إذا كان الثاني يودع دفعاته الشهرية في نهاية كل شهر.

الحل:

إن حصيلة الزميل الأول هي نتيجة دفعات دورية فورية وشهرية لذلك فإنها تساوي:

$$Q'_m = k \cdot m + kp \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12} \right)$$

لدينا هنا عدد الدفعات: دفعة $m = 12 \cdot 3 = 36$، ولدينا أيضاً:

$$p = 0.09 \qquad k = 500$$

وإن مدة الدفعة الأولى = 36 شهراً
وإن مدة الدفعة الأخيرة = 1 شهراً واحداً
وبالتطبيق المباشر نجد أن حصيلة الزميل الأول تساوي:

$$Q'_m = 500 \cdot 36 + 500.\frac{9}{100} \cdot \frac{36}{12}\left(\frac{36+1}{12}\right) =$$

$$Q'_m = 20497{,}5 \ \ L.S$$

ولحساب حصيلة الزميل الثاني نطبق العلاقة (لأنها دفعات عادية):

$$Q_m = 500 \cdot 36 + 500.\frac{9}{100} \cdot \frac{36}{12}\left(\frac{35+0}{12}\right) =$$

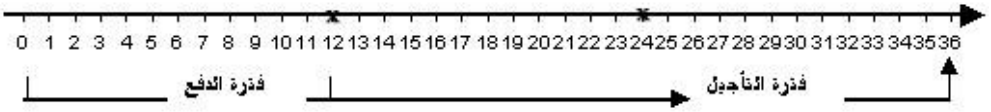
$$Q_m = 20362{,}5 \ \ L.S$$

مثال 8:

كان أحمد يقوم بإيداع مبلغ 3000 ل.س في نهاية كل شهر خلال السنة الأولى من مباشرته العمل ثم أصبح يودع مبلغ 2000 ل.س في نهاية كل شهر خلال السنة الثانية من مباشرته العمل، ولكنه انقطع عن الإيداع خلال السنة الثالثة. ماهي حصيلة إيداعاته في نهاية السنة الثالثة علماً بأن سعر الفائدة البسيطة هو 7%.

الحل:

نلاحظ أن دفعات السنة الأولى هي دفعات شهرية وعادية مؤجلة لمدة عامين، وأن عددها $n = 12$ دفعة ، وأن مدة الدفعة الأولى $M_1 = 35$ شهراً، ومدة الأخيرة $M_{12} = 24$ شهراً كما هو موضح على الشكل التالي:



شكل (4-6)

$$Q'_m = K \cdot m + kp \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_{12}}{2}\right)$$

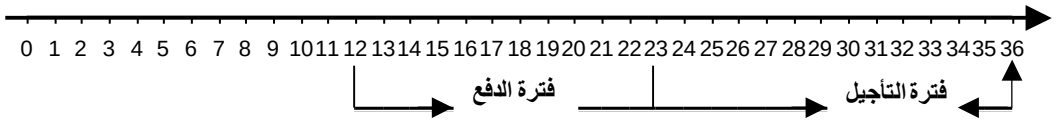
$$Q'_m = 3000 \cdot 12 + 3000 \cdot \frac{7}{100} \cdot \frac{12}{2}\left(\frac{35+24}{12}\right)$$

$$= 36000 + 6195$$

$$Q'_{12} = 42195 \ \ L.S$$

أما دفعات السنة الثانية فهي أيضاً دفعات شهرية عادية ومؤجلة لمدة عام، وإن عددها $n = 12$ ، وإن مدة الدفعة الأولى $M_1 = 23$ شهراً، ومدة الدفعة الأخيرة $M_{12} = 12$ كما هو موضح على الشكل الآتي:

شكل (5-6)



وبذلك نجد أن حصيلة الدفعات الثانية:

$$Q_{12} = 2000 \cdot 12 + 2000.\frac{7}{100}.\frac{12}{2}\left(\frac{23+12}{12}\right)$$

$$= 24000 + 2450$$

$$Q_{12} = 26450 \ L.S$$

وإن حصيلة هذه الدفعات خلال هاتين السنتين وفي نهاية السنة الثالثة تساوي:

$$Q = 42195 + 26450 = 68645 \ L.S$$

تمرينات

1 ـ أوجد حصيلة 10 دفعات عادية ربع سنوية مقدار كل منها 2000 ل.س أودعت بفائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

2 ـ احسب حصيلة الدفعات السابقة إذا كانت دفعات فورية.

3 ـ احسب حصيلة الدفعات السابقة إذا كانت دفعات عادية شهرية، ثم فورية شهرية.

4 ـ يودع أحدهم في نهاية كل شهر مبلغ 5000 ل.س وذلك اعتباراً من شهر آذار عام 2004، والمطلوب حساب حصيلة هذه الدفعات في 2004/12/31 إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً، ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة.

5 ـ أوجد حصيلة الدفعات المذكورة في التمرين السابق إذا كانت تدفع في بداية كل شهر، ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة، وقارن النتائج مع نتائج التمرين السابق.

6 ـ كان أحدهم يودع في نهاية كل شهر من أشهر عام 2004 مبلغاً من المال. وفي نهاية العام بلغت حصيلة دفعاته 6160 ل.س، فاحسب مقدار الدفعة الشهرية إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 5% سنوياً.

7 ـ احسب مقدار الدفعة الشهرية للتمرين السابق إذا كانت الدفعات تدفع في بداية كل شهر من عام 2004.

8 ـ كان أحدهم يودع في بداية كل شهر مبلغ 500 ل.س، واستمر بذلك خلال الأشهر الأربعة الأولى من عام 2004. ثم أصبح يودع مبلغ 1000 ل.س خلال الأشهر

الأربعة التالية، ثم أصبح يودع مبلغ 1500 ل.س خلال الأشهر الأربعة الأخيرة من العام، والمطلوب:

- حساب حصيلة هذه الدفعات في نهاية العام إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 5% سنوياً.
- حساب إجمالي الفوائد المستحقة عن تلك الدفعات.

5-2 : حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية (بفائدة بسيطة)

2قات الأساسية لحساب القيمة الحالية:

تعريف القيمة الحالية: إن القيمة الحالية لـ m دفعة دورية (عادية أو فورية) هي المبلغ الذي إذا أودعناه الآن في المصرف وبنفس سعر الفائدة البسيطة P لأصبحت حصيلته مساوية لحصيلة تلك الدفعات في آخر المدة. وإذا رمزنا للقيمة الحالية لهذه الدفعات بالرمز V ولحصيلتها بالرمز Q، فإنه يجب أن يكون لدينا:

$$Q_m = V \cdot (1 + np)$$

حيث n هي كامل فترة الإيداع وتحسب بالسنوات، وm عدد الدفعات.

*** حساب القيمة الحالية الصحيحة:**

وهي القيمة التي يمكننا استخلاصها بكل بساطة من العلاقة السابقة وتساوي:

$$V = \frac{Q_m}{1 + np} \qquad (28-2)$$

واعتماداً على العلاقة (2 27) التي تعطينا الحصيلة Q_m نجد أن V تساوي:

$$V = \frac{K.m + K.p\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{M_1 + M_m}{12}\right)}{1 + np} \qquad \text{للأشهر} \qquad (29-2)$$

حيث إن M_1 و M_m هما مدتا الدفعتين الأولى والأخيرة(بالأشهر).و n هي المدة الكلية محسوبة بالسنوات

ملاحظة: يجب الانتباه عند الحساب إلى المدتين M_1 و M_m ، والتمييز بين الدفعات العادية والفورية، لأن هاتين المدتين تتأثران بنوع الدفعات، وهذا ما يجعل حصيلة الدفعات الفورية أكبر من حصيلة الدفعات العادية.

مثال 1: ما هي القيمة الحالية لـ 10 دفعات شهرية قيمة كلٍ منها $K = 500$ ، وتدفع في نهاية كل شهر. علماً بأن سعر الفائدة البسيطة 8%.

الحل: نلاحظ أنهذه الدفعات هي دفعات عادية، ولدينا:

$$M_{10}=0\ ,\ M_1=9\ ,\ n=\frac{10}{12}\ ,\ P=\frac{8}{100}\ ,\ K=500\ ,\ m=10$$

وهكذا نجد أن:

$$V=\frac{500\cdot 10+500\dfrac{8}{10}.\dfrac{10}{2}\left(\dfrac{9+0}{12}\right)}{1+\dfrac{10}{12}\left(\dfrac{8}{100}\right)}=\frac{5150}{1{,}0666667}=4828{,}125\,L.S$$

*** حساب القيمة الحالية التجارية:**

وتعتمد هذه القيمة على حذف الخصم التجاري من القيمة الاسمية. ويتم حساب الخصم التجاري بتطبيق سعر الفائدة P على القيمة الاسمية S ويحسب من العلاقة:

$$Dt=S\cdot n\cdot p \qquad (30-2)$$

كما أنها تعتمد على مدة الخصم وليس على مدة الإيداع في المصرف. وبذلك نجد أن القيمة الحالية التجارية لمبلغ أو دفعة k مدتها n سنة تساوي:

ولمعالجة الموضوع بشكل عام للدفعات العادية والفورية، $Vt=k-k\cdot n\cdot p$ نفترض

ـ أن الفترة الواقعة بين الدفعة والأخرى ثابتة وتساوي t (شهر، أو شهرين أو ثلاثة أشهر).

ـ وأن عدد الدفعات m دفعة دورية. ـ وأن حجم أو قيمة الدفعة هو K.

ـ وأن معدل الفائدة البسيطة هو P. ـ

وأن مدة الخصم تساوي الفترة التي تسبق لحظة الإيداع لكل دفعة (من البداية حتى لحظة الإيداع).

ـ وأن المدة الكلية للإيداع معلومة، ونرمز لها بـ n، وهي تساوي $n=m.t$.

والمطلوب حساب القيمة الحالية في بداية عملية الإيداع.

وهكذا نجد أن القيم الحالية لهذه الدفعات تتأثر بمدة الخصم التي تسبق كل دفعة وتساوي:

القيمة الحالية التجارية للدفعة الأولى $=Vt_1=K-K\cdot t\cdot P=K(1-tP)$

القيمة الحالية التجارية للدفعة الثانية $=Vt_2=K-K\cdot 2t\cdot P=K(1-2tP)$

القيمة الحالية التجارية للدفعة الثالثة $=Vt_3=K-K\cdot 3t\cdot P=K(1-3tP)$

.....

القيمة الحالية التجارية للدفعة $Vt_m=K-K\cdot mt\cdot P=K(1-m\cdot t\cdot p)=m$

وإن القيمة الحالية التجارية لهذه الدفعات = مجموع قيمها الحالية التجارية؛ أي:

$$Vt = Vt_1 + Vt_2 + Vt_3 + Vt_4 + ...+ Vt_m$$
$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot t[1 + 2 + 4 + ...+ m]$$
$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot t \cdot \frac{m}{2}(1 + m)$$
$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot \frac{m}{2}(t + m \cdot t)$$

وبملاحظة أن t هي مدة الخصم للدفعة الأولى، ونرمز لها بـ l_1، وأن mt هي مدة الخصم للدفعة الأخيرة، ونرمز لها بـ l_m.
ولذلك يمكننا كتابة العلاقة الأخيرة بشكلها العام

$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot \frac{m}{2}(\ell_1 + \ell m) \qquad (31-2)$$

وهي تصلح للدفعات العادية والفورية، بشرط أن يتم الانتباه إلى حساب كل من l_1، و l_m لكل من النوعين، مع ملاحظة أن كل من l_1، و l_m لكل من النوعين تحسب بالسنوات؛ أي يجب تحويل الأشهر إلى سنوات. وهي تعبر عن الفترة التي تسبق إيداع كل من الدفعة الأولى والأخيرة.

مثال 2: أوجد القيمة الحالية التجارية للدفعات المذكورة في المثال السابق.

الحل: نلاحظ أن الدفعات عادية:

$$\ell_{10} = \frac{10}{12}\ ,\ \ell_1 = \frac{1}{12}\ ,\ t = 1\ ,\ n = \frac{10}{12}\ ,\ P = \frac{8}{100}\ ,\ K = 500\ ,\ m = 10$$

وبتطبيق العلاقة (31-2) نجد أن:

$$Vt = 500 \cdot 10 - 500\frac{8}{10} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{10}{12}\right)$$
$$Vt = 5000 - 183{,}333 = 4816{,}67\ L.S$$

*** ملاحظة:**

نلاحظ أن القيمة التجارية في المثال المدروس أقل من القيمة الحالية الصحيحة، في المثال السابق، وذلك بسبب استخدام معدل الفائدة لحساب الخصم من القيمة الاسمية. وللتأكد من دقة الحسابات وصحتها نقوم بالتحقق من أن حصيلة القيمة الحالية يجب أن تساوي حصيلة جميع الدفعات. لذلك نقوم بحساب حصيلة الدفعات العشر السابقة فنجد أن:

$$Q_{10} = Km + K \cdot p\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)$$

$$Q_{10} = 500 \cdot 10 + 500\frac{8}{100} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{9+0}{12}\right) = 5150 \quad L.S$$

فإذا أخذنا القيمة الحالية الصحيحة وحسبنا حصيلتها بعد $\frac{10}{12}$ سنة نجد أن:

$$Q = V(1+np) = 4828{,}125\left(1 + \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{1000}\right) = 5150\, L.S$$

وهو الحصيلة الأساسية 5150 نفسها.
أما إذا أخذنا القيمة الحالية التجارية فنحصل على:

$$Q' = Vt(1+np) = 4816{,}67\left(1 + \frac{10}{12}.\frac{8}{12}\right) = 5137{,}778\, L.S$$

وهو مبلغ أقل من الحصيلة الأساسية؛ أي إن القيمة الحالية التجارية تتضمن غبناً يقع على صاحب الدفعات.

* **حساب الخصم الصحيح:** وهو يساوي ما يلي:

$$D = K \cdot m - V \qquad (32-2)$$

* **حساب الخصم التجاري:** وهو يساوي ما يلي:

$$Dt = K \cdot m - Vt = K \cdot P \cdot \frac{m}{2}(l_1 + l_m) \qquad (33-2)$$

* **الفرق بين الخصمين والقيمتين الحاليتين:**

$$Dt - D = V - Vt \qquad (34-2)$$

مثال 3:
احسب الخصم الصحيح والتجاري والفرق بينهما للدفعات الواردة في المثال 1:
الحل:
من المعلومات السابقة نجد أن الخصم الصحيح يساوي:

$$D = 500 \cdot 10 - 4828{,}125 = 171{,}875 L.S$$

وأن الخصم التجاري يساوي:

$$Dt = 500 \cdot 10 - 4816{,}67 = 183{,}33 L.S$$

$$Dt - D = 183{,}33 - 171{,}875 = 11{,}455$$

وكذلك نجد أن الفرق بين القيمتين الحاليتين الصحيحة والتجارية يساوي:

$$V - Vt = 4828{,}125 - 4816{,}67 = 11{,}455$$

مثال4:

أراد أحدهم شراء براد سعره النقدي 15000 ل.س بالتقسيط، فاتفق مع المؤسسة على تسديد قيمته على شكل دفعات شهرية وخلال عام واحد، على أن يتم تسديد الدفعة الأولى بعد شهر من الآن، فماهي قيمة الدفعة الدورية إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 9%.

الحل: لدينا $n=1 \ , \ m=12 \ , \ P=\frac{9}{100} \ , \ V=15000$

ونلاحظ أن هذه الدفعات هي عادية وشهرية لأن تسديد الدفعة الأولى يبدأ في نهاية كل شهر الأول، وهكذا نجد أن المطلوب حساب قيمة الدفعة الدورية K:

لحساب K نطبق العلاقة (29-2) ونضع القيمة الحالية مساوية للسعر النقدي:

$$V = \frac{K \cdot m + K \cdot p \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)}{1+np}$$

مع ملاحظة أن مدة إيداع الدفعة الأولى $M_1 = 11$، وأن مدة إيداع الدفعة الأخيرة $M_{12} = 0$.

$$15000 = \frac{K \cdot 12 + K \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right)}{1+1 \cdot \left(\frac{9}{100}\right)} =$$

$$15000(1{,}09) = 12K + 0{,}495K = 12{,}495K$$

$$K = \frac{15000(1{,}09)}{12{,}495} = 1308{,}5\, L.S$$

وهو مقدار القسط الشهري أو قيمة الدفعة الشهرية.

ملاحظة:

إذا اعتبرنا قيمة البراد هي القيمة الحالية التجارية فإنه يجب علينا تطبيق العلاقة:

$$Vt = K.m - K.p.\frac{m}{2}(l_1 + lm)$$

مع ملاحظة أن مدة خصم الدفعة الأولى $l_l = \frac{1}{12}$، ومدة خصم الدفعة الأخيرة $l_{l2} = \frac{12}{12}$، وبالتعويض نجد أن:

$$15000 = K \cdot 12 - K \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{12}{2}\left(\frac{1+12}{12}\right) = 12K - 0{,}585K = 11{,}415K$$ و

منها نجد أن:

$$K = \frac{15000}{11{,}415} = 1314{,}06 \ L.S$$

ومرة أخرى نجد أنه من مصلحة التاجر أن يلجأ إلى القيمة الحالية التجارية.

مثال5: تبيع إحدى المؤسسات التجارية مكانس تنظيف تقسيطاً لمدة عام. فإذا وقع اختيار المشتري على مكنسة سعرها التجاري 5755 ل.س. فما هي قيمة الدفعة الدورية؟ إذا علمت أن المؤسسة تشترط أن يتم التسديد على دفعات كل شهرين، وأنه يتم تسديد الدفعة الأولى عند الشراء مباشرةً، وأن سعر الفائدة البسيطة 7% سنوياً. وما هو الفرق بين القيمة التجارية الحالية وإجمالي الدفعات؟

الحل: لدينا $Vt = 5755$, $m = \frac{12}{2} = 6$, $P = \frac{7}{100}$, $n = 1$

ولإيجاد قيمة الدفعة الدورية نطبق العلاقة:

$$VT = K \cdot m - K \cdot p \cdot \frac{m}{2}(l_1 + lm)$$

حيث إن مدة خصم الدفعة الأولى $l_1 = 0$، و مدة خصم الدفعة الأخيرة

$$5755 = K \cdot 6 - K \cdot \frac{7}{100} \cdot \frac{6}{2}\left(\frac{0+10}{12}\right)$$

$$5755 = K \cdot 6 - 0{,}175K = 5{,}825K$$

$$K = \frac{5755}{5{,}825} = 987{,}98 \ L.S$$

وأخيراً نقوم بحساب إجمالي هذه الدفعات فنجده يساوي:

$$K_m = 987{,}98 \cdot 6 = 5927{,}88 \ L.S$$

وإن الفرق بين الشراء النقدي والشراء بالتقسيط هو مقدار النصب ويساوي:

$$5927{,}88 - 5755 = 172{,}88 \approx 173 \ L.S$$

مثال6: عرض التاجر على المشتري سجادة سعرها 12000 ل.س. على أن يدفع نصف سعرها الآن، وأن يتم تقسيط الباقي على دفعات شهرية تدفع في آخر كل شهر ولمدة ستة أشهر، وقيمة كل منها 1500 ل.س. فما هو سعر الفائدة المستخدمة في هذه العملية.

الحل: لدينا السعر $= 12000$، وإن القيمة المتبقية $= Vt = \frac{12000}{2} = 6000$

ونلاحظ أن الدفعات عادية وأن $m = 6$، وأن $K = 1500$، وأن $n = \frac{6}{12}$.

ولإيجاد سعر الفائدة P نطبق العلاقة:

$$Vt = K \cdot m - K \cdot p \cdot \frac{m}{2}(l_1 + lm)$$

مع ملاحظة أن مدة خصم الدفعة الأولى $\ell_1 = 1L12$، ومدة خصم الدفعة الأخيرة $\ell_6 = 6L12$، وبذلك نجد أن:

$$6000 = 1200 \cdot 6 - 1200 \cdot P\frac{6}{2}\left(\frac{1+6}{12}\right)$$

$$6000 = 7200 - 2100 \cdot P$$

$$1200 = 2100 \cdot P$$

$$P = \frac{1200}{2100} = 0{,}57114 = \qquad (57{,}14\%)!!$$

تمرينات

1 ـ أوجد القيمة الحالية لـ 10 دفعات عادية تدفع في نهاية كل شهر، وقيمة كلٍ منها تساوي 300 ل.س إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية البسيطة 5%.

2 ـ أوجد القيمة الحالية للدفعات المذكورة في التمرين السابق إذا كانت تدفع في بداية كل شهر.

3 ـ اشترى أحدهم سيارة، واتفق مع الوكيل على أن يسدد من ثمنها مبلغ 500000 ل٫ مباشرةً ونقداً. وأن يتم تسديد باقي الثمن على 8 دفعات شهرية تدفع في نهاية كل شهر من تاريخ الشراء، وقيمة كلٍ منها 25000 ل.س.
والمطلوب حساب ثمن شراء تلك السيارة إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية البسيطة 8%.

4 ـ لنفترض أن وكيلاً آخر يعرض شروطاً أخرى لتسديد المتبقي من ثمن السيارة على شكل 8 دفعات تدفع في نهاية كل شهرين اعتباراً من تاريخ الشراء، وقيمتها 25000 ل. س أيضاً. فاحسب الثمن الجديد لتلك السيارة إذا كان سعر الفائدة السنوية البسيطة 8% أيضاً.

6-2 : حسابات القروض القصيرة (بفائدة بسيطة)

1-6-2 : مقدمة

إن اتساع العمليات التجارية وانتعاش الحياة الاقتصادية، وازدياد الاعتماد على المشاريع الخاصة الزراعية والصناعية والخدمية ، اقتضت أن يتعامل الناس بعضهم مع البعض أو مع المصارف الخاصة أو العامة عن طريق الاقتراض والاستدانة، ومن هنا ظهرت الحاجة إلى العمل على تسهيل وتنظيم طريقة الاقتراض وطريقة السداد، وإلى توضيح حقوق كل من الدائن والمدين، وصياغة الاتفاق بينهما بما يضمن تحقيق العدالة ومصلحة كلٍ منهما، ويتناسب مع إمكانيات المدين المادية، ويحافظ على حقوق الدائن المالية.

وتصنف القروض حسب مددها الزمنية إلى نوعين رئيسيين هما:

1 ـ القروض قصيرة الأجل: وهي القروض التي لا تتجاوز مدتها السنة أو السنتين على الأكثر، وتطبق عليها قوانين الفائدة البسيطة.

2 ـ القروض طويلة الأجل: وهي القروض التي تتجاوز مدتها السنة (أو السنتين)، فقد تكون سنتين أو ثلاثة أو خمسة أو عشرة أو خمسة عشر...إلخ، وتطبق عليها قوانين الفائدة المركبة.

2-6-2 : المبدأ العام والطرائق المتبعة:

وحتى يتم تسديد هذه القروض بطريقةٍ عادلةٍ تضمن حقوق الطرفين يجب أن نعتمد على مبدأ عادل، وفي مثل هذه الحالات يتم اعتماد أحد المبدأين الآتيين:

المبدأ الأول: حصيلة الأقساط = حصيلة القرض.

(35-2)

المبدأ الثاني: القيمة الحالية للأقساط =قيمة القرض.

وهناك عدة طرائق لتسديد هذه القروض أو استهلاكها؛ وأهمها:

أ ـ الاتفاق على تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده عند استحقاقه؛أي في نهاية المدة .

هـ ـ الاتفاق على تسديد قيمة القرض والفوائد على شكل أقساط دورية متساوية من أصل القرض وفوائده.

و ـ الاتفاق على تسديد جزء ثابت من أصل القرض مع تسديد الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي من أصل القرض (طريقة الاقساط المتناقصة)

ز ـ الاتفاق على تسديد جزء ثابت من أصل القرض مع تسديد الفواءد المستحقة على تلك الاقساط حسب مدة كل منها.(طريقة الاقساط المتزايدة)

2-6-3: طريقة الدفعة الواحدة : تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده في نهاية المدة دفعة واحدة.

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرائق المذكورة، وهي لا تتطلب غير حساب حصيلة ذلك القرض عند سعر فائدة بسيطة معينة، وعلى مدة استحقاق القرض. فإذا رمزنا للمتحولات المستخدمة في ذلك بما يلي:

L : قيمة القرض الأصلي التي يستلمها المقترض.

P: سعر الفائدة البسيطة السنوية.

n: مدة استحقاق القرض، وتحسب بالسنوات (يتم تحويل الأشهر إلى سنوات).

Sn: حصيلة القرض في نهاية مدة الاستحقاق n.

واعتماداً على العلاقة (2-2) نجد أن حصيلة ذلك القرض في نهاية المدة تساوي:

$$Sn = L.(1 + P \cdot n) \qquad (36-2)$$

وهو المبلغ الذي يجب على المدين تسديده في نهاية مدة الاستحقاق للدائن.

مثال 1:

اقترض أحدهم من المصرف مبلغ 15000 ل.س بفائدة سنوية بسيطة 8%، ولمدة ستة أشهر. واتفقا على تسديد القرض وفوائده في نهاية المدة دفعة واحدة. فما هي قيمة تلك الدفعة؟

الحل: لحساب قيمة تلك الدفعة نحسب حصيلة القرض في نهاية المدة، فنجد أن:

$$Sn = 15000\left(1 + \frac{8}{100} \cdot \frac{6}{12}\right) = 15600\ L.S.$$

مثال 2: اقترض أحمد من المصرف مبلغ 20000 ل.س ولمدة 8 أشهر. وعندما أراد تسديد قيمة القرض مع فوائده في نهاية المدة، طلب منه المصرف أن يدفع مبلغ 21000 ل.س. فما هو سعر الفائدة البسيطة المستخدم في المصرف؟

الحل: لحساب معدل الفائدة P نطبق العلاقة (1-8) السابقة، فنجد أن:

$$21000 = 20000\left(1 + P \cdot \frac{8}{12}\right) =$$

$$\frac{21000}{20000} - 1 = \frac{8}{12}P$$

$$P = 0{,}075 = (7{,}5\%)$$

4-6-2: طريقة الأقساط المتساوية: تسديد القرض والفوائد على شكل أقساط دورية متساوية من أصل القرض والفوائد:

وتقتضي هذه الطريقة أن يقوم المدين بدفع أقساط دورية متساوية بحيث يكون كل قسط منها أكبر من مقدار الفائدة المستحقة. وذلك لتغطية الفائدة المستحقة على القرض حتى تاريخه، ولتسديد جزء من أصل القرض حتى يتم استهلاكه خلال المدة المحددة.

وحتى تكون النتائج منصفة يجب أن تتحقق بين الطرفين العلاقة التالية:

حصيلة القرض = حصيلة الأقساط المدفوعة.

واعتماداً على العلاقات والرموز السابقة نجد أن ذلك يقتضي أن يكون:

$$Sn = Q_m$$

$$L.(1 + np) = K \cdot m + K \cdot p\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)$$ بالأشهر ($M_1 + M_m$)

وهكذا نجد أن قيمة الدفعة K تساوي:

$$K = \frac{L.(1 + np)}{m + p \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)} \qquad (37-2)$$

مثال3: اقترض أحد الحرفيين مبلغ 100000 ل.س من المصرف لمدة 9 أشهر وبفائدة بسيطة 8% سنوياً. واتفق على أن يتم تسديده على شكل أقساط شهرية متساوية من أصل القرض والفوائد وتدفع في نهاية كل شهر. فاحسب قيمة القسط الشهري، ثم قم بإعداد جداول لاستهلاك القرض المذكور.

الحل: لدينا : $L=100000$, $m=9$, $\ell=1$, $n=\frac{9}{12}$, $P=\frac{8}{100}$

و $M_1=8$ و $M_9=0$. وبذلك نجد أن قيمة القسط الشهري تساوي:

$$K=\frac{100000\left(1+\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{100}\right)}{9+\frac{8}{100}\cdot\frac{9}{2}\left(\frac{8+0}{12}\right)}=\frac{106000}{9,24}=11471,86\ L.S$$

وأن إجمالي المبلغ الذي سيدفع إلى المصرف نقداً يساوي:

$$K.m=11471,86\cdot 9=103246,74\ L.S$$

وأن إجمالي الفائدة التي تحملها المقترض يساوي:

103246.74 -100000 =3246.74 ل.س

مثال4: اقترض أحد العمال مبلغ 40000 ل.س من المصرف الصناعي لمدة سنة، وبفائدة 9% ، على أن يسددها على شكل أقساط عادية شهرية متساوية من أصل القرض والفوائد، فماهي قيمة القسط الشهري؟ وماهو مقدار الفوائد التي يتحملها العامل من جراء ذلك؟

الحل:

لدينا : $L=40000$, $m=12$, $n=\frac{12}{12}$, $P=\frac{9}{100}$ $M_1=11$

و $M_{12}=0$ ، وبتطبيق العلاقة (8-8) نجد أن:

$$K=\frac{40000\left(1+1\cdot\frac{9}{100}\right)}{12+\frac{9}{100}\cdot\frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right)}=\frac{43600}{12,495}=3489,40\ L.S$$

وإن إجمالي المبلغ المسدد للمصرف نقداً :

$$K\cdot m=3489,40\cdot 12=41872,75\ L.S$$

وبذلك نجد أن مقدار الفوائد التي تحملها المقترض يساوي:

$$41872,75-40000=1872,75\,L.S$$

.2-6=5 : طريقة الأقساط المتزايدة: وتعتمد على تقسيم قيمة القرض إلى أجزاء متساوية وتوزيعها على الدورات لتدفع مع الفوائد المستحقة عليها على شكل أقساط دورية متزايدة:

وتعتمد هذه الطريقة على تقسيم القرض إلى m جزءاً متساوياً من خلال العلاقة

$$K = \frac{L}{m} = \qquad (38-2)$$

وتدفع هذه الأجزاء مع الفوائد المستحقة عليها في مواعيد دورية محددة، وتحسب الفوائد المستحقة على كل جزء بمفرده حسب مدة استحقاقه عند الدفع. وبذلك تصبح قيمة كل قسط من هذه الإقساط المتزايدة مساوية لحصيلة الجزء الثابت وتساوي ما يلي :

$$R_i = K + I_i = K.(1+n_i \cdot p) \qquad (39-2)$$

ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال السابق ونعالجه كمايلي:

مثال 9: لنفترض أن أحدهم اقترض من المصرف الزراعي مبلغ 100000 ل.س بفائدة بسيطة 9% سنوياً، واتفق معه على تقسيم القرض إلى 9 أجزاء متساوية كل منها يساوي:

$$k = \frac{100000}{9} = 11111{,}11\ L.S$$

وعلى أن يتم تسديد هذه الأجزاء مع الفوائد المستحقة عليها عند تسديدها على شكل 9 دفعات شهرية تسدد في آخر كل شهر، اعتباراً من نهاية شهر الاتفاق.

والمطلوب حساب قيم الدفعات الشهرية وإعداد جدول خاص لاستهلاك هذا القرض.

الحل: نلاحظ أن قيمة كل دفعة تساوي الجزء الأصلي + الفائدة المستحقة عليه عند تسديده . وبعد إجراء الحسابات المطلوبة نقوم بإعداد الجدول التالي:

رقم الدفعة	تاريخ الدفعة	قيمة الجزء الثابت	مدة استحقاق الجزء الثابت	الفائدة المستحقة على الجزء	قيمة الدفعة الشهرية	القيمة الحالية للدفعة الشهرية
1	نهاية الشهر الأول	11111,11	1	83,333	11194,444	11111,11
2	نهاية الشهر الثاني	11111,11	2	166,667	11277,778	11111,11
3	نهاية الشهر الثالث	11111,11	3	250	11361,11	11111,11
4	نهاية الشهر الرابع	11111,11	4	333,333	11444,444	11111,11
5	نهاية الشهر الخامس	11111,11	5	416,667	11527,778	11111,11

6	نهاية الشهر السادس	11111,11	6	500	11611,11	11111,11
7	نهاية الشهر السابع	11111,11	7	583,333	11694,444	11111,11
8	نهاية الشهر الثامن	11111,11	8	666,667	11777,778	11111,11
9	نهاية الشهر التاسع	11111,11	9	750	11861,11	11111,11
المجموع	-	100000	-	3750	103750	100000

2-6-6 : طريقة الأقساط المتناقصة : وتعتمد على تقسيم قيمة القرض إلى أجزاء متساوية وتوزيعها على الدورات لتدفع مع الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض، وتكون على شكل أقساط دورية متناقصة.

ونعتمد هذه الطريقة على أن يتم تقسيم مبلغ القرض إلى m جزءاً متساوياً من العلاقة:

$$K = \frac{L}{m} \qquad (40-2)$$

أما الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي فتحسب بالتسلسل من العلاقات المتتالية وتصبح قيمة القسط الدوري المتناقص مساوية لما يلي:

قيمة القسط الدوري = الجزء الثابت+ الفائدة المستحقة

$$R_i = K + \quad Ii \qquad (41-2)$$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال 10: اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س ولمدة 9 أشهر بفائدة بسيطة 8% سنوياً، على أن يتم تسديد جزء ثابت من أصل القرض ، ويدفع في نهاية كل شهر مع الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض.

والمطلوب:

1 ـ حساب قيمة الجزء الثابت من أصل القرض.

2 ـ حساب قيم الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي.

3 ـ حساب قيمة الدفعة الدورية (الجزء الثابت+ الفائدة المستحقة).

الحل: أولاً نلاحظ أن معطيات هذا المثال هي نفسها الواردة في المثال السابق لذلك سنقوم بمقارنة النتائج بين المثالين: وبما أنه لدينا :

$$m = 9 \ , \ P = \frac{8}{100} \ , \ n = \frac{9}{12}$$

$$l = \frac{1}{12} \ , \ L = 100000$$

فإن قيمة الجزء الشهري لأصل القرض:

$$K = \frac{L}{9} = \frac{100000}{9} = 11111{,}11\ L.s$$

وبعد حساب ا لفواءدعلى بواقي القرض يمكننا حساب الأقساط المتناقصة من العلاقة:

قيمة الأقساط الدورية = الجزء الثابت+ الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض وهي تساوي:

$$R_i = K + I_i \qquad (42-2)$$

وأخيراً نقوم بتنظيم جدول يوضح لنا هذه العمليات كمايلي:

الشهر	الرصيد المتبقي في بداية الشهر	الجزء الثابت من أصل القرض	الفائدة المستحقة على الرصيد	قيم الأقساط المتناقصة شهرياً	الرصيد المتبقي في نهاية الشهر
1	100000	11111,11	666,67	11777,78	88888,89
2	88888,89	11111,11	592.59	11703,37	77777,78
3	77777,78	11111,11	518.52	11629.63	66666,67
4	66666,67	11111,11	444.44	11555.55	55555,56
5	55555,56	11111,11	370.37	11481.48	44444,45
6	44444,45	11111,11	296.30	11407.41	33333,34
7	33333,34	11111,11	222,22	11333.33	22222,23
8	22222,23	11111,11	148.15	11259.26	11111,11
9	11111,11	11111,11	74.07	11185.18	0
	المجموع	100000	3332.98	103332.98	-

ومن هذا يتضح لنا أن إجمالي قيمة الفوائد التي يتحملها المقترض 3332.98 ل.س، وهو أصغر من إجمالي قيمة الفوائد التي تحملها في المثال السابق، والتي كانت تساوي 3750 ل.س. وإن هذا الفرق يعود إلى طريقة التعامل والحساب.

تمرينات

1 ـ اقترض أحدهم مبلغ 80000 ل.س. لمدة 10 أشهر، وبفائدة بسيطة قدرها 7% سنوياً. واتفق مع الدائن على تسديد القرض مع فوائده دفعة واحدة نهاية المدة. فما هو المبلغ الذي سيسدده المدين؟

2 ـ اشترى أحدهم عقاراً بمبلغ 1500000 ل.س، واتفق مع البائع على أن يسدد له نقداً وفوراً مبلغ 800000 ل.س، وأن يتم تسديد المبلغ المتبقي على شكل أقساط شهرية متساوية من أصل القرض والفوائد ولمدة عامين، وبفائدة بسيطة 8% سنوياً. والمطلوب حساب مقدار القسط الشهري.

الجزء الثالث

نظام الفائدة المركبة

إن نظام الفائدة هو أحد أنظمة إيداع الأموال والتعامل بها لمدد زمنية طويلة الأجل، ويعتمد هذا النظام على إضافة الفائدة المستحقة في مواعيد محددة إلى المبلغ الأصلي، لتحسب ضمن الرصيد، ولتأخذ فوائد جديدة.
ويهدف هذا الفصل إلى معالجة القضايا التالية:

حصيلة إيداع المبالغ وفوائدها
ـ القيمة الحالية والخصم
ـ تسوية الديون طويلة الأجل
ـ حصيلة الدفعات الدورية المتساوية
ـ القيمة الحالية للدفعات الدورية
ـ القروض طويلة الأجل طريقة تسديدها
. الاستهلاك المنتظم
. الاهتلاك
. التكلفة الرأسمالية

1-3 : حساب حصيلة إيداع المبالغ وفوائدها

1-1-3 - تعاريف عامة:

نظام الفائدة المركبة:

لقد أشرنا سابقاً إلى أن نظام الفائدة المركبة يقتضي أن تضاف الفائدة المستحقة على المبلغ المودع إلى المبلغ الأصلي (أي تعلى عليه) في نهاية كل عام (أو في مواعيد محددة في نهاية كل عام، أو في منتصف كل عام أو في نهاية كل فصل) وتحسب ضمن الرصيد المودع لتأخذ معه فائدة جديدة. ويطبق هذا النظام في معظم المصارف وعلى جميع العمليات المالية والإيداعات التي تزيد مدتها عن الفترة المحددة لإضافة الفائدة المركبة.

. **المبلغ المودع:** وهو المبلغ الذي يتم إيداعه في بداية المدة، وسنرمز له بالرمز K.

. **سعر الفائدة السنوية:** وهو عبارة عن نسبة مئوية محددة تحدد مسبقاً لحساب الفائدة السنوية عن المبلغ المودع مقابل إيداعه لمدة عام كامل، وسنرمز له بالرمز P.

. **مدة الإيداع:** وهي الفترة الزمنية التي يبقى خلالها المبلغ K مودعاً في المصرف، وهي تحسب بالسنوات، ونرمز لها بالرمز n.

. **الرصيد الجاري:** هو الرصيد السابق + الفوائد المستحقة عليه.

. **حصيلة إيداع المبلغ:** وهي الرصيد الأخير الناتج عن إضافة الفوائد المتتالية إلى المبلغ المودع مع الفوائد المستحقة عليها، وسنرمز لها بالرمز Kn.

. **فترة العلاوة:** وهي الفترة المحددة التي تحسب في نهايتها الفائدة المستحقة على المبلغ المودع، وتضاف إلى الرصيد السابق، وقد تكون فترة العلاوة سنة كاملة، أو نصف سنة، أو ربع سنة. وإذا قسمنا السنة k إلى طول فترة العلاوة، نحصل على عدد المرات التي تضاف إليها الفائدة خلال العام، فمثلاً، إذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة، فإن عدد المرات التي تضاف فيها الفائدة خلال العام تساوي مرتين سنوياً .

2-1-3- حصيلة إيداع مبلغ واحد K:

إن حصيلة إيداع مبلغ K هي عبارة عن القيمة المالية التي يبلغها المبلغ المودع K بفائدة مركبة P بعد مرور n سنة على إيداعه.

ولإيجاد العلاقة التي تعطينا هذه الحصيلة، نقوم بحسابها سنةً فسنة. فنجد أن حصيلة المبلغ K بعد مرور سنة واحدة = المبلغ الأصلي + الفائدة المستحقة عليه.

وإذا رمزنا لحصيلة المبلغ K بعد مرور سنة واحدة على إيداعه بالرمز G_1 نجد أن:

$$G_1 = K + K \cdot P = K(1+P)$$

وبما أننا نعالج الموضوع ضمن نظام الفائدة المركبة، فإن الفائدة المستحقة خلال العام الثاني ستحسب على الرصيد الجديد G_1، ولنفترض أن حصيلة الرصيد G_1 ستصبح في نهاية السنة الثانية G_2، فإننا نجد أن:

$$G_2 = G_1 + G_1 \cdot P = G_1(1+P)$$

وبتعويض G_1 من العلاقة الأولى نحصل على حصيلة الإيداع في نهاية السنة الثانية G_2 كالتالي:

$$G_2 = K(1+p)\cdot(1+P) = K(1+P)^2$$

وخلال السنة الثالثة سنحسب الفائدة على الرصيد الجديد G_2 ، وإن الحصيلة في نهاية السنة الثالثة ستصبح G_3 وتساوي:

$$G_3 = G_2 + G_2 \cdot P = G_2(1+P) = K \cdot (1+P)^3$$

وفي نهاية السنة الرابعة نحصل على الحصيلة G_4 والتي تساوي:

$$G_4 = G_3 + G_3 \cdot P = G_3(1+P) = K \cdot (1+P)^4$$

.....

وفي نهاية السنة n نحصل على الحصيلة G_n والتي تساوي:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-1} \cdot P = G_{n-1} \cdot (1+P) = K \cdot (1+P)^n$$

وبذلك نجد أن حصيلة إيداع المبلغ K بفائدة مركبة P ولمدة n سنة تساوي G_n ، وتحسب من العلاقة التالية:

$$G_n = K \cdot (1+P)^n \qquad (1-3)$$

وتسهيلاً للعمليات الرياضية والحسابية سنرمز بـ r للعدد $(1+P)$؛ أي نضع دائماً $r = 1+P$. ونعوض ذلك في العلاقة (1-1) السابقة فنحصل على أن الحصيلة المطلوبة تساوي.

$$G_n = K \cdot r^n \qquad (2-3)$$

حيث ن: $r = 1+P$.

وهنا نلاحظ أن هذه العلاقة تتضمن أربعة متحولات هي: Gn ، K، n وr أو $(P+1)$. فإذا علمنا ثلاثاً منها، يمكننا حساب الرابع. ولكن إجراء مثل هذه الحسابات قد يكون أمراً صعباً أو مطولاً، لذلك يجب أن نستخدم الآلات الحاسبة التي تتضمن التوابع الرياضية الأساسية، أو نستخدم جداول خاصة معدة لذلك، وملحقة في آخر الكتاب لحساب قيمة r^n حسب قيم n.

وعند الضرورة، يمكن أن نقوم بتبسيط العمليات الحسابية، وذلك بتحويل العلاقة (2-3) السابقة إلى شكل لوغاريتمي، حيث نقوم بأخذ لوغاريتم الطرفين، فنجد أن:

$$\lg G_n = \lg K + n \lg r \qquad (3-3)$$

وبعد حساب $\lg G_n$ نعود ونحسب G_m باستخدام عكس اللوغاريتم $\text{int}\lg$، وسنوضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

مثال 1: ما هي حصيلة إيداع مبلغ 100000 ل.س. بفائدة مركبة 8% سنوياً ولمدة 10 سنوات؟

الحل: لدينا $K=100000$ ، $P=0,08$ ، $n=10$، $G_{10} = ?$

وبتطبيق العلاقة (1-3) أو (2-3) نجد أن:

$$G_n = kr^n$$
$$G_{10} = 100000(1+0,08)^{10} = 100000(2,158925)$$
$$G_{10} = 215892,5 \ \ L.S$$

مثال 2: يريد أحدهم أن يوفر مبلغ 215892.5 بعد 10 سنوات من الآن، فما هو المبلغ الذي يجب أن يودعه الآن إذا علمت أن سعر الفائدة 8% سنوياً ؟

الحل: لدينا : $K=?$ ، $P=0,08$ ، $n=10$ ، $G_n = 215892,5$

وبالتعويض في العلاقة (1-3) أو (2-3) نجد أن:

$$G_n = K \cdot r^n$$
$$215892,5 = K(1+0,08)^{10}$$
$$215892,5 = 2,158925K$$
$$K = 100000 \ \ L.S.$$

مثال 3: ما هي المدة اللازمة لإيداع مبلغ 100000 ل.س. بفائدة مركبة 8% سنوياً لنحصل على مبلغ 215892.5 ل.س؟

الحل: لدينا $K=100000$ ، $P=0,08$ ، $n=?$ ، $G_n = 215892,5$

وبالتعويض في العلاقة (1-3) أو (2-3) نجد أن:

$$G_n = kr^n$$
$$215892,5 = 100000(1+0,08)^n$$

ولحساب عدد السنوات n، نلاحظ أنه يقع في الأس، وأن حسابه يعتبر صعباً دون استخدام اللوغاريتمات، لذلك نأخذ لوغاريتم الطرفين، فنجد أن:

$$\lg(215892,5) = \lg(100000) + n \cdot \lg(1+0,08)$$
$$5,3342376 = 5 + n(0,033423755)$$
$$0,3342376 = 0,033423755 \, .n$$
$$n = \frac{0,3342376}{0,033423755} = 10$$

مثال 4: أودع أحدهم مبلغ 100000 ل.س. في المصرف، وبعد عشر سنوات وجد أن حصيلتها مبلغ 215892.5 ل.س، فما هو سعر الفائدة المركبة المستخدم في ذلك المصرف؟

الحل: لدينا $K=100000$ ، $n=10$ ، $G_n = 215892,5$ ، $P=?$.

وبالتعويض في العلاقة (2-3) نجد أن:

$$G_n = kr^n$$
$$215892,5 = 100000 \cdot r^{10}$$

ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على العلاقة (3-3) الآتية:

$$\lg(215892,5) = \lg(100000) + 10\lg r$$
$$5,3342376 = 5 + 10\lg r$$
$$0,3342376 = 10\lg r$$
$$\lg r = 0,03342376$$
$$r = Int\lg(0,03342376) = 1,08$$
$$1 + P = 1,08 \Rightarrow P = 0,08 = 8\%$$

ملاحظة: يمكن حل المثال السابق من العلاقة (2-3) بواسطة استخدام الجذر العاشر، فنجد أن:

$$G_n = Kr^n$$
$$215892,5 = 100000r^{10}$$
$$r^{10} = \frac{215892,5}{100000} = 2,158925$$

وبأخذ الجذر العاشر للطرفين نجد أن

$$r = \sqrt[10]{215892,5} = 1,08$$
$$1 + p = 1,08$$

أي أن :

p= 0.08

3

3-1-3: حساب الفائدة المستحقة على المبلغ المودع K:

إن مقدار الفائدة المستحقة على المبلغ المودع K يساوي مقدار الزيادة التي حققتها عملية الإيداع؛ أي إنه يساوي مقدار الفرق بين الحصيلة G_n والمبلغ الأصلي K.

فإذا رمزنا لمقدار الفائدة المستحقة خلال n عاماً بالرمز I_n فنجد أن:

$$I_n = G_n - K \qquad (4-3)$$

ويمكن تعويض G_n من العلاقة (2-3)، فنحصل على العلاقة:

$$I_n = Kr^n - K = K(r^n - 1) \qquad (5-3)$$

وهي علاقة تتضمن أربعة متحولات إذا علمنا ثلاثاً منها أمكننا حساب الرابع.

ملاحظة: إن طريقة حساب الفائدة المركبة تختلف عن طريقة حساب الفائدة البسيطة المعرفة في العلاقة (2-1) ، وذلك بسبب النظام المتبع في التعامل مع كل منهما .

مثال 5: أوجد الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 100000 ل.س لمدة 10 سنوات ، وبفائدة مركبة 8% سنوياً.

الحل: يمكننا حساب هذه الفائدة مباشرة من العلاقة (3-5) كمايلي:

$$I_n = 100000\left[(1{,}08)^{10} - 1\right] = 100000\left[2{,}158925 - 1\right]$$
$$I_n = 100000\left[1{,}158925\right] = 115892{,}5 \ L.S$$

كما كان يمكننا حسابها من العلاقة (3-4) حيث نجد اعتماداً على المثال (1) أن:
$$I_n = G_n - K = 215892{,}5 - 100000 = 115892{,}5 \ L.S$$

مثال 6: أعلن أحد المصارف عن بيع شهادات استثمار قيمة الواحدة منها 5000 ل.س، ويتعهد بدفع فائدة عليها بعد خمس سنوات قدرها 2500 ل.س. فماهو سعر الفائدة المركبة التي يتعامل المصرف في هذه الحالة.

الحل: لدينا: $I_n = 2500$ ، $n = 5$ ، $K=5000$

ولكن المتحول r مجهول. لذلك نطبق العلاقة (3-5) فنجد أن:

$$I_n = K(r^n - 1)$$
$$2500 = 5000(r^5 - 1)$$
$$\frac{2500}{5000} = (r^5 - 1)$$
$$0{,}5 = (r^5 - 1)$$
$$r^5 = 1{,}5$$
$$r = \sqrt[5]{1{,}5} = 1{,}0845$$
$$1 + P = 1{,}0845$$
$$P = 0{,}0845 = 8{,}45\%$$

تمرين: حاول أن تقوم بحساب P من العلاقة (3-4)؟

مثال 7: ما هي المدة اللازمة لإيداع مبلغ 5000 ل.س بفائدة مركبة 8% سنوياً، ليصبح 7000 ل.س؟

الحل: لدينا: $K = 5000$, $P = 0{,}08$, $G_n = 7000$, $n = ?$

يمكننا إيجاد n من إحدى العلاقتين (3-4) و (3-5) ، لنأخذ العلاقة (3-4) فنجد أن:

$$I_n = G_n - K = 7000 - 5000 = 2000$$
$$I_n = K(r^n - 1)$$
$$2000 = 5000\left[(1{,}08)^n - 1\right]$$
$$\frac{2000}{5000} = (1{,}08)^n - 1$$
$$1{,}4 = (1{,}08)^n$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$\lg(1,4) = n \cdot \lg(1,08)$$
$$0,146128 = n \cdot (0,0334238)$$
$$n = \frac{0,146128}{0,0334238} = 4,37 \text{ سنة}$$

ولحساب كسر السنة بالأيام نقوم بضرب الكسر العشري 0.37 بالعدد 365 فنجد أن
عدد الأيام = $0,37 \cdot 365 = 136$ يوماً
وبذلك نجد أن المدة اللازمة تساوي أربع سنوات و136 يوماً.

مثال 8: ما هو المبلغ اللازم إيداعه لمدة 5 سنوات، وبفائدة مركبة 7% سنوياً، ليصبح 100000 ل.س.

الحل : يمكن حساب هذا المبلغ من العلاقة (2-3) ، ولكننا هنا سنقوم بحسابه بواسطة العلاقتين (4-3) و (5-3) فنجد أن:

$$I_n = G_n - K = K(r^n - 1)$$
$$100000 - K = K\left[(1,07)^5 - 1\right]$$
$$100000 - K = K(0,40255)$$
$$100000 = K(0,40255) + K = 1,40255.K$$
$$K = \frac{100000}{1,40255} = 71298,62 \quad L.S$$

ملاحظة 1: إذا كانت الفائدة تحسب وتضاف m مرة في العام فإن حصيلة إيداع مبلغ K بعد مرور n عاماً على إيداعه وحساب فوائده m مرة في العام تحسب من العلاقة الآتية:

$$G_n = K\left(1 + \frac{P}{m}\right)^{n \cdot m} \qquad (4a-3)$$

حيث P هو السعر السنوي للفائدة المركبة، وm عدد مرات حسابها في العام.

مثال 9: احسب حصيلة مبلغ 200000 ل.س ، أُودع لمدة 5 سنوات في مصرف يحسب الفائدة المركبة ويضيفها إلى الرصيد كل ثلاثة أشهر، وبسعر قدره 6% سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المحققة من ذلك الإيداع.

الحل: لدينا $K = 200000$, $m = 4$, $P = 0,06$, $n = 5$, $G_5 = ?$

وبتطبيق العلاقة (3- $4a$) مباشرة نجد أن:

$$G_5 = K\left(1 + \frac{P}{m}\right)^{n \cdot m}$$
$$G_5 = 200000\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{5 \cdot 4} = 200000(1,346855)$$
$$G_5 = 269371 \quad L.S$$

أما مقدار الفائدة المستحقة فيساوي:

$$I_5 = G_5 - K = 269371 - 200000$$

$$I_5 = 69371\ L.S$$

ملاحظة 2 : لقد لاحظنا أنه عندما تُحسب الفائدة وتضاف أكثر من مرة خلال العام فإن مقدار الفائدة يكون أكبر من مقدارها عندما تُحسب وتضاف مرة واحدة فقط خلال العام، لذلك يبرز لدينا سؤال هام هو: ما هو السعر الحقيقي السنوي للفائدة عندما تحسب وتضاف m مرة خلال العام؟

إن السعر الحقيقي للفائدة P_m يحسب من العلاقة التالية:

$$P_m = \left(1 + \frac{P}{m}\right)^m - 1 \qquad (4b-3)$$

مثال 10: أودع أحدهم 50000 ل.س لمدة 4 سنوات وبفاءدة مركبة 8% سنوياً , والمطلوب حساب السعر الحقيقي للفائدة عندما تضاف مرة واحدة ’ثم مرتين ، ثم أربع مرات في العام ، ثم قم بحساب حصيلة كل من المبالغ السابقة حسب السعر الحقيقي.

الحل: لدينا: $P = 0,08$ ، وبذلك نجد أن:

أ ـ إذا كانت الفائدة تضاف مرة واحدة خلال العام فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_1 = \left(1 + \frac{P}{1}\right)^1 - 1 = P = 0,08$$

أي إن السعر الحقيقي في هذه الحالة يساوي السعر الاسمي نفسه $= P = 0,08$

وإن حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$G_4 = K(1+P_1)^4 = 50000(1+0,08)^4 = 68024,45\ L.S$$

ب ـ إذا كانت الفائدة تضاف مرتين خلال العام $(m = 2)$ فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_2 = \left(1 + \frac{P}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^2 - 1 = 0,0816 = (8,16\%)$$

أي إن سعر الفائدة الحقيقي أصبح *8,16%* نتيجة إضافتها مرتين خلال العام.

ولحساب حصيلة ذلك المبلغ حسب السعر الحقيقي نجد أن:

$$G_4 = K(1+P_2)^4 = 50000(1+0,0816)^4 = 68428,45\ L.S$$

جـ ـ إذا كانت الفائدة تضاف أربع مرات خلال العام $(m = 4)$ فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_4 = \left(1 + \frac{P}{4}\right)^4 - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 = 0,0824 = (8,24\%)$$

وإن حصيلة ذلك المبلغ حسب ذلك السعر الحقيقي تساوي:

$$G_4 = K(1+P_4)^4 = 50000(1+0{,}0824)^4 = 68639{,}29 \ \ L.S$$

نتيجة: من خلال هذا المثال نستنتج أن السعر الحقيقي للفائدة يزداد كلما ازداد عدد مرات إضافة الفائدة خلال العام. أي كلما ازداد m.

5-1-3 : مقارنة الحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة:

إن حصيلة إيداع مبلغ K ولمدة n عاماً وبفائدة بسيطة P سنوياً تعطى بواسطة العلاقة (2-) الآتية:

$$Sn = K(1+nP)$$

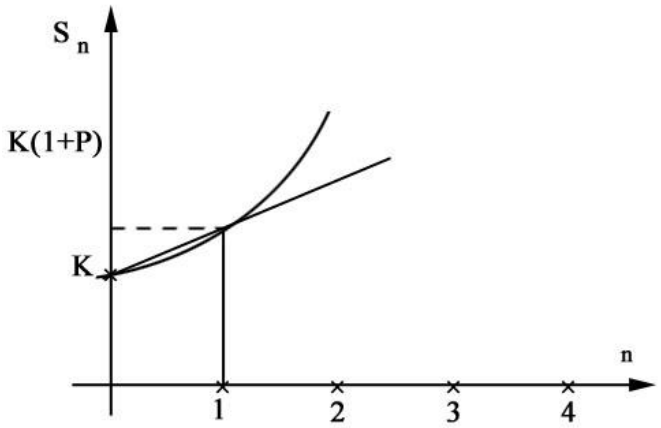
أما حصيلة إيداع المبلغ K نفسه بفائدة مركبة P ولمدة n سنة فتساوي Kn، وتحسب من العلاقة (3-1) التالية:

$$G_n = K \cdot (1+P)^n = \qquad (1-3)$$

ولمقارنة هاتين الحصيلتين وحسب تزايد المدة n، نلاحظ أن الحصيلة البسيطة Sn هي عبارة عن معادلة مستقيم بدلالة n لأنه يمكننا كتابتها كما يلي:

$$S_n = K + (K \cdot P) \cdot n$$

هي ترسم المستقيم المبين على الشكل (1-3) الآتي:



الشكل (1-3) :التمثيل البياني للحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة

أما الحصيلة المركبة G_n فهي عبارة عن معادلة أسية بدلالة n، لأنها تكتب على الصيغة التالية:

$$G_n = Kr^n \qquad (2-3)$$

وهي ترسم المنحني البياني المبين على الشكل (1-3) نفسه.

ومن المعادلتين S_n و G_n نلاحظ ما يلي:

عندما $n = 0$ فإن: $S_0 = G_0 = K$ والمنحنيان يمران من النقطة $(0, K)$

وعندما $n = 1$ فإن: $S_1 = G_1 = K(1+P)$ والمنحنيان يمران من النقطة $[1\,,\, K(1+P)]$

عندما $0 < n < 1$ فإن: $S \geq_n G_n$ ؛ أي إن الحصيلة البسيطة أكبر من الحصيلة المركبة.
عندما $n > 1$ فإن: $S_n \leq G_n$ ؛ أي أن الحصيلة المركبة أكبر من الحصيلة البسيطة.

ونستنتج مما سبق أن نظام الفائدة البسيطة أفضل للمودع من نظام الفائدة المركبة إذا كانت المدة n أصغر من سنة، ولذلك فهو يستخدم في الحسابات قصيرة الأجل (أقل من سنة).

أما إذا كانت $n > 1$ فإن نظام الفائدة المركبة يصبح أفضل للمودع من نظام الفائدة البسيطة، ولذلك فهو يستخدم في الحسابات طويلة الأجل (أكثر من سنة).

3-1-6- الحسابات الجارية حسب الفائدة المركبة:

إن تنظيم عمليات الحسابات الجارية في نظام الفائدة المركبة يدمج بين نظامي الفائدة البسيطة والمركبة، ويتم حساب الفوائد عند كل حركة للحساب، وكذلك عند كل موعد لحسابها وفق التالي:

- إذا كانت المدة بين حركتين متتاليتين للحساب أقل من الفترة المقررة لإضافة الفائدة، فإن مقدار الفائدة المستحقة يحسب وفق نظام الفائدة البسيطة، ولا يضاف إلى الرصيد إلا عند نهاية الفترة المقررة، أو عند إغلاق الحساب.
- إذا كانت المدة بين حركتين متتاليتين للحساب أكبر من الفترة المقررة لإضافة الفائدة، فإن مقدار الفائدة المستحقة يحسب وفق نظام الفائدة المركبة، ويضاف في نهاية الفترة الأخيرة، ويتم استكمال حساب مقدار الفائدة عن الأيام المتبقية حسب نظام الفائدة البسيطة، ولا تضاف إلى الرصيد إلا عند نهاية الفترة التالية، أو عند إغلاق الحساب.

ويمكن تمثيل عمليات حركة الحساب الجاري لنظام فائدة مركبة يضيف الفائدة مرتين خلال السنة،

مثال 11: أوجد حصيلة الحساب الجاري التالي في نهاية العام مع بيان حركات الإيداع والسحب والإضافة، علماً بأن الفائدة تضاف مرتين خلال العام، وأن سعرها 8% سنوياً (للحالتين البسيطة والمركبة).

التاريخ	العمليات			الحسابات			نوع المعالجة
	إيداع	سحب	إضافة فائدة	الرصيد المعتمد	مدة الإيداع بالأيام	الفائدة المستحقة	
2004/2/5	3000	-	-	3000	34	22.30	بسيطة
2004/3/10	5000	-	-	8000	15	26.23	بسيطة
2004/3/25	-	2000	-	6000	16	20.98	بسيطة
2004/4/10	-	3000	-	3000	21	13.77	بسيطة
2004/5/1	4000	-	-	7000	60	91.80	بسيطة
مجموع الفوائد 6/30	-	-	-	-	-	175.08	-
الحصيلة في 6/30	-	-	175.08	7175.08	15	23.52	مركبة
2004/7/15	5000	-	-	12175.08	72	191.61	بسيطة
2004/9/25	-	3000	-	9175.08	61	122.33	بسيطة
2004/11/25	6000	-	-	15175.08	15	49.75	بسيطة

2004/12/10	4000	-	-
الفائدة 12/31	-	-	-
الحصيلة 12/31	-	-	475.23

بسيطة	88.02	21	19175.08
	475.23	-	-
مركبة	-	-	19650.3

ولقد قمنا بإجراء الحسابات على الجدول السابق مباشرةً كما يلي:

1 ـ نلاحظ أن سنة 2004 هي سنة كبيسة وتتألف من 366 يوماً.

2 ـ حسبنا مدة إيداع المبلغ الأول 3000 من 2004/2/5 حتى 2004/3/10، فكانت 33+1=34 يوماً.لأن شباط هنا يتألف من29 يوماً .

3 ـ حسبنا الفائدة المستحقة عليه فوجدناها $I = K \cdot P \cdot n = 22,30$.

4 ـ حسبنا الرصيد في 3/10/ فأصبح 8000، ولم نضف إليه الفائدة السابقة لأن عملية الإيداع جرت خلال فترة الإضافة.

5 ـ حسبنا الأرصدة الباقية والفوائد المستحقة عليها كما سبق.

6 ـ في 6/30؛ أي في نهاية فترة الإضافة قمنا بحساب مجموع الفوائد المستحقة على جميع الأرصدة السابقة وكان يساوي 175.08 ل.س.

7 ـ أضفنا مجموع الفوائد إلى الرصيد الأخير فحصلنا على 7175.08 ل.س. وهي الحصيلة في 2004/6/30، أو الرصيد الأول لنصف السنة الثاني.

8 ـ تابعنا حساب النصف الثاني من السنة كالسابق، وحصلنا على مجموع الفوائد 475.23 ل.س.

9 ـ أضفنا مجموع الفوائد إلى الرصيد الأخير فحصلنا على الحصيلة في 2004/12/31 وتساوي 19650.31 ل.س.

10 ـ وهكذا يمكننا متابعة الحسابات بنفس الطريقة لعدة سنوات.

تمرينات

1 ـ أودع شخص مبلغ 7000 ل.س. بفائدة مركبة 6% سنوياً، فاحسب حصيلة هذا المبلغ بعد 5 سنوات، ومقدار الفائدة المستحقة.

2 ـ أودع أحدهم المبالغ التالية:

12000 ل.س لمدة 3 سنوات بفائدة 6% سنوياً

8000 ل.س لمدة 5 سنوات بفائدة 5% سنوياً

7000 ل.س لمدة 6 سنوات بفائدة 5% سنوياً

فاحسب حصيلة كل من هذه المبالغ، والفائدة المستحقة عليها. ثم احسب الحصيلة الكلية لها .

3 ـ احسب حصيلة مبلغ 4000 ل.س. تم إيداعه لمدة 3 سنوات وبفائدة مركبة 7% سنوياً في الحالات التالية:

أ ـ إذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة.

ب ـ إذا كانت الفائدة تضاف كل 3 أشهر.

جـ ـ إذا كانت الفائدة تضاف كل شهر.

ثم احسب الفائدة المستحقة عنها في نهاية المدة لكل الحالات السابقة، ثم أوجد السعر الحقيقي لسعر الفائدة لكل منها، ثم السعر الحقيقي المتوسط لها.

2-3: حساب القيمة الحالية والخصم :

3-2-1: مفاهيم عامة :

لا تختلف المفاهيم العامة المستخدمة في هذا الفصل كثيراً عن المفاهيم التي تعرضنا لها في الفصل السابق حول القيمة الحالية والخصم بفائدة بسيطة، وهي:

- **القيمةالاسمية**: هي القيمة التي تسجل على السندات والكمبيالات، وهي عبارة عن القيمة المستحقة الدفع للدائن في تاريخ الاستحقاق .
- **تاريخ الاستحقاق**: هو التاريخ المدون على السند أو الوثيقة المالية الذي يحدد اللحظة التي يلتزم المدين بحلولها بتسديد القيمة الاسمية المسجلة على السند .
- **تاريخ الخصم أو القطع**: هو التاريخ الذي يريد الدائن أو المدين تسوية الدين فيه، أو هو التاريخ الذي يريد الدائن فيه أن يبيع السند في السوق، وهو تاريخ يكون سابقاً لتاريخ الاستحقاق على السند .
- **مدة الاستحقاق**: وهي الفترة الزمنية المتبقية لتسديد السند وهي الفترة الممتدة من تاريخ التحرير أو الخصم أو القطع حتى تاريخ الاستحقاق، وتقاس بالسنوات .
- **القيمة الحالية للدين**: هي القيمة المكافئة حالياً للدين المؤجل، أو هي المبلغ الذي إذا أودع الآن (أو في لحظة التسوية) في المصرف وبفائدة مركبة P ولمدة الاستحقاق n ، لأصبحت حصيلته تساوي القيمة الاسمية المسجلة على السند .
- **مقدار الخصم**: وهو الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية أي أنه يساوي:

مقدار الخصم = القيمة الاسمية – القيمة الحالية

3-2-2: العلاقات الأساسية بين القيمتين الحالية والاسمية والخصم :

لنرمز للقيمة الاسمية للسند بالرمز S .

وللقيمة الحالية الصحيحة للسند بالرمز V .

وبناء على ذلك يمكننا حساب المؤشرات التالية:

- **حساب القيمة الحالية الصحيحة** :

إن القيمة الحالية الصحيحة V هي عبارة عن المبلغ الي إذا أودعناه الآن بفائدة مركبة P ولمدة الاستحقاق n، أصبحت قيمته أو حصيلته المركبة مساوية للقيمة الاسمية Sk، وانطلاقاً من هذا التعريف نجد أن V وS يرتبطان مع بعضها حسب العلاقتين (2-1) و(2-2) واللتين تأخذان الشكل :

$$S = V(1 + P)^n = V * r^n \qquad (3-6)$$

ومنها نجد أن القيمة الحالة الصحيحة V تساوي:

$$V = \frac{S}{(1 + P)^n} = \frac{S}{r^n} \qquad (3-7)$$

ولتسهيل العمليات الرياضية نرمز بـــ h للمقدار $\frac{1}{1+P}$ ، أي نستخدم بشكل دائم التحويل الآتي:

$$h = \frac{١}{١ + P} = \frac{١}{r} \qquad (٣ - ٨)$$

فنجد أن القيمة الحالية الصحيحة تأخذ الشكل المختزل التالي:

$$V = S * h^n \qquad (٣ - ٩)$$

- **حساب مقدار الخصم الصحيح (الحطيطة الداخلية):**

وهو الفرق بين القيمة الاسمية و القيمة الحالية الصحيحة، أي أنه يساوي :

مقدار الخصم الصحيح = القيمة الاسمية – القيمة الحالية الصحيحة

وإذا رمزنا لمقدار الخصم عن n عاماً بالرمز D_n فإنه يكون لدينا:

$$D_n = S - V \qquad (٣ - ١٠)$$

وبتعويض V من (3-9) نحصل على:

$$D_n = S - Sh^n = S(١ - h^n) \qquad (٣ - ١١)$$

كما يمكننا حساب مقدار الخصم بدلالة القيمة الحالية، وذلك بتعويض S من العلاقة (3-6) كما يلي:

$$D_n = S - V = Vr^n - V = V(r^n - ١) \qquad (٣ - ١٢)$$

- **حساب معدل الخصم الصحيح:**

بما أن الخصم يحسم من القيمة الاسمية، فإن معدل الخصم السنوي هو عبارة عن نتيجة قسمة مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة على القيمة الاسمية للسند S ، وبما أن مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة حسب العلاقة(3-11) يساوي:

$$D_١ = S(١ - h)$$

وإذا رمزنا لمعدل الخصم الصحيح السنوي بالرمز q فإننا نجد أن ذلك المعدل يساوي:

$$q = \frac{D_١}{S} = \frac{S(١ - h)}{S} = ١ - h \qquad (٣ - ١٣)$$

- ***علاقة معدل الخصم الصحيح q بسعر الفائدة P :***

من العلاقة (3-13) يمكننا أن نستنتج العلاقة التي تربط معدل الخصم q بمعدل الفائدة p، حيث نجد أن:

$$q = ١ - h = ١ - \frac{١}{١ + P} = \frac{١ + P - ١}{١ + P} = \frac{P}{١ + P}$$

أي أن:

$$q = \frac{P}{١ + P} \qquad (٣ - ١٤)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن $q < P$، لأنه ناتج عن قسمة P على العدد $1+P$ الذي يزيد عن الواحد .ومنها يمكن أن نستنتج بالمقابل أن : $P = \frac{q}{١ - q}$

- **حساب القيمة الحالية الصحيحة بدلالة معدل الخصم الصحيح q :**

لقد وجدنا في (3-13) أن $q = ١ - h$، وهذا يعطينا أن $h = ١ - q$

بتعويض ذلك في العلاقة (3-9) نحصل على أن :

$$V = S * (١ - q)^n \qquad (٣ - ١٥)$$

- **مقدار الخصم التجاري (الحطيطة الخارجية) :**

وجدنا أن مقدار الخصم الصحيح يحسب من إحدى العلاقتين (3-11) و (3-12) التاليتين:

$$D_n = S(1 - h^n) \qquad (16-3)$$

$$D_n = V(r^n - 1) \qquad (17-3)$$

وإذا وضعنا فيها $n=1$ فإننا نحصل على مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة فقط ويساوي:

$$D_1 = S(1 - h) = S * q \qquad (18-3)$$

$$D_1 = V * (r - 1) = V * P \qquad (19-3)$$

وهذا يعني أنه يمكننا حساب مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة بإحدى الطريقتين التاليتين:

- إما أن نقوم بضرب القيمة الاسمية S بمعدل الخصم الصحيح q، حيث إن q تحسب من معدل الفائدة P بالعلاقة $q = \frac{P}{1+P}$.
- وإما أن نقوم بضرب القيمة V بمعدل الفائدة P .

ولكن التجار في السوق لا يستخدمون أي من هاتين الطريقتين، بل يتشاطرون ويقومون بحساب الخصم لسنة واحدة من جراء ضرب القيمة الاسمية S بمعدل الفائدة السائد P (أو بمعدل أكبر منه) فيحصلون على ما يسمى بالخصم التجاري والذي سنرمز له بـــ Dt ، وهو عندما يحسب عن سنة واحدة يساوي:

$$Dt = S * P = S * (r - 1) \qquad (20-3)$$

أي أنهم يقومون بتحوير العلاقة ا (3-18) ويستبدلون معدل الخصم q بمعدل الفائدة P، وهذا يحقق لهم خصماً أكثر، وبالتالي ربحاً أكبر دون أن يدري البائع المدين بذلك، (وذلك لأن $P > q$، كما رأينا سابقاً)، أو أنهم يقومون بتحوير العلاقة (3-19) ويستبدلون القيمة الحالية V بالقيمة الاسمية S، فيحصلون على الخصم السابق نفسه .

- **القيمة الحالية التجارية:**

عندما يريدون حساب القيمة الحالية التجارية يقومون أيضاً بتحوير العلاقة (3-15) باستبدال معدل الخصم q بسعر الفائدة P وتحسبون القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$V_t = S(1 - P)^n \qquad (21-3)$$

وهكذا يقومون بحساب الخصم التجاري من العلاقة:

$$Dt = S - V_t \qquad (22-3)$$

مثال 1: يريد أحد الأشخاص بيع سند لديه قيمته الاسمية 20000 ليرة سورية، يستحق الدفع بعد ثلاث سنوات من الآن ، وإذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً ، فأوجد ما يلي:

- القيمة الحالية الصحيحة لهذا السند .
- مقدار الخصم الصحيح ومعدله .
- مقدار الخصم التجاري ومعدله .
- القيمة الحالية التجارية .

الحل : لدينا $S = 20000, \quad n = 3, \quad P = 0.07, \quad V = ?$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الصحيحة تساوي:

$$V = S * h^n = ٢٠٠٠٠ \left(\frac{١}{١ + ٠.٠٧}\right)^٣ = ١٦٣٢٥.٩٦ \quad L.S$$

أما مقدار الخصم الصحيح لمدة 3 سنوات فيساوي:

$$D = S - V = ٢٠٠٠٠ - ١٦٣٢٥.٩٦ = ٣٦٧٤.٠٤ \quad L.S$$

أما معدل الخصم الصحيح فيساوي:

$$q = ١ - h = ١ - \frac{١}{١.٠٧} = ٠.٠٦٥٤ = (٦.٥٤)\%$$

ولحساب القيمة الحالية التجارية نستخدم العلاقة (21-3) التالية:

$$V_t = S(١ - P)^n$$

$$= ٢٠٠٠٠(١ - ٠.٠٧)^٣ =$$

$$V_t = ٢٠٠٠٠(٠.٨٠٤٣٥٧)$$

$$V_t = ١٦٠٨٧.١٤$$

أما مقدار الخصم التجاري فهو يساوي:

$$D_t = S - V_t = ٢٠٠٠٠ - ١٦٠٨٧.١٤ = ٣٩١٢.٨٦$$

وهنا نلاحظ أن القيمة الحالية الصحيحة V أكبر من القيمة الحالية التجارية V_t .

مثال 2: تقدم أحد الأشخاص إلى المصرف بطلب لقطع كمبيالة قيمتها 50000 ليرة سورية، وتستحق الدفع بعد أربع سنوات من الآن، فقطعها المصرف قطعاً صحيحاً بمبلغ44500 ل.س . فما هو مقدار الخصم الصحيح؟ وما هو معدله؟ وما هو سعر الفائدة المركبة المعتمدة في المصرف؟

الحل: لدينا $S = ٥٠٠٠٠, \quad n = ٣, \quad V = ٤٤٥٠٠, \quad n = ٤$

لحساب مقدار الخصم الصحيح نجد أنه يساوي:

$$D = S - V = ٥٠٠٠٠ + ٤٤٥٠٠ = ٥٥٠٠ \; L.S$$

أما معدل الخصم q فنحسبه من العلاقة العامة كما يلي:

$$V = S(١ - q)^n$$

$$٤٤٥٠٠ = ٥٠٠٠٠(١ - q)^٤$$

$$\frac{٤٤٥٠٠}{٥٠٠٠٠} = (١ - q)^٤$$

$$٠.٨٩ = (١ - q)^٤$$

$$١ - q = \sqrt[٤]{٠.٨٩} = ٠.٩٧١٣$$

$$q = ٠.٠٢٨٧ = (٢.٨٧٪)$$

ولحساب سعر الفائدة P المعتمدة في المصرف نطبق العلاقة $q = \frac{P}{١+P}$ أو العلاقة:

$$P = \frac{q}{١ - q} = \frac{٠.٠٢٨٧}{١ + ٠.٠٢٨٧} = ٠.٠٢٩٥٥ = (٢.٩٥٥٪)$$

3-3 : تسوية الديون طويلة الأجل (بفائدة مركبة):

3-3-1: أسس التسوية :

لقد عالجنا سابقاً كيفية تسوية الديون قصيرة الأجل اعتماداً على نظام الفائدة البسيطة، ولكن معالجة تسوية الديون طويلة الأجل تتم اعتماداً على نظام الفائدة المركبة، وحتى لا يتضرر أي طرف من أطراف عملية التعاقد (الدائن أو المدين) من عملية التسوية، لابد من اتباع أساس سليم لمعالجة مختلف الحالات، وبحيث نضمن حقوق الطرفين ، أي بحيث تتم إضافة الفوائد المستحقة عن كل دين يتم تأجيل تاريخ استحقاقه، ويتم إنقاص قيمة الدين الذي يسدد قبل موعده أو يتقدم تاريخ استحقاقه، بمقدار الخصم الصحيح المستحق عن ذلك التقديم .

والقاعدة العامة المتبعة في تسوية الديون قصيرة الأجل وطويلة الأجل والتي تحفظ حقوق الطرفين هي القاعدة التي تستند على القاعدة الذهبية التالية :

القاعدة الذهبية : لا يجوز جمع أو طرح المبالغ المالية إلا إذا كانت قيمها منسوبة إلى لحظة زمنية واحدة .

لذلك كان لابد من اختيار لحظة زمنية معينة وحساب قيم جميع الديون عند تلك اللحظة ، وإن أفضل لحظة هي لحظة التسوية ، ولهذا يتم تحديد تاريخ معين للتسوية (واعتباره لحظة الصفر)، وحساب القيم الحالية لتلك الديون منسوبة إلى ذلك التاريخ ، ثم تطبيق المعادلة التالية والتي تسمى معادلة التوازن التالية:

مجموع القيم الحالية للديون قبل التسوية = مجموع القيم الحالية للديون بعد التسوية

(في لحظة التسوية) $\sum V_1 = \sum V$ **(في لحظة التسوية)**

وبوضع القيم الحالية للديون قبل التسوية والقيم الحالية للديون بعد التسوية في هذه المعادلة، والمطابقة بين الطرفين، يمكننا حساب أي متحول مجهول في أحد الطرفين، وخاصة في الطرف الثاني .

ويتم حساب القيم الحالية لتلك الديون في الطرفين وفق إحدى الحالتين التاليتين:

- من حساب القيم الحالية الصحيحة حسب معدل الفائدة المركبة P من (3-7).
- من حساب القيم الحالية التجارية باستخدام معدل الخصم التجاري $q_t = P$.

وهنا نذكر بأهم العلاقات المستخدمة في حساب القيم الحالية الصحيحة والتجارية، وهي:

نحسب القيمة الحالية الصحيحة للطرفين من أحدى العلاقتين:

بدلال معدل الفائدة P:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = S * h^n \qquad (٢٣-٣)$$

بدلالة معدل الخصم الصحيح q:

$$V = S(1-q)^n \qquad (٢٤-٣)$$

أونحسب القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$V_t = S(1-P)^n \qquad (٢٥-٣)$$

3-3-2: حالات التسوية :

الحالة الأولى: حالة تسديد الدين قبل موعده :

وهنا يتم حساب القيمة الحالية لهذا الدين، ثم تسديد قيمته مباشرة:ونستخدم لذلك إحدى العلاقتين:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = S * h^n \quad , \quad V_t = S(1-P)^n$$

مثال 1: اكتشف ورثة التاجر أحمد أن والدهم يدين لجاره بسند قيمته الاسمية 100000 ل.س، ويستحق بعد 3 سنوات من الآن، فاحسب المبلغ الذي يجب أن يدفعه الورثة للدائن من أجل تبرئة ذمة والدهم، حتى يتقاسموا باقي المال الموروث (حسب القاعدة: بعد وصية أو دين) علماً بأن سعر الفائدة المركبة $P=0.05$.

الحل:

لدينا : $S = ١٠٠٠٠٠ \quad , \quad n = ٣ \quad , \quad P = ٠.٠٥ \quad , \quad V =?$

نلاحظ أن المبلغ الذي يجب أن يدفعه الورثة هو القيمة الحالية الصحيحة لذلك السند وتحسب من العلاقة:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = \frac{١٠٠٠٠٠}{(1+٠.٠٥)^٣} = ٨٦٣٨٣.٧٦ \ L.S$$

أما إذا اتفق الطرفان على حساب القيمة الحالية التجارية فنحسبها من العلاقة:

$$V_t = S[1-P]^n = ١٠٠٠٠ * [1-(٠.٠٥)]^٣ = ٨٥٧٣٣٥$$

وهي هنا لصالح الورثة .

مثال2: أراد أحمد أن يسدد (كمبيالة) عليه قيمتها 50000 ل.س وتستحق بعد 4 سنوات، فما هو المبلغ الذي سيدفعه للدائن إذا كان معدل الخصم الصحيح 7%، وما هو مقدار الخصم الصحيح المحقق؟ .

الحل:

لدينا : $S = ٥٠٠٠٠ \quad , \quad n = ٤ \quad , \quad q = ٠.٠٧$

وبذلك نجد أن المبلغ الذي سيدفعه للمدين يساوي القيمة الحالية الصحيحة لتلك (الكمبيالة) ، وحسب العلاقة (3-24) فهي تساوي:

$$V = S(1-q)^n$$

$$V = ٥٠٠٠٠(1-٠.٠٧)^٤ = ٣٧٥٠٢.٦٠ \ L.S$$

يكون المدين قد حقق خصماً صحيحاً قدره:

$$D = S - V = ٥٠٠٠٠ - ٣٧٤٠٢.٦٠ = ١٢٥٩٧.٤ \ L.S$$

الحالة الثانية: حالة استبدال دين واحد بآخر جديد :

لمعالجة هذه الحالة، نفترض أن قيمة الدين الجديد مجهولة، ونرمز لها بـــ X، ونفترض أن مدة استحقاقه m معلومة، (أو بالمقابل نفترض أن قيمة الدين الجديد معلومة، وأن مدة استحقاقه m مجهولة) . سنوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال 3: يدين أحدهم للمصرف بسند قيمته 200000 ل.س، ويستحق الدفع بعد 5 سنوات، ويريد استبداله بسند جديد يستحق بعد 7 سنوات. احسب القيمة الاسمية للسند الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً .

الحل: لدينا : $S = ٢٠٠٠٠٠ \quad , \quad n_١ = ٥ \quad , \quad P = ٠.٠٨ \quad , \quad m = ٧$

نفترض أن القيمة الاسمية المجهولة للدين الجديد هي X، فإن القاعدة العامة تعطينا المعادلة التالية: $V_1 = V$

وباستخدام العلاقة (3-23) للطرفين نحصل على أن:

$$\frac{٢٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{٥}} = \frac{X}{(١+٠.٠٨)^{٧}}$$

$$١٣٦١١٦.٦٤ = \frac{X}{(١+٠.٠٨)^{٧}} \Rightarrow$$

$$X = ١٣٦١١٦.٦٤(١+٠.٠٨)^{٧}$$

$$X = ٢٣٣٢٨٠ \quad L.S$$

مثال 4: لنفترض أن صاحب الدين السابق طلب من المصرف استبداله بسند آخر قيمته الجديدة 300000 ل.س فاحسب مدة استحقاق السند الجديد .

الحل: لنفترض أن مدة استحقاق الدين الجديد m سنة ثم نضع معادلة التوازن كما يلي:

$$V_1 = V$$

وبتطبيق (3-23) على الطرفين نجد أن:

$$\frac{٢٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{٥}} = \frac{٣٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{m}}$$

$$١٣٦١١٦.٦٤ = \frac{٣٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{m}} \Rightarrow$$

$$(١.٠٨)^{m} = \frac{٣٠٠٠٠٠}{١٣٦١١٦.٦٤} = ٢.٢٠٣٩٩$$

ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$m\log(١.٠٨) = \log(٢.٢٠٣٩٩)$$

$$m(٠.٠٣٣٤٢٤) = ٠.٣٤٣٢٠٩٦$$

$$m = \frac{٠.٣٤٣٢٠٩٦}{٠.٠٣٣٤٢٤} = ١٠.٢٦٨ \quad \text{سنة}$$

ولحساب كسر السنة بالأيام نضرب الكسر 0.268 بالعدد 365 فنحصل على:

$$٠.٢٦٨ \times ٣٦٥ = ٩٧.٩٥ \approx ٩٨ \quad \text{يوماً}$$

أي إن مدة استحقاق السند الجديد تساوي 10 سنوات و 98 يوماً من الآن .

الحالة الثالثة: تسوية عدة ديون بدين واحد :

لمعالجة هذه الحالة نطبق القاعدة نفسها، ونستعرضها من خلال الأمثلة التالية:

مثال 5: يريد حمودة تسوية الديون التي عليه للمصرف بدين واحد جديد، والديون هي:

40000 ل.س ويستحق بعد 3 سنوات .

50000 ل.س ويستحق بعد 6 سنوات .

70000 ل.س ويستحق بعد 8 سنوات .

فاحسب القيمة الاسمية للدين الجديد إذا علمت أنه تم الاتفاق مع المصرف على أن تكون مدة الدين الجديد 5 سنوات، وأن سعر الفائدة المركبة المعتمدة هو 6% سنوياً.

الحل: لدينا: $S_1 = ٤٠٠٠٠$, $S_2 = ٥٠٠٠٠$, $S_3 = ٧٠٠٠٠$, $P = ٠.٠٦$

$n_1 = ٣$, $n_2 = ٦$, $n_3 = ٨$, $m = ٥$

لتطبيق القاعدة العامة نفترض أن القيمة الاسمية للدين الجديد تساوي X، وبذلك نجد أن القاعدة العامة تأخذ الشكل التالي:

$$V_1 + V_2 + V_3 = V$$

وبتطبيق العلاقة (3-23) على الطرفين نجد أن :

$$\frac{٤٠٠٠٠}{(١ + ٠.٠٦)^{٣}} + \frac{٥٠٠٠٠}{(١ + ٠.٠٦)^{٦}} + \frac{٧٠٠٠٠}{(١ + ٠.٠٦)^{٨}} = \frac{X}{(١ + ٠.٠٦)^{٥}}$$

$$٣٣٥٨٤.٧٧ + ٣٥٢٤٨٠.٣ + ٤٣٩١٨.٨٧ = \frac{X}{١.٣٣٥٢٣}$$

$$١١٢٧٥١.٦٧ = \frac{X}{١.٣٣٥٢٣}$$

$$X = ١١٢٧٥١.٦٧(١.٣٣٥٢٣) = ١٥٠٨٨٧.٦٧ \ L.S$$

3-4: حساب حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة مركبة):

3-4-1: مقدمة :

سنعالج في هذه الفقرة كيفية حساب حصيلة عدة دفعات دورية متساوية في نهاية مدة الإيداع. ونقصد بالدفعات الدورية الدفعات التي تودع بانتظام خلال فترات زمنية دورية (كل سنة أو نصف سنة أو فصل أو شهر)، في أحد المصارف وحسب نظام الفائدة المركبة، وهي قد تكون متساوية، فعندها تسمى الدفعات الدورية المتساوية، وقد تكون غير متساوية، وعندها تسمى الدفعات الدورية غير المتساوية .

وستقتصر دراستنا في هذا الفصل على الدفعات الدورية المتساوية لكونها تخضع إلى قوانين رياضية محددة، ونترك الدفعات الدورية غير المتساوية لمعالجتها بشكل منفرد حسبما ورد في فقرة الحسابات الجارية (2=1=6) السابقة.

-- **أنواع الدفعات الدورية:** يمكن أن نصنف الدفعات الدورية إلى عدة أنواع هي:

- **الدفعات العادية:**

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي يتم دفعها باستمرار في نهاية كل دورة زمنية محددة للدفع(أي في نهاية كل شهر أو في كل فصل أو سنة)، اعتباراً من لحظة الاتفاق، وقد سميت دفعات عادية لأن الدفعة الأولى منها تدفع في نهاية الفترة الأولى التي تم الاتفاق عليها، أي بعد مرور فترة زمنية على الاتفاق، وتحسب حصيلة هذه الدفعات بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة .

- الدفعات الفورية:

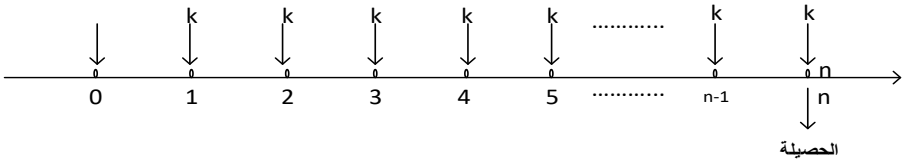
وهي الدفعات الدورية المتساوية التي يتم دفعها باستمرار في بداية كل دورة زمنية محددة للدفع (أي في بداية كل سنة أو فصل أو شهر)، اعتباراً من لحظة الاتفاق، وقد سميت دفعات فورية لأن الدفعة الأولى منها تدفع فوراً وفي بداية الفترة الأولى (أي في لحظة الاتفاق) ، وتحسب حصيلة هذه الدفعات بعد مرور دورة زمنية كاملة على إيداع الدفعة الأخيرة .

وقبل الدخول في الحسابات والاستنتاجات الرياضية، نرمز للمتحولات التي يمكن أن تدخل في حسابات هذه الدفعات بكل أنواعها بالرموز التالية :

1- قيمة الدفعة الدورية ونرمز لها كالعادة بـ k .
2- عدد الدفعات الدورية: ونرمز له بالرمز n ، وهو يساوي أيضاً مدة الإيداع إذا كان الإيداع سنوياً .
3- طول مدة الدورة: وهو يساوي وحدة زمنية يتفق عليها (سنة أو فصل أو شهر) ونرمز له بالرمز l .
4- المدة الكاملة للإيداع: وهي تساوي n فترة زمنية دورية، وتحسب بالسنوات .
5- سعر الفائدة المركبة: ونرمز له بالرمز P، وهو نسبة مئوية سنوية .
6- مدة التأجيل والسماح: ونرمز لها بالرمز t، وتحسب بالفترات الزمنية المعتمدة .
7- حصيلة الدفعات الدورية: ونرمز لها بالرمز Q_n لأنها مرتبطة بعدد الدفعات n.
8- الفائدة المستحقة للدفعات الدورية: ونرمز له بالرمز I_n لأنها مرتبطة بعدد الدفعات n أيضاً .

3-4-2: حساب حصيلة الدفعات العادية السنوية :

لحساب حصيلة هذه الدفعات ننطلق من تعريف الدفعات العادية التي تدفع في نهاية كل سنة، وتحسب حصيلتها بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة، ونقوم بتمثيل سير عمليات الدفع والحساب كما في الشكل الآتي:



الشكل (3-2) تمثيل الدفعات العادية

ومن الشكل نلاحظ أنه لحساب الحصيلة الكلية لهذه الدفعات يجب حساب حصيلة كل منها بشكل منفرد منسوبة إلى نهاية المدة ، وذلك اعتماداً على العلاقة المعروفة (3-2) الآتية : $G_n = k.r^n$ فنجد أن:

حصيلة الدفعة الأولى التي أودعت في نهاية العام الأول، واستمر إيداعها حتى نهاية العام n، أي التي بلغت مدة إيداعها $(n-1)$ عاماً تساوي : kr^{n-1} .

حصيلة الدفعة الثانية التي أودعت في نهاية العام الثاني، واستمر إيداعها حتى نهاية العام n، أي التي بلغت مدة إيداعها $(n-2)$ عاماً تساوي : kr^{n-2} .

حصيلة الدفعة الثالثة التي استمرت لمدة $(n-3)$ عاماً تساوي: kr^{n-3} .

حصيلة الدفعة الرابعة التي استمرت لمدة $(n-4)$ عاماً تساوي: kr^{n-4} .

.....
حصيلة الدفعة قبل الأخيرة التي استمر إيداعها عاماً واحداً تساوي: kr^{1} .
حصيلة الدفعة الأخيرة التي سحبت مباشرة بعد إيداعها تساوي نفسها: k .
وهكذا نجد أن الحصيلة الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع حصائلها، اي أن:

$$Q_n = kr^{n-1} + kr^{n-2} + \cdots \ldots \ldots kr + k$$

ولتسهيل عملية التحليل نكتب الطرف الثاني بترتيب معاكس، فنحصل على أن :

$$Q_n = k + kr + kr^{2} + \cdots \ldots kr^{n-2} + kr^{n-1}$$

لإيجاد صيغة مختصرة لهذه المعادلة، نلاحظ أن الطرف الثاني منها ما هو إلا عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية، حدها الأول K، وأساسها r، وعدد حدودها n حداً، وحسب العلاقة (1-) نجد أن ذلك المجموع يساوي:

$$k * \frac{r^n - 1}{r - 1} = k * A_n \qquad (٢٦ - ٣)$$

حيث رمزنا بـــ A_n للكسر $\frac{r^n-1}{r-1}$ وتحسب قيمته مباشرة أوتؤخذ من الجداول الملحقة .
وهذه العلاقة تعطينا حصيلة n دفعة عادية قيمة كل منها k ، وهي تتضمن أربعة متحولات إذا علمنا ثلاثة منها أمكننا حساب الرابع .
ولحساب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات نطبق العلاقة:

$$I_n = Q_n - n * k \qquad (٢٧ - ٣)$$

مثال *1*: قرر الوالدان أن يودعا في المصرف لصالح طفلهما الجديد، في نهاية كل عام مبلغ 1000 ل.س . فاحسب حصيلة تلك الدفعات عندما يصبح ذلك الطفل راشداً ويبلغ 18 عاماً، علماً بأن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً، ثم احسب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات .

الحل: لدينا $k = ١٠٠٠, \quad n = ١٨, \quad P = ٠.٠٨, \quad Q_n = ?$
وبما أن الدفعات السابقة هي دفعات سنوية متساوية وعادية لذلك نقوم بتطبيق العلاقة (26-3) فنحصل على أن حصيلتها تساوي :

$$Q_{١٨} = ١٠٠٠ \frac{(١.٠٨)^{١٨} - ١}{(١.٠٨) - ١} = ٣٧٤٥٠ \; L.S$$

ولحساب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات، نطبق العلاقة (27-3) فنجد أن:

$$I_n = Q_n - n * k = ٣٧٤٥٠ - ١٨ * ١٠٠٠ = ١٩٤٥٠ \quad L.S$$

مثال *2*: يريد أحدهم أن يوفر مبلغ 500000 ل.س لشراء سيارة خلال 4 سنوات فقط، وذلك عن طريق إيداع دفعات عادية سنوية . فاحسب قيمة الدفعة الدورية k، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً .

الحل: لدينا $k = ?, \quad P = ٠.٠٧, \quad n = ٤, \quad Q_n = ٥٠٠٠٠٠$
وبما أن الدفعات هي دفعات عادية وسنوية نطبق العلاقة السابقة، فنجد أن:

$$٥٠٠٠٠٠ = k\frac{(١.٠٧)^{٤}-١}{(١.٠٧)-١} = ٤.٤٣٩٩٤٣ * k$$

فنجد أن قيمة الدفعة السنوية تساوي:

$$k = \frac{٥٠٠٠٠٠}{٤.٤٣٩٩٤٣} = ١١٢٦١٤.٠٦\ L.S$$

ملاحظة: إن حصيلة الدفعات الجزئية العادية التي تدفع بواقع *m* مرة في العام تحسب من العلاقة:

$$Q_{n*m} = k * \frac{\left(r^{\frac{١}{m}}\right)^{n*m}-١}{\left(r^{\frac{١}{m}}\right)-١} = k * \frac{r^{n}-١}{\left(r^{\frac{١}{m}}\right)-١} \qquad (٢٨-٣)$$

وهي العلاقة التي تعطينا حصيلة الدفعات الجزئية التي عددها $n*m$ دفعة وتدفع خلال n عاماً.

مثال *3*: يقوم أحدهم بإيداع مبلغ 1000 ل.س في آخر كل شهر، فاحسب حصيلة هذه الدفعات في نهاية السنة الثالثة، علماً بأن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً.

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات عادية وشهرية ، لأنها تدفع في نهاية كل شهر، وأن عددها في السنة $m=12$ دفعة، وأن عددها خلال ثلاث سنوات يساوي $n*m=36$ دفعة، ونجد أن حصيلة هذه الدفعات بفائدة مركبة 7% سنوياً تساوي:

$$Q_{nm} = Q_{٣٦} = ١٠٠٠\frac{r^{٣}-١}{r^{\frac{١}{١٢}}-١} = ١٠٠٠\frac{(١.٠٧)^{٣}-١}{(١.٠٧)^{\frac{١}{١٢}}-١}$$

$$Q_{٣٦} = ١٠٠٠\frac{١.٢٢٥٠٤٣-١}{١.٠٠٥٦٥٤-١} = ١٠٠٠\frac{٠.٢٢٥٠٤٣}{٠.٠٠٥٦٥٤١٤٥} =$$

$$Q_{٣٦} = ١٠٠٠(٣٩.٨٠١٤٢٠٠٢) = ٣٩٨٠١.٤٢\ L.S$$

مثال *4*: يريد أحدهم أن يوفر بعد 5 سنوات من الآن مبلغ 100000 ل.س من خلال إيداع دفعات شهرية تدفع في نهاية كل شهر بفائدة مركبة 8% سنوياً، فاحسب مقدار الدفعة الشهرية المطلوبة .

الحل: لدينا $Q =?,\quad P = ٠.٠٨,\quad Q_{٦٠} = ١٠٠٠٠٠,\quad k = ١٢,\quad n = ٥$

وبما أن هذه الدفعات عادية وجزئية نقوم بتطبيق العلاقة (3-28) فنجد أن:

$$١٠٠٠٠٠ = k * \frac{(١.٠٨)^{٥}-١}{(١.٠٨)^{\frac{١}{١٢}}-١}$$

$$١٠٠٠٠٠ = k\frac{١.٤٦٩٣٢٨-١}{١.٠٠٦٤٣٤-١} =$$

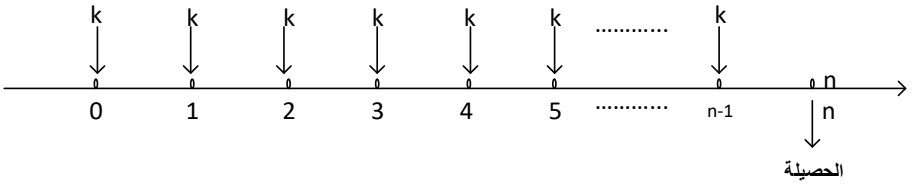
$$١٠٠٠٠٠ = k * (٧٢.٩٤٤٩٨)$$

ومنها نجد أن:

$$k = \frac{١٠٠٠٠٠}{٧٢.٩٤٤٩٨} = ١٣٧٠.٩٠\ \ L.S$$

3-4-3: حساب حصيلة الدفعات الفورية السنوية :

لحساب حصيلة الدفعات الفورية ننطلق من تعريف الدفعات الفورية التي تدفع في بداية كل عام، وتحسب حصيلتها بعد مرور عام على إيداع الدفعة الأخيرة، ولتوضيح سير عمليات الدفع والحساب نقوم بتمثيل ذلك على الشكل البياني التالي:



الشكل (3-3) : التمثيل البياني للدفعات الفورية

ومن الشكل البياني نلاحظ أن لحظة حساب حصيلة هذه الدفعات هي نهاية السنة الأخيرة n، أي بعد مرور سنة على موعد تسديد الدفعة الأخيرة، وهذا يعني أنه لحساب الحصيلة الكلية لهذه الدفعات، يجب حساب حصيلة كلٍ منها بشكل منفرد منسوبة إلى تلك اللحظة n ، وذلك اعتماداً على العلاقة المعروفة: $G_n = k * r^n$

وبذلك نجد أن حصيلة الدفعة الأولى التي يستمر إيداعها n عاماً تساوي: $k * r^n$

وحصيلة الدفعة الثانية التي يستمر إيداعها n-1 عاماً تساوي : $k * r^{n-1}$

وحصيلة الدفعة الثانية التي يستمر إيداعها n-2 عاماً تساوي : $k * r^{n-2}$

.....

وحصيلة الدفعة قبل الأخيرة التي يستمر إيداعها 2 سنة تساوي : $k * r^2$

وحصيلة الدفعة الأخيرة التي يستمر إيداعها سنة واحدة تساوي : $k * r$

وهكذا نجد أن الحصيلة الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع حصائلها، أي إنها تساوي:

$$Q'_n = kr^n + kr^{n-1} + kr^{n-2} + \cdots + kr^2 + kr$$

ولتسهيل المعالجة نقوم بكتابة المجموع الأيمن بترتيب معاكس، فنحصل على أن:

$$Q'_n = kr + kr^2 + kr^3 + \cdots + kr^{n-1} + kr^n$$

وهنا نلاحظ أن المجموع في الطرف الأيمن ما هو إلا عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول (kr) وأساسها r، وعدد حدودها n حداً، لذلك فإن العلاقة السابقة تساوي:

$$Q'_n = kr * \frac{r^n - 1}{r} = k * r * An \qquad (٢٩ - ٣)$$

وهي علاقة تضم أربعة متحولات، إذا علمنا ثلاثة منها أمكننا حساب الرابع .

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (3-26) نجد أن:

$$Q'_n = r * Q_n \qquad (٣٠ - ٣)$$

ولحساب مقدار الفائدة المستحقة عن هذه الدفعات نطبق العلاقة البسيطة :

$$I'_n = Q'_n - n * k \qquad (٣١ - ٣)$$

مثال 5:

احسب حصيلة 10 دفعات كانت تدفع في بداية كل عام، إذا علمت أن مقدار كل منها 5000 ل.س. وبفائدة مركبة 8% سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات .

الحل: لدينا $n = ٥٠٠٠,\quad k = ٥٠٠٠,\quad P = ٠.٠٨,\quad 15Q_n = ?$

بما أن الدفعات تدفع في بداية كل عام فهي دفعات فورية لذلك نطبق العلاقة (3-29)

$$Q'_n = kr * \frac{r^n - ١}{r - ١} = ٥٠٠٠ * (١.٠٨)\frac{(١.٠٨)^{١٠} - ١}{١.٠٨}$$

$$Q'_n = ٥٠٠٠(١.٠٨) * (١٤.٤٨٦٥٦) = ٧٨٢٢٧.٤٤\ L.S$$

أما مقدار الفائدة المستحقة فيساوي :

$$I'_n = Q'_n - n * k = ٧٨٢٢.٧ - ١٠ * ٥٠٠٠ = ٢٨٢٢٧.٤٤\ L.S$$

مثال 6:

قرر الزوجان أن يسجلا على شراء سيارة سعرها 500000 ل.س بواسطة إيداع دفعات متساوية في بداية كل عام، ولمدة 4 سنوات، فاحسب قيمة الدفعة السنوية إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً .

الحل: لدينا $k = ?,\quad P = ٠.٠٦,\quad n = ٤,\quad Q'_n = ٥٠٠٠٠٠$

بما أن الدفعات تدفع في بداية كل عام فهي دفعات فورية وسنوية لذلك نطبق العلاقة (3-29) فنجد أن:

$$Q'_n = kr * \frac{r^n - ١}{r - ١} =$$

$$٥٠٠٠٠٠ = k(١.٠٦)\frac{(١.٠٦)^{٤} - ١}{(١.٠٦) - ١} = Q(١.٠٦) * (٤.٣٧٤٦١٦)$$

$$٥٠٠٠٠٠ = k(٤.٦٣٧٠٩٢٩٦)$$

$$k = \frac{٥٠٠٠٠٠}{٤.٦٣٧٠٩٢٩٦} = ١٠٧٨٢٦.١٨\ L.S$$

ملاحظة: إذا كانت الدفعات جزئية وفورية وتدفع بواقع *m* دفعة في العام فإن حصيلتها تحسب من العلاقة :

$$Q_{n*m} = k.r^{\frac{١}{m}} * \frac{r^n - ١}{r^{\frac{١}{m}} - ١} \qquad (٣٢ - ٣)$$

مثال 7:

قرر أحدهم أن يودع مبلغ 1000 ل.س في بداية كل شهر ولمدة 3 سنوات فاحسب حصيلة هذه الدفعات إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً .

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات فورية جزئية (شهرية) وإن حصيلتها تحسب من العلاقة :

$$Q'_{n*m} = k * r^{\frac{١}{m}}.\frac{r^n - ١}{r^{\frac{١}{m}} - ١}$$

وبما أن لدينا $r = ١.٠٨,\quad m = ١٢,\quad n = ٣,\quad k = ١٠٠٠$

نعوض فنجد أن:

$$Q'_{n*m} = ١٠٠٠(١.٠٧)^{\frac{١}{١٢}} * \frac{(١.٠٧)^{٣} - ١}{(١.٠٧)^{\frac{١}{١٢}} - ١} =$$

$$Q'_{n*m} = ١٠٠٠(١.٠٠٥٦٥٤١٥)\frac{٠.٢٢٥٠٤٣}{٠.٠٠٥٦٥٤١٤٥} =$$

$$Q'_{n*m} = ٤٠٠٢٢.٤٦ \ L.S$$

تمرينات

1 ـ يودع شخص في صندوق التوفير مبلغ 10000 ل.س. في نهاية كل عام. أوجد رصيد ذلك الشخص في نهاية السنة الخامسة، واحسب مقدار الفائدة المستحقة له، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 8% سنوياً.

2ـ كان أحد الأشخاص يودع في آخر كل سنة مبلغ 5100 ل.س. وفي نهاية السنة الرابعة وجد أنه حصل على فوائد مركبة قدرها 3600 ل.س. والمطلوب:

ـ حساب حصيلة تلك الدفعات.

ـ حساب معدل الفائدة السنوي.

3ـ يودع أحدهم في أول كل عام مبلغ 2500 ل.س. ولمدة 5 أعوام. احسب حصيلة هذا الإيداع، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 6% سنوياً، واحسب مقدار الفائدة المستحقة له.

3- 5 : حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية (بفائدة مركبة)

سنقوم في هذا الفصل بحساب القيمة الحالية للدفعات العادية وللدفعات الفورية، ، وفق الترتيب التالي:

3-5-1 : حساب القيمة الحالية للدفعات العادية السنوية :

نقصد بمصطلح الدفعات العادية السنوية الدفعات التي تودع في نهاية كل عام. وإن حساب القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات ، يقتضي أن نقوم بحساب القيمة الحالية لكل منها ثم نأخذ مجموعها. ولتوضيح ذلك نرسم الشكل البياني التالي لتمثيل عملية حساب القيمة الحالية للدفعات العادية:

الشكل (3-4) تمثيل القيم الحالية للدفعات العادية

ولحساب القيم الحالية لكل من هذه الدفعات نعود إلى العلاقة العامة لها ، وهي العلاقة الآتية:

$$V_n = \frac{K}{(1+P)^n} = K \cdot h^n \qquad h = \frac{1}{P+1} \text{ حيث إن} \qquad (33-3)$$

وهكذا نجد أنه يمكننا أن نستخدم هذه العلاقة لحساب القيم الحالية لكل من الدفعات الدورية حسب مدة كل منها.

فالقيمة الحالية للدفعة الأولى التي أودعت في نهاية العام الأول تساوي : $V_1 = K \cdot h^1$

والقيمة الحالية للدفعة الثانية التي أودعت في نهاية العام الثاني تساوي : $V_2 = K \cdot h^2$

والقيمة الحالية للدفعة الثالثة التي أودعت في نهاية العام الثالث تساوي : $V_3 = K \cdot h^3$

.....

والقيمة الحالية للدفعة ما قبل الأخيرة التي أودعت في نهاية العام $(n-1)$:

$V_{n-1} = K \cdot h^{n-1}$.

والقيمة الحالية للدفعة الأخيرة التي أودعت في نهاية العام n تساوي : $V_n = K \cdot h^n$.

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع قيمها الحالية ، أي إن:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ...V_{n-1} + V_n \qquad (34-3)$$

أي إن:

$$V_n = K \cdot h + K \cdot h^2 + K \cdot h^3 + ...K \cdot h^{n-1} + k \cdot h^n$$

وبملاحظة أن المجموع في الطرف الثاني ما هو إلا مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $K \cdot h$ ، وأساسها h وعدد حدودها n حداً. فإن مجموع حدودها يساوي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{h^n - 1}{h - 1} \qquad (35-3)$$

وبما أن $h < 1$ (لأن $h = \frac{1}{P+1} < 1$.) فإنه يفضل كتابة العلاقة السابقة على الشكل التالي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{1 - h^n}{1 - h} \qquad (36-3)$$

وبما أن $(1-h)$ يساوي:

$$1 - h = 1 - \frac{1}{P+1} = \frac{P+1-1}{P+1} = P \cdot h$$

لذلك نكتب العلاقة (3-36) على الشكل التالي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{1 - h^n}{P \cdot h} =$$

$$V_n = K \cdot \frac{1 - h^n}{P} = \qquad (37-3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا القيمة الحالية الكلية لـ n دفعة عادية سنوية مقدار كل منها K بفائدة مركبة P سنوياً.

مثال 1: يبيع أحد التجار السيارات نقداً بمبلغ 450000 ل.س، أو بالتقسيط، بشرط أن يتم دفع مبلغ 300000 ل.س نقداً وفوراً، ويتم دفع أقساط سنوية قدرها 40000 في نهاية كل عام ولمدة خمسة أعوام.

والمطلوب: حساب الثمن الحقيقي (القايم) للسيارة عند بيعها بالتقسيط إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

ثم قارن ذلك الثمن مع الثمن النقدي المعروض. واستنتج ما تراه مناسباً.

الحل: إن الثمن الحقيقي للسيارة = الدفعة النقدية + القيمة الحالية للأقساط.

ولحساب القيمة الحالية للأقساط نلاحظ أولاً أنها عبارة عن دفعات سنوية عادية . لذلك نطبق العلاقة (37-3) مباشرة فنجد أنه:

لدينا : $K = 40000$, $P = 0{,}08$, $n = 5$ ولدينا أيضاً:

$$h = \frac{1}{1+p} = \frac{1}{1+0{,}08} = 0{,}9259259$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة (37-3) نجد أن:

$$V_5 = 40000 \cdot \frac{1-(0{,}9259259)^5}{0{,}08}$$

$$V_5 = 40000(3{,}99271) = 159708{,}40 \quad L.S$$

وبذلك نجد أن الثمن الحقيقي للسيارة:

$$300000 + 159708{,}40 = 459708{,}40 \quad L.S$$

وبمقارنة هذا الثمن مع الثمن النقدي نجد أنه يزيد عنه بمقدار:

$$459708{,}40 - 450000 = 9708{,}40 \quad L.S$$

وهذا يعني إن التاجر قد استفاد من عملية التقسيط، وحصل على مبلغ إضافي قدره *9708,40* ل.س وهو مقدار النصب بسبب التقسيط غير العادل ، لذلك نطلب من الطلاب حساب قيمة القسط العادل.

مثال 2: يريد أحدهم أن يشتري شقة ثمنها الحالي 1500000 ل.س واتفق مع صاحب الشقة على تسديد مبلغ نقدي فوراً قدره 500000 ل.س، وأن يتم تقسيط المبلغ المتبقي على 10 دفعات سنوية تدفع كل منها في نهاية العام. فاحسب قيمة القسط السنوي إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً.

الحل: لدينا الثمن الحالي = 1500000 ل.س ، والدفعة النقدية= 500000 ل.س، والمبلغ المتبقي = 1000000 ل.س

ولحساب قيمة القسط السنوي نلاحظ أن الأقساط عبارة عن دفعات سنوية وعادية لمدة 10 سنوات، وبفائدة مركبة 6% سنوياً، وحتى تغطي هذه الدفعات المبلغ المتبقي من ثمن الشقة ، يجب أن تكون قيمتها الحالية مساوية للمبلغ المتبقي 1000000 ل.س ،

لذلك نطبق العلاقة (37-3) ونضع المبلغ المتبقي مكان القيمة الحالية ونترك القسط السنوي مجهولاً ، فنجد أن :

لدينا $V_n = 1000000$, $p = 0{,}06$, $n = 10$, $K = ?$. وأن :

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{0{,}06} = 0{,}943396$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة (37-3) نجد أن:

$$1000000 = K \cdot \frac{1-(0{,}943396)^{10}}{0{,}06} = K.(7{,}360100387)$$

وبذلك نجد أن:

$$K = \frac{1000000}{7{,}360100387} = 135867{,}55 \quad L.S$$

أي إن القسط السنوي العادل يجب أن يساوي *135867,55* ل.س حتى يمكنه من أن يغطي تماماً القيمة المتبقية من ثمن الشقة المذكورة مع الفواد المستحقة عليه .

ملاحظة : إن القيمة الحالية لجملة من الدفعات الجزءية العادية ، التي تدفع بواقع *m* دفعة في العام ولمدة *n* عاماً تحسب من العلاقة الآتية :

$$V_{n\cdot m} = K, h^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-h^n}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (38-3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا القيمة الحالية للدفعات العادية الجزئية بواقع m دفعة متساوية خلال العام.

مثال 5: اشترى أحدهم جهاز حاسوب بالتقسيط على أن يدفع ثمنه على شكل أقساط تدفع في نهاية كل شهر، وقيمة كل منها تساوي 2000 ل.س ، ولمدة ثلاث سنوات فاحسب الثمن الحقيقي لذلك الجهاز. إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

الحل: لدينا $k = 12$, $P = 0{,}08$, $n = 3$, $K = 2000$, $V = ?$.

لحساب الثمن الحقيقي لذلك الجهاز نطبق علاقة القيمة الحالية لتلك الدفعات العادية الجزئية التالية :

$$V_{n\cdot m} = K, h^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-h^n}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (38-3)$$

وبما أن $P = 0{,}08$ ، فإن :

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{1+0{,}08} = 0{,}9259259$$

وبالتعويض نحصل على أن:

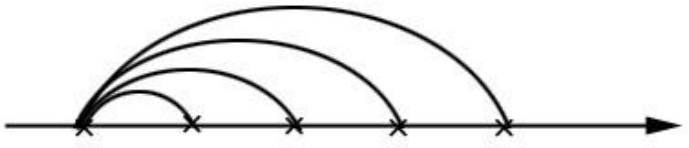
$$V_{n\cdot m} = 2000(0{,}9259259)^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1-(0{,}9259259)^{3}}{1-(0{,}9259259)^{\frac{1}{12}}}$$

$$V_{n\cdot m} = 2000(0{,}9259259) \cdot \frac{1-0{,}793832}{1-0{,}9936071}$$

$$V_{n\cdot m} = 64086{,}68 \quad L.S$$

3-5-2: القيمة الحالية للدفعات الفورية السنوية:

لحساب القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات الفورية نتبع نفس الأسلوب الذي اتبعناه في حساب القيمة الحالية للدفعات العادية، ولكننا هنا يجب أن نلاحظ أن الدفعة الأولى تدفع في بداية العام الأول، والثانية في بداية العام الثاني، والثالثة في بداية العام الثالث.... والأخيرة في بداية العام الأخير، وإن عمليات الدفع تمثل كما في الشكل البياني التالي:



الشكل البياني *(3-5)*

ومن الشكل نلاحظ أن القيمة الحالية للدفعة الأولى تساوي نفسها أي: $V'_1 = K$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الثانية التي مدتها عام واحد تساوي : $V'_2 = K.h^1$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الثالثة التي مدتها عامان تساوي: $V'_3 = K.h^2$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الرابعة التي مدتها ثلاثة أعوام تساوي: $V'_4 = K.h^3$.

.....

وأن القيمة الحالية للدفعة ماقبل الأخيرة تساوي : $V'_{n-1} = K.h^{n-2}$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الأخيرة التي تدفع في بداية العام الأخير تساوي :

$$V'_n = K.h^{n-1}$$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات الفورية السنوية V' تساوي:

$$V'_n = V'_1 + V'_2 + V'_3 + V'_4 + \ldots\ldots V'_{n-1} + V'_n$$

$$V'_n = K + K.h + K.h^2 + .K.h^3 + \ldots.K.h^{n-2} + K.h^{n-1}$$

وبما أن الطرف الثاني هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول K وأساسها h وعدد حدودها n حداً، فإننا نجد أن القيمة الحالية المطلوبة تساوي:

$$V'_n = K.\frac{1-h^n}{1-h} \qquad (39-3)$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة *(37-3)* نجد أن القيمة الحالية للدفعات الفورية V'_n ترتبط مع القيمة الحالية للدفعات العادية بالعلاقة:

$$V'_n = \frac{V_n}{h} \qquad (40-3)$$

ملاحظة : إذا كانت الدفعات جزءية وفورية وتدفع بواقع m دفعة في العام ولمدة n عاماً ، فإن قيمتها الحالية تحسب من العلاقة التالية :

$$V_{n\cdot m} = K,\cdot\frac{1-h^n}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (41-3)$$

مثال 13: يريد أحدهم شراء سيارة خاصة، فاتفق مع البائع على أن يسدد له قيمتها على خمسة أقساط سنوية تدفع في بداية كل عام، اعتباراً من تاريخ الشراء، قيمة كل منها *75000* ل.س. فاحسب الثمن الحقيقي (القايم) لهذه السيارة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً.

الحل: نلاحظ أن الدفعات هي دفعات فورية لأنها تدفع في بداية كل عام، وأن القيمة الحالية لهذه الدفعات هي نفسها ثمن شراء السيارة المذكورة، كما نلاحظ أن:

$Q = 75000, \quad n = 5$ وأن $P = 0,06$ وإن:

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{1,06} = 0,943396$$

وبتطبيق العلاقة (39-3) نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات الفورية تساوي:

$$V'_n = Q.\frac{1-h^5}{1-h} = 7500\,\frac{1-(0,943396)^5}{1-0,943396}$$

$$V'_n = 334882,77 \quad L.S$$

مثال 16: اشترى أحدهم حاسوباً واتفق مع البائع على أن يسدد له قيمته خلال سنتين على شكل دفعات دورية تدفع في بداية كل شهر، اعتباراً من تاريخ الشراء، وقيمة كل منها *2000* ل.س. فاحسب الثمن القائم لذلك الحاسوب إذا علمت أن سعر الفائدة 8% سنوياً.

الحل: نلاحظ أن الدفعات هي دفعات فورية جزئية بفائدة سنوية،وأن *n=2*، وأن عدد الدفعات $m = 12$ دفعة في السنة، و $K = 2000$ ، و $P = 0,08$ ، وبذلك نجد أن:

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{1,08} = 0,9259259$$

وبتطبيق العلاقة (41-3) نجد أن:

$$V_{2/12} = K.\frac{1-h^m}{1-h^{\frac{1}{m}}} = 2000\frac{1-(0{,}9259259)^2}{1-(0{,}9259259)^{\frac{1}{12}}}$$

$$V_{2/12} == 2000\frac{0{,}14266123}{0{,}0063929003} = 44631{,}14 \quad L.S$$

6-3 : حسابات القروض طويلة الأجل وطرق تسديدها

إن القروض طويلة الأجل هي القروض التي تكون مدتها أكثر من سنتين، وإن عملية تسديد هذه القروض تعتمد على دفع أقساط دورية سنوية أو فصلية أو شهرية، وتنطلق من أحد المبدأين المعادلين التاليين:

المبدأ الأول: حصيلة الأقساط حتى نهاية المدة = حصيلة القرض عند انتهاء المدة. وهذا يجعل التعادل في نهاية المدة.

المبدأ الثاني: القيمة الحالية للأقساط عند الإقراض= القيمة الأصلية للقرض ' وهذا يجعل التعادل في بداية المدة.

ولهذا فإنه يتوجب على المصرف أن يقوم بتحديد وحساب قيمة كل قسط من الأقساط الدورية حسب أحد هذين المبدأين، علماً بأن هذه الأقساط يمكن أن تكون متساوية أو غير متساوية، كما عليه أن يقوم بتنظيم عملية دفعها وتحديد مواقيت تسديدها حتى يتم تسديد قيمة القرض كاملة مع جميع الفوائد المستحقة في نهاية الفترة المحددة. (*)

3-6-1: إيجاد العلاقة العامة (للأقساط المتساوية):

لنفترض أن حجم القرض المقدم من المصرف هو L ، وأن مدة القرض هي n سنة، وأن سعر الفائدة المركبة هو P سنوياً ، وأن معاملها $r = 1 + P$ ، وأن مقدار القسط السنوي المتساوي هو R، وأن القسط الأول يستحق الدفع بعد عام من تاريخ القرض، وهكذا تتوالى الأقساط حتى يتم تسديد القرض مع فوائده خلال n عاماً.

لإيجاد العلاقة الرياضية التي تربط بين S وR وn وr. نعتمد على المبدأ الثاني، وهنا نلاحظ أولاً أنه حتى يتم تسديد القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع القيم الحالية لجميع الأقساط السنوية مساوياً لقيمة القرض الأصلية L .

وهكذا فإننا نفترض أن القيمة الحالية للقسط الأول تساوي V_1 فيكون: $V_1 = \frac{R}{r}$

وأن القيمة الحالية للقسط الثاني تساوي : $V_2 = \frac{R}{r^2}$

وأن القيمة الحالية للقسط الثالث تساوي: $V_3 = \frac{R}{r^3}$

(*) يتشرط أن يكون مقدار القسط السنوي R أكبر من إجمالي الفائدة السنوية المترتبة على قيمة القرض والتي تساوي S.P . أي يجب أن يكون $R > S.P$.

.....

وبذلك تكون القيمة الحالية للقسط الأخير الذي يدفع بعد n سنة تساوي: $V_n = \frac{R}{r^n}$

وحتى يتم تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع هذه القيمة الحالية مساوياً لقيمة القرض، أي يجب أن يكون:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = L$$

$$R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + ... + \frac{1}{r^n}\right) = L$$

وبملاحظة أن ما داخل القوس هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{r}$ وأساسها $\frac{1}{r}$ أيضاً، وعدد حدودها n حداً، نجد أن:

$$L = R, \frac{1}{r} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R\frac{1}{r} \cdot \frac{r^{-n} - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$$

وهكذا نجد أن العلاقة المطلوبة هي:

$$L = R.\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (42-3)$$

ومنها يمكننا أن نحسب مقدار القسط السنوي المتساوي R فنجد أن:

$$R = L \cdot \frac{r - 1}{r - 1^{-n}} \qquad (43-3)$$

ويسمى المقدار $\frac{(r-1)}{1-r^{-n}}$ بمعامل التسديد وتحسب قيمته مباشرة، أو تعطى بواسطة جداول خاصة ملحقة في آخر الكتاب ، أما إجمالي المبلغ الذي قام المقترض بتسديده فيساوي:

$$K_n = n \cdot R = n \cdot L \cdot \frac{(r-1)}{1-r^{-n}} \qquad (44-3)$$

وإجمالي الفائدة المترتبة على القرض I_n يساوي:

$$I_n = K_n - L \qquad (45-3)$$

(2-15) العلاقة الخاصة للأقساط الجزئية المتساوية:

عندما يتم الاتفاق على تسديد القرض على شكل أقساط أو دفعات جزئية (فصلية وشهرية)، متساوية عددها m دفعة خلال كل عام ولمدة n عاماً، فإن العلاقة التي تعطينا مقدار القسط الجزئي R' هي:

$$R' = L \cdot \frac{(r^{1/m} - 1)}{1 - r^{-n}} \qquad (46-3)$$

وعندها فإن إجمالي المبلغ المترتب على المقترض يساوي:

$$K'_n = n \cdot m \cdot R' = n \cdot m \cdot L \cdot \frac{(r^{\frac{1}{m}} - 1)}{1 - r^{-n}} \qquad (47-3)$$

وإن إجمالي الفائدة المترتبة على المقترض يساوي:

$$P'_n = K'_n - L \qquad (48-3)$$

مثال 1:

اقترض أحدهم مبلغ 40000 ل.س، من المصرف لمدة 15 عاماً، فماهو مقدار القسط السنوي الذي يضمن تسديد القرض مع فوائده ؟، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً .وماهو إجمالي المبلغ الذي سيدفعه المقترض للمصرف؟ وماهو مقدار الفائدة المترتبة على القرض؟

إذا أراد المقترض أن يكون القسط شهرياً، فماهو مقدار القسط الشهري وإجمالي ماسيدفعه وإجمالي مقدار الفائدة؟

الحل: نحسب مقدار القسط السنوي من العلاقة *(43-3)* فنجد أن:

$$R = 40000 \frac{1{,}08 - 1}{1 - (1{,}08)^{-15}} = 4673{,}18 \ L.S$$

ونحسب إجمالي ما سيدفعه المقترض من *(44-3)* فنجد أن:

$$K_n = 15 \ . 4673{,}18 = 70097{,}70 \ L.S$$

وبذلك نجد أن إجمالي الفائدة المترتبة على القرض يساوي:

$$I_n = K_n - S = 70097{,}70 - 40000 = 30097{,}70 \ L.S$$

أما إذا أراد المقترض أن يسدد قرضه على شكل دفعات شهرية، فإننا نحسب مقدار القسط الشهري من العلاقة (46-3)، فنجد أن:

$$R' = 40000 \frac{\left[(1{,}08)^{\frac{1}{12}} - 1\right]}{1 - (1{,}08)^{-15}} = 375{,}84 \, L.S$$

شهرياً

وإن إجمالي ماسيدفعه المقترض في هذه الحالة للمصرف يساوي:

$$K_n = 15 \cdot 12 \cdot 375{,}84 = 67651{,}2 \ \ L.S$$

وإن إجمالي الفائدة المترتبة على القرض تساوي:

$$I_n = 67651{,}2 - 40000 = 27651{,}2 \ \ L.S$$

وهنا نلاحظ أن الأقساط الشهرية تكون لصالح المقترض لأنها ستقلل من تكاليف القرض.

3-6-2: الطرائق المختلفة لتسديد القروض:

هناك عدة طرائق لتسديد القروض نذكر منها ما يلي:

أ ـ الطريقة الأولى: طريقة الأقساط المتساوية لتغطية الفائدة وجزء من أصل القرض: وتعتمد هذه الطريقة على تسديد أقساط سنوية متساوية تدفع في نهاية كل عام ،أي إن هذه الطريقة تشترط أن تكون جميع هذه الأقساط متساوية، وتساوي مقدار القسط السنوي R المحسوب من العلاقة *(43-3)* الآتية:

$$R = L.\frac{r-1}{1-r^{-n}}$$

، وتشترط أيضاً أن يتضمن القسط الدوري على ما يلي:

1 ـ جزء مخصص لتغطية كامل الفائدة المستحقة على القرض أو على باقي القرض.

2 ـ جزء آخر مخصص لتسديد جزء من أصل القرض ويسمى بجزء الاستهلاك.

فإذا رمزنا لمقدار القرض بـ L ، ولمقدار القسط الدوري المتساوي بـ R، ولمقدار جزء الاستهلاك من القرض المتضمن في القسط ذي الرقم i بالرمز D_i ، فإننا نجد أن القسط الأول يتألف من عنصرين:

ـ الفائدة المترتبة على القرض خلال العام الأول، وتساوي $I_1 = L \cdot P$.

ـ الجزء المخصص للاستهلاك الأول من القرض ومقداره D_1 .

ومنه نجد أن مقدار القسط الأول يساوي: $R = I_1 + D_1$.

ومنه نحصل على أن الجزء المخصص للاستهلاك من القرض يساوي: $R - I_1 = D_1$ ، وبعد تسديد هذه الدفعة يبقى من أصل القرض $(L - D_1)$. وإن الفائدة المستحقة عليه تساوي $I_2 = (L - D_1) \cdot P$. حيث P هو سعر الفائدة المركبة السنوي

وبعد مرور عام آخر (سنتين) على تاريخ القرض، فإن مقدار القسط الثاني سيشمل فائدة ما تبقى من القرض وجزءاً مستهلكاً جديداً نرمز له بـ D_2 فيكون:

$$R = I_2 + D_2$$

ويكون لدينا : $D_2 = R - I_2$

وهكذا يكون لدينا أيضاً : $D_3 = R - I_3$

وهكذا نجد أن القسط الأخير يساوي: $R = I_n + D_n$

ويكون : $D_n = R - I_n$

ولذلك نقوم بحساب القسط السنوي R أولاً، ثم نقوم بحساب الفوائد على المبالغ المتبقية من أصل القرض وحساب الاستهلاكات السنوية والمتراكمة، ويتم تنظيم هذه العمليات عبر جدول خاص بذلك يسمى جدول استهلاك القرض. ويتضمن المدفوعات والاستهلاكات خلال أعوام هذا القرض. ويأخذ هذا الجدول الشكل التالي:

العام 1	الرصيد المتبقي من القرض في مطلع العام (2)	الفائدة المترتبة عليه في نهاية العام I_i (3)	القسط السنوي (4) R	الاستهلاك السنوي (5) D_i	الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام (6)	الرصيد المتبقي من القرض من نهاية العام (7)
1	L	$L.P$	R	D_1	D_1	$L-D_1$
2	$L-D_1$	$(L-D_1)\cdot P$	R	$_2D$	D_1+D_2	$L-(D_1+D_2)$
3	$(L-D_1-D_2)$	$(L-D_1-D_2)\cdot P$	R	$_3D$	$D_1+D_2+D_3$	$L-(D_1+D_2+D_3)$
...	...	...	...	...	...	.....
...	...	...	...	...	...	.....
n	$(L-D_1-D_2\ldots.-D_{n-1})$.	$(L-D_1-D_2\ldots.-D_{n-1}).P$	R	D_n	$D_1+D_2+D_3+\ldots+D_n$	0
المجموع		I	$n.R$	L	-	

ولحساب عناصر هذا الجدول نتبع أسلوب التتابع، فبعد أن نحدد مقدار القسط السنوي R من العلاقة(43-3) نقوم بحساب الفائدة الأولى المستحقة $I_1 = L \cdot P$ ثم نقوم بحساب الاستهلاك الأول D_1 من العلاقة.

$$D_1 = R - L \cdot P \qquad (49-3)$$

وذلك بطرح عنصر العمود (3) من عنصر العمود (4). ثم نقوم بحساب الاستهلاك المتراكم والرصيد المتبقي من القرض *(L-D1)*، ونضعهما في العمودين (6) و(7) ، ولمتابعة العمل نضع الرصيد المتبقي $(L-D_1)$ في بداية السطر الثاني من العمود (2) ثم نحسب الفائدة المستحقة عليه، وبعدها نقوم بحساب D_2 انطلاقاً من عناصر العمودين (3) و(4) اعتماداً على العلاقة:

$$D_2 = R - I_2 \qquad (50-3)$$

وهكذا نتابع العمل حتى نصل إلى نهاية الجدول، وبعدها نتحقق من أن مجموع الاستهلاكات يساوي مقدار القرض L .

ملاحظة هامة: هناك طريقة أخرى لحساب عناصر الجدول السابق تعتمد على العلاقة التي تربط بين الاستهلاكات السنوية D_{i+1}, D_i والتي يمكن استخراجها كما يلي :

بما أن الأقساط متساوية، إذن القسط R_i يساوي R_{i+1} وبذلك يكون:

$$
\begin{aligned}
&R_1 = R_2 \\
&I_1 + D_1 = I_2 + D_2 \\
&L \cdot P + D_1 = (L - D_1) \cdot P + D_2 \qquad (51-3) \\
&L \cdot P + D_1 = L \cdot P - D_1 + P \\
&D_1 = -D_1 P + D_2 \\
&D_2 = D_1 + D_1 P \\
&D_2 = D_1 \cdot (1 + P) \\
&D_2 = D_1 \cdot r
\end{aligned}
$$

وهكذا نجد أن:

$$
\begin{aligned}
&D_3 = D_2 \cdot r \\
&D_4 = D_3 \cdot r
\end{aligned}
$$

وبصورة عامة يكون لدينا:

$$D_{i+1} = D_i \cdot r \qquad (52-3)$$

وهكذا نجد أن الجزء المستهلك من القرض في نهاية العام $(i+1)$ يساوي الجزء المستهلك منه في نهاية العام (i) مضروباً بمعامل الفائدة r. وتستخدم العلاقة (52-3) لحساب عناصر العمود (5) من الجدول الاستهلاكي السابق، وذلك بعد حساب R ثم حساب D_1 من العلاقتين (43-3) (49-3) على الترتيب. وعندما نقوم بحساب عناصر العمود (5) يمكننا بسرعة حساب عناصر بقية الأعمدة.

مثال 2:

اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س لمدة 5 سنوات وبفائدة مركبة 8% سنوياً على أن يقوم بتسديده بطريقة الأقساط المتساوية من أصل القرض والفوائد .

المطلوب : حساب قيمة القسط السنوي ومقادير الاستهلاكات السنوية، ثم إعداد جدول لاستهلاك هذا القرض .

الحل: لدينا : $S = 100000 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad P = 0.08$

لحساب القسط السنوي المتساوي نطبق العلاقة (43-2) فنجد أن :

$$R = S\frac{r-1}{1-r^{-n}} = 100000\frac{(1.08)-1}{1-(1.08)^{-5}} =$$

$$R = 25045.65 \;\; L.S$$

ولحساب مقادير الاستهلاكات السنوية من أصل القرض نحسب D_1 أولاً فنجد أن:

$$D_1 = R - I_1 = R - L.P = 25045.65 - 100000 * (0.08)$$

$$D_1 = 17045.65$$

ثم نحسب الاستهلاكات المتتالية من العلاقة (52-2) فنجد أن:

$$D_2 = D_1 * R = 17045.65(1.08) = 18409.30$$

$$D_3 = D_2 * R = 18409.30(1.08) = 19882.05$$

ثم ننظم جدولاً لاستهلاك هذا القرض كما يلي:

العام	الرصيد المتبقي من القرض في بداية العام i	الفائدة المستحقة على المتبقي	القسط للسنوي R	الاستهلاك السنوي D_i	الاستهلاك المتراكم	المتبقي من أصل القرض في نهاية العام
1	*100000*	*8000*	*25045.65*	*17045.65*	*17045.65*	*82954.35*
2	*82954.35*	*6636.35*	*25045.65*	*18409.30*	*35454.95*	*64545.05*
3	*65656.05*	*5163.60*	*25045.65*	*19882.05*	*55337*	*44663*
4	*44663*	*2573.04*	*25045.65*	*21472.61*	*76809.61*	*23190.30*
5	*23190.39*	*1855.22*	*25045.65*	*23190.42*	*100000*	*0*
المجموع	-----	*25228.22*	*125228.22*	*100000.02*	------	------

مثال 3:

اقترض أحدهم مبلغ *(40000)* ل.س من المصرف العقاري بفائدة 7% ، ولمدة 15 سنة، احسب القسط السنوي المتساوي ، ثم نظم جدول الاستهلاك لهذا القرض.

الحل: قبل كل شيء نحسب مقدار القسط السنوي المتساوي فنجد أن:

$$R = 40000\,\frac{(1{,}07)-1}{1-(1{,}07)^{-15}} = 4391{,}79 \quad L.S$$

ثم نقوم بحساب الفائدة الأولى فنجد أن $I_1 = S.P = 2800$:

ثم نقوم بحساب الاستهلاك الأول فنجد أن:

$$D_1 = R - S.P = 4391{,}78 - 2800 = 1591{,}79$$

ثم نقوم بإعداد الجدول المطلوب التالي:

العام	المتبقي من القرض في مطلع العام	الفائدة المترتبة في نهاية العام I_i	القسط السنوي R	الاستهلاك السنوي D_i	الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام	الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام
1	*40000*	*2800*	*4391,79*	*1591,79*	*1591,79*	*38404,21*
2	*38408,21*	*2688,5*	*4391,79*	*1703,22*	*3295,01*	*36704,99*
3	*36704,99*	*2569,35*	*4391,79*	*1822,44*	*5117,45*	*34704,99*
4	*34882,55*	*2441,78*	*4391,79*	*1950,a0*	*7067,45*	*32932,55*

5	*32932,55*	*2305,28*	*4391,79*	*2086,51*	*9153,96*	.....
6	.....	.....	.....	.....	.....	.....
7						
:						
15						

ونترك الأسطر المتبقية للطالب ليتممها بنفسه على سبيل التمرين ثم التأكد من صحة المجاميع.

ب ـ الطريقة الثانية: وهي طريقة الأقساط المتناقصة لتغطية الفائدة وجزء ثابت من القرض.

وفي هذه الطريقة يتم تقسيم القرض L إلى n جزءاً متساوياً وتساوي $L|n$ ، ثم يتم توزيع هذه الاجزاء على السنوات المتتالية (جزء لكل سنة) ، لتسديدها في نهاية كل عام مع الفائدة المترتبة على القرض (أو على الباقي من القرض)

وضمن هذه الشروط، فإن مقدار القسط الأول يساوي:

$$R_1 = L.P + \frac{L}{n}$$

ومقدار القسط الثاني بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_2 = \left(L - \frac{L}{n} \right) \cdot P + \frac{L}{n}$$

ومقدار القسط الثالث بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_3 = \left(L - \frac{2L}{n} \right) P + \frac{L}{n}$$

.....

ومقدار القسط n بعد حذف كل ما استهلك من القرض يساوي (3-53)

$$R_n = \left(L - \frac{(n-1)L}{n} \right) P + \frac{L}{n}$$

(وهنا نلاحظ أن هذه الأقساط غير متساوية، ولكن مقدار الاستهلاك السنوي من أصل القرض ثابت ويساوي $\frac{L}{n}$ ، وإن عدم تساوي الأقساط يعود إلى أن مقادير الفوائد تتناقص عاماً بعد عام،

ويمكن تنظيم هذه العمليات في جدول لاستهلاك القرض كما يلي:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
العام	الرصيد المتبقي من القرض في مطلع العام	الفائدة المترتبة في نهاية العام I_i	الاستهلاك السنوي R_i	الأقساط السنوية	مجموع ما استهلك من القرض في نهاية العام	الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام
1	L	$L \cdot p$	$\frac{L}{n}$	$\frac{L}{n} + L \cdot p$	$\frac{L}{n}$	$L - \frac{L}{n}$
2	$L - \frac{L}{n}$	$\left(L - \frac{L}{n}\right)P$	$\frac{L}{n}$	(4) + (3)	$\frac{2L}{n}$	$L - \frac{2L}{n}$
3	$L - \frac{2L}{n}$	$\left(L - 2.\frac{L \cdot}{n}\right)P$	$\frac{L}{n}$	(4) + (3)	$\frac{3L}{n}$	$L - \frac{3l}{n}$
4	...	...	...		...	
...	...	...	...		...	

مثال 4:

اقترض أحدهم مبلغ *(100000)* ل.س من مصرف التسليف الشعبي ، على أن يتم تسديده على أقساط سنوية بطريقة الأقساط المتناقصة وخلال 5 سنوات، أي على أن يتضمن كل قسط كامل الفائدة المستحقة على القرض (أو باقي القرض)، إضافةً إلى مبلغ ثابت من أصل القرض، والمطلوب : حساب قيمة الجزء الثابت المخصص للاستهلاك السنوي من أصل القرض ثم حساب الأقساط السنوية المتناقصة وإعداد جدول لعمليات استهلاك هذا القرض علماً بأن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

الحل: إن الجزء الثابت $= \frac{100000}{5} = 20000$ ل.س سنوياً ،

وإن القسط الأول يستحق بعد مرور عام على تاريخ القرض =الجزء الثابت+الفائدة على كامل القرض =20000+8000=28000 ل.س

وهكذا نجد أن كل من الأقساط التالية = الجزء الثابت + الفائدة على باقي القرض ،

واعتماداً على العلاقات السابقة نجد أن الجدول المطلوب هو كما يلي:

العام	المتبقي من القرض في مطلع العام *i*	الفائدة المستحقة في نهاية العام *i*	الاستهلاك السنوي D_i	الأقساط السنوية ***Ri***	الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام *i*	الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام
1	***100000***	**8000**	***20000***	**28000**	**20000**	***80000***
2	***80000***	**6400**	***20000***	**26400**	**40000**	**60000**
3	***60000***	**4800**	***20000***	***24800***	***60000***	**40000**

20000	***80000***	***23200***	***20000***	**3200**	**40000**	**4**
0	**100000**	**21600**	**20000**	**1600**	**20000**	***5***
----	**----**	**124000**	**100000**	**24000**	**---**	**المجموع**

جـ ـ الطريقة الثالثة: طريقة الأقساط المتزايدة لتسديد جزء ثابت من القرض مع الفاءدة المستحقة عليه حسب مة استحقاقه .

وتعتمد هذه الطريقة على تجزئة القرض L إلى n جزءاً متساوياً مقدار كل منها L/n، ثم توزيعها على السنوات المتتالية (بواقع جزء لكل سنة) لتسديدها مع الفوائد المستحقة عليها في نهاية كل عام . وإذا استخدمنا نفس الرموز السابقة نجد أن:

الجزء السنوي الثابت المخصص لاستهلاك القرض = L/n

,إن إضافة الفائدة المستحقة عليه في نهاية العام تجعل القسط السنوي مساوياً لحصيلة ذلك الجزء الثابت ، وبذلك نجد أن القسط السنوي في العام ***i*** يساوي:

$R_i = (L/n),r^i$

أي أن قيمة القسط R_i تساوي حصيلة الجزء L/n في نهاية العام ***i***

وتتميز هذه الطريقة بأنها سهلة الحساب والفهم لذلك تستخدم كثيراً في العمليات التجارية وتسمى بطريقة (الكمبيالات).

مثال 4: اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س من مصرف التسليف بفائدة 8% بشرط أن يقوم بتسديده خلال 5 سنوات بطريقة الأقساط المتزايدة. والمطلوب : حساب قيمة الجزء الثابت ثم حساب القسط السنوي ومقادير الاستهلاكات السنوية، ثم إعداد جدول لاستهلاك هذا القرض .

الحل: لدينا : $S = 100000$, $n = 5$, $P = 0.08$

وإن قيمة الجزء السنوي الثابت المخصص لاستهلاك القرض يساوي :

L /n= 20000

ثم نقوم بتنظيم الجدول التالي لعمليات تسديد هذا القرض:

2 – 3 = 4	***3***	***2***	***1***
الفائدة المستحقة على الجزء الثابت I_i	**مقدار القسط السنوي** $(L/n),r^i$	**قيمة الجزء الثابت** L/n	العام
1600	***21600***	***20000***	***1***

2	***20000***	***23328***	***3328***
3	***20000***	***25194.24***	***5194.24***
4	***20000***	***27209.78***	***7209.56***
5	***20000***	***29386.56***	***9386.56***
المجموع	***100000***	***126718.58***	***26718.58***

ملاحظة: إن مقادير الفائدة لنفس الأمثلة(1و3و4) في هذه الطرق الثلاثة مختلفة ، فهي في طريقة الأقساط المتناقصة (24000 ل.س) أصغر منها في الأقساط المتزايدة (26718.58 ل.س) , وذلك لأنه في المتناقصة تبدأ بأقساط كبيرة وتنتهي بأقساط صغيرة (وهذا ما يخفف من عبء الفائدة المستحقة)، أما في المتزايدة فتبدأ بأقساط صغيرة وتنتهي بأقساط كبيرة (وهذا ما يزيد من عبء الفائدة المستحقة) ، أما طريقة الأقساط المتساوية فتأخذ موقعاً وسطاً ، حيث بلغت الفائدة فيها(25045.65 ل.س) ، وهذا يدل على فعالية هذه الطرق في إقامة العدالة في كل الظروف ، ويثبت أن كل من هذه الطرق الثلاثة عادلة تماماً..

تمرينات

1 ـ اقترض أحدهم مبلغ 400000 ل.س. لمدة 5 سنوات وبفائدة سنوية 7%، احسب القسط الشهري لتسديد ذلك القرض حسب الطريقة الأولى (ثم نظم جدولاً لتسديد ذلك القرض).

2 ـ اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س. من المصرف التجاري بفائدة سنوية 5%، وتعهد بسدادها خلال أربع سنوات، على شكل أقساط سنوية حسب طريقة الأقساط المتناقصة، والمطلوب تنظيم جدول لتسديد ذلك القرض.

4 ـ قرض قيمته 100000 ل.س. يسترد على شكل دفعات سنوية متساوية خلال 5 سنواتٍ، ويستحق القسط الأول بعد عام من تاريخ القرض.

ـ أوجد مقدار القسط السنوي إذا علمت أن سعر الفائدة هو 7% سنوياً.

ـ أوجد جدول الاستهلاك الخاص بهذا القرض.

5 ـ قرض قيمته 200000 ل.س. يسترد على شكل دفعات سنوية ولمدة أربعة أعوام، ويستحق القسط الأول بعد عام من تاريخ القرض.

ـ أوجد مقدار القسط السنوي إذا علمت أن سعر الفائدة هو 8%.

ـ أوجد جدول الاستهلاك الخاص بهذا القرض.

6 ـ اقترض أحدهم مبلغ 96000 ل.س. وتعهد بسداده على شكل أقساط سنوية وخلال 6 أعوام ، بطريقة الأقساط المتزايدة،

ـ أوجد جدول الاستهلاك الخاص بهذا القرض إذا علمت أن سعر الفائدة هو 7%سنويا.

3--7 : الاستهلاك المنتظم:

نقصد بالاستهلاك المنتظم عملية سحب مبالغ متساوية وبشكلٍ دوري من مبلغ معين مودع في المصرف قيمته K.

وإن أفضل مثالٍ على الاستهلاك المنتظم هو رواتب المتقاعدين، التي تسحب من حصيلة إيداعاتهم في مؤسسة التأمينات. فعندما يتقاعد الموظف يكون قد دفع أقساطاً شهرية أو سنوية إلى مؤسسة التأمينات، وتكون حصيلة هذه الأقساط قد بلغت عند انتهاء الخدمة مبلغاً قدره K

وبعد مرور عام على التقاعد (أو بعد مرور شهر)، تبدأ مؤسسة التأمينات بدفع رواتب سنوية (أو شهرية) إلى ذلك المتقاعد وذلك لمدة n عاماً (أو تدفع له راتباً ما بقي على قيد الحياة).

وبغض النظر عن الحالات الخاصة التي قد تدخل ضمن هذا البند، فإننا سنناقش الموضوع بشكله العام كما يلي:

لنفترض أن شخصاً ما أودع (أو تجمع لديه) مبلغاً من المال في المصرف وقدره K، وذلك من أجل أن يستهلكه خلال n عاماً ، على شكل سحوبات سنوية متساوية قيمة كلٍ منها D، كما نفترض أن سعر الفائدة المركبة هو P سنوياً.

وأن المودع سيبدأ بسحب مبالغه بعد مرور عام على إيداع (أوتجميع)المبلغ K المذكور.

ولإيجاد العلاقة التي تربط بين متحولات هذه المسالة نقوم بما يلي:

نفترض أن المبلغ قد أودع في بداية الزمن، وبذلك نجد أن حصيلة المبلغ المودع ستصبح بعد مرور عام على إيداعها(في نهاية العام الأول) مساوية لـ K_1 حيث أن:

$$K_1 = K.r$$

وفي بداية العام الثاني يقوم المودع بسحب المبلغ الأول D من الحصيلة K_1 لسد حاجاته الشخصية، وبذلك يبقى في المصرف المبلغ $(K_1 - D)$.

وفي نهاية العام العام الثاني تصبح حصيلة المبلغ المتبقي من العام الماضي مساوي لـ K_2 ، حيث أن:

$$K_2 = (K_1 - D).r = (K.r - D).r = Kr^2 - Dr$$

وفي بداية العام الثالث يقوم المودع بسحب المبلغ الثاني من الحصيلة K_2 ليسد حاجاته الشخصية، وبذلك يبقى في المصرف المبلغ $(K_2 - D)$.

وفي نهاية العام الثالث تصبح حصيلة المبلغ المتبقي من العام الماضي مساوياً لـ K_3 ، حيث أن: $K_3 = (K_2 - D) \cdot r$

$$K_3 = (K_2 - D)r = (K.r^2 - Dr - D)r = Kr^3 - Dr^2 - Dr$$

وهكذا يمكننا أن نجد أن المبلغ سيبلغ بعد نهاية السنة الرابعة K_4 مايلي:

$$K_4 = Kr^4 - Dr^3 - Dr^2 - Dr$$

وأنه بعد مرور n سنة على الإيداع تصبح حصيلة الإيداع في المصرف مساويةً لـ K_n حيث أن:

$$K_n = (K_{n-1} - D) \cdot r$$

وهي تساوي أيضاً مايلي :

$$K_n = Kr^n - Dr^{n-1} - Dr^{n-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - Dr^2 - Dr$$

ولكن الدفعة الأخيرة ستسحب بعد n سنة أيضاً ، أي ستسحب في نهاية العام الأخير مباشرة. وحتى يستهلك المودع كامل المبلغ الذي أودعه (مع فوائده) في نهاية المدة، يجب أن يكون ما بقي في المصرف بعد n سنة مطابقاً لمقدار الدفعة الأخيرة D أي يجب أن يكون:

$$K_n = D$$

$$Kr^n - Dr^{n-1} - Dr^{n-2} - Dr^{n-3} \ldots\ldots\ldots\ldots - Dr^2 - Dr = D$$

وبذلك نجد أن:

$$Kr^n = D + Dr + Dr^2 + \ldots\ldots\ldots + Dr^{n-2} - Dr^{n-1}$$

وبما أن الطرف الأيمن وهو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول D، وأساسها r، وعدد حدودها n، نجد أن:

$$Kr^n = D\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$K = D\frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1}$$

وبما أن $h = \frac{1}{r}$ فإن العلاقة السابقة تصبح كما يلي:

$$K = D\frac{1 - h^n}{r - 1} = D\frac{1 - h^n}{P} \qquad (55-3)$$

ولكننا نفضل استخدام الصيغة التالية:

$$K = D\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (56-3)$$

وهي العلاقة التي تربط بين المبلغ المودع K ومقدار الدفعة السنوية D ومعامل الفائدة r وعدد السنوات n، وهي أربعة متحولات أو مجاهيل إذا علمنا ثلاثة منها يمكننا حساب الرابع.

وهنا نلاحظ أن العلاقة (55-3) تشبه تماماً العلاقة (3- 36) للقيمة الحالية للدفعات العادية ، لأن عملية الاستهلاك المنتظم هي عملية مشابهة للإيداع المنتظم العادي من حيث القيمة الحالية لكلٍ منهما.

ملاحظة: ـ إذا كانت الدفعات الاستهلاكية تسحب m مرةً في العام فإن العلاقة (13-29) تأخذ الشكل التالي:

$$K = D' \frac{1 - r^{-n}}{r^{1/m} - 1} \qquad (57-3)$$

حيث إن D' هي مقدار الدفعة الجزئية، وr هو معامل الفائدة السنوية، ويساوي $r = 1 + P$.

مثال 23: ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه ليمول دفعات عادية سنوية قدرها 2000 ل.س. ولمدة عشر سنوات، علماً بأن سعر الفائدة المركبة $P = 0,05$ سنوياً.

الحل: من العلاقة (3-56) نجد أن:

$$K = D \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} = 2000 \frac{1 - (1,05)^{-10}}{1,05 - 1} = 15443,47$$

مثال 25:

كان أحد الموظفين يسدد للتأمينات في بداية كل عام دفعة مقدارها 1000 ل.س. بفائدة $P = 0,06$ ولمدة عشرين عاماً. فما هي حصيلته بعد 5 سنوات على إيداع الدفعة الأخيرة؟ وما هو عدد الدفعات التي قيمة كل منها تساوي 3500 ل.س سنوياً. والتي تسحب أولها بعد ست سنوات من تاريخ الدفعة الأخيرة وبحيث تستهلك كامل المبلغ في نهاية المدة.

الحل:

إن حصيلة المودع بعد مرور سنة واحدة على الدفعة الأخيرة تساوي حصيلة تلك الدفعات الفورية وتساوي:

$$K_{20} = Dr \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1000(1,06) \frac{(1,06)^{20} - 1}{1,06 - 1} = 38992,73 \quad L.S$$

وحتى نحصل على حصيلة المودع بعد مرور 5 سنوات على الدفعة الأخيرة نقوم بحساب حصيلة المبلغ الأخير بعد مرور 4 سنوات أخرى حسب العلاقة المعروفة الآتية:

$$Q_{24} = K_{20}.r^4 = 38992,73(1,06)^4 = 49227,42 \quad L.S$$

وبما أن عملية استهلاك المبلغ الأخير ستبدأ بعد مرور ست سنوات من تاريخ الدفعة الأخيرة أي بعد مرور عام آخر من تكوينه بواسطة سحب مبالغ متساوية فهي تعطى بالعلاقة (3-56) الآتية:

$$49227,42 = 3500\frac{1-(1,06)^{-n}}{1,06-1}$$

$$\frac{49227,42}{3500} = 1-(1,06)^{-n}$$

$$0,843898-1 = -(1,06)^{-n}$$

$$0,15610 = (1,06)^{-n}$$

$$\lg(0,15610) = -n\lg(1,06)$$

$$-0,80659328 = -n(0,025305865)$$

$$n = \frac{-0,80659328}{-0,025305865}$$

$$n = 31,87376$$

دفعة أو سنة

وتسهيلاً للأمر، نعتبر أن عدد الدفعات $n=32$ دفعة، ونعتمد على أن يكون 31 دفعة منها مساوية لـ 3500 ل.س. أما الدفعة الثانية والثلاثون فنحسب قيمتها بحيث تستهلك كامل المبلغ المتبقي في المصرف، لذلك نقوم بحساب المبلغ الذي ستستهلكه الدفعات الـ31 الأولى، فنجد أنه يساوي:

$$K_{31} = 3500\frac{1-(1,06)^{-31}}{1,06-1} = 48751,62 \ \ L.S$$

وبذلك يكون المبلغ المتبقي في المصرف بعد ذلك مساوياً لـ:

$$49227,42-48751,80 = 475,62 \ \ L.S$$

وأن حصيلة هذا المبلغ المتبقي من الرصيد الأصلي ستبلغ بعد 32 عاماً ما يلي:

$$(475,62)(1,06)^{32} = 3069,36 \ \ L.S$$

وهو مقدار السحبة الأخيرة الثانية والثلاثين التي تستهلك كامل المبلغ المتجمع.

ملاحظة: يلاحظ أن المودع كان قد دفع مبلغ 1000 ل.س. لمدة عشرين سنة، وهذا غطى صرفياته لمدة 32 سنة. وبمعدل 3500 ل.س سنوياً للسنوات الـ 31 الأولى و *3069,36* ل.س للسنة الأخيرة

3-8- حسابات الإهتلاك:

من المعلوم أن الأصول الثابتة (وسائل الإنتاج، الأثاث ...إلخ) تتعرض إلى اهتلاك مستمر حتى تصل إلى مرحلة تصبح غير صالحة للاستعمال. ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي لهذه الأصول نقوم بتعريف المصطلحات التالية:

ـ القيمة الأصلية: وهي ثمن تكلفة الأصول قبل الاستخدام مباشرةً، ونرمز لها بـ K_0. ويفترض أنها ستستهلك خلال n عاماً ، وما يبقى منها يعتبر نفاية .

ـ القيمة الدفترية: وهي القيمة الأصلية مطروحاً منها مجموع الاهتلاكات المتراكمة، ونرمز لها في العام i بـ K_i.

ـ مدة الاستخدام: وهي المدة التي تبقى فيهاالأصول صالحة للاستخدام، ونرمز لها بـ n سنة.

ـ القيمة المتبقية: وهي قيمة الأصول كنفاية في آخر المدة، ونرمز لها بـ K_n.

ـ القيمة المستهلكة: وهي تساوي الفرق بين القيمة الأصلية والقيمة المتبقية، ونرمز لها بـ $K_0 - K_n$.

ـ قسط الاهتلاك: وهو المبلغ المخصص سنوياً للاهتلاك، ونرمز له بـ A.

ولحساب الاهتلاك تتبع إحدى الطرق الآتية:

1-8-3 :الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك:

وتعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري بشكل ثابت، ففي كل عام يستهلك جزء ثابت من الأصول الثابتة، وبذلك يكون مقدار الاهتلاك السنوي مساوياً لمقدار ثابت A،يحسب من العلاقة الخطية التالية:

$$A = \frac{K_0 - K_n}{n} \qquad (58-3)$$

وأن مقدار الاهتلاك المتراكم في نهاية العام i يساوي S_i ويساوي:

$$S_i = i \cdot A$$

وأن القيمة الدفترية للأصول الثابتة بعد مرور i عاماً على استعمالها تصبح مساوية لـ K_i حيث أن:

$$K_i = K_0 - i \cdot A$$

2-8-3 : الطريقة التناسبية(أو النسبية):

وتعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري على شكل نسبة ثابتة من القيمة المتبقية من الأصول الثابتة، وتسمى هذه النسبة بمعدل الاهتلاك ونرمز لها بـ P.

وهكذا نجد أن مقدار الاهتلاك في العام i تساوي:

$$A_i = K_{i-1} \cdot P \qquad (59-3)$$

وأن القيمة الدفترية للأصول الثابتة في نهاية العام i تساوي K_i وتساوي:

$$K_i = K_{i-1} - A_i = K_{i-1} - K_{i-1} \cdot P \qquad (60-3)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن:

$$K_1 = K_0(1-P)$$

وبطريقةٍ مشابهة نجد أن:

$$K_2 = K_1(1-P) = K_0(1-P)^2$$

$$K_3 = K_2(1-P) = K_0(1-P)^3$$

.....

وبالتالي نحصل على أن القيمة المتبقية من الأصول تساوي:

$$K_n = K_0(1-P)^n \qquad (61-3)$$

وبذلك نجد أن معدل الاهتلاك يحسب من العلاقة التالية:

$$1-P = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$P = 1-\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \qquad (62-3)$$

ويمكننا التعبير عن مقدار الاهتلاك في العام i بدلالة P و K_0 ، فنجد أنه:

$$A_i = K_{i-1} \cdot P = K_0(1-P)^{i-1} \cdot P \qquad (63-3)$$

وأن إجمالي الاهتلاك المتراكم في الأصول الثابتة في نهاية العام i يساوي S_i ويساوي $S_i = \sum A_i$ ، ويساوي:

$$S_i = K_0 - K_i = K_0 - K_0(1-P)^i$$

$$S_i = K_0\left[1-(1-p)^i\right] \qquad (64-3)$$

ملاحظة: يمكن استخدام الطريقتين معاً (الخطية والتناسبية) في حساب الاهتلاك السنوي للأصول الثابتة، ففي التطبيقات العملية تستخدم الطريقة التناسبية في حساب الاهتلاك في بداية المدة، حيث تكون نسبة الاهتلاك كبيرة، ثم تستخدم الطريقة الخطية في حساب الاهتلاك في الفترة الأخيرة حيث يعتبر مقدار الاهتلاك ثابتاً، وهذا ما يساعد على تصفية تلك الأصول كلياً في نهاية المدة.

مثال 6: تقدر مدة اهتلاك أحد أنواع الأصول الثابتة بعشر سنوات، ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي تستخدم الطريقة التناسبية خلال خمس السنوات الأولى، وبمعدل اهتلاك قدره 25%. وتستخدم الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك خلال خمس السنوات المتبقية.

والمطلوب حساب مقدار الاهتلاك السنوي خلال السنوات العشرة المذكورة.

الحل: لحساب الاهتلاك السنوي نعد الجدول التالي، ونفترض أن قيمة هذه الأصول تساوي 100 ل.س.

العام في المرحلة الأولى	مقدار الاهتلاك في نهاية العام حسب الطريقة التناسبية $A_i = K_{i-1}.P$	القيمة الدفترية المتبقية في نهاية العام i $K_i = K_{i-1} - A_i$	إجمالي الاهتلاك المتراكم في نهاية العام $S_i = K_0 - K_i = \sum A_i$
1	$A_1 = (100)\frac{25}{100} = 25$	$K_1 = 100 - 25 = 75$	$S_1 = 100 - 75 = 25$
2	$A_2 = (75)\frac{25}{100} = 18{,}75$	$K_2 = 75 - 18{,}75 = 56{,}25$	$S_2 = 43{,}75$
3	$A_3 = (56{,}25)\frac{25}{100} = 14{,}06$	$K_3 = 56{,}25 - 14{,}06 = 42{,}19$	$S_3 = 57{,}81$
4	$A_4 = (42{,}19)\frac{25}{100} = 10{,}55$	$K_4 = 4319 - 10{,}55 = 31{,}64$	$S_4 = 68{,}36$
5	$A_5 = (31{,}64)\frac{25}{100} = 7{,}91$	$K_5 = 31{,}64 - 7{,}91 = 23{,}73_i$	$S_5 = 76{,}27$
العام في المرحلة الثانية	مقدار الاهتلاك في نهاية العام حسب الطريقة الخطية $A = \frac{K_5 - K_n}{n}$	$K_i = K_5 - i.A$	$S_i = i.A = \Sigma A_i$
1	$A = \frac{23{,}73 - 0}{5} = 4{,}746$	$K_6 = 23{,}73 - 4{,}746 = 18{,}984$	$S_6 = 81{,}016_i$
2	$A = 4{,}746$	$K_7 = 18{,}984 - 4{,}746 = 14{,}238$	$S_7 = 85{,}762$
3	$A = 4{,}746$	$K_8 = 14{,}238 - 4{,}740 = 9{,}492$	$S_8 = 90{,}508$
4	$A = 4{,}746$	$K_9 = 9{,}492 - 4{,}746 = 4{,}7462$	$S_9 = 95{,}254$
5	$A = 4{,}746$	$K_{10} = 4{,}746 - 4{,}746 = 0$	$S_{10} = 100_i$

3-8-3 : طريقة الأقساط الأستثمارية المتساوية:

وتعتمد هذه الطريقة على حساب أقساط الاهتلاك منذ البداية وفق الطريقة الخطية السابقة من العلاقة:

$$A = \frac{K_o - K_n}{n}$$

ثم القيام باستثمار هذه الأقساط في أحد المصارف وتسديدها على شكل دفعات عادية سنوية, وذلك لتأمين المبلغ اللازم لاستبدال تلك الأصول بعد n عاماً .

ولكن حساب المبلغ A يمكن أن يتم بطريقةٍ أخرى، وذلك انطلاقاً من مبدأ تعادل الطرفين، والذي يقتضي أن تتحقق المعادلة الآتية:

حصيلة أقساط الاهتلاك = القيمة المستهلكة من الأصول في نهاية المدة.

وبما أن حصيلة أقساط الاهتلاك كدفعات عادية تعطى بالعلاقة:

$$Q_n = A\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

وأن القيمة المستهلكة من الأصول في نهاية المدة تساوي: $(K_o - K_n)$، فإننا نحصل على المعادلة التالية:

$$A\frac{r^n - 1}{r - 1} = K_0 - K_n \qquad (65-3)$$

وبذلك نجد أن مقدار قسط الاهتلاك السنوي يساوي:

$$A = (K_0 - K_n)\frac{r - 1}{r^n - 1} = \qquad (66-3)$$

مثال 7: اشترى أحدهم آلة تصوير قيمتها 20000 ل.س.وقدر عمرها الإنتاجي بـ 5 سنوات فقط، كما قدرت قيمتها كنفاية في آخر المدة بـ 2000 ل.س. والمطلوب حساب قسط الاهتلاك حسب طريقة الأقساط الاستثمارية المتساوية، ثم إعداد جدول خاص باستهلاك هذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 7% سنوياً.

الحل: لدينا: $K_0 = 20000$, $n = 5$, $K_5 = 2000$, $P = 0{,}07$.

وهكذا نجد أن: $A = (20000 - 2000)\frac{(1{,}07) - 1}{(1{,}07)^5 - 1} = 3130{,}03$

وبناءً على ذلك نعد جدول الاستهلاك التالي:

العام	قسط الاهتلاك في نهاية العام	فوائد الاستثمار في بداية العام I_i بمعدل 7%	القيمة المخصصة للاهتلاك D_i	المجموع التراكمي الاستهلاكي	القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة
1	3130.03	-	3130.03	1310.32	16869.97
2	3130.03	219.12	3349.13	6479.45	13520.84
3	3130.03	453.54	3583.57	10063.02	9937.27
4	3130.03	704.39	3834.42	13897.44	6102.85
5	3130.03	972.80	4102.83	18000.00	2000.00
المجموع	15650.15	2349.85			

ولتوضيح كيفية حساب عناصر هذا الجدول نورد الخطوات التالية:

1 ـ نضع قسط الاهتلاك في العمود 2.

2 ـ نقوم بحساب القيمة المخصصة للاهتلاك فنجد أن : $D_1 = 3130{,}03$،

ثم نحسب D_2 من العلاقة:

$$D_2 = D_1.r = 3130{,}03 \times (1{,}07) = 3349{,}3 \ \ L.S.$$

ثم نحسب D_3 من العلاقة:

$$D_3 = D_2.r = 3349{,}3 \times (1{,}07) = 3583{,}57 \ \ L.S.$$

وهكذا نتابع حساب D_4 و D_5 ونضع النتائج في الجدول.

3 ـ نحسب فوائد الاستثمار من العلاقة: $I_i = D_i - A$ ونضعها في الجدول.
4 ـ نحسب المجموع التراكمي المخصص للاهتلاك ,وذلك بإضافة كل قيمة إلى التي تليها حتى الأخير.
5 ـ نحسب القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة، وذلك بطرح المجموع التراكمي للاهتلاك من القيمة الأصلية 200000 ، فنحصل على العمود الأخير.

3-9 : التكلفة الرأسمالية

تعرّف التكلفة الرأسمالية لمشروع ما أو لآلة معينة بأنها مجموع القيمة الأصلية لذلك المشروع + القيمة الحالية لجميع نفقات الصيانة والإصلاح أو الاستبدال التي ستصرف عليه خلال فترة عمره الاقتصادي. علماً بأن عمليات الصيانة والإصلاح أو الاستبدال تجري دورياً وكل عدة سنوات وفي نهاية كل دورة. وسنعالجها بالترتيب عل النحو التالي :

3-9-1- التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والإصلاح:

لنرمز للتكلفة الرأسمالية بالرمز KC ، وللقيمة الأصلية بالرمز S، ولمقدار الدفعة الدورية للصيانة أو الإصلاح بالرمز Q، ولطول الفترة الزمنية بين كل إصلاح وآخر بالرمز ℓ ، وللقيمة الحالية لدفعات الصيانة أو الإصلاح بالرمز V، فإننا نجد أن هذه المتحولات مرتبطة حسب التعريف بالعلاقة الآتية:

$$KC = S + V \qquad (67-3)$$

وبما أن دفعات الصيانة أو الإصلاح هي دفعات عادية ودائمة، ولكنها تتميز بأن كل منها يدفع في نهاية الدورة التي مدتها ℓ سنة فإننا نجد أن:
القيمة الحالية للدفعة الأولى التي ستدفع في نهاية الدورة الأولى؛ أي التي ستدفع بعد مرور ℓ عاماً تساوي : $V_1 = Qh^{\ell}$.
أما القيمة الحالية للدفعة الثانية التي ستدفع في نهاية الدورة الثانية؛ أي التي ستدفع بعد مرور 2ℓ عاماً تساوي : $V_2 = Qh^{2\ell}$.
وكذلك نجد أن القيمة الحالية للدفعة الثالثة تساوي : $V_3 = Qh^{3\ell}$

.....

وهكذا يستمر الأمر إلى ما لا نهاية تقريباً.
وبذلك نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات تساوي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + ...$$

$$V = Qh^{\ell} + Qh^{2\ell} + Qh^{3\ell} + Qh^{4\ell} + ...$$

وهنا نلاحظ أن الطرف الثاني هو مجموع حدود متوالية هندسية لا نهائية، حدها الأول Qh^{ℓ}، وأساسها h^{ℓ} ، وعدد حدودها لا نهائي، وبذلك يكون مجموع حدودها مساوياً لـ:

$$V = Qh^{\ell} \cdot \frac{1}{1-h^{\ell}} \qquad (h<1)$$

$$V = Q\frac{h^{\ell}}{1-h^{\ell}} \qquad (68-3)$$

ويمكننا معالجة هذه العلاقة للحصول على قيمة V بدلالة P فنجد أن:

$$V = Q\frac{\left(\frac{1}{1+P}\right)^{\ell}}{1-\left(\frac{1}{1+P}\right)^{\ell}} = Q\frac{\frac{1}{(1+P)^{\ell}}}{\frac{(1+P)^{\ell}-1}{(1+P)^{\ell}}}$$

وبالاختصار على $(1+P)^{\ell}$ نحصل على:

$$V = Q\frac{1}{(1+P)^{\ell}-1} = Q\cdot\frac{1}{r^{\ell}-1} \qquad (69-3)$$

وبتعويض ذلك في العلاقة *(67-3)* نحصل على أن التكلفة الرأسمالية لأي مشروع أو جهاز أو آلة تحسب من العلاقة الآتية:

$$KC = S + Q\frac{1}{r^{\ell}-1} \qquad (70-3)$$

مثال 1: قررت إدارة الجامعة إنشاء مدرج لطلابها، فكلفت الدائرة الهندسية بإعداد الدراسة الفنية وتقدير تكاليف الإنشاء والصيانة، فكانت تكاليف الإنشاء 3000000 ل.س. وكانت تكاليف الصيانة 100000 ل.س ، وذلك بشرط أن تُجرى كل ثلاث سنوات، والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لهذا المدرج باعتبار أن عمره الاقتصادي كبير جداً، وأن سعر الفائدة المركبة هو 8% سنوياً.

الحل: لدينا $P = 0{,}08, \quad \ell = 3, \ S = 3000000$

وبذلك نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة تحسب من العلاقة *(70-3)* الآتية:

$$KC = S + Q\frac{1}{r^{\ell}-1}$$

$$KC = 3000000 + 100000\,\frac{1}{(1{,}06)^{3}-1}$$

$$KC = 3523516{,}36 \ \ L.S$$

2-14: التكلفة الرأسمالية والاستبدال:

لنفترض الآن أن عمليات الإنتاج أو الخدمة في المنشأة تقتضي أن نقوم باستبدال الآلات أو الأجهزة الموجودة كل ℓ عاماً، وهذا يعني أنه علينا أن ندفع في نهاية كل فترة مؤلفة من ℓ عاماً مبلغاً جديداً يساوي القيمة الأصلية S لتلك الأجهزة (بفرض أن السعار ثابتة)، وبفرض أنه يمكننا تصريف أو تسويق الأجهزة القديمة (كنفاية أو خردة)

بمبلغ معلوم وليكن S_0. فإننا نجد أن قيمة كل من الدفعات الدورية لاستبدال تلك الاجهزة تصبح مساوية لما يلي : $Q = (S - S_0)$

ومن العلاقة *(3-69)* نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات العادية تساوي:

$$V = Q\frac{1}{r^{\ell} - 1} = \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} \qquad (71-3)$$

وهكذا نحصل على أن التكلفة الرأسمالية لمثل هذه المشاريع تساوي القيمة الأصلية $S+$ القيمة الحالية للدفعات الدورية التي قيمة كل منها $(S - S_0)$، أي إن:

$$KC = S + V$$

$$KC = S + (S - S_0)\frac{1}{r^{\ell} - 1}$$

$$KC = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} \qquad (72-3)$$

حالة خاصة: وكحالة خاصة لعملية الاستبدال يمكننا النظر في الحالة التي تكون فيها قيمة النفاية معدومة أو مهملة، أي الحالة التي تكون فيها $S_0 = 0$. فعندها تأخذ العلاقة *(3-69)* الشكل التالي:

$$KC = S + \frac{S}{r^{\ell} - 1} = S\left[1 + \frac{1}{r^{\ell} - 1}\right]$$

$$KC = S.\frac{r^{\ell}}{r^{\ell} - 1} \qquad (73-3)$$

مثال 2: يريد أحدهم أن يشتري جهازاً للتحليل. فوجد أمامه العرضين الآتيين:
العرض الأول: ثمن الجهاز 25000 ل.س ويقتضي استبداله كل 5 سنوات.
العرض الثاني: ثمن الجهاز 30000 ل.س ويقتضي استبداله كل 6 سنوات.
والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لكل من هذين الجهازين، علماً بأن قيمة الجهاز الأول كنفاية 3000 ل.س ، وقيمة الجهاز الثاني كنفاية 5000 ل.س ، وأن سعر الفائدة المركبة 9% سنوياً. ثم قارن بين العرضين وحدد أيهما الأفضل.

الحل: لدينا بالنسبة للعرض الأول:

$$S_0 = 3000, \quad P = 0{,}09, \quad \ell = 5, \quad S = 250000$$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة للجهاز الأول تساوي:

$$KC_1 = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} = 25000 + \frac{25000 - 3000}{(1{,}09)^5 - 1})$$

$$KC_1 = 65844{,}82 \quad L.S$$

ولدينا بالنسبة للعرض الثاني أن:

$$S_0 = 5000, \quad P = 0{,}09, \quad \ell = 6, \quad S = 30000$$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة للجهاز الثاني تساوي:

$$KC_2 = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} = 30000 + \frac{30000 - 5000}{(1{,}09)^6 - 1})$$

$$KC_2 = 66922{,}16\ L.S$$

وبالمقارنة نجد أن العرض الأول أفضل من العرض الثاني من الناحية الاقتصادية.

مثال 3: يريد صاحب إحدى المكتبات شراء آلة نسخ لخدمة الزبائن، قيمتها الأصلية *40000* ل.س ، ويجب استبدالها كل سبع سنوات. وقيمتها في نهاية المدة كنفاية معدومة أو مهملة، فاحسب التكلفة الرأسمالية لهذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8 % سنوياً.

الحل: لدينا: $S_0 = 0$, $P = 0{,}08$, $\ell = 7$, $S = 40000$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية لهذه الآلة حسب العلاقة *(14-10)* تساوي:

$$KC = S \cdot \frac{r^{\ell}}{r^{\ell} - 1} = 40000 \cdot \frac{(1 + 0{,}08)^7}{(1 + 0{,}08)^7 - 1}$$

$$KC = 96036{,}20\, L.S$$

مثال 4: أوجد التكلفة الرأسمالية لإنشاء نفق أو جسر عند إحدى العقد المرورية، ثم قرر أيهما الأفضل، وذلك ضمن البيانات التالية:

تكلفة إنشاء النفق 1800000، ويحتاج إلى صيانة بـ 200000 كل سنتين.

تكلفة إنشاء الجسر 2500000، ويحتاج إلى صيانة بـ 100000 كل ثلاث سنوات.

علماً بأن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً.

الحل : إن التكلفة الرأسمالية للنفق مع الصيانة تحسب من العلاقة *(14-5)* وتساوي ما يلي:

$$KC_1 = 1800000 + 200000\, \frac{1}{(1{,}06)^2 - 1}$$

$$KC_1 = 3418122{,}98\, L.S$$

أما التكلفة الرأسمالية للجسر مع الصيانة فتساوي مايلي:

$$KC_2 = 2500000 + 100000\, \frac{1}{(1{,}06)^3 - 1}$$

$$KC_2 = 3023516{,}36\, L.S$$

وهكذا نجد أن تكاليف الجسر أقل من تكاليف النفق، وبذلك يكون الجسر أفضل من الناحية الاقتصادية.

3-8-3 : التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والاستبدال

لمعالجة هذه الحالة نفترض أن عمر الآلة أو المنشأة المستثمرة L عاماً، وأنها تحتاج خلال عمرها إلى صيانة دورية كل l عاماً، وأن عمليات الصيانة تجري عليها

خلال عمرها الاقتصادي m مرة. وهذا يعني أن العمر L هو من مضاعفات دورة الصيانة l، وأن $L = m \cdot l$ ولتوضيح ذلك نرسم الشكل البياني التالي:

الشكل (6-3)

ومن خلال هذا الشكل نلاحظ أن عمليات الصيانة تجري بعد ℓ عاماً من مباشرة العمل، ثم بعد $2l$، ثم بعد $3l$... حتى يتم استبدالها في نهاية العام L. وهنا يجب أن نلاحظ أن عملية الصيانة الأخيرة في نهاية كل دورة عمرية لا تنجز، لأنه يتم استبدال الآلة بآلة جديدة في نهاية تلك الدورة.

وإذا رمزنا:

للقيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً دون انقطاع حتى الاستبدال بالرمز V_1.

وللقيمة الحالية لتكاليف الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية بالرمز V_2.

وللقيمة الحالية لتكاليف الاستبدال في نهاية كل دورة عمرية للآلة بالرمز V_3.

وللقيمة الأصلية اللازمة لشراء هذه الآلة (ونعتبرها ثابتةً عند كل استبدال) بالرمز S.

فعندها نجد أن التكلفة الرأسمالية للآلة المستثمرة تساوي:

$$KC = S + (V_1 - V_2) + V_3 \qquad (74-3)$$

ولقد قمنا بطرح V_2 من V_1 حتى نحصل على القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المنجزة فعلياً حيث أن الصيانة الاخيرة لم تنجز بسبب الاستبدال.

وبفرض أن قيمة تكاليف الصيانة في كل مرة تساوي Q، نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً من العلاقة (3-68) وهي تساوي:

$$V_1 = \frac{Q}{r^{\ell} - 1} \qquad (75-3)$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف عمليات الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية والتي طول كل منها L عاماً، من العلاقة (3-68) نفسها، وهي تساوي:

$$V_2 = \frac{Q}{r^{L} - 1} \qquad (76-3)$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف الاستبدال مع وجود نفاية S_0 من العلاقة

$$V_3 = \frac{(S - S_0)}{r^L - 1}$$

(3-68) فنجد أن:

وبذلك نجد أن التكلفة الرأسمالية للآلة أو المنشأة المستثمرة والمعرفة بالعلاقة (3-69) تأخذ الشكل التالي:

$$KC = S + \frac{Q}{r^\ell - 1} - \frac{Q}{r^L - 1} + \frac{(S - S_0)}{r^L - 1} \qquad (77-3)$$

وهي تضم عدة حدود هي:

S، الثمن الأصلي للآلة عند الشراء، أو في بداية الاستثمار (ونعتبره ثابتاً عند كل استبدال).

$\frac{Q}{r^\ell - 1}$ القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً دون انقطاع حتى الاستبدال.

$\frac{Q}{r^L - 1}$ القيمة الحالية لتكاليف الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية.

$\frac{(S - S_0)}{r^L - 1}$ القيمة الحالية لدفعات الاستبدال مع وجود نفاية في نهاية كل دورة عمرية.

ملاحظة: إذا كانت قيمة النفاية $S_0 = 0$ فإن العلاقة السابقة (3-77) تبقى نفسها، ولكنها تأخذ شكلاً آخر هو:

$$KC = S + \frac{S}{r^L - 1} + \frac{Q}{r^\ell - 1} - \frac{Q}{r^L - 1}$$

$$KC = S\left[1 + \frac{1}{r^L - 1}\right] + Q\left[\frac{1}{r^\ell - 1} - \frac{1}{r^L - 1}\right]$$

$$KC = S + \left[\frac{r^L}{r^L - 1}\right] + Q\left[\frac{r^L - r^l}{(r^\ell - 1)\cdot(r^L - 1)}\right] \qquad (78-3)$$

مثال 5: لنأخذ آلة النسخ المعروضة في المثال 3 السابق، ولنفترض أن ثمن الآلة عند الشراء $S = 40000$ ل.س ، وأنها تحتاج إلى صيانة كل عام بقيمة 2000 ل.س سنوياً، وأنه يجب استبدالها كل سبع سنوات. وأن قيمتها في نهاية كل مدة عمرية كنفاية معدومة أو مهملة، فاحسب التكلفة الرأسمالية لاستثمار هذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8 % سنوياً.

ثم احسب صافي ربح استثمار هذه الآلة، إذا علمت أنها قادرة على إنجاز 500000 نسخة خلال عمرها الاقتصادي، وأن صاحب المكتبة يأخذ مقابل كل نسخة 0.90 ل. س. وأن تكلفة الورق والحبر تساوي 0.40 ل.س. لكل نسخة، وأنه يودع صافي ربحه منها في المصرف في نهاية كل عام . ثم احسب القيمة الإجمالية لإجمالي العوائد.

الحل: لحساب التكلفة الرأسمالية نلاحظ أنه لدينا:

$$KC = ? \quad , \quad P = 0{,}08 \quad , \quad Q = 20000 \quad , \quad L = 7 \quad , \quad S_0 = 0 \quad , \quad S = 40000$$

وبتطبيق العلاقة *(14-14)* أو *(14-15)* نجد أن:

$$KC = 40000 + \frac{2000}{(1+0{,}08)^1 - 1} - \frac{2000}{(1+0{,}08)^7 - 1} + \frac{(4000-0)}{(1+0{,}08)^7 - 1}$$

$$KC = 40000 + 25000 - 2801{,}81 + 56036{,}20$$

$$KC = 118235{,}00 \ \ L.S.$$

ولحساب صافي الربح نلاحظ أن الآلة قادرة على إنجاز 500000 نسخة خلال سبع سنوات، وهي بذلك قادرة على إنجاز حوالي

$$71428{,}57 = \frac{500000}{7}$$

نسخة خلال العام. وبذلك نجد أن صافي ربح المستثمر خلال العام الواحد يساوي:

$$NP = (0{,}90 - 0{,}40) \times 71428{,}57 = 35714{,}28 L.S$$

وبما أن هذه الأرباح الصافية تدفع في نهاية كل عام، فهي عبارة عن دفعات عادية، وبذلك نجد أن قيمتها الحالية تساوي:

$$V_7 = Q\frac{r^7 - 1}{r - 1} = 35714{,}28\frac{(1{,}08)^7 - 1}{1{,}08 - 1} =$$

$$V_7 = 318671{,}50 \ \ L.S$$

وبمقارنة هذه القيمة الحالية مع التكلفة الرأسمالية نجد أن القيمة الحالية لإجمالي العوائد الصافية من هذه الآلة يساوي:

$$318671{,}50 L.S. - 118235{,}00 = 200436{,}50 L.S$$

تمرينات

1 ـ قام أحدهم بشراء مستودع لاستثماره في العمل التجاري بقيمة 1500000 ل.س ، ويحتاج إلى صيانة وترميم كل 3 سنوات، بتكلفة 60000 ل.س ، احسب التكلفة الرأسمالية لهذا المستودع إذا كان سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

2 ـ يريد أحدهم شراء سيارة لاستثمارها في النقل الداخلي، فإذا علمت أن ثمنها الحالي 800000 ل.س ، وإن تكاليف صيانتها تقدر بـ 5000 ل.س كل عام، وأن تكاليف تجديد التأمين وتسجيلها تساوي 65000 ل.س ، والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لهذه السيارة بفرض أن عمرها كبير جداً، وأن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً؟

3 ـ يريد أحدهم أن يقوم بمشروع استثماري لصناعة الأجبان، فاشترى آلات حديثة بقيمة 4000000 ل.س، وإذا علمت أن هذه الآلات تحتاج إلى صيانة عامة كل سنتين بقيمة 200000 ل.س، وأنه سيقوم باستبدالها كل عشر سنوات، وتقدر قيمتها كنفاية بـ 300000 ل.س، فما هي التكلفة الرأسمالية لهذه الآلات إذا كان سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً.

4 ـ أراد أحدهم أن يفرش منزله بالسجاد، فاشترى 200 م2 منه بسعر المتر 600 ل.س، فإذا كان العمر الاقتصادي للسجاد 15 سنة، فاحسب قيمة الاهتلاك السنوي في الحالات التالية:

أ ـ حسب الطريقة التناسبية، علماً بأن نسبة الاهتلاك 15%، ثم احسب المتبقي من القيمة الأساسية والتي تستخدم كنفاية.

ب ـ حسب الطريقة الخطية.

جـ ـ حسب الطريقتين معاً: 6 سنوات للطريقة التناسبية، ثم 4 سنوات للطريقة الخطية.

د ـ حسب طريقة الأقساط الأستثمارية.

جامعة تشرين
التعليم المفتوح
إدارة الأعمال



أسس الرياضيات المالية للتجاريين (2)

الدكتور
إبراهيم محمد العلي
أستاذ في كلية الاقتصاد

مديرية الكتب الجامعية
2004 -2003

الجزء الأول

مبادئ عامة

وتتضمن الفصلين الآتيين:

الفصل الأول: أهم المفاهيم والمصطلحات المالية

الفصل الثاني: المتواليات والسلاسل العددية

الفصل الأول
أهم المفاهيم والمصطلحات المالية

ويشمل المفاهيم التالية:

1 ـ أنواع الأموال.
2 ـ مؤسسات الإيداع.
3 ـ أنظمة الإيداع والادخار.
4 ـ سعر الفائدة السنوي.
5 ـ مدة الإيداع والجدول التراكمي.
6 ـ إرشادات حول استخدام الآلات الحاسبة.
7 ـ الأرقام العشرية ورموزها المختلفة.
8 ـ الأحرف العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها.
9 ـ بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية.

الفصل الأول

أهم المفاهيم والمصطلحات المالية

إن الرياضيات المالية تتناول بالدراسة والتحليل جميع العمليات الممكنة على النقود والأوراق المالية، وحسب مختلف الأنظمة والشروط، ولذلك سنقوم بتعريف بعض المفاهيم والمصطلحات المتعلقة بذلك.

1-1- أنواع الأموال:

تصنف الأموال حسب المفهوم القانوني إلى نوعين هما:

- أموال منقولة: وهي الأموال التي يمكن نقلها والتصرف بها مباشرةً، كالنقود والمعادن الثمينة والسندات..إلخ.
- أموال غير منقولة: وهي الأموال التي تكون مجسدة في أصول ثابتة عقارية أو زراعية، كالمنازل والمحلات والأراضي الزراعية والمعامل الصناعية ...الخ.

إن الأموال المنقولة هي التي تقع ضمن موضوع اهتمامنا في هذا الكتاب، ويتداول الناس هذه الأموال على عدة أشكال أهمها:

- الأموال النقدية بالعملات المحلية أو الأجنبية.
- المعادن الثمينة، كالذهب والفضة والبلاتين ..إلخ.
- سندات الديون الشخصية (كمبيالات).
- سندات الخزينة الحكومية.
- أسهم الشركات المساهمة.
- الحوالات والتسهيلات الائتمانية العادية والإلكترونية.
- القروض المختلفة.
- الشيكات الصادرة عن الأشخاص والمؤسسات.

ونورد فيما يلي جدولاً بأهم العملات العربية والأجنبية وأسعار صرفها بالنسبة لليرة السورية في 2003/1/30:

جدول (1): أهم العملات العربية والأجنبية وأسعار صرفها بالنسبة لليرة السورية

الدولة	اسم العملة	سعر الصرف (ل.س)
لبنان	ليرة	0.029
مصر	جنيه	9.45
الأردن	دينار	72.00
السعودية	الريال	13.60
الإمارات	الدرهم	13.90
الكويت	دينار	166.75
قطر	ريال	14.50
البحرين	دينار	133.90
عُمان	ريال	131.35

الدولة	اسم العملة	سعر الصرف (ل.س)
الولايات المتحدة	دولار	51.50
بريطانيا	جنيه إسترليني	83.05
الاتحاد الأوربي	يورو	55.45
تركيا	ليرة	–
سويسرا	فرنك	37.45
كندا	دولار كندي	33.05
اليابان	ين	0.4365
الدانمارك	كورون	7.30
السويد	كورون	5.90
النرويج	كورون	7.25

المصدر: جريدة الثورة السورية، العدد 1202، تاريخ 2003/1/30.

كما نورد فيما يلي جدولاً بأسعار الفائدة السنوية على بعض العملات العربية والأجنبية %، وذلك حسب طول مدة الإيداع (الحد الأعلى لهذه الأسعار).

كما نورد جدولاً آخر بأسعار المعادن الثمينة (دولار لكل أونصة، علماً بأن الأونصة = 28.35 غراماً)

جدول (2): أسعار المعادن الثمينة (دولار لكل أونصة)

المعدن	الذهب	الفضة	البلاتين
السعر بالدولار	364	4.77	647

المصدر: جريدة الحياة، العدد 14552، تاريخ 2003/1/25

جدول (3): أسعار الفائدة السنوية على بعض العملات العربية والأجنبية % (وذلك حسب طول مدة الإيداع)

مدة الإيداع / العملة	شهر	ثلاثة أشهر	ستة أشهر	سنة
الدينار الكويتي	2.05	2.05	2.10	2.20
الريال السعودي	1.74	2.04	0.27	2.56
الدرهم الإماراتي	1.52	1.52	1.56	1.60
الريال القطري	-	-	-	-
الدينار البحريني	5.5	1.49	1.5	1.57
الليرة السورية	8	9	9	9
الدولار الأمريكي	1.34	1.34	1.34	1.40
الجنيه الإسترليني	3.97	3.97	3.95	3.95
اليورو	2.85	2.83	2.76	2.65
الفرنك السويسري	0.61	0.62	0.62	0.71
الين الياباني	0.02	0.03	0.07	0.09

المصدر: جريدة الحياة، العدد 14552، تاريخ 2003/1/25

1-2- مؤسسات الإيداع والادخار:

معلوم لدى الجميع أنه في كل دولة توجد مؤسسات مالية تتعامل مع الأوراق المالية بكل أنواعها؛ وأهم هذه المؤسسات هي:

- المصارف الحكومية والخاصة.
- صناديق الادخار.
- صناديق التوفير.
- صناديق البريد.

ولكل من هذه المؤسسات أنظمتها الخاصة في الإيداع والادخار، ولكنها تشترك جميعاً في طرق الحساب، وفي الاعتماد على الرياضيات المالية في حل جميع مشكلاتها.

1-3- أنظمة الإيداع والادخار:

توجد عدة أنظمة للإيداع والادخار أهمها:

1 - نظام الإيداع دون فائدة: وهذا النوع من الإيداع لا يقدم للمودع أية فوائد مالية عن المبالغ التي يودعها لدى المصرف، ويعتبرها شبه أمانات.

2 - نظام الإيداع بفائدة بسيطة: وهذا النوع من الإيداع يتم فيه حساب فوائد على المبالغ التي تودع في المصرف، ولكن تلك الفوائد لا تضم إلى المبلغ الأصلي لتحصل على فوائد جديدة؛ بل تحسب على الرصيد عند إجراء التسوية أو عند إغلاق الحساب، ويطبق هذا النظام على الإيداعات قصيرة الأجل (أقل من السنة).

3 - نظام الإيداع بفائدة مركبة: وهذا النظام يمنح المبالغ المودعة فائدة، ويعمل على إضافة تلك الفائدة في نهاية كل عام (أو كل نصف عام، أو كل فصل) إلى المبلغ الأصلي ليتم حساب الفائدة الجديدة على الناتج، أي إن الفائدة المستحقة تضاف إلى

المبلغ لتأخذ فائدةً عليها أيضاً، ويطبق هذا النظام في معظم المصارف الحكومية والخاصة في جميع أنحاء العالم، كما يستخدم في عمليات خصم الأوراق المالية، وعند إجراء دراسات الجدوى الاقتصادية، وحساب القيم الحالية والتكاليف الاستثمارية وغيرها.

1-4- سعر الفائدة السنوي:

وهو نسبة مئوية تستخدم لحساب مقدار الفائدة المستحقة على المبلغ المودع بعد مرور سنة واحدة على إيداعه، ويتم ذلك بضرب تلك النسبة المئوية بقيمة المبلغ المودع؛ فمثلاً إذا أودعنا مبلغ 1000 ل.س بفائدة سنوية 9%، فإن مقدار الفائدة المستحقة على ذلك المبلغ بعد مرور سنة واحدة هو:

$$I = 1000.\frac{9}{100} = 90\ L.S.$$

فإذا كان نظام الإيداع حسب الفائدة البسيطة، فإن تلك الفائدة لا تضاف إلى المبلغ الأصلي /1000/ حتى لا تأخذ فائدة جديدة، ولكنها تبقى من حق المودع، وتحسب في رصيده العام. أما إذا كان نظام الإيداع حسب الفائدة المركّبة، فإن تلك الفائدة تضاف إلى المبلغ الأصلي /1000/ لتأخذ فائدة جديدة، ويصبح المبلغ الجديد /1090/، ويحسب مقدار الفائدة الجديدة في العام التالي على المبلغ الجديد كما يلي:

$$I_2 = 1090.\frac{9}{100} = 108.10\ L.S.$$

1-5- مدة الإيداع:

وتحسب مدة الإيداع بالسنوات حتى تتناسب مع المصطلحات الأخرى، وأهمها سعر الفائدة السنوي، أما إذا كانت تلك المدة محسوبة بالأشهر أو الأسابيع أو الأيام، فإننا نقوم بتحويل تلك المدة إلى سنوات، بتقسيمها على عدد الأشهر أو الأسابيع أو الأيام في السنة، وهنا نذكّر القارئ ببعض المفاهيم المختلفة عن السنوات المستخدمة في الحسابات المالية وهي:

السنة الميلادية (الشمسية) = 12 شهراً = 52 أسبوعاً = 365.25 يوماً.

ويتم حساب ربع اليوم السابق بإضافة يوم إلى شهر شباط كل أربع سنوات، وعندها تسمى تلك السنة الميلادية بالسنة الكبيسة، وتساوي 366 يوماً، وهي تكون في الأعوام التي رقمها يقبل القسمة على العدد 4، مثل عام 2000 ثم 2004 ثم 2008 ...إلخ. وعندما يكون التعامل مع الأيام فإنه يكون ثمة مفهومان للسنة وهما:

- السنة الصحيحة: وهي التي تحسب 365 يوماً (أو 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة).
- السنة التجارية: وهي التي تحسب 360 يوماً فقط.

وهنا نشير إلى أنه عند حساب مدة الإيداع فإن يوم الإيداع لا يدخل ضمن مدة الإيداع، بينما يدخل يوم السحب ضمن مدة الإيداع، ويستخدم لحساب مدة الإيداع جدول خاص يتضمن الرقم التراكمي لأيام السنة؛ ويتم ذلك بطرح العدد التراكمي ليوم الإيداع

من العدد التراكمي ليوم السحب (مع ملاحظة أنه إذا كانت تلك المدة تضم يوم 29 شباط من سنة كبيسة فإننا نضيف يوماً إلى المدة المحسوبة).
أنظر الجدول (5) وقم بإجراء عدة تطبيقات عليه.

جدول (4):الرقم التراكمي لأيام السنة الميلادية

1-6- إرشادات حول استخدام الآلات الحاسبة:

نظـراً لانتشـار الآلات الحاسـبة واسـتخدامها فـي مختلـف العمليـات الحسـابية والمعالجات الإحصائية، فإنه يمكننا الاستغناء عن الجداول المالية التي تستخدم لحساب بعض التراكيب الرياضية، لأن تلك الجداول لا تقدم لنا إلا حلولاً لبعض الحالات الخاصة الصحيحة.

وسنعتمد في تدريس هذا المقرر، وفي التدريب على حل مسائله وتمارينه، على استخدام الآلات الحاسبة العلمية، التي تحوي مختلف التوابع الرياضية والإحصائية؛ لذلك ننصح الطالب باقتناء آلة حاسبة علمية تحوي تلك التوابع، وتتضمن النظام *SD* الإحصائي، لأن مثل تلك الآلات ستكون ضرورية للطالب في المقررات الأخرى.

ونقدم هنا للطالب الإرشادات التالية حول أهم مواصفات الآلة المناسبة له، وهي:

1 ـ أن تحتوي الآلة على نظام *SD* الإحصائي وغيره من التوابع الرياضية.

2 ـ أن تكون تغذية الآلة على الطاقة الشمسية، أو على بطاريات الليثيوم.

3 ـ أن تكون بسيطة المنظر، وسهلة الاستعمال، بغض النظر عن ماركتها.

4 ـ أن يتم التدرب على استخدامها، وعلى الاستفادة من جميع توابعها وخصائصها خلال العام.

5 ـ أن تحتوي هذه الآلات على عدّة أنظمة، ونستطيع تحديد النظام الذي نرغب العمل عليه بواسطة المفتاح *Mode* ورقم آخر مرافق له، وهو مختلف من آلة لأخرى.

وأخيراً نشير إلى أنه يمكن الاستفادة من هذه الآلات لإجراء العمليات الحسابية البسيطة ولحساب التوابع التالية:

أ ـ التوابع الرياضية مثل: اللوغاريتم العشري *lg*، اللوغاريتم النيبري *ln*، وكذلك التوابع الأسية $10^x, e^x$ والتوابع العكسية لها، وذلك باستخدام *Shift* أو *INV*.

ب ـ القوى والجذور التربيعية والتكعيبية والتي يرمز لها بـ x^2 و $\sqrt{\ }$ و x^3 و $\sqrt[3]{x}$.

جـ ـ القوى والجذور من المراتب العليا أو الكسرية بواسطة x^y و $x^{\frac{1}{y}}$ أو $\sqrt[y]{x}$.

د ـ المتوافقات *nCr*، أو المتبادلات *nPr*.

هـ ـ التوابع المثلثية *Sin, cos, tg*، وتوابعها العكسية.

و ـ المقلوب $\frac{1}{x}$ والعاملي $x!$.

ز ـ المتوسط $\bar{x}$ والمتوسط $\bar{y}$ للمتحولين x وy.

حـ ـ الانحراف المعياري σxn و σyn أو الانحراف المعياري المصحح σxn_{-1} و σyn_{-1} للمتحولين x وy.

ط ـ معامل الارتباط البيرسوني r، ومعاملي مستقيم الانحدار a وb بين المتحولين x وy.

ي ـ المجاميع اللازمة لبعض الحسابات الإحصائية.

$$\sum y_i^3 \quad \sum x_i^3 \quad \sum x_i \cdot y_i \qquad \sum y_i^2 \quad \sum x_i^2 \quad \sum y_i \quad \sum x_i$$

وهناك العديد من الوظائف الأخرى التي يمكن يستفيد منها الطالب في حياته الدراسية والعملية.

1 - 7 - الأرقام العشرية ورموزها:

لقد مر الإنسان بمراحل متعددة حتى توصل إلى الأرقام العشرية المستخدمة حالياً، وكان اختراعها فتحاً علمياً كبيراً في تاريخ الإنسانية، واستخدم للتعبير عنها عدة أشكال أهمها: الرموز الحالية المنتشرة في جميع أنحاء العالم والتي تسمى بالأرقام العربية.

أما الرومان فكانوا يستخدمون رموزاً أخرى معقدة وغير عملية ولذلك لم تعد تستخدم إلا في عمليات التصنيف والتبويب والتأليف.

وحرصاً منا على تعريف الطالب بهذه الرموز نضع جدولاً مقارناً لرموز الأرقام العشرية حسب النظام العربي والروماني.

كما نورد في الصفحة التالية جدولاً بالأحرف الأبجدية العربية (حسب الترتيب القديم) وبالأحرف اللاتينية واليونانية وأسمائها حسب لفظها باللغة الإنكليزية.

جدول (6) الأرقام العشرية ورموزها:

الرموز العربية	الرموز الرومانية المقابلة	الرموز الهندية أو الشرقية
1	I	1
2	II	2
3	III	3
4	IV	4
5	V	5
6	VI	6
7	VII	7
8	VIII	8
9	IX	9
10	X	10
50	L	50
100	C	100
500	D	500

1000	м	100

8-1- الأحرف الأبجدية العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها:

جدول (6) الأحرف الأبجدية العربية واللاتينية واليونانية وأسماؤها:

الأحرف الأبجدية العربية مرتبة بحسب الترتيب الأبجدي القديم	أحرف الأبجدية اللاتينية			أحرف الأبجدية اليونانية		
	شكل الحرف		اسمه أو لفظه بالإنكليزية	شكل الحرف		اسمه أو لفظه بالإنكليزية
	حرف صغير	حرف كبير		حرف صغير	حرف كبير	
أ	*a*	*A*	اَ	α	Α	ألفا
ب	*b*	*B*	بي	β	Β	بيتا
ج	*c*	*C*	سي	γ	Γ	غاما
د	*d*	*D*	دي	δ	Δ	ديلتا
هـ	*e*	*E*	إي	ε	Ε	إبسيلون
و	*f*	*F*	إف	ζ	Ζ	زيتا
ز	*g*	*G*	جي	η	Η	إيتا
ح	*h*	*H*	أتش	θ	Θ	تيتا
ط	*i*	*I*	آي	ι	Ι	يوتا
ي	*j*	*J*	جي	κ	Κ	كبّا
ك	*k*	*K*	كي	λ	Λ	لمدا
ل	*l*	*L*	إل	μ	Μ	ميو
م	*m*	*M*	إم	ν	Ν	نيو
ن	*n*	*N*	إن	ξ	Ξ	كسي
س	*o*	*O*	أو	o	Ο	أوميكرون
ع	*p*	*P*	بي	π	Π	بي
ف	*q*	*Q*	كيو	ρ	Ρ	رو
ص	*r*	*R*	أر	σ	Σ	سيكما
ق	*s*	*S*	إس	τ	Τ	تاو
ر	*t*	*T*	تي	υ	Υ	يوبسيلون
ش	*u*	*U*	يو	φ	Φ	فاي
ت	*v*	*V*	في	χ	Χ	كاي
ث	*w*	*W*	دبل يو	ψ	Ψ	بسي
خ	*x*	*X*	إكس	ω	Ω	أوميغا
ذ	*y*	*Y*	واي			
ض	*z*	*Z*	زد			
ظ						
غ						

1-9- بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية:

جدول (7) بعض الرموز الرياضية المستخدمة في المراجع العلمية:

الرمز أو المصطلح	اسم الرمز ولفظه	مثال رياضي أو لفظي على استخدام الرمز أو المصطلح
Φ	المجموعة الخالية	مجموعة البشر على سطح القمر
Ω	المجموعة الكلية (أوميغا)	مجموعة الأشياء في الكون
$\exists$	توجد حالة واحدة على الأقل	يوجد واحد على الأقل مستيقظ
$\forall$	مهما يكن	مهما تكن X من B $\forall x \in B$
$\prod$	جداء حدود	$\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1.x_2.x_3$
$\sum$	مجموع حدود (سيغما)	$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$
!	عاملي	$4! = 4.3.2.1$
!!	العاملي الفردي أو الزوجي	$5!! = 5.3.1, \qquad 6!! = 6.4.2$
Δ	مثلث	مثلث قائم Δ
$\angle$	زاوية	زاوية قائمة $\llcorner$
$\perp$	التعامد	$\overline{ab} \perp \overline{cd}$
$\sim$	التشابه	$\Delta_1 \sim \Delta_2$
π	عدد ويمثل نسبة محيط الدائرة إلى قطرها	$\pi \approx 3{,}1416....$
e	العدد النيبري -	$e \approx 2{,}728\ ...$
^{o}	الدرجة للزوايا	$120^{\circ}, 30', 45''$
$^{'}$	الدقيقة للزوايا	$120^{\circ}, 30', 45''$
$^{''}$	الثانية للزوايا	$120^{\circ}, 30', 45''$
ln	اللوغاريتم الطبيعي (بالنسبة لـ e)	$\ln e = 1, \qquad \ln 225 = 5{,}4161004$
log_b	اللوغاريتم بالنسبة للأساس b	$log_b\ b=1$
$\log_{10}$	اللوغاريتم بالنسبة للأساس 10	$\mathrm{Log}225 = 2{,}3521825\ , \qquad \mathrm{Log}_{10}\ 10 = 1$
Lim	نهاية مقدار ما	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
ct	المقدار الثابت	
sin	جيب	$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$
cos	تجيب	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
tg	ظل	$tg\frac{\pi}{4} = 1$
$arc\ sin$	الزاوية التي تقابل الجيب	$arc\sin\frac{1}{2} = 30^{\circ}$

arc cos	الزاوية التي تقابل التجب	$arc\cos\frac{1}{2}=60^\circ$
arc tg	الزاوية التي تقابل الظل	$arc\,tg(1)=\frac{\pi}{4}$

الفصل الثاني
المتواليات والسلاسل العددية

1 ـ مفهوم المتوالية العددية.
2 ـ المتوالية الحسابية وتطبيقاتها.
3 ـ المتوالية الهندسية وتطبيقاتها.
4 ـ المتواليات غير المنتهية.
5 ـ السلاسل العددية.
6 ـ نهاية السلاسل المتقاربة.
7 ـ السلسلة الهندسية.
8 ـ خواص السلسة المتقاربة.

الفصل الثاني

المتواليات والسلاسل العددية

2-1- مفهوم المتوالية العددية:

تعريف: نقول عن كل كميات عددية من الشكل:

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,.....a_k,.....a_n,$$

إنها متوالية عددية إذا كانت تنشأ حدودها عن بعضها بعض وفق علاقة أو قانون معين، ونسمي a_1 حدها الأول، و a_n حدها الأخير، و a_k حدها العام وn عدد حدودها.

وعندما يكون عدد الحدود n محدوداً تسمى المتوالية متوالية منتهية، أما إذا كان عدد الحدود n غير محدود فتسمى المتوالية متوالية غير منتهية، وإذا كانت الحدود متزايدة، أي إذا كان:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le .....a_k \le .....a_n$$

فإننا نسمي المتوالية متوالية متزايدة.

أما إذا كانت الحدود متناقصة، أي إذا كان:

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge .....a_k \ge .....a_n$$

فإننا نسمي المتوالية متوالية متناقصة.

وسنميز هنا بين عدد من أنواع المتواليات المنتهية، وهي:

2-2- المتوالية الحسابية وتطبيقاتها:

2-2-1- تعريف: نقول عن المتوالية:

$$a_1, a_2, a_3,.....a_k,.....a_n$$

إنها متوالية حسابية إذا كان كل حد ينشأ عن سابقه بإضافة عدد ثابت $r(r \ne 0)$ ويسمى r أساس المتوالية الحسابية، أي إنه حتى تكون المتوالية حسابية يجب أن يكون:

$$a_k = a_{k-1} + r \qquad (1-2)$$

وذلك مهما تكن k رقم الترتيب، وحيث إن $(k:2,3,...,n)$.

ومن العلاقة (1-2) نلاحظ أنه يمكننا كتابة جميع حدود المتوالية الحسابية بدلالة حدها الأول a_1 وأساسها r كما يلي:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k = a_{k-1} + r = a_1 + (k-1)r$$
$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r$$

وبذلك تأخذ حدود المتوالية الحسابية الشكل التالي:

$$a_1 \quad (a_1 + r) \quad ,(a_1 + 2r) \quad ,(a_1 + 3r),\ldots\ldots(a_1 + (k-1)r) \quad ,(a_1 + (n-1)r)$$

2-2-2- خواص حدود المتوالية الحسابية:

1 ـ من التعريف ينتج أن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي مقداراً ثابتاً r أي إن:

$$a_k - a_{k-1} = r$$

2 ـ إن مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً، وذلك لأن:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-2} = a_1 + 2r + (n-3)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وهكذا يتضح أن مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a_1 + (n-1)r$ ، وهو يساوي مجموع أي حدين متقابلين آخرين.

2-2-3- مجموع حدود المتوالية الحسابية:

إذا رمزنا لمجموع حدود المتوالية الحسابية بـ P_n، فيكون لدينا أن:

$$Pn = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots a_k + \ldots\ldots\ldots a_n$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل المختصر الآتي:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

لحساب هذا المجموع نكتب حدود المتوالية مرتين وبشكل متعاكس على النحو التالي:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3,\ldots\ldots a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n$$
$$a_n, \quad a_{n-1}, \quad a_{n-2}\ldots\ldots a_3, \quad a_2, \quad a_1$$

ثم نأخذ مجموع كل حدين متقابلين ولجميع الحدود، فنحصل على العلاقة التالية:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ...(a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = 2P_n$$

وبالاستفادة من الخاصة الثانية السابقة حول مجموع الحدود المتقابلة، وبملاحظة أن جميع الأزواج في الطرف الأيسر متساوية وتساوي $[2a_1 + (n-1)r]$ وأن عدد هذه الأزواج يساوي n زوجاً، فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$n[2a_1 + (n-1)r] = 2P_n$$

ومنها نجد أن المجموع P_n يساوي:

$$P_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r] \qquad (2-2)$$

وبما أن المقدار $[2a_1 + (n-1)r]$ يساوي مجموع أي حدين متقابلين مثل الحدين $(a_1 + a_n)$، وبالتعويض في العلاقة (2-2) نجد أن مجموع حدود المتوالية الحسابية يمكن أن يحسب من العلاقة التالية:

$$P_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (3-2)$$

مثال1:

أوجد نوع وأساس ومجموع حدود المتوالية التالية:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

الحل:

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية حسابية، لأن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي 2، وأن حدها الأول $a_1 = 2$، وحدها الأخير $a_n = 20$، وعدد حدودها *n=10*، وبذلك نجد أن مجموع حدودها:

$$P_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(2 + 20) = 110$$

مثال 2 :

أوجد مجموع المتوالية التالية:

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38

الحل:

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية حسابية أساسها يساوي $r = 5$، وحدها الأول $a_1 = 3$ وحدها الأخير $a_n = 38$، وعدد حدودها *n=8*، وبذلك نجد أن مجموع حدودها يساوي:

$$P_8 = \frac{8}{2}(3+38) = 164$$

مثال 3 :

أوجد مجموع عشرة الحدود الأولى لمتوالية حسابية أساسها *r=6*، وحدها الأول $a_1 = 5$:

الحل:

من العلاقة (2-2) نجد أن:

$$P_{10} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

$$P_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 5 + 9 \cdot 6) = 320$$

2-2-4- مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية التالية:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., (n-2), (n-1), n

لحساب مجموع حدود هذه المتوالية نلاحظ أنها متوالية حسابية، لأن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي مقداراً ثابتاً *r*، (هنا *r=1*) وأن حدها الأول $a_1 = 1$ ، وحدها الأخير $a_n = n$، وعدد حدودها *n*، وبذلك نجد أن مجموعها حسب العلاقة (2-3) يساوي:

$$P_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1+n) \qquad (4-2)$$

وهي علاقة هامة تستخدم كثيراً في حساب مجموع الأعداد الطبيعية من *1* حتى أي عدد *n*.

ومن الواضح أنه يمكننا حساب مجموع حدود هذه المتوالية باستخدام العلاقة (2-2) فيكون:

$$P_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1] = \frac{n}{2}(n+1)$$

وهي العلاقة (2-4) السابقة نفسها.

2-2-5- مجموع حدود متوالية الأعداد الفردية ومتوالية الأعداد الزوجية الطبيعية:

أوجد العلاقة التي تعطينا مجموع الأعداد الفردية، من *1* حتى *(2n-1)*، أي مجموع الـ *n* حداً الأولى منها، ثم العلاقة التي تعطينا مجموع الأعداد الزوجية من *2* حتى الحد *2n*.

الحل:

إن متوالية الأعداد الفردية هي: *1, 3, 5, 7, 9,.....,(2n-1)* لحساب مجموعها نلاحظ أنها متوالية حسابية أساسها *r=2* ، وحدها الأول $a_1 = 1$ ، وحدها الأخير $a_n = (2n-1)$، وعدد حدودها *n* حداً، وبذلك يكون:

$$P_n = \frac{n}{2}[1+(2n-1)] = n^2 \qquad (5-2)$$

وبطريقةٍ مشابهة نجد أن مجموع الأعداد الزوجية من *2* حتى *2n* يعطى بالعلاقة:

$$P_n = n(n+1) \qquad (6-2)$$

2-2-6- مجموع حدود متوالية مربعات الأعداد الطبيعية، وهي المتواليات التي حدودها:

$$1^2,\ \ 2^2,\ \ 3^2,\ \ 4^2,\ \ 5^2,\ldots\ldots\ldots,k^2,\ldots\ldots\ldots n^2,$$

نرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز S_n فيكون:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2$$

ولحساب مجموع حدود هذه المتوالية نأخذ المتطابقة التالية:

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

ثم نعطي *k* قيماً مختلفة من *1* حتى *n* فنحصل على ما يلي:

عندما يكون *k=1* يكون: $1^3 - 0^3 = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1$

عندما يكون *k=2* يكون: $2^3 - 1^3 = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1$

عندما يكون *k=3* يكون: $3^3 - 2^3 = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1$

عندما يكون *k=4* يكون: $4^3 - 3^3 = 3\cdot 4^2 - 3\cdot 4 + 1$

عندما يكون *k=5* يكون: $5^3 - 4^3 = 3\cdot 5^2 - 3\cdot 5 + 1$

....

عندما يكون *k=n* يكون: $n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1$

نجمع شاقولياً حدود كل طرف على حدة فنحصل على:

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots\ldots + 1^2) - 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + n) + n$$

وبما أن مجموع مربعات الحدود يساوي S_n ، وأن مجموع الحدود نفسها يساوي $\frac{n}{2}(1+n)$ فالطرف الثاني يساوي:

$$n^3 = 3S_n - 3\frac{n}{2}(n+1) + n$$

ومنها نجد:

$$3S_n = n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n$$

$$S_n = \frac{n}{3}[n^2 + \frac{3}{2}(n+1) - 1]$$

$$S_n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1}{6} \qquad (6-2)$$

وبتحليل القوس الذي في البسط إلى عوامله نجد أن مجموع مربعات n عدد طبيعي يعطى بالعلاقة:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (7-2)$$

مثال 4:

أوجد مجموع مربعات الأعداد الطبيعية من *1* حتى *20*:

الحل:

إن متوالية المربعات العشرين هي:

$$1^2,\ \ 2^2,\ \ 3^2,\ \ 4^2,\ \ 5^2,.....,20^2$$

وإن مجموعها S_n يساوي:

$$S_n = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

2-2-7- مجموع حدود متواليات مكعبات الأعداد الطبيعية، وهي المتوالية:

$$1^3,\ \ 2^3,\ \ 3^3,\ \ 4^3,\ \ 5^3,.....,k^3,.....n^3,$$

نرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز σ_n فيكون:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3$$

ولحساب هذه المتوالية نأخذ المتطابقة التالية:

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

ويمكننا التوصل إلى ما نريد باتباع الأسلوب الذي اتبعناه في متوالية المربعات، ولكننا هنا ومن أجل الاستفادة سنتبع أسلوباً آخر للبرهان، فنأخذ المجموع النوني لكلا الطرفين، فيكون:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^4 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - n$$

وبملاحظة أن الطرف الأيسر يساوي n^4 يكون لدينا:

$$n^4 = 4\sigma_n - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n}{2}(1+n) - n$$

ومنه يكون لدينا:

$$4\sigma_n = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(1+n) + n$$

وبإجراء بعض الإصلاحات نجد أن:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (8-2)$$

مثال 5:

أوجد مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية من 1 إلى 20.

الحل:

إن متوالية المكعبات هي:

$$1^3,\ \ 2^3,\ \ 3^3,\ \ 4^3,\ \ 5^3,\ldots\ldots\ldots,20^3$$

ومجموع حدودها يساوي:

$$\sigma_n = \left[\frac{20.21}{2}\right]^2 = 44100$$

2-3- المتوالية الهندسية وتطبيقاتها:

2-3-1- تعريف: نقول عن المتوالية:

$$a_1, a_2,\ \ a_3,\ \ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n$$

إنها متوالية هندسية إذا كانت نسبة كل حد على سابقه تساوي دائماً مقداراً ثابتاً q، (بشرط أن يكون $q \neq 1$)، ويسمى q أساس المتوالية الهندسية؛ أي إنه في المتوالية الهندسية يكون دينا:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \qquad (9-2)$$

وذلك مهما تكن رقم الترتيب k، حيث *(k: 2, 3,.....,n)*.

ومن العلاقة (2-9) يتضح لنا أنه يمكننا كتابة الحد العام للمتوالية الهندسية على الشكل:

$$a_k = q \cdot a_{k-1}$$

أي أن كل حد من حدود المتوالية الهندسية ينشأ عن سابقه بالضرب بعدد ثابت q (حيث $q \neq 1$)، ومنه نجد أن الحدود المنفردة والمفصلة تساوي:

$$a_2 = qa_1 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$
.....
$$a_k = a_{k-1} q = a_1 q^{k-1}$$
.....
$$a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}$$

كما يمكن كتابة الحدود كما يلي:

$$a_1,\quad a_1 q,\quad a_1 q^2,\quad a_1 q^3, \ldots\ldots a_1 q^{k-1}, \ldots\ldots a_1 q^{n-1} \qquad (10-2)$$

2-3-2- مجموع حدود المتوالية الهندسية:

لنرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز G_n فيكون:

$$G_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots\ldots + a_1 q^{k-1} + \ldots\ldots + a_1 q^{n-1} \qquad (11-2)$$

ولحساب هذا المجموع نضرب طرفي العلاقة (2-11) بالأساس q فنحصل على العلاقة:

$$qG_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots\ldots + a_1 q^k + \ldots\ldots + a_1 q^n \qquad (12-2)$$

ثم نطرح المجموع (2-11) من المجموع (2-12) فنجد أن:

$$qG_n - G_n = a_1 q^n - a_1$$
$$G_n (q-1) = a_1 (q^n - 1)$$

وبذلك نجد أن المجموع G_n يساوي:

$$G_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (q \neq 1) \qquad (13-2)$$

مثال 6:

أوجد أساس ومجموع المتوالية:

2, 6, 18, 54, 162, 486

الحل:

نلاحظ أن نسبة أي حد على سابقه تساوي *3*؛ أي إن المتوالية هي متوالية هندسية أساسها $q=3$ ، وحدها الأول $a_1 = 2$ ، وعدد حدودها $n=6$. وبذلك يكون مجموع حدود هذه المتوالية الهندسية مساوياً لـ:

$$G_6 = 2\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728$$

مثال 7:

يحكى أن مخترع الشطرنج طلب من السلطان مقابل اختراعه جائزة تتمثل في أن يضعوا له حبة قمح في المربع الأول، ثم ضعفها في الثاني، ثم ضعف ذلك في الثالث ...إلخ. فلم يتمكن السلطان من أداء هذه الجائزة.

فما هو مجموع عدد حبات القمح اللازمة لذلك؟

الحل:

إن متوالية عدد حبات القمح هي:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ldots\ldots\ldots\ldots,a_{64}$$

وهي عبارة عن متوالية هندسية، وحدها الأول $a_1 = 1$، أساسها $q=2$، وعدد حدودها $n=64$ (عدد المربعات)، وبذلك نجد أن مجموع حبات القمح اللازمة يساوي:

$$G_{64} = 1.\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 184467{,}44 \cdot 10^{15}$$

أي إن الجائزة بلغت أكثر من 184467440 تريليون حبة قمح، وهو أمر كان أكبر من استطاعة ذلك السلطان.

مثال 8:

إذا كان مجموع حدود متوالية هندسية يساوي 242، وكان أساسها $q=3$، وعدد حدودها $n=5$، فما هو حدها الأول؟

الحل:

من العلاقة (13-2) نجد أن:

$$242 = a_1.\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121a_1$$

$$a_1 = \frac{242}{121} = 2$$

مثال 9:

إذا علمنا أن مجموع حدود متوالية هندسية يساوي 728، وأن أساسها $q=3$، وأن حدها الأول $a_1 = 2$ ، فما هو عدد حدودها؟

الحل:

من العلاقة (13-2) نجد أن:

$$728 = 2\frac{3^n - 1}{3-1} = 3^n - 1$$

$$729 = 3^n$$

لحساب n نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$\lg(729) = n\,\lg(3)$$

$$n = \frac{\lg(729)}{\lg(3)} = \frac{2{,}862727528}{0{,}4771212547} = 6$$

2-4- المتواليات غير المنتهية:

إن المتواليات غير المنتهية هي التي تتضمن لا نهاية من الحدود، وتكتب على الشكل التالي:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n + \ldots\ldots$$

وعند حساب مجموع حدود هذه المتواليات يجب أن نلاحظ أن قيمة ذلك المجموع قد تكون لا نهائية أيضاً، لذلك فمن المهم جداً أن ندرس هذه الحالات، وأن نبحث عن قيمة مجموع حدود المتواليات غير المنتهية إذا كانت موجودة.

وهنا نشير إلى أن مجموع المتوالية الحسابية وغير المنتهية يكون لا نهائياً مهما يكن أساسها، وحدها الأول [انظر العلاقتين (2-1) و(3-1)]، أما بالنسبة للمتوالية الهندسية غير المنتهية فإننا نلاحظ من العلاقة (3-2) أن مجموعها G_n يكون معيناً فقط عندما يكون أساسها $|q|<1$، أما عندما يكون $|q|\geq 1$ فإن ذلك المجموع G_n يصبح لا نهائياً أو غير معين، وسنصادف مثل هذه الحالات في فقرة السلاسل التالية:

2-5- السلاسل العددية:

2-5-1-تعريف السلسلة:

إن السلسلة هي المجموع اللانهائي لحدود متوالية غير منتهية.
فإذا كانت لدينا المتوالية غير المنتهية التالية:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n + \ldots\ldots\ldots$$

فإن السلسلة هي المجموع اللانهائي لحدودها، ونرمز له بـ S، فيكون لدينا:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (14-2)$$

وبما أن a_k هو الحد العام للمتوالية غير المنتهية السابقة، فسنصطلح على أن نرمز للسلسلة التي حدها العام a_k بالرمز $\{a_k\}$.
وهنا نميز بين نوعين من السلاسل هما:

1 ـ السلاسل المتقاربة:

وهي السلاسل التي يكون فيها للمجموع السابق S قيمة معينة، ونسمي هذه القيمة بنهاية السلسلة المفروضة.

2 ـ السلاسل المتباعدة:

وهي السلاسل التي يكون فيها للمجموع السابق S قيمة غير معينة أو لا نهائية؛ أي إنه لا يمكننا حساب قيمة S للسلاسل المتباعدة.

2-6- نهاية السلاسل المتقاربة:

نلاحظ أن حساب قيمة المجموع S ـ وحتى في السلاسل المتقاربة ـ يعتبر أمراً مستحيلاً، وذلك لأنه يتضمن لا نهاية من الحدود، لذلك فإننا نقوم بأخذ الـ n حداً الأولى من حدود المتوالية، ونحسب مجموعها ـ إن أمكن ـ بدلالة n، ثم ننهي n إلى اللانهاية، فنحصل على قيمة المجموع اللانهائي S، أو على نهاية السلسلة عندما تنتهي n إلى اللانهاية.

فإذا رمزنا إلى الـ n حداً الأولى من حدود المتوالية بالرموز:

$$a_1,\ \ a_2,\ \ a_3,\ \ a_4,\ldots\ldots\ldots a_k,\ldots\ldots\ldots a_n$$

ولمجموعها بالرمز S_n فيكون:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (15-2)$$

ومن الواضح أن نهاية S_n عندما تنتهي n إلى اللانهاية ـ إذا كانت هذه النهاية موجودة ـ تساوي المجموع الحقيقي S، أو نهاية السلسلة المفروضة؛ أي إن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (16-2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

ويمكن أن يكتب ذلك على الشكل التالي:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \qquad (17-2)$$

وهنا نشير إلى أن الكلام عن مجموع لا نهائي لحدود متوالية ما لن يكون له معنى إلا عندما تكون السلسلة متقاربة.

وعندما يكون n كبيراً بشكلٍ كافٍ، وتكون السلسلة متقاربة، فإن المجموع S_n يعتبر قيمة تقريبية مقبولة للمجموع S. والخطأ R_n المرتكب من جراء ذلك التقريب يساوي:

$$R_n = S - S_n \qquad (18-2)$$

ويسمى R_n بباقي السلسلة، وهو عبارة عن مجموع لا نهائي أيضاً، نحصل عليه من السلسلة الأصلية بعد حذف الـ n حداً الأولى منها؛ أي إن:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (19-2)$$

وتبقى قيمة الخطأ R_n في أغلب الأحيان مجهولة، وتستبدل ـ إذا كانت السلسلة متقاربة ـ بقيمة تقريبية لها.

2-7- السلسلة الهندسية:

لتكن لدينا المتوالية الهندسية غير المنتهية التالية:

$$aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ldots\ldots aq^n,\ aq^{n+1}\ldots\ldots$$

ومجموعها S يساوي:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots\ldots + aq^n + aq^{n+1} + \ldots\ldots$$

ويطلق عليه اسم السلسلة الهندسية.

ولإيجاد قيمة S هذه نأخذ مجموع الـ n حداً الأولى منها S_n فيكون:

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{n-1}$$

واعتماداً على العلاقة (13-21) نجد أن S_n يساوي:

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (20-2)$$

ولحساب قيمة S ننهي n إلى اللانهاية، ونبحث عن نهاية S_n ، وهنا نميز الحالات التالية:

1 ـ عندما يكون $|q|<1$، في هذه الحالة يكون:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

وتكون نهاية S_n تساوي:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}$$

أي إن قيمة السلسلة الهندسية في هذه الحالة تساوي:

$$S = \frac{a}{1-q} \qquad |q|<1 \qquad (21-2)$$

وبما أن المقدار الأخير محدود، فإن السلسلة تكون متقاربة في هذه الحالة.

2 ـ عندما تكون $|q|>1$ فإن:

$$q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

وعندها تكون السلسلة متباعدة ولا يمكن التعامل معها.

3 ـ عندما $q=1$ فإننا نجد أن:

$$S_n = \underbrace{a+a+a+a+\ldots\ldots\ldots\ldots+a}_{n \text{ مرة}} = n\cdot a$$

وبذلك نجد أيضاً:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

وتكون السلسلة متباعدة أيضاً.

4 ـ عندما $q=-1$ فإننا نجد أن:

$$S_n = \underbrace{a-a+a-a+\ldots\ldots\ldots\ldots+a}_{n \text{ مرة}}$$

وبذلك يكون:

$$S_n = \begin{cases} a & \text{إذا كان } n \text{ فردياً} \\ o & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً} \end{cases} \qquad (22\text{-}2)$$

أي إن نهاية S_n غير معينة، لأنها تتناوب بين إحدى القيمتين (a وصفر) ولذلك تعتبر السلسلة متباعدة أيضاً.

ولتقدير الخطأ المرتكب R_n من جراء تقريب S بواسطة S_n عندما تكون السلسلة متقاربة ($|q|<1$) ـ ولا معنى للبحث عن الخطأ في حالة السلاسل المتباعدة ـ نجد أنه:

بما أن $|q|<1$ لأن السلسلة متقاربة فرضاً، يكون لدينا في هذه الحالة أن:

$$R_n = S - S_n = \frac{a}{1-q} - a\frac{q_n-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}\left[1+q^n-1\right] = a\frac{q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{q^n}{q-1} = 0 \qquad (24-2)$$

أي إن الخطأ المرتكب R_n يقترب من الصفر كلما ازداد عدد الحدود n.

مثال 10:

كتطبيق على ما سبق احسب مجموع حدود المتوالية غير المنتهية التالية:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2^{n-1}},\ldots\ldots\ldots$$

الحل:

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية هندسية غير منتهية حدها الأول $a=1$، أساسها $q=\frac{1}{2}$. وبذلك يكون مجموعها S هو السلسلة التالية:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

ملاحظة:

مما سبق نلاحظ أن عملية التعبير عن المجموع S_n بواسطة علاقة رياضية ليست بالأمر السهل، بل هي عملية معقدة في كثير من الأحيان، لذلك فإن دراسة تقارب السلاسل عن طريق إيجاد تلك العلاقة بدلالة n، ثم إنهاء n إلى اللانهاية ليست دائماً طريقة عملية، وقد لا تؤدي بنا إلى نتيجة محددة، عدا عن أن حساب S_n بدلالة n لا يعتبر ضرورياً في كثير من الحالات، وحيث يكون همنا الأول معرفة فيما إذا كانت السلسلة متقاربة أم لا، وبعده نأخذ عدداً محدوداً من المجموع، ونعتبره قيمة تقريبية لـ S، وذلك دون الاهتمام بقيمة نهاية S_n عندما تنتهي n إلى اللانهاية.

وأخيراً نذكّر بأهمّ خواص السلاسل المتقاربة، وهي:

2-8- خواص السلاسل المتقاربة:

1 ـ إن مجموع ـ أو طرح ـ سلسلتين متقاربتين هو سلسلة متقاربة.

2 ـ إن جداء أي سلسلة متقاربة بعدد ثابت ومحدود هو سلسلة متقاربة.

3 ـ إن حذف ـ أو إضافة ـ عدد محدود من حدود سلسلة متقاربة لا يؤثر على تقاربها.

4 ـ إن الحد العام للسلسلة المتقاربة ينتهي إلى الصفر؛ أي إن: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (وهو شرط لازم فقط).

إن البرهان على هذه الخواص سهل جداً، وخاصةً إذا علمنا أن قيمة المجموع اللانهائي تبقى محدودة ومعينة في كل الحالات السابقة.

تمرينات

1 ـ أوجد نوع وأساس ومجموع المتواليات التالية:

أ ـ متوالية الأعداد الفردية من *1* حتى *99*.

ب ـ المتوالية *3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24*.

جـ ـ المتوالية التي حدها الأول $a_1 = 5$ ، وأساسها *r=2*، وعدد حدودها *n=15*.

د ـ المتوالية التالية:

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64}$$

هـ ـ المتوالية التي حدها الأول $a = 4$ ، وأساسها *q=2*، وعدد حدودها *n=10*.

و ـ المتوالية التي حدودها:

$$1,\ 2x,\ 3x^2,\ 4x^3,\ 5x^4,\ldots\ldots\ldots\ldots,nx^{n-1}$$

ز ـ المتوالية:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

2 ـ أوجد الحد العام للسلاسل التالية وحاول أن تجد قيمة مجموعها *S*:

أ ـ السلسلة:

$$2+4+6+8+10+12+\ldots..$$

ب ـ السلسلة:

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\ldots\ldots\ldots$$

الجزء الثاني
نظام الفائدة البسيطة

ويتضمن الفصول الآتية:

الفصل الثالث: حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة).
الفصل الرابع: حساب القيمة الحالية والخصم للمبالغ والسندات (بفائدة بسيطة).
الفصل الخامس: حساب حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).
الفصل السادس: حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة).
الفصل السابع: حسابات تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة).
الفصل الثامن: حسابات القروض قصيرة الأجل وطرق تسديدها (بفائدة بسيطة).

الفصل الثالث

حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات التالية:

1 ـ تعاريف أولية: المبلغ الأصلي، سعر الفائدة السنوية، مدة الإيداع، مقدار الفائدة الصحيحة ، مقدار الفائدة التجارية.
2 ـ حساب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ واحد.
3 ـ حساب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة لعدة مبالغ.
4 ـ حساب مقدار الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ واحد.
5 ـ حساب حصيلة مبلغ واحد.
6 ـ حساب حصيلة عدة مبالغ.
7 ـ الحسابات الجارية وطرائقها، الطريقة المباشرة، طريقة النمر، طريقة حساب الفائدة على أقل رصيد خلال الشهر.
8 ـ تمرينات.

الفصل الثالث

حساب فائدة وحصيلة الإيداع (بفائدة بسيطة)

3-1- تعاريف أولية:

أ ـ المبلغ الأصلي: هو المبلغ الأساسي الذي يقوم الشخص بإيداعه في المصرف، أو عند أحد الناس مقابل فائدة محددة، ونرمز لهذا المبلغ بالرمز k.

ب ـ سعر الفائدة السنوية: وهو النسبة المئوية التي يستحقها المودع على المبلغ الأصلي k مقابل إيداعه لمدة سنة كاملة، ونرمز لسعر الفائدة السنوية بالرمز p، ويكون عادةً نسبة مئوية مثل 8%، أو 9%، أو غير ذلك.

جـ ـ مدة الإيداع: وهي الفترة الزمنية التي يودع بها المبلغ الأصلي، وتحسب عادةً بالسنوات، وإذا كانت المدة أقل من سنة، أو تشمل أجزاء أخرى من السنة، فيتم حسابها بالأيام، ثم تحويلها إلى سنوات بتقسيمها على 365 يوماً (أو على 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة)، علماً أن يوم الإيداع لا يدخل في حساب المدة، بينما يدخل يوم السحب في حساب مدة الإيداع. ويمكن الاستعانة بالجدول (4) للرقم التراكمي لأيام السنة عند حساب مدة الإيداع.

أما إذا كانت المدة مؤلفة من أشهر صحيحة فيتم حساب مدة الإيداع بالأشهر، ثم يتم تقسيمها على 12 لتحويلها إلى سنوات كاملة أو كسرية، ونرمز للمدة الزمنية المحسوبة بالسنوات بالرمز n.

د ـ مقدار الفائدة الصحيحة: وهو المبلغ الإضافي الذي يستحقه المودع مقابل إيداع المبلغ الأصلي k لمدةٍ ما؛ وهو يحسب بنفس الوحدات النقدية للمبلغ الأصلي k، وعندها تحسب السنة 365 يوماً (أو 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة)، أي عند حساب المدة بالأيام نقسمها على 365 يوماً.

هـ ـ مقدار الفائدة التجارية: وهو المبلغ الإضافي الذي يستحقه المودع مقابل إيداع المبلغ الأصلي k لمدةٍ ما؛ وذلك عندما تحسب السنة 360 يوماً فقط.

3-2- حساب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ واحد:

لحساب مقدار الفائدة المستحقة لمبلغ ما نلاحظ أن ذلك المقدار يتأثر بعدة عوامل هي:

سعر الفائدة السنوية p، وحجم المبلغ الأصلي k، ومدة الإيداع n بالسنوات، وبما أننا نقوم بإجراء الحسابات على أساس نظام الفائدة البسيطة نجد أنه:

في نهاية السنة الأولى يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p$ ليرة سورية.

وفي نهاية السنة الثانية يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p.2$ ليرة سورية.

وفي نهاية السنة الثالثة يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p.3$ ليرة سورية.

.....

وفي نهاية السنة n يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه $k.p.n$ ليرة سورية.

فإذا رمزنا لمقدار الفائدة الصحيحة المستحقة عند إيداع مبلغ k بفائدة سنوية p لمدة n بالرمز In، فإننا نحصل على العلاقة التالية:

$$In = k.p.n \qquad (1-3)$$

وهي معادلة تتضمن أربعة متحولات؛ إذا عرفنا ثلاثة منها نستطيع حساب الرابع.

مثال 1:

احسب مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 5000 ليرة سورية بفائدة 8% ولمدة 3 سنوات.

الحل:

لدينا: $k=5000$، و$p=0,08$، و$n=3$، ولكن $In=?$

وبذلك نجد:

$$In = 5000(0,08).3 = 1200\,L.S.$$

مثال 2:

أودع أحدهم مبلغ 10000 ليرة سورية لمدة سبعة أشهر بفائدة سنوية 9%، والمطلوب حساب مقدار الفائدة المستحقة.

الحل:

لدينا: $k=10000$، و$p=0,09$، و $n = \frac{7}{12}$، ولكن $In=?$

وبذلك نجد:

$$In = 10000(0,09).\frac{7}{12} = 525\,L.S.$$

مثال 3:

أودع أحمد مبلغ 25000 ليرة سورية بتاريخ 2002/1/12 وسحبه يوم 2002/9/17 فاحسب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة له إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية 10%.

الحل:

نلاحظ أن: $k=25000$، و$p=0,10$، ولحساب المدة n بالسنوات نحسبها أولاً بالأيام، ونلاحظ قبل كل شيء أن سنة 2002 ليست كبيسة، وعدد أيام شهر شباط يساوي 28 يوماً فقط، وبذلك نجد أن مدة الإيداع بالأيام حسب الأشهر المتتالية تساوي:
19 يوماً من كانون الثاني + 28 من شباط + 31 من آذار + 30 من نيسان + 31 من آيار + 30 من حزيران +31 من تموز + 17 يوماً من أيلول = مدة الإيداع بالأيام

$$M=19+28+31+30+31+30+31+31+17$$

$$M=248 \text{ يوماً}$$

وكان يمكننا حساب هذه المدة باستخدام الجدول التراكمي لأيام السنة ـ وهو الجدول (4) الوارد في الفصل الأول من هذا الكتاب ـ وذلك بإتباع القاعدتين التاليتين:

$$d=260-12=248 \text{ يوماً}$$

وبذلك نجد أن مدة الإيداع بالسنوات $n=\dfrac{248}{365}=$

وأن مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة يساوي:

$$In=25000(0,10).\frac{248}{365}=1698,63\,L.S.$$

مثال 4:

أودع حسام مبلغ 15000 ليرة سورية بتاريخ 2002/3/15 وسحبه بتاريخ 2002/8/25، وبلغ مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة له 550 ليرة سورية، فما هو سعر الفائدة السنوية للإيداع؟

الحل:

لدينا: $k=15000$، و$In=550$، ولكن $p=?$.

أما المدة بالأيام فنحسبها من الجدول الرقم التراكمي لأيام السنة فنجد أن:

$$d = 237 - 74 = 163 \text{ يوماً}$$

$$n = \frac{163}{365} = \text{سنة}$$

ولإيجاد سعر الفائدة الصحيحة نعوض في العلاقة (1-3) فنجد أن:

$$550 = 15000 \cdot P \cdot \frac{163}{365}$$

$$550 = 6698{,}63 \cdot P$$

وبذلك نجد أن:

$$p = \frac{550}{6698{,}63} = 0{,}082 \Rightarrow 8{,}2\%.$$

أي إن سعر الفائدة السنوية كان 8.2%.

مثال 5:

لقد توفر لدى حسين مبلغ 7000 ليرة سورية، وأراد أن يودعه في المصرف ليحصل على مبلغ من الفائدة قدره: 3000 ليرة سورية. فما هي المدة اللازمة لذلك إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية للإيداع 9%؟

الحل:

لدينا: $k=7000$، و$p=0.09$ ولكن $n=?$

غير أن مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة المستهدفة $In=3000$، وبتعويض هذه المعطيات في العلاقة (1-3) نجد أن:

$$3000 = 7000(0.09)n$$

$$3000 = 630.n$$

$$n = \frac{3000}{630} = 4{,}7619 \text{ سنة}$$

ولحساب كسر السنة بالأيام نضرب ذلك الكسر بـ 365، فنجد أن:

$$m = 0{,}7619 \times 365 = 278{,}09 \approx 279 \text{ يوماً}$$

أي إن المدة اللازمة ليحصل على مقدار فائدة *3000* ليرة سورية هي 4 سنوات و279 يوماً.

ملاحظة:

يتم تقريب كسر اليوم إلى يوم كامل مهما كان صغيراً. أي أن تقريب كسور الأيام يتم إلى الأعلى دائماً.

مثال 6:

ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه لمدة 3 سنوات وبفائدة 8% للحصول على مقدار للفائدة مساوٍ لـ 5000 ليرة سورية.

الحل:

لدينا: $k=?$، و$p=0.08$ ولكن $n=3$، $In=5000$.

وبتعويض هذه المعطيات في العلاقة (1-3) نجد أن:

$$5000 = k(0.08).3$$

$$5000 = 0{,}24k$$

$$k = 20833{,}33 \qquad L.S. \text{ سنة}$$

3 - 3 - حساب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة لعدة مبالغ:

وتحسب من خلال القاعدة التالية:

إن إجمالي الفائدة المستحقة لعدة مبالغ = مجموع مقادير الفوائد المستحقة لكل مبلغ. فمثلاً، نجد أنه إذا أودع أحدهم عدة مبالغ هي:

k_1 و k_2 و k_3 و k_4 ، وذلك بأسعار فائدة سنوية مختلفة أو متساوية، ولتكن p_1 و p_2 و p_3 و p_4 ولمدد زمنية مختلفة محسوبة بالسنوات، ولتكن n_1 و n_2 و n_3 و n_4، فإنه سيحصل على مقادير للفوائد المستحقة تساوي In_1 و In_2 و In_3 و In_4 ، وإن هذه المقادير تساوي:

مقدار الفائدة للمبلغ الأول: $In_1 = k_1.p_1.n_1$

مقدار الفائدة للمبلغ الثاني: $In_2 = k_2.p_2.n_2$

مقدار الفائدة للمبلغ الثالث: $In_3 = k_3.p_3.n_3$

مقدار الفائدة للمبلغ الرابع: $In_4 = k_4.p_4.n_4$

.....

وبذلك نجد أن إجمالي الفائدة المستحقة يساوي: $I = In_1 + In_3 + In_3 + In_4$

وبصورة عامة يمكننا أن نكتب ذلك على الشكل التالي:

$$I = In_1 + In_3 + In_3 + In_4 + ... \qquad (2-3)$$

مثال 7:

أودع أحد التجار مبلغ 5000 ليرة سورية بتاريخ 2002/3/15، ثم أودع مبلغ 3000 ليرة سورية بتاريخ 2002/5/25، وأودع مبلغ 4000 ليرة سورية بتاريخ 2002/7/5.

فما هو إجمالي الفائدة الصحيحة المستحقة عن هذه المبالغ في نهاية عام 2002علماً بأن سعر الفائدة السنوية ثابت وموحد ويساوي 8%؟

الحل:

نلاحظ أن المبالغ $k_1 = 5000$ و $k_2 = 3000$ و $k_3 = 4000$

وأن سعر الفائدة السنوية $p_1 = 0.08$ و $p_2 = 0.08$ و $p_3 = 0.08$

نحسب مدد الإيداع بالأيام من جدول الرقم التراكمي [جدول رقم (1)] فنجد أنها تساوي على الترتيب:

$n_1 = 365 - 74 = 291$ يوماً

$n_2 = 365 - 145 = 220$ يوماً

$n_3 = 365 - 186 = 169$ يوماً

وهكذا نجد أن هذه المدد بالسنوات تساوي على الترتيب:

$$n_1 = \frac{291}{365}$$

$$n_2 = \frac{220}{365}$$

$$n_3 = \frac{169}{365}$$

وبتعويض هذه المعطيات في العلاقة (1-3) نجد أن:

$$In_1 = 5000(0{,}08)\frac{291}{365} = 318{,}90\,L.S$$

$$In_2 = 3000(0{,}08)\frac{220}{365} = 144{,}66\,L.S$$

$$In_3 = 4000(0{,}08)\frac{169}{365} = 148{,}16\,L.S$$

وبذلك نجد أن إجمالي الفائدة المستحقة يساوي:

$$I = 318{,}90 + 144{,}66 + 148{,}16$$

$$I = 611{,}72 L.S.$$

3 - 4 - حساب مقدار الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ واحد:

إن حساب الفائدة التجارية يختلف عن حساب الفائدة الصحيحة، حيث إن التجار في السوق يعتبرون أن السنة مؤلفة من 360 يوماً فقط، وبذلك فإنهم عندما يحولون المدة المحسوبة بالأيام إلى سنوات يقسمونها على 360 يوماً فقط. فإذا رمزنا لعدد أيام

مـدة الإيـداع بـــ D، فـإن مـدة الإيـداع بالسـنوات تصـبح مسـاوية لـــ $n = \frac{D}{365}$ للفائـدة الصحيحة، ومساوية لـ $n = \frac{D}{360}$ للفائدة التجاريـة، وبـذلك تأخـذ العلاقـة (1-3) الشكلين التاليين:

$$I_n = k.p.\frac{D}{365}$$ لمقدار الفائدة الصحيحة (3-3)

$$It = k.p.\frac{D}{360}$$ لمقدار الفائدة التجارية (4-3)

ولإيجاد العلاقة التي تربط بين المقدارين نقسم بعضهما على بعض فنجد أن:

$$\frac{I_t}{I_n} = \frac{k.p\frac{D}{360}}{k.p\frac{D}{365}}$$

$$\frac{I_t}{I_n} = \frac{365}{360} =$$

$$\frac{I_t}{I_n} = \frac{73}{72} \qquad (5-3)$$

ومنها نجد أن:

$$It = \frac{73}{72}.In \qquad (6-3)$$

أو أن:

$$I_n = \frac{73}{72}.I_t \qquad (6-3)$$

وهنـا نلاحـظ أن مقدار الفائـدة التجاريـة It أكبـر مـن مقدار الفائـدة الصـحيحة In لأن In مضروب بعدد أكبر من الواحد $\left(\frac{73}{72} > 1\right)$، ويمكن استخراج علاقة أخرى تربط بين المقدارين It و In وذلك بحساب الفرق بينهما بدلالة In، حيث نجد أن:

$$It - In = \frac{73}{72}In - It$$

$$It - In = \frac{1}{72}In \qquad (7-3)$$

ويمكن استخراج الفرق بينهما بدلالة It، حيث نجد من (3-6) ، أن $I_n = \frac{72}{73}.I_t$ وبذلك يكون:

$$It - In = It - \frac{72}{73}It$$

$$It - In = \frac{1}{73}It \qquad (8-3)$$

ملاحظة هامة:

إن مقدار الفائدة التجارية لا يختلف عن مقدار الفائدة الصحيحة إذا كانت المدة محسوبة بالسنوات الكاملة مباشرةً، لأن العلاقة (3-1) لا تتأثر بذلك إلا إذا كانت المدة محسوبة بالأيام ثم حولت إلى سنوات. اما إذا كانت المدة محسوبة بالأشهر ثم حولت إلى سنوات, فإن الفائدة تكون تجارية حكماً , لأن الاشهر عندها تعتبر متساوية وتكون السنة 360يوماً.

مثال 10:

أوجد مقدار الفائدة التجارية ومقدار الفائدة الصحيحة لمبلغ 15000 ليرة سورية أودع لمدة 260 يوماً بفائدة سنوية بسيطة قدرها 9%، ثم احسب الفرق بين هذين المقدارين ونسبة كلٍ منهما إلى الآخر.

الحل:

لدينا $k=15000$، $p=0,09$،

ولدينا المدة الحقيقية $n = \frac{260}{365}$ ولكن $In=?$

ولدينا المدة التجارية $nt = \frac{260}{360}$ ولكن $It=?$

وبتعويض هذه المعطيات في العلاقتين (3-3) ثم في (3-4) نجد أن:

$$In = 15000(0,09)\frac{260}{365} = 961,64\,L.S.$$

$$It = 15000(0,09)\frac{260}{360} = 975\,L.S.$$

وكان يمكننا حساب It من العلاقة (3-6) حيث نجد أن:

$$It = \frac{73}{72}In = \frac{73}{72}(961,64) = 975\,L.S.$$

ولحساب الفرق بين المقدارين It وIn نطرحهما مباشرةً فنجد أن:

$$It - In = 975 - 961,64 = 13,36\,L.S.$$

ونجد أن النسبة بينهما تساوي:

$$\frac{It}{In} = \frac{975}{961,64} = 1,01389$$

وكان يمكننا حساب الفرق والنسبة من العلاقتين (7-3) و(5-3)، حيث نجد أن:

$$It - In = \frac{1}{72} In = \frac{1}{72}(961,64) = 13,36\, L.S.$$

$$\frac{It}{In} = \frac{73}{72} = 1,01389$$

وهنا نلاحظ أن مقدار الفائدة التجارية المستحقة It أكبر من مقدار الفائدة الصحيحة In بمقدار 13.36 ليرة سورية، وهذا ما أشرنا إليه بشكل عام في الملاحظة السابقة.

3 - 5 - حساب حصيلة مبلغ واحد k:

حصيلة مبلغ واحد k أودع لمدة n عاماً وبفائدة بسيطة سنوية p يساوي ذلك المبلغ k مضافاً إليه مقدار الفائدة المستحقة In. وإذا رمزنا لحصيلة المبلغ k بعد n عاماً بالرمز Sn ، يكون لدينا:

$$Sn = k + I_n \qquad (9-3)$$

وبما أن $In = k.p.n$ نجد أن:

$$Sn = k + k.p.n$$

$$Sn = k(1 + p.n) \qquad (10-3)$$

وهي علاقة تتضمن أربعة متحولات إذا عرفنا منها ثلاثة أمكننا حساب الرابع.

مثال11:

أوجد حصيلة مبلغ 12000 ليرة سورية أودع لمدة 3 سنوات بفائدة بسيطة 8%.

الحل:

لدينا $k=12000$، $p=0,08$، $n=3$، ولكن $Sn=?$.

ومن (3-10) نجد حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$Sn = 12000\left(1 + \frac{8}{100}.3\right) = 14880\, L.S.$$

مثال 12:

ما هي حصيلة مبلغ 5000 ليرة سورية أودع لمدة 7 أشهر بفائدة سنوية بسيطة 9% سنوياً.

الحل:

لدينا $k=5000$، $p=0,09$، $n = \frac{7}{12}$ ، ولكن $Sn=?$.

وبذلك نجد أن حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$Sn = 5000\left(1+\frac{9}{100}.\frac{7}{12}\right) = 5262{,}5\,L.S.$$

مثال 13:

ما هي المدة التي يجب خلالها إيداع مبلغ 10000 ليرة سورية بفائدة بسيطة 7% سنوياً حتى نحصل في نهايتها على 15000 ليرة سورية؟

الحل:

لدينا *k=10000*، *p=0,07*، *Sn=15000*، ولكن *n=?*.

وبذلك نجد أن العلاقة (10-3) تعطينا أن:

$$15000 = 10000\left(1+\frac{7}{100}.n\right) = 10000 + 700.n$$

$$5000 = 700.n$$

$$n = \frac{5000}{700} = 7{,}143 \quad \text{سنة}$$

ولتحويل كسور السنة (0.143) إلى أيام نضرب ذلك الكسر بـ 365 فنجد أن:

$$D = 0{,}143 \cdot 365 = 52{,}20 \approx 53 \text{ يوماً}$$

أي إن المدة اللازمة هي 7 سنوات و53 يوماً.

مثال 14:

ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه لمدة 5 سنوات وبفائدة سنوية بسيطة 11% حتى نحصل على 20000 ليرة سورية؟

الحل:

لدينا *k=?*، *p=0,11*، *Sn=20000*، ولكن *n=5*.

وبذلك نجد أن:

$$20000 = k\left(1+\frac{11}{100}.5\right) = 1{,}55k$$

$$k = \frac{20000}{1{,}55} = 12903{,}35\,L.S.$$

مثال 15:

أودع أحدهم مبلغ 30000 ليرة سورية بتاريخ 2002/5/7 ، وعندما سحبها بتاريخ 2002/12/9 سلمه المصرف مبلغ 31500 ليرة سورية، فما هو سعر الفائدة السنوية؟

الحل:

لدينا *k=30000*، *Sn=20000*، *p=?*، *n=?*.

لذلك نقوم أولاً بحساب المدة بالأيام، وذلك بمساعدة جدول الرقم التراكمي، حيث نجد أن:

$$D = 343 - 127 = 216 \text{ يوماً}$$

ثم نجد أن:

$$31500 = 30000\left(1 + p.\frac{216}{365}\right)$$

$$31500 = 30000 + .\frac{30000 \cdot 216}{365}.p$$

$$1500 = 17753{,}42.p$$

$$p = \frac{1500}{17753{,}42} = 0{,}0845 = 8{,}45\%$$

أي أن سعر الفائدة السنوية البسيطة هو 8.45%.

3 - 6 - حساب حصيلة عدة مبالغ:

لنفترض أن أحدهم أودع عدة مبالغ k_1 و k_2 و k_3 و k_4 ، وذلك بأسعار فائدة سنوية مختلفة أو متساوية، ولتكن p_1 و p_2 و p_3 و p_4 ، ولمدد زمنية محسوبة بالسنوات، ولتكن n_1 و n_2 و n_3 و n_4، فما هي حصيلة هذه المبالغ في لحظة السحب؟

إن حصيلة هذه المبالغ تساوي مجموع حصائل المبالغ المختلفة، فإذا رمزنا للحصيلة الإجمالية بالرمز S، فإنه يكون لدينا:

$$S = Sn_1 + Sn_2 + Sn_3 + Sn_4 + ...$$

$$S = k_1(1 + p_1.n_1) + k_2(1 + p_2.n_2) + k_3(1 + p_3.n_3) + \\ + k_4(1 + p_4.n_4) + ... \qquad (11-3)$$

وهي مساوية من جهة أخرى لمجموع المبالغ مضافاً إليها إجمالي الفوائد المستحقة، لأنه يمكننا كتابة S كما يلي:

$$S = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + ... + In_1 + In_2 + In_3 + In_4 + ... \qquad (12-3)$$

مثال 16:

أودع أحمد مبلغ 5000 ليرة سورية بتاريخ 2002/2/15، بفائدة سنوية 7%.
ثم أودع مبلغ 3000 ليرة سورية بتاريخ 2002/4/25، بفائدة سنوية 8%.
ثم أودع مبلغ 4000 ليرة سورية بتاريخ 2002/11/9 بفائدة سنوية 9%.
فما هي حصيلة هذه المبالغ بتاريخ 2002/12/31؟

الحل:

نلاحظ أنه في البداية علينا حساب المدد بالأيام ثم بالسنوات، فنجد أن:

$$D_1 = 365 - 46 = 319 \Rightarrow n_1 = \frac{319}{365}$$

$$D_2 = 365 - 115 = 25 \Rightarrow n_2 = \frac{250}{365}$$

$$D_3 = 365 - 313 = 52 \Rightarrow n_3 = \frac{52}{365}$$

$$I_{n_1} = k_1.p_1.n_1 = 5000.\frac{7}{100}.\frac{319}{365} = 305{,}89\,L.S$$

$$I_{n_2} = k_2.p_2.n_2 = 3000.\frac{8}{100}.\frac{250}{365} = 164{,}38\,L.S$$

$$I_{n_3} = k_3.p_3.n_3 = 4000.\frac{9}{100}.\frac{52}{365} = 51{,}29\,L.S$$

وبذلك نجد أن:

$$S = 5000 + 3000 + 4000 + 305{,}89 + 164{,}38 + 51{,}29 = 12521{,}56\,L.S.$$

3 - 7 - الحسابات الجارية وطرائقها:

إن الحسابات الجارية هي تطبيق حسابي لإيداع عدة مبالغ مختلفة أو متساوية لمدد مختلفة أو متساوية وبأسعار فائدة مختلفة أو متساوية. وهي عمليات تجري يومياً في جميع المصارف والبنوك والصناديق وغيرها.

ولإجراء هذه الحسابات ننظم جدولاً خاصاً بحركة حساب كل زبون يتضمن المبلغ المودع، أو المبلغ المسحوب وتاريخ العملية وسعر الفائدة إذا كان متغيراً.

ولكننا نفترض أن سعر الفائدة البسيطة يبقى ثابتاً خلال الفترات القصيرة (ويمكننا تغييره بين فترة وأخرى)، ويمكن إجراء الحسابات الجارية لأي زبون بإحدى الطريقتين التاليتين:

أ - الطريقة المباشرة:

سنوضح كيفية استخدام هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال 17:

فتح أحدهم حساباً جارياً في أحد المصارف بفائدة بسيطة 5% سنوياً، وكانت عملياته كما في الجدول التالي، والمطلوب حساب الحصيلة الجارية بعد كل حركة، واستخراج حصيلته في آخر المدة.

جدول 1 المذكور في الطريقة المباشرة هنا موجود في ملف مستقل بنفس العنوان

لقد قمنا بحساب عناصر الحل وأضفناها إلى جدول الحركة متبعين الخطوات التالية:
ـ حسبنا الرصيد الجاري عند الإيداع الأول وهو 5000 ليرة سورية.
ـ حسبنا المدة التي استمر فيها هذا المبلغ بالإيداع وهي من 2002/1/5 وحتى 2002/3/20، وتساوي 74 يوماً (من جدول الرقم التراكمي).
ـ حسبنا مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع ذلك المبلغ لمدة 74 يوماً بفائدة بسيطة 5% من العلاقة:

$$k.p.n = 5000\left(\frac{5}{100}\right).\frac{74}{365} = 50,68L.S$$

ـ سجلنا تلك الفائدة مقابل الحركة الثانية لإضافتها على رصيد الحركة التالية.
ـ سجلنا الحصيلة الجارية بعد الإيداع الأول مباشرةً وهي 5000 ليرة سورية، ولم نضف للمبلغ المودع أية فائدة عليه، لأن الحصيلة الجارية تحسب بعد الحركة مباشرةً.
ـ درسنا الحركة الثانية فوجدناها إيداعاً لـ 3000 ليرة سورية؛ لذلك جمعنا تلك الدفعة مع الرصيد الجاري السابق 5000 ليرة سورية، فأصبحت قيمة الرصيد الجاري 8000 ليرة سورية.
ـ حسبنا المدة التي استمر فيها هذا الرصيد الأخير بالإيداع وهي من 2002/3/20 وحتى 2002/4/27، وتساوي 38 يوماً.
ـ حسبنا الفائدة المستحقة عن الرصيد الثاني من العلاقة:

$$k.p.n = 8000\left(\frac{5}{100}\right).\frac{38}{365} = 41,64L.S$$

ـ أضفنا هذه الفائدة إلى مقدار الفائدة المتراكمة المقابلة (50.68) فأصبح مقدار الفائدة المتراكمة 92.32 ليرة سورية، ووضعناه مقابل الحركة التالية لإضافته إلى رصيد الحركة التالية.
ـ حسبنا الحصيلة الجارية بعد لحظة الحركة الثانية مباشرةً وذلك بجمع الرصيد الجاري 8000 مع الفوائد المتراكمة 50.68 فحصلنا على 8050.68 ليرة سورية.
ـ درسنا الحركة الثالثة فوجدناها سحباً لـ 2000 ليرة سورية؛ لذلك نطرح ذلك المبلغ من الرصيد الجاري السابق فنحصل على 6000 ليرة سورية.
ـ حسبنا مدة إيداع الرصيد الجاري الثالث المستمرة من 2002/4/27، وحتى 2002/7/30 فكانت 94 يوماً.
ـ حسبنا الفائدة المستحقة من العلاقة:

$$k.p.n = 6000\left(\frac{5}{100}\right).\frac{94}{365} = 77,26L.S$$

ـ أضفنا الفائدة السابقة إلى الفائدة المتراكمة المقابلة (92.32)، فحصلنا على المقدار الجديد للفائدة المتراكمة 169.58 ليرة سورية، وسجلناه مقابل الحركة التالية لإضافته إلى رصيدها.
ـ حسبنا الحصيلة الجارية المقابلة للحركة الثالثة، وذلك بجمع الرصيد الجاري 6000 مع الفوائد المتراكمة 92.32 ، فحصلنا على 6092.32 ليرة سورية. وهكذا نتابع

العمل حتى نصل إلى الحركة الأخيرة، فنجد أنها سحب لـ 10000 ليرة سورية من الرصيد الجاري السابق 12000 ، فيبقى الرصيد الجاري 2000 ليرة سورية، وبإضافة الفائدة المتراكمة المقابلة لـ (387.25) ليرة سورية نحصل على الحصيلة الجارية والبالغة 2387.25 ليرة سورية.

وأخيراً نختم الحساب بسطر يتضمن مجاميع بعض الأعمدة والنتيجة النهاية للحصيلة الجارية بعد آخر حركة مباشرةً.

ب ـ طريقة النمر:

هي تعتمد على حساب الفوائد المستحقة باعتبار أن سعر الفائدة البسيطة يبقى ثابتاً ويساوي p ، ولنفترض أن الرصيد المتحرك للحساب الجاري هو $k_2\ ,\ k_3 \ldots . k_n$ ، وأن مدة إيداع كل منها بالأيام هي $n_1,\ n_2,\ n_3\ \ldots\ldots\ldots n_n$.

وبذلك نجد أن مجموع الفوائد المستحقة عن هذه المبالغ يساوي:

$$\sum In = k_1 \frac{d_1}{365} p + k_1 \frac{d_2}{365} p + k_1 \frac{d_3}{365} p + \ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \frac{d_m}{365} p$$

$$\sum In = \frac{p}{365}\left(k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k_m d_m\right) \quad (13-3)$$

تسمى الجداءات $k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k_m d_m$ بالنمر، ويسمى مجموعها بمجموع النمر، وإليه تنسب هذه الطريقة.

ولإيجاد حصيلة هذه الحسابات بطريقة النمر نطبق العلاقة التالية:

حصيلة الحساب الجاري=مجموع الإيداعات– مجموع السحوبات+ مجموع الفوائد المستحقة، ويمكن إجراء هذه الحسابات على الجدول مباشرةً كما في المثال التالي.

مثال18:

لنفترض أن حركة حساب أحد الزبائن كانت كما في الجدول التالي:

الرقم المسلسل	تاريخ القيد	البيان	الحركة		عناصر الحل حسب الفائدة البسيطة		
			العملية				
			سحب	إيداع	الرصيد الجاري	مدة الرصيد بالأيام n_i	النمر $k_i n_i$
1	2002/1/5	إيداع	-	5000	5000	74	370000
2	2002/3/20	إيداع	-	3000	8000	38	304000
3	2002/4/27	سحب	2000	-	6000	94	564000
4	2002/7/30	إيداع	-	2500	8500	74	629000
5	2002/10/12	إيداع	-	3500	12000	80	960000
6	2002/12/31	سحب	10000	-	2000	-	-
نتيجة الحسابات		-	12000	14000	2000	-	2827000

وبذلك نجد أن الفوائد المستحقة على المبالغ المرصودة في الحساب تساوي في حالة كون سعر الفائدة 5%:

$$\sum I_k = \frac{p}{365}\left(k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 + ...\right)$$

$$\sum I_k = \frac{0.05}{365}\left(2827000\right) = 387.26$$

وبذلك نجد أن حصيلة الحساب عند آخر حركة يساوي:

$$s = 14000 - 12000 + 387.26$$

$$s = 2387.26\, L.S$$

جـ ـ طريقة حساب الفائدة على أقل رصيد خلال الشهر:

تستخدم هذه الطريقة في بعض المصارف، وتطبق عندنا على شهادات الاستثمار (فئة أ). واعتماداً على هذه الطريقة لا يقوم البنك بحساب الفوائد على المبالغ التي تودع خلال شهر إيداعها؛ بل تؤخذ بعين الاعتبار في الشهر التالي، كما أن سحب أي مبلغ خلال شهر ما سيؤثر على رصيد ذلك الشهر، وبالتالي لا تحسب الفائدة إلا على الرصيد المتبقي والأقل.

أما في حالة شهادات الاستثمار، فإن شراء أية شهادة خلال الشهر لا يمنح صاحبها حق الفائدة عليها إلا اعتباراً من الشهر التالي لذلك، وكذلك الأمر عند إعادة أو بيع تلك الشهادة، فلا يتم حساب فائدة عليها في الشهر الذي بيعت فيه.

وكتطبيق على ذلك نأخذ المثال التالي وحساباته المرافقة، وذلك بفرض أن سعر الفائدة 8% سنوياً.

مثال 19:

أوجد الفائدة المستحقة وحصيلة الحساب الجاري التالي وحسب الطريقة (جـ) وبتاريخ إغلاقه في 2003/6/20.

ولحل هذا المثال نعتمد على المعادلة التالية:

حصيلة الحساب الجاري = مجموع مبالغ الإيداع – مجموع مبالغ السحب + إجمالي الفوائد المستحقة = الرصيد الأخير + إجمالي الفوائد المستحقة

تسلسل	تاريخ القيد	البيان	العملية		الرصيد k	أقل رصيد خلال الشهر	المدة بالأشهر	النمرة
			سحب	إيداع				
1	2003/1/10	إيداع	-	1000	1000	لا يحسب	-	-
2	2003/2/1	رصيد الشهر السابق	-	-	1000	1000	1	
	2003/2/25	إيداع	-	4000	5000			1000
3	2003/3/1	رصيد الشهر السابق	-	-	5000	3000	1	
	2003/3/15	إيداع	-	3000	8000			
	2003/3/25	سحب	5000	-	3000			3000
4	2003/4/1	رصيد الشهر السابق	-	-	3000	2000	1	
	2003/4/20	سحب	1000	-	2000			
	2003/4/27	إيداع	-	7000	9000			2000
5	2003/5/1	رصيد الشهر السابق	-	-	9000	9000	1	
	2003/5/10	إيداع	-	5000	14000			
	2003/5/20	سحب	3000	-	11000			9000
	2003/5/25	إيداع	-	2000	13000			
6	2003/6/1	رصيد الشهر السابق	-	-	13000	1300	لاتحسب	
	2003/6/10	إيداع	-	2000	15000			
	2003/6/20	الرصيد عند الإغلاق	-	-	15000			-

ومن الجدول نجد أن:

الفائدة المستحقة = سعر الفائدة الشهري × مجموع النمر

$$I = \frac{0,08}{12}(1000\times1+3000\times1+2000\times1+9000\times1) = 100 L.S.$$

وبذلك تكون حصيلة المبلغ تاريخ إغلاق الحساب 2003/6/20 تساوي:

$$S = k + I = 15000+100 = 15100 L.S.$$

تمرينات

1 ـ أوجد مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 3600 ليرة سورية لمدة 8 أشهر بفائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

2 ـ إذا كان مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ ما يساوي 250 ليرة سورية، فأوجد القيمة الأصلية لذلك المبلغ إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 7% سنوياً، وأن مدة الإيداع كانت 6 أشهر.

3 ـ أودع أحدهم مبلغ 30000 ليرة سورية بفائدة بسيطة 5% سنوياً. فاحسب المدة اللازمة لتصبح حصيلة هذا المبلغ 50000 ليرة سورية.

4 ـ أودع أحدهم في أحد المصارف مبلغ 50000 ليرة سورية، وعندما سحب مستحقاته بعد 5 أشهر استلم مبلغ 52000 ليرة سورية، فأوجد معدل الفائدة البسيطة الذي يتعامل به المصرف.

5 ـ احسب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ 15000 ليرة سورية أودع بتاريخ 2004/1/15 وسحب في 2004/9/25، علماً بأن سعر الفائدة البسيطة 5% سنوياً.

6 ـ احسب مقدار الفائدة التجارية المستحقة للمثال السابق وقارن بين النتيجتين.

7 ـ إذا كان الفرق بين الفائدتين الصحيحة والتجارية يساوي 500 ليرة سورية، فاحسب مقدار هاتين الفائدتين.

8 ـ احسب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة على المبالغ التالية:

مبلغ 2500 أودع لمدة 6 أشهر بفائدة بسيطة 6% سنوياً.

مبلغ 5000 أودع لمدة 3 أشهر بفائدة بسيطة 5% سنوياً.

مبلغ 1500 أودع لمدة 9 أشهر بفائدة بسيطة 7% سنوياً.

9 ـ احسب إجمالي الفوائد التجارية على المبالغ الواردة في المثال السابق.

10 ـ احسب حصيلة كل من المبالغ في المثال السابق ثم إجمالي حصيلتها.

الفصل الرابع

حساب القيمة الحالية والخصم (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات الآتية:

1 ـ المفاهيم العامة: القيمة الاسمية، تاريخ الاستحقاق، القيمة الحالية، الخصم الصحيح، الخصم التجاري.

2 ـ العلاقات الأساسية بين القيمتين الاسمية والحالية والخصم.

3 ـ تطبيقات عملية.

4 ـ تمرينات.

الفصل الرابع

حساب القيمة الحالية والخصم (بفائدة بسيطة)

4-1- المفاهيم العامة:

إن مفهوم القيمة الحالية يأتي من مفهوم القيمة الاسمية، وإن المفهومين معاً مرتبطان بعمليات الديون والقروض. فمثلاً، إذا استدان أحدهم مبلغ 1000 ليرة سورية من تاجر لفترة ما، فإن ذلك التاجر (الدائن) سيحرر على المدين سنداً بقيمة مالية أكبر من مبلغ الدين المذكور (1000 ليرة سورية)، وذلك لأن الدائن سيقوم بحساب حصيلة ذلك الدين عند تاريخ الاستحقاق المتفق عليه، وبسعر الفائدة السائد أو المتفق عليه أيضاً. وإذا فرضنا أن مدة ذلك القرض 7 أشهر، وأن سعر الفائدة 9%، فإن حصيلة ذلك الدين بعد 7 أشهر تساوي:

$$S = 1000\left(1 + \frac{9}{100}.\frac{7}{12}\right) = 1135\,L.S$$

وهكذا نجد أن الدائن سيقوم بتحرير سند على المدين بقيمة 1135 ليرة سورية، وسيسلمه مبلغ 1000 ليرة سورية فقط، وسيثبت على ذلك السند تاريخ الاستحقاق بعد 7 أشهر من تاريخه. ثم يطلب من المدين والشهود التوقيع على السند المحرر؛ وبذلك يأخذ السند صفة قانونية تمكن الدائن من تحصيله عبر المؤسسات القانونية.

وهكذا نجد أن القيمة الحالية لذلك السند هي مبلغ الدين 1000 ليرة سورية، وأن القيمة الاسمية هي القيمة المسجلة عليه، وتبلغ 1135 ليرة سورية. ولكن القيمة الحالية لذلك السند لا تبقى ثابتة، بل تتغير بعد مرور أي فترة زمنية، فإذا أراد المدين تسوية هذا الدين وتسديده قبل 5 أشهر من تاريخ استحقاقه، فإن قيمته الحالية حينها ستساوي مبلغاً آخر يسمى القيمة الحالية في تاريخ التسوية أو الخصم أو القطع، لذلك سيطالب الدائن بخصم مبلغ معين من القيمة الاسمية المسجلة على السند.

وهكذا نجد أن مفهوم القيمة الحالية لأي مبلغ تأتي من مفهوم القيمة الاسمية المؤجلة الدفع لذلك المبلغ، وهما أمران مرتبطان بالديون وسنداتها التي تستحق الدفع في مواعيد معينة في المستقبل، ويراد تسويتها ودفعها قبل مواعيدها، وسنورد لاحقاً بعض التعاريف الضرورية المتعلقة بهذا الأمر.

* القيمة الاسمية للدين: هي القيمة المستحقة الدفع للدائن في تاريخ الاستحقاق والمثبتة على السند الخاص بذلك، مثل سند بقيمة 1135 ليرة سورية.

* تاريخ الاستحقاق: وهو التاريخ المدون على السند أو الوثيقة المالية الذي يحدد اللحظة التي يجب أن يقوم المدين بتسديد القيمة الاسمية المثبتة للدائن.

* تاريخ الخصم أو القطع: هو التاريخ الذي يريد الدائن أو المدين تسوية الدين فيه، وهو تاريخ سابق لتاريخ الاستحقاق.

* مدة الاستحقاق: وهي الفترة الزمنية الممتدة من تاريخ الخصم أو القطع حتى تاريخ الاستحقاق، وتقاس بالسنوات.

* القيمة الحالية للدين: هي القيمة المكافئة حالياً للدين المؤجل. أو هي المبلغ الذي إذا أودع الآن (أو في لحظة التسوية) في المصرف بفائدة بسيطة p ، ولمدة تساوي مدة الاستحقاق أصبحت حصيلته تساوي القيمة الاسمية المدونة على السند.

4 ـ 2: العلاقات الأساسية بين القيمتين الاسمية والحالية والخصم:

إذا رمزنا للقيمة الاسمية بالرمز S.
وللقيمة الحالية له بالرمز V.
ولمدة الاستحقاق المحولة إلى سنوات بالرمز n.
ولسعر الفائدة البسيطة سنوياً بالرمز p.
* القيمة الحالية:
لحساب القيمة الحالية نعتمد على قانون الفائدة البسيطة (10-3) نجد أن:

$$S = V(1+np) \qquad (1-4)$$

ومنها نجد أن القيمة الحالية لمبلغ S تساوي:

$$V = \frac{S}{(1+np)} \qquad (2-4)$$

وتسمى هذه القيمة بالقيمة الحالية الصحيحة.

*** مقدار الخصم الصحيح (الحطيطة الداخلية):**

وهو فائدة القيمة الحالية، ويتم خصمه من القيمة الاسمية S عند تسوية الديون قبل مواعيد استحقاقها، وذلك بسبب الاستعجال في تسديدها، وهو يساوي:
مقدار الخصم الصحيح = القيمة الاسمية – القيمة الحالية الصحيحة
وإذا رمزنا لمقدار الخصم الصحيح بـ D نجد أن:

$$D = S - V \qquad (3-4)$$

واعتماداً على (1-4) نجد أن:

$$D = V(1+np) - V$$

$$D = V.n.p \qquad (4-4)$$

أي:
مقدار الخصم الصحيح = القيمة الحالية × مدة الاستحقاق × معدل الفائدة= فائدة القيمة الحالية
ملاحظة: يسمى مقدار الخصم الصحيح في بعض المراجع بالحطيطة الداخلية.

*** معدل الخصم الصحيح:**

هو النسبة الناتجة عن قسمة مقدار الخصم الصحيح السنوي على القيمة الاسمية S.
وحتى تستقيم الحسابات لابد من تحويل الخصم الصحيح المحسوب على مدة n سنة إلى المبلغ الذي يعادله، والمنسوب إلى سنة كاملة، وهذا يقتضي تقسيم D على n. وإذا رمزنا لمعدل الخصم الصحيح السنوي بالرمز q فإن:

$$q = \frac{\frac{D}{n}}{S} = \frac{D}{ns} \qquad (5-4)$$

وهكذا نجد أن مقدار الخصم الصحيح D من جهة أخرى يساوي:

$$D = S.n.q \qquad (6-4)$$

ومن العلاقتين (4-5) و(4-6) نجد أن q ترتبط مع p بالعلاقة التالية:

$$D = V.n.p = S.n.q$$

$$q = \frac{V}{S}.p \qquad (7-4)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{V}{S} \qquad (7-4) \text{ أو}$$

وبما أن $V > S$ فإن $q < p$ ؛ أي إن معدل الخصم الصحيح هو نسبة مئوية أقل من سعر الفائدة p، وهو يستخدم لحساب مقدار الخصم الصحيح مباشرةً، بضربه بالقيمة الاسمية S وبمدة الاستحقاق n حسب العلاقة (4-6)، وذلك لأنه لا يمكننا تطبيق العلاقة (4-4) إلا بعد حساب القيمة الحالية .

*** مقدار الخصم التجاري (الحطيطة الخارجية):**

معلوم أن التجار يستخدمون كافة الأساليب لزيادة أرباحهم، فهم عدا عن أنهم يحسبون السنة 360 يوماً، فإنهم يحسبون مقدار الخصم عند تسوية الديون قبل مواعيدها بطريقة أخرى، حيث إنهم يعتبرون أن مقدار الخصم هو الفائدة المستحقة للقيمة الاسمية S ليحصلوا على مقدار أكبر للخصم، ليحصلوا على مقدارٍ أكبر للخصم، ثم يقطعونه من القيمة الاسمية عند تسوية الديون، لذلك يقومون بحسابه باستخدام معدل الفائدة السنوية p (أو أي معدل تجاري للخصم P) وضربه بالقيمة الاسمية S وبالمدة n. فإذا رمزنا لمقدار الخصم التجاري ـ والذي يسمى أحياناً بالحطيطة الخارجية ـ بالرمز DT، نجد حسب التعريف أن:

$$Dt = S.n.p \qquad (8-4)$$

وهي علاقة تختلف عن العلاقة (4-6) للخصم الصحيح، ولكنهما يرتبطان بالعلاقة:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{S.n.q}{S.n.p} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{q}{p} \qquad (9-4)$$

وبما أن $q < p$ فإن $D < Dt$ ؛ أي إن مقدار الخصم التجاري أكبر من الخصم الصحيح، لأنه يطبق معدل الفائدة البسيطة P على القيمة الاسمية S ، وليس على القيمة الحالية V.

ويمكننا إيجاد علاقات أخرى بين أنواع الخصم، حيث نجد من العلاقة (4-7) أن:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\frac{V}{S}.p}{P}==\frac{V}{S}=\frac{V}{V(1+np)}=\frac{1}{1+np}$$

ومنها نجد أن Dt يمكن أن يحسب من إحدى العلاقتين:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{V}{S} \qquad (10-4)$$

$$Dt=D(1+np) \qquad (11-4)$$

وأخيراً، يمكننا استنتاج العلاقة الهامة التالية:

$$\frac{q}{p}=\frac{D}{Dt}=\frac{V}{S} \qquad (12-4)$$

وكذلك نجد أن الفرق بينهما يساوي:

$$Dt-D=S.p.n-V.p.n$$

$$Dt-D=p.n(S-V)$$

$$Dt-D=D.n.p \qquad (13-4)$$

أي إن الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح يساوي الفائدة المستحقة عن الخصم الصحيح.

كما يمكننا استخراج علاقة أخرى تربط بين الخصمين الصحيح والتجاري والقيمة الاسمية كما يلي:

$$S(Dt-D)=D.S.n.p=D.D.t$$

$$S=\frac{Dt.D}{Dt-D} \qquad (14-4)$$

معدل الخصم التجاري:

لحساب هذا المعدل نستخدم مقدار الخصم التجاري المنسوب إلى سنة كاملة ونقسمه على S فنجد أن:

$$q_t=\frac{\frac{Dt}{n}}{\frac{S}{}}=\frac{Dt}{n.S}=\frac{S.n.p}{n.S}=p \qquad (15-4)$$

أي إن معدل الخصم التجاري q_t يساوي معدل الفائدة P ، ولكنه يطبق عند الخصم على القيمة الاسمية، وليس على القيمة الحالية، ولذلك فإن مقدار الخصم التجاري D_t يكون أكبر من مقدار الخصم الصحيح D وهذا ما أشرنا إليه أكثر من مرة.

*** القيمة الحالية:**

إن القيمة الحالية لأي مبلغ مؤجل تحسب من العلاقة:

القيمة الحالية = القيمة الاسمية ـ مقدار الخصم

وبما أنه لدينا نوعان من الخصم، فإنه سيكون لدينا نوعان من القيمة الحالية هما:

*القيمة الحالية الصحيحة = القيمة الاسمية ـ مقدار الخصم الصحيح

$$V = S - D \qquad (16-4)$$

ومنها نجد أن:

$$V = S - S.n.q$$

$$V = S(1 - n.q) \qquad (17-4)$$

*القيمة الحالية التجارية = القيمة الاسمية ـ مقدار الخصم التجاري

$$Vt = S - Dt \qquad (18-4)$$

ومنها نجد أن:

$$Vt = S - S.n.p$$

$$Vt = S(1 - n.p) \qquad (19-4)$$

*** العلاقة بين V و VT:**

إن العلاقتين (17-4) و(19-4) تعطياننا أن:

$$\frac{V}{Vt} = \frac{1-nq}{1-np} \qquad (20-4)$$

وكذلك يمكننا استنباط علاقة أخرى أهمها:

$$V - Vt = (S - D) - (S - Dt)$$

$$V - Vt = Dt - D \qquad (21-4)$$

أي إن الفرق بين القيمتين الحاليتين الصحيحة والتجارية يساوي الفرق بين الخصمين التجاري والصحيح، ومن العلاقة (13-4) نجد كذلك أن:

$$V - Vt = D.np \qquad (22-4)$$

أي إن الفرق بين القيمتين الحاليتين يساوي الفائدة المستحقة على الخصم الصحيح.

ملاحظة 1:

عند تسوية أي دين أو قطع كمبيالة ما في المصرف فإن ذلك المصرف يفرض على المدين أو البائع عدة رسوم إضافية أهمها:

أ ـ عمولة قطع، وتحدد على شكل نسبة مئوية صغيرة من القيمة الاسمية، ونرمز لها بـ C_1.

ب ـ مصاريف تحصيل، وتحسب كنسبة مئوية أو ألفية من القيمة الاسمية، ونرمز لها بـ C_2.

وبذلك يكون إجمالي الخصم عند القطع = الخصم + العمولة + مصاريف التحصيل، ويطلق على هذا الإجمالي اسم "الإجيو". وعندها تظهر لدينا مصطلحات جديدة أهمها:

* صافي القيمة الحالية = القيمة الاسمية ـ إجمالي الخصم "الإجيو".

$$NV = S - D \qquad (23-4)$$

ومنه نجد أن:

$$\text{معدل الخصم الإجمالي} = \frac{\text{المتوسط السنوي لإجمالي الخصم "الإجيو"}}{\text{القيمة الاسمية}}$$

وهو يساوي ما يلي:

$$q^1 = \frac{\frac{D}{n} + C_1 + C_2}{S} \qquad (23-4)$$

لقد قسمنا D على n للحصول على المتوسط السنوي للخصم، أما C_1 و C_2 فتحسبان عن مدة سنة كاملة ولمرة واحدة.

ملاحظة 2:

عندما يكون لدينا عدة ديون أو كمبيالات فإننا نتعامل مع كل واحد بمفرده، ثم ندمج نتائج الحسابات ونستخلص النتائج المطلوبة. وبصورة عامة نجد أن هذه الديون مرتبطة بالعلاقات التالية:

مجموع القيم الحالية لهذه الديون =مجموع القيم الاسمية لها ـ مجموع الخصومات عنها.

مجموع الخصومات عنها بمعدل واحد=مجموع الجداء(القيمة الاسمية×المدة×معدل الخصم).

3-9- تطبيقات عملية:

مثال 1:

يريد أحد الأشخاص بيع (أو تجيير) سند لديه صالح أحد الزبائن، قيمته 10000 ليرة سورية، يستحق الدفع بعد 8 أشهر من الآن. فما هي القيمة الحالية لهذا السند؟؛ وما هو مقدار الخصم الصحيح ومعدله؟؛ وما هو مقدار الخصم التجاري؟ وما هي القيمة الحالية التجارية إذا كان سعر الفائدة البسيطة 9%؟

الحل:

لدينا القيمة الاسمية $S=10000$، $n = \frac{8}{12}$ ، $p=0.09$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية V تحسب من العلاقة:

$$V = \frac{S}{(1+np)} = \frac{10000}{1+\frac{8}{12}.\frac{9}{100}} = 9433{,}96\, L.S.$$

ويحسب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$D = S - V = 10000 - 9433{,}96 = 566{,}04\, L.S.$$

ويمكننا حساب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$D = V.n.p = 9433{,}96.\frac{8}{12}.\frac{9}{100} = 566{,}04\, L.S.$$

أما معدل الخصم الصحيح فيحسب من العلاقة:

$$q = \frac{V}{S}.p = \frac{9433,96}{10000}.\frac{9}{100} = 0,0849056$$

أي إن معدل الخصم 8.49% وهو المعدل الذي يجب تطبيقه على القيمة الاسمية S لنحصل على نفس مقدار الخصم الصحيح D، وبالتجريب نجد أن:

$$D = S.n.q. = 10000.\frac{8}{12}.\frac{8,49}{100} = 566\,L.S.$$

أما مقدار الخصم التجاري فيحسب من معدل الفائدة ومن العلاقة:

$$Dt = S.n.p = 10000.\frac{8}{12}.\frac{9}{100} = 600\,L.S.$$

وهكذا يتضح لنا أن مقدار الخصم التجاري أكبر من الخصم الصحيح، وأن الفرق بينهما يساوي:

$$Dt - D = 600 - 566,04 = 33,96\,L.S$$

وأن ذلك الفرق يساوي الفائدة المستحقة على الخصم الصحيح:

$$Dt - D = D.n.p = 566,04.\frac{8}{12}.\frac{9}{100} = 33,96\,L.S$$

أما القيمة الحالية التجارية لذلك السند فتحسب من العلاقة:

$$Vt = S - Dt = 10000 - 600 = 9400\,L.S$$

وهنا نلاحظ أن القيمة الحالية الصحيحة V أكبر من القيمة الحالية التجارية Vt. ولذلك يجب على أصحاب السندات أن يكونوا على دراية كافية بالألاعيب التي تسود في الأسواق المالية، وأن يتخذوا القرار المناسب لهم عند تسوية أو بيع أي سند مالي.

مثال 2:

كمبيالة قيمتها 20000 ليرة سورية، حررت في 2003/4/10، وتستحق الدفع يوم 2003/10/10. ولكن صاحبها سلمها في 2003/7/20 للمصرف، وقطعها (أي باعها له) بمبلغ 19500 ليرة سورية.

والمطلوب حساب مقدار الخصم الصحيح ومعدله، ثم حساب معدل الفائدة السائد في المصرف.

الحل:

لدينا القيمة الاسمية *S=20000*، والقيمة الحالية الصحيحة *V=19500*، أما المدة فنحسبها بالأيام بمساعدة جدول الرقم التراكمي، وهي الممتدة من 2003/7/20 حتى تاريخ الاستحقاق 2003/10/10 وتساوي *D=283-201=82*، وبذلك نجد أن مقدار الخصم الصحيح يحسب من العلاقة:

$$D = S - V = 20000 - 19500 = 500\,L.S.$$

ولحساب معدل الخصم الصحيح:

$$q = \frac{D}{n.s} = \frac{500}{\frac{82}{365}20000} = 0{,}11128 = (11{,}13\%)$$

أي إن معدل الخصم المستخدم 11.12%.
أما معدل الفائدة المستخدم فيحسب من العلاقة:

$$q = \frac{V}{S}.p$$

$$0{,}11128 = \frac{19500}{20000}.p \Rightarrow p = 0{,}114133 = (11{,}413\%)$$

مثال 3:
أراد أحدهم تسوية الدين الذي يستحق عليه بعد 10 أشهر من الآن، فأجرى حساباته المختلفة، فكان الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح مساوياً لـ 200 ليرة سورية.
فاحسب القيمة الحالية الصحيحة والقيمة الحالية التجارية ومعدل الخصم الصحيح، ثم القيمة الاسمية للدين، إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 12% سنوياً.
الحل:
لدينا $n = \frac{10}{12}$ و $p = \frac{12}{100}$ و $Dt - D = 200$
لحساب القيمة الحالية الصحيحة نحسب أولاً مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$Dt - D = D.n.p$$

$$200 = D.\frac{10}{12}.\frac{12}{100} = \frac{D}{10}$$

$$D = 2000\,L.S$$

وبذلك نجد أن $Dt = 2000 + 200 = 2200\,L.S.$
وبعد ذلك نقوم بحساب القيمة الحالية الصحيحة من العلاقة:

$$D = V.n.p$$

$$2000 = V.\frac{10}{10}.\frac{12}{100} = \frac{V}{10}$$

$$V = 20000\,L.S.$$

ولحساب القيمة الحالية التجارية نطبق العلاقة:

$$V - Vt = Dt - D = D.n.p$$

$$20000 - Vt = 200$$

$$Vt = 19800\,L.S.$$

ولحساب معدل الخصم نطبق العلاقة:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{q}{p}$$

$$\frac{2000}{2200}=\frac{q}{0,12}$$

$$q=0,109=(10,9\%)$$

ولحساب القيمة الاسمية للدين نطبق العلاقة:

$$S=V(1+n.p)=20000\left(1+\frac{10}{12}.\frac{12}{100}\right)$$

$$S=22000\,L.S.$$

مثال 4:

اقترض أحدهم مبلغاً من المال بفائدة بسيطة 8% سنوياً ولمدة 9 أشهر. وحرر سنداً عليه بذلك المبلغ، فما هي القيمة الاسمية المثبتة على ذلك السند، إذا كان الفرق بين القيمة الحالية الصحيحة والقيمة الحالية التجارية يساوي 1800 ليرة سورية؟

الحل:

لدينا $n=\frac{9}{12}$ و $p=0,08$ و $V-Vt=1800$

ولحساب القيمة الاسمية S نستفيد من العلاقات الوسطية، ونحسب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$V-Vt=D.n.p$$

$$1800=D.\frac{9}{12}.\frac{8}{100}=0,06.D$$

$$D=30000\,L.S$$

وبعد ذلك نقوم بحساب القيمة الحالية الصحيحة من العلاقة:

$$D=V.n.p$$

$$30000=V.\frac{9}{12}.\frac{8}{100}=0,06V$$

$$V=500000\,L.S.$$

وبذلك نجد أن القيمة الاسمية تساوي:

$$S=V+D=500000+30000=530000\,L.S.$$

مثال 5:

إذا كان مقدار الخصم الصحيح لدينٍ يساوي 900 ليرة سورية، وكان مقدار الخصم التجاري يساوي 1000 ليرة سورية، وكانت مدة الدين 8 أشهر. فما هو معدل الفائدة البسيطة؟ وما هي القيمة الاسمية لذلك الدين؟ وما هي القيمة الحالية الصحيحة له؟ وما هي القيمة الحالية التجارية له؟ وما هو معدل الخصم المستخدم؟

الحل:

لدينا $D=900$، $Dt=1000$، $n=\frac{8}{12}$.

والمطلوب حساب $p=?$، $S=?$، $V=?$، $Vt=?$، $q=$

لحساب معدل الفائدة البسيطة يمكننا تطبيق العلاقة التالية:

$$Dt-D=D.n.p$$

$$1000-900=900\frac{8}{12}.p$$

$$p=0,1666666=(16,666\%)$$

ولحساب القيمة الاسمية للدين نطبق العلاقة:

$$Dt=S.n.p$$

$$1000=S.\frac{8}{12}.(0,1666666)$$

$$S=9000\,L.S$$

ولحساب القيمة الحالية الصحيحة نطبق العلاقة:

$$V=S-D=9000-900=8100\,L.S.$$

وكان يمكن حساب V من العلاقة $D=V.n.p$ ، ونترك ذلك للطالب على سبيل التمرين.

ولحساب القيمة الحالية التجارية نطبق العلاقة:

$$Vt=S-Dt=9000-1000=8000\,L.S.$$

وكان يمكن حسابها من العلاقة $Vt=S(1+n.p)$ ونترك ذلك للطالب على سبيل التمرين.

ولحساب معدل الخصم نطبق العلاقة:

$$q=\frac{V}{S}.p=\frac{8100}{9000}(0,1666666)=0,149999=(15\%)$$

ملاحظة:

للتحقق نأخذ هذا المعدل ونطبقه على القيمة الاسمية لحساب الخصم الصحيح فنجد أن:

$$D = S.n.q = 9000.\frac{8}{12}.\frac{15}{100} = 900\,L.S.$$

وهو الخصم الصحيح المفروض.
أما معدل الفائدة فيطبق على القيمة الاسمية لحساب الخصم التجاري فنجد أن:

$$Dt = S.n.p = 9000.\frac{8}{12}.(0{,}1666666) = 1000\,L.S.$$

وهو الخصم التجاري المفروض.

مثال 6:

يدين أحد الأشخاص للمصرف بمبلغ 10000 ليرة سورية، وأراد بتاريخ 2003/4/15 أن يسدده قبل موعده، فحسب له المصرف مقدار الخصم الصحيح بمعدل خصم 5%، فكان مساوياً لـ 300 ليرة سورية. فما هو تاريخ استحقاق ذلك الدين؟ وما هو مقدار الخصم التجاري إذا أراد بيعه في السوق؟

الحل:

لدينا $S=10000$، $q = \frac{5}{100}$ ، $D=300$، $n = ?$

لحساب n نطبق العلاقة التالية:

$$D = S.n.q$$

$$300 = 10000.n.\frac{5}{100}$$

$$n = 0{,}6 \text{ سنة}$$

لحساب تاريخ الاستحقاق نحول المدة إلى أيام فنجد أن:

$$n = 0{,}6 \times 365 = 219 \text{ يوماً}$$

وبذلك يكون تاريخ الاستحقاق هو التاريخ المقابل لناتج جمع الرقم التراكمي لتاريخ التسديد 2003/4/15 وهو 105 مع مدة الدين 219 يوماً فنجد أن العدد الناتج هو:

$$105 + 219 = 324$$

وأن التاريخ المقابل للرقم التراكمي 324 هو 2003/11/20 ، وهو تاريخ استحقاق الدين المذكور.
ولحساب مقدار الخصم التجاري نطبق العلاقة:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{V}{S}$$

وهذا يقتضي حساب القيمة الحالية الصحيحة V حيث نجد أن:

$$V = S - D = 10000 - 300 = 9700$$

وبذلك نجد أن:

$$\frac{300}{Dt}=\frac{9700}{10000}\Rightarrow$$

$$Dt=\frac{300\cdot 10000}{9700}=309{,}28 L.S.$$

مثال 7:

في 2003/3/6 أراد أحد الدائنين قطع كمبيالة لديه بمبلغ 10000 ليرة سورية، وتستحق الدفع في 2003/8/12.

والمطلوب حساب صافي القيمة الحالية، ومعدل الخصم الإجمالي، إذا علمت أن معدل الفائدة في المصرف 9%، وأن المصرف يعطي يوم مهلة للمدين، ويتقاضى عمولة بمعدل 0.2%، ويستوفي مصاريف تحصيل بمعدل 0.1%، وأنه يحسب السنة 360 يوماً.

الحل:

لدينا $S=10000$، $q=\frac{9}{100}$

ولحساب المدة بالأيام نلاحظ أنها:

يوماً $160=1+65-224$=مهلة $D+1$

وبذلك نجد أن المدة $n=\frac{160}{360}$ سنة وأن الخصم التجاري يساوي:

$$Dt=S.n.p=10000.\frac{160}{360}.\frac{9}{100}=400\ L.S$$

وأن عمولة المصرف $=10000.\frac{0{,}2}{100}=20 L.S.$

وأن مصاريف تحصيل$=10000.\frac{0{,}1}{100}=10 L.S.$

وأن إجمالي الخصم عند القطع: $D'=400+20+10=430$

وأن صافي القيمة الحالية التجارية : $NVt=S-D'=10000-430=9570$

ولحساب معدل الخصم الإجمالي نجد أن:

$$q'=\frac{\frac{400}{\frac{160}{360}}+20+10}{10000}=0{,}093\quad(9{,}3\%)$$

ملاحظة:

إن معدل الخصم الإجمالي q' يختلف عن معدل الخصم العادي q الذي يساوي:

$$q=\frac{D}{n.S}=\frac{V}{S}.p$$

لحسابه نحسب القيمة الاسمية الصحيحة V من العلاقة:

$$V = \frac{S}{1+n.p} = \frac{10000}{1+\frac{160}{360}\cdot\frac{9}{100}} = 9620{,}45\,L.S.$$

وبذلك نجد أن معدل الخصم العادي:

$$q = \frac{9620{,}45}{10000}.\frac{9}{100} = 0{,}08658 \quad (8{,}658\%)$$

مثال 8:

قرر أحمد في 2003/9/13 قطع الأوراق التجارية التالية:

ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 4000 ليرة سورية وتستحق في 2003/10/12.

ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 6000 ليرة سورية وتستحق في 2003/11/11.

ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 2000 ليرة سورية وتستحق في 2003/12/21.

والمطلوب:

1 ـ حساب صافي القيمة الحالية للأوراق السابقة.

2 ـ حساب معدل الخصم الإجمالي.

وذلك إذا علمت أن المصرف يعتمد القواعد التالية:

1 ـ يحسب السنة المالية 360 يوماً.

2 ـ يعطي مهلة للمدين مقدارها يوم واحد.

3 ـ يتقاضى عمولة بمعدل 0.01% (واحد بالألف.

4 ـ يستوفي مصاريف تحصيل بمعدل 0.05% (نصف بالألف).

5 ـ يطبق معدل فائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

الحل:

لدينا: $S_1 = 4000$ ، $S_2 = 6000$ ، $S_3 = 2000$

أولاً: نقوم بحساب مدة كل من هذه الأوراق، ونأخذ بعين الاعتبار يوم المهلة فنجد أن:

$d_1 + 1 = 285 - 256 + 1 = 30$ يوماً

$d_2 + 1 = 315 - 256 + 1 = 60$ يوماً

$d_3 + 1 = 355 - 256 + 1 = 100$ يوماً

وبذلك نجد أن الخصم التجاري العادي لهذه الأوراق يساوي:

$$Dt_1 = S_1.n_1.p = 4000.\frac{30}{360}.\frac{6}{100} = 20\,L.S$$

$$Dt_2 = S_2.n_2.p = 6000.\frac{60}{360}.\frac{6}{100} = 60\,L.S$$

$$Dt_3 = S_3.n_3.p = 2000.\frac{100}{360}.\frac{6}{100} = 33{,}33\,L.S$$

وبذلك نجد أن مجموع الخصومات التجارية:

$$Dt = 20 + 60 + 33{,}33 = 113{,}33\,L.S.$$

وهنا نلاحظ أن مجموع القيم الاسمية لهذه الأوراق المالية يساوي:

$$S = 4000 + 6000 + 2000 = 12000\ L.S.$$

ولحساب صافي القيمة الحالية نقوم حساب الرسوم الإضافية وهي:

$$\text{عمولة المصرف} = 12000.\frac{1}{1000} = 12\ L.S$$

$$\text{نفقات التحصيل} = 12000.\frac{0,05}{100} = 6\ L.S$$

وبذلك نجد أن الخصم الإجمالي $D't = 113,33 + 12 + 6 = 131,33 L.S.$

وبذلك نجد أن صافي القيمة الحالية التجارية:

$$NVt = S - D't = 12000 - 131,33 = 11868,67\ L.S.$$

ثانياً: لحساب معدل الخصم الإجمالي يجب أن نلاحظ أنه كغيره من المعدلات، يحسب منسوباً إلى سنة كاملة. ولكن هذا الشرط غير محقق في بعض الخصومات السابقة، حيث نجد أن كل من الخصومات التجارية حسب منسوباً إلى مدة كل ورقة تجارية، ويجب إعادتها إلى ما يعادلها سنوياً، ولذلك نستخدم عملية التناسب التالي:

إذا تم استيفاء رسم بمقدار C عن مبلغ S ولمدة 8 سنة؛ فما هو الرسم المعادل له C' عن المبلغ S نفسه ولمدة 1 سنة؟

من خلال ما تقدم نجد أن: $C.1 = C'.n \Rightarrow C' = \frac{C}{n}$

وهذا يعني أنه حتى نحول مبالغ الخصومات القصيرة السابقة إلى مبالغ تعادلها سنوياً يجب أن نقسم كلاً منها على المدة n، وهكذا نجد أن:

$$\text{المبلغ المعادل للخصومات التجارية} = \frac{20}{\frac{30}{360}} + \frac{60}{\frac{60}{360}} + \frac{33,33}{\frac{100}{360}} = 720$$

أما المبلغ المعادل لعمولات الصرف فيبقى نفسه، مساوياً لـ $12\ L.S.$ لأنه حُسِبَ وكأنه عن سنة كاملة.

أما المبلغ المعادل لنفقات التحصيل فيبقى مساوياً لـ $6\ L.S.$ لأنه حُسِبَ وكأنه عن سنة كاملة.

وبذلك نجد أن المبلغ المعادل سنوياً لإجمالي الخصومات والعمولات والنفقات يساوي:

$$D' = 720 + 12 + 6 = 738\ L.S$$

وهكذا نجد أن معدل الخصم الإجمالي يساوي:

$$q' = \frac{D'}{S} = \frac{738}{12000} = 0,0615 = (6,15\%)$$

تمرينــات

1 ـ يريد أحدهم خصم كمبيالة قيمتها 2000 ليرة سورية خصماً تجارياً. فاحسب قيمتها الحالية إذا علمت أنها تستحق بعد 150 يوماً، وأن معدل الفائدة البسيطة7%.

2 ـ بتاريخ 2004 /6/15 تقدم أحد الأشخاص لأحد المصارف طالباً خصم الكمبيالات التالية:

1 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 4000 ليرة سورية وتستحق في 2004/9/30.
2 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 6000 ليرة سورية وتستحق في 2004/10/31.
3 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 2000 ليرة سورية وتستحق في 2004/11/30.
4 ـ كمبيالة قيمتها الاسمية 2000 ليرة سورية وتستحق في 2004/12/31.

علماً بأن المصرف وافق على إجراء الخصم بمعدل فائدة 6% سنوياً.

3 ـ يريد أحدهم تسديد دين عليه قدره 24000 ليرة سورية، ويستحق السداد بعد 8 أشهر من الآن. فما هي القيمة الحالية الصحيحة لهذا الدين إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً؟ ثم احسب مقدار الخصم الصحيح.

4 ـ احسب القيمة الحالية التجارية والخصم التجاري للدين الوارد في التمرين السابق.

5 ـ حضر شخص إلى المصرف بتاريخ 2004/5/20 وطلب خصم كمبيالة قيمتها 35000 ليرة سورية وتستحق بتاريخ 2005/2/30. وبعد إجراء عمليات الخصم الصحيح تبين أن قيمتها الحالية تبلغ 33500 ليرة سورية. والمطلوب حساب معدل الخصم الصحيح المطبق في المصرف.

6 ـ احسب معدل الخصم التجاري للكمبيالة المذكورة في التمرين السابق.

7 ـ عند حساب الفرق بين الخصمين التجاري والصحيح لكمبيالة تستحق بعد 8 أشهر ، كان يساوي 120 ليرة سورية. وإذا كان معدل الفائدة 8% سنوياً، فأوجد القيمة الاسمية لهذه الكمبيالة.

8 ـ حضر أحدهم بتاريخ 2004/9/3 لخصم سند تجاري قيمته الاسمية 4000 ليرة سورية. فأوجد تاريخ استحقاق هذا السند إذا علمت أن معدل الفائدة 7%، وأن الفرق بين الخصمين التجاري والصحيح كان يساوي 60 ليرة سورية.

الفصل الخامس

تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات التالية:

1 ـ أسس التسوية:

2 ـ حالات التسوية:

ـ تسديد الدين قبل موعده.

ـ تسوية دين واحد بآخر جديد.

ـ تسوية عدة ديون بدين واحد.

ـ تسوية عدة ديون بدفعة نقدية ودين جديد بالباقي.

ـ استبدال عدة ديون بدين موحد وتاريخ استحقاق متوسط .

ـ استبدال عدة ديون بدين موحد وبتاريخ استحقاق مناسب.

3 ـ تمرينات

الفصل الخامس

تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة)

2-1- أسس التسوية:

إن الظروف الحياتية المختلفة قد تجبر المدين أن يطلب من الدائن أن يعيد النظر في الديون المستحقة له، وأن يعدل في تواريخ استحقاقاتها؛ ويتم ذلك حسب أحد الأشكال التالية:

أ ـ استبدال دين واحد بدين آخر جديد وبتاريخ استحقاق جديد.

ب ـ استبدال عدة ديون بدين واحد جديد وبتاريخ استحقاق جديد يسبق تواريخ الديون الأصلية أو يقع بينها أو يأتي بعدها.

جـ ـ أن يتم تسديد جزء من الدين الأصلي وتحرير سند بدين جديد بالمبلغ المتبقي وبتاريخ جديد.

د ـ استبدال عدة ديون أصلية بدين واحد له نفس القيمة الاسمية وبتاريخ استحقاق متوسط.

هـ ـ استبدال عدة ديون بعدة ديون بتواريخ معينة.

وحتى لا يتضرر أي طرف من أطراف التعاقد (الدائن والمدين) من عملية الاستبدال والتسوية، يجب إضافة الفوائد المستحقة عن كل دين يتم تأجيل موعد استحقاقه، وأن يتم إنقاص قيمة الدين الذي يسدد قبل موعده بمقدار الخصم المستحق عن ذلك التقديم.

والقاعدة العامة المتبعة في تسوية الديون والتي تحفظ حقوق الطرفين هي أن يتم تحديد تاريخ معين لهذه التسوية، ثم حساب القيم الحالية لتلك الديون منسوبةً إلى تاريخ التسوية، ثم تطبيق المعادلة التالية

(1-5) مجموع القيم الحالية للديون قبل التسوية (في لحظة التسوية) = مجموع القيم الحالية للديون بعد التسوية (في لحظة التسوية)

وبتطبيق هذه القاعدة المعتمدة على القيم الحالية يمكننا إجراء جميع الحسابات اللازمة لتسوية الديون المختلفة، ويتم حساب القيم الحالية إما على أساس القيم الحالية الصحيحة باستخدام معدل الفائدة البسيطة p، أو على أساس القيم الحالية التجارية باستخدام معدل الخصم التجاري q_k، وهنا نذكّر بالعلاقات اللازمة لحساب القيم الحالية الصحيحة حسب استخدام معدل الفائدة P أو معدل الخصم الصحيح q عند سعر الفائدة p:

$$V = \frac{S}{1 + n.p} \qquad (2-5)$$

وعند معدل الخصم الصحيح q:

$$V = S(1 - n.q) \qquad (3-5)$$

أما عندما يكون التعامل على أساس القيم الحالية التجارية، فإنه يتم حسابها من العلاقة $Vt = S(1 - n.P)$.

وسنقوم بتوضيح كيفية تطبيق ذلك من خلال الأمثلة التالية:

2-5- حالات التسوية:

الحالة الأولى ـ تسديد الدين قبل موعده:

إذا أراد المدين تسديد أي دين عليه قبل حلول موعده، فإنه سيطلب من الدائن خصم مبلغ من الدين المسجل مقابل تسديد الدين قبل موعده، لذلك سيتفق الطرفان على حساب القيمة الحالية الصحيحة من أحد العلاقتين المتكافئتين:

$$V = \frac{S}{1 + n.p} \quad \Leftrightarrow \quad V = S(1 - n.q)$$

أما إذا كانت المعاملة بين الطرفين تجارية، فإن الطرفين يمكن أن يحسبا القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$Vt = S(1 - n \cdot p)$$

مثال 1:

أراد أحدهم تسديد السند الذي عليه قبل موعده. فإذا كانت القيمة الاسمية لذلك السند 10000 ليرة سورية، وكانت مدة الاستحقاق المتبقية 8 أشهر، وكان سعر الفائدة البسيطة $p = 0,06$ ، فاحسب المبلغ الذي يجب عليه تسديده عن قطع السند المذكور.

الحل:

لدينا $S=10000$، $n = \frac{8}{12}$ ، $p = 0,06$

نلاحظ أن المبلغ الذي يجب تسديده هو القيمة الحالية لذلك السند وهي تساوي:

$$V = \frac{S}{1+n.p} = \frac{10000}{1+\frac{8}{12}.(0,06)} = 9615\, L.S$$

مثال 2:

تقدم أحدهم بدعوى على ورثة أحمد، يطلب فيها منهم تسديد الدين الذي له على والدهم بموجب سند قيمته 20000 ليرة سورية ويستحق بعد 5 أشهر من الآن، فاحسب المبلغ الذي سيقرره القاضي لتسديد ذلك الدين، إذا علمت أن معدل الخصم التجاري 0,07.

الحل:

لدينا $S=20000$، $n = \frac{5}{12}$ ، $P = qt = 0,07$

نلاحظ أن المبلغ الذي سيقرره القاضي يساوي القيمة الحالية التجارية لذلك السند، وهي تساوي:

$$Vt = S(1-np)$$

$$Vt = 20000\left(1-\frac{5}{12}.(0,07)\right) = 19416,67\, L.S$$

الحالة الثانية: استبدال دين واحد بآخر جديد:

مثال 3:

لتسوية دين أصلي بدين جديد مجهول بتاريخ استحقاق معلوم، لنفترض أن أحدهم مدين لآخر بدين قدره 50000 ليرة سورية، ويستحق بعد 7 أشهر من الآن. وأراد استبداله بدين جديد يستحق بعد 9 أشهر. فما هي القيمة الاسمية للدين الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 8% سنوياً.

الحل:

وفقاً للقاعدة العامة يجب أن تكون:

القيمة الحالية للدين القديم = القيمة الحالية للدين الجديد.

وبفرض أن القيمة الاسمية المجهولة للدين الجديد هي X، وبتطبيق قانون القيمة الحالية الصحيحة على الدينين القديم والجديد نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{50000}{1+\frac{7}{12}.\left(\frac{8}{100}\right)}=\frac{X}{1+\frac{9}{12}.\left(\frac{8}{100}\right)}$$

وبضرب الطرفين بالوسطين نحصل على أن:

$$1{,}046667\cdot X=1{,}06\cdot 50000$$

$$X=\frac{1{,}06\cdot 50000}{1{,}046667}=50636{,}93\,L.S.$$

مثال 4:

لتسوية دين أصلي بدين جديد معلوم بتاريخ استحقاق مجهول، لنفترض أن أحدهم مدين لآخر بمبلغ قدره 70000 ليرة سورية، ويستحق بتاريخ 2003/3/15. وبتاريخ 2003/2/3 اتفق مع الدائن أن يستبدل ذلك الدين بدين آخر قيمته الاسمية 5000 ليرة سورية.

والمطلوب حساب تاريخ استحقاق الدين الجديد إذا علمنا أن سعر الفائدة البسيطة 8% سنوياً.

الحل:

نفترض مدة استحقاق الدين الجديد هي t. كما نلاحظ أن مدة استحقاق الدين القديم اعتباراً من تاريخ التسوية 2003/2/4 تساوي $74-34=40$ يوماً، وبذلك نجد أن:

$$\frac{70000}{1+\frac{40}{365}.\left(\frac{8}{100}\right)}=\frac{75000}{1+t.\left(\frac{8}{100}\right)}$$

$$75657,53=70000+5600t$$

$$t=\frac{5657,53}{5600}=1,01027 \text{ سنة}$$

ثم نقوم بتحويل كسر السنة إلى أيام فنجد أن:

$$d=0,01027(365)=3,75\approx 4 \text{ يوماً}$$

وعلى أن عام 2004 هو سنة كبيسة، ولكن تاريخ الاستحقاق الجديد ستكون بعد سنة و4 أيام؛ أي بتاريخ 2004/2/7 لأنه لايشمل يوم 29 شباط من عام 2004.

الحالة الثالثة: تسوية عدة ديون بدين واحد:

مثال 5:

أرادت إحدى الشركات بتاريخ 2003/3/15 تسوية ديونها التالية لدى المصرف:

15000 ليرة سورية ويستحق بعد 100 يوم من ذلك التاريخ.

20000 ليرة سورية ويستحق بعد 120 يوم من ذلك التاريخ.

فاتفقت مع إدارة المصرف على استبدال هذين الدينين بدين واحد قيمته 40000 ليرة سورية.

احسب تاريخ استحقاق الدين الجديد إذا علمت أن معدل الخصم التجاري هو 16% سنوياً.

الحل:

إن القيمة الحالية للدين الأول باستخدام معدل الخصم التجاري تساوي:

$$Vt_1=15000\left(1-\frac{100}{360}.\frac{16}{100}\right)=14333,33\,L.S.$$

والقيمة الحالية للدين الثاني باستخدام معدل الخصم التجاري تساوي:

$$Vt_2=20000\left(1-\frac{120}{360}.\frac{16}{100}\right)=18933,33\,L.S.$$

ولتطبيق القاعدة العامة نفترض أن مدة استحقاق الدين الجديد t يوماً، فنجد أن:

$$14333,33 + 18933,33 = 40000\left(1 - \frac{t}{360}.\frac{16}{100}\right)$$

$$33266,66 = 40000 - \frac{40000 \times 16.t}{36000}$$

$$6733,34 = 17,7778t$$

$$t = \frac{6733,34}{17,7778} = 378,75 = 379 \quad \text{يوماً}$$

$$t \approx 379 = 365 + 14 \quad \text{يوماً}$$

وبذلك نجد أن مدة الاستحقاق تعادل سنة و14 يوماً، اعتباراً من تاريخ التسوية المذكور 2003/3/15، وبما أن ذلك سيمتد إلى سنة 2004 الكبيسة، فإن جزءاً من هذه المدة سيقع في عام 2003 ، ويساوي 291 (291=74-365). أما الجزء الآخر فيقع في عام 2004، وهو يساوي 88 يوماً (88=291-379). وهو العدد التراكمي المقابل لتاريخ الاستحقاق، ولكن بما أن هذه المدة تشمل شهر شباط (فبراير) الذي يتألف في ذلك العام من 29 يوماً، فإن ذلك الرقم التراكمي المقابل لتاريخ الاستحقاق الفعلي هو 87 يوماً، وهو يقابل تاريخ 2004/3/28، وهو تاريخ استحقاق الدين الجديد.

مثال 6:

لنفترض أن شركة تدين للمصرف بالمبالغ التالية:

20000 ل.س وتستحق بعد 3 أشهر منذ الآن.

40000 ل.س وتستحق بعد 8 أشهر منذ الآن.

وتريد الآن تسوية هذين الدينين بدين واحد يستحق بعد 10 أشهر.

فما هي قيمة الدين الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 15% سنوياً.

الحل:

انطلاقاً من القاعدة السابقة يجب أن تتحقق المعادلة التالية:

القيمة الحالية للدين الأول + القيمة الحالية للدين الثاني= القيمة الحالية للدين الجديد.

وبفرض أن القيمة الاسمية للدين الجديد هي X، نقوم بحساب القيم الحالية على أساس القيم الحالية الصحيحة لكل من الديون السابقة فنجد أن:

$$V_1 + V_2 = V$$

$$\frac{20000}{1+\frac{3}{12}\cdot\frac{15}{100}} + \frac{40000}{1+\frac{8}{12}\cdot\frac{15}{100}} = \frac{X}{1+\frac{10}{12}\cdot\frac{15}{100}}$$

$$19277{,}11 + 36363{,}64 = \frac{x}{1{,}125}$$

$$X = 1{,}125\,(19277{,}11 + 36363{,}64)$$

$$X = 62595{,}84\ L.S$$

وهو القيمة الاسمية للدين الجديد الذي يستحق بعد 10 أشهر من الآن.

الحالة الرابعة: تسوية عدة ديون بدفعة نقدية ودين جديد بالباقي:

مثال 7:

شخص مدين لآخر بالمبالغ التالية:

5000 ل. س ويستحق بعد 4 أشهر.

4000 ل. س ويستحق بعد 6 أشهر.

6000 ل. س ويستحق بعد 8 أشهر.

واتفقا على تسويتها على الشكل التالي:

- يقوم المدين بتسديد مبلغ 2850 ل.س فوراً ونقداً.
- يتم تحرير سند أو كمبيالة بالمبلغ الباقي وتستحق بعد 5 أشهر.

فما هي القيمة الاسمية للدين المتبقي إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً؟

الحل:

نطبق القاعدة العامة، ونحسب القيم الحالية الصحيحة للديون قبل التسوية:

القيمة الحالية للمبلغ الأول:

$$V_1 = \frac{5000}{1+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{100}} = 4901{,}96\ \ L.S$$

$$V_2 = \frac{4000}{1+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{100}} = 3883{,}50\ \ L.S$$

$$V_3 = \frac{6000}{1+\frac{8}{12}\cdot\frac{6}{100}} = 5769{,}23\ \ L.S$$

وبذلك يكون مجموع القيم الحالية لتلك الديون مساوياً:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$V = 4901,96 + 3883,50 + 5769,23$$
$$V = 14554,69 \ \ L.S$$

وبما أن المدين سيقوم بتسديد مبلغ 2850 ل.س فوراً ونقداً، فإن المبلغ المتبقي من مجموع القيمة الحالية يساوي:

$$V' = V - 2850 = 14554,69 - 2850$$
$$V' = 11704,69 \ \ L.S$$

وهذا المبلغ المتبقي هو القيمة الحالية للدين الجديد الذي اتفق على تسديده بعد 5 أشهر. لذلك نفترض أن القيمة الاسمية لذلك الدين هي X فيكون لدينا:

$$11704,69 = \frac{X}{1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{100}} = \frac{X}{1,025}$$
$$X = 11704,69 \cdot (1,025) = 11997,31 \ \ L.S$$

مثال 8:

يدين أحد المزارعين للمصرف الزراعي بالمبالغ التالية:

3000 ل.س ويستحق في 2004/1/8

2000 ل.س ويستحق في 2004/3/19

وفي 2003/11/19 اتفق مع المصرف على تسوية هذين الدينين على الشكل التالي:

- يتم دفع مبلغ 1000 ل.س فوراً ونقداً.
- يحرر بالمبلغ المتبقي كمبيالتين، القيمة الاسمية للأولى ضعف القيمة الاسمية للثانية، وتستحق الأولى في 2003/12/29، وتستحق الثانية في 2004/2/27 .

أوجد القيمة الاسمية للكمبيالتين، علماً بأن معدل الخصم التجاري 6% سنوياً.

الحل:

نحسب المدة الزمنية بالأيام لكل من الدينين القديمين، فنجد أن:

مدة الدين الأول= 11 من تشرين أول + 31 من كانون أول + 8 من كانون الثاني = 50 يوماً.

مدة الدين الثاني= 11 من تشرين أول + 31 من كانون أول + 31+29+19 = 121 يوماً.

ثم نحسب القيمة الحالية لكلٍ منهما من العلاقة $V_t = S \cdot (1 - np)$ فنجد أن:

$$Vt_1 = 3000\left(1 - \frac{50}{360} . \frac{6}{100}\right) = 2975 \, L.S.$$

$$Vt_2 = 2000\left(1 - \frac{121}{360} . \frac{6}{100}\right) = 1959,667 \, L.S.$$

وأن مجموع هاتين القيمتين يساوي:

$$Vt = Vt_1 + Vt_2$$
$$Vt = 2975 + 1959,667$$
$$Vt = 4934,667$$

وبما أن المزارع سيدفع نقداً وفوراً مبلغ 1000 ل.س، فإن المبلغ المتبقي من مجموع القيمة الحالية يساوي:

$$4934,66 - 1000 = 3934,66 \ \ L.S$$

نفترض أن قيمة الكمبيالة الثانية X، فتكون قيمة الكمبيالة الأولى $2X$. ثم نحسب مدة كل منهما فنجد أن:

مدة الكمبيالة الأولى تساوي 11 يوماً من تشرين الأول + 29 يوماً من كانون الأول = 40 يوماً.

مدة الكمبيالة الثانية تساوي 11 يوماً من تشرين الأول + 31 من كانون الأول +31+27= 100 يوم.

ثم نضع المعادلة بين القيم الحالية للديون السابقة واللاحقة كما يلي:

$$3934,667 = 2X\left(1 - \frac{40}{360} \cdot \frac{6}{100}\right) + X\left(1 - \frac{100}{360} \cdot \frac{6}{100}\right)$$
$$3934,667 = 1,98667 \cdot X + 0,983333 \cdot X = 2,97 \cdot X$$

ومنها نجد أن قيمة الكمبيالة الثانية :

$$X = \frac{3934,667}{2,97} = 1324,8 L.S$$

ونجد أن قيمة الكمبيالة الأولى:

$$2 \cdot X = 2 \cdot (1324,8) = 2649,61$$

مثال 9:

يدين أحد التجار لإحدى المؤسسات بمبلغ 10000 ل.س. ويستحق بعد 8 أشهر من الآن. ولتسوية هذا الدين، اتفق مع المؤسسة لتسديد ذلك الدين على الشكل الآتي:

- أن يقوم بتسديد مبلغ 1466.67 ل.س نقداً وفوراً.
- أن يحرر كمبيالة بالمبلغ المتبقي وتستحق بعد 6 أشهر.

والمطلوب إيجاد القيمة الاسمية للكمبيالة، إذا علمت أن معدل الخصم التجاري 8% سنوياً.

الحل:

إن القيمة الحالية التجارية للدين الأساسي تساوي:

$$VL = 10000\left(1 - \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{100}\right) = 9466,667 \ \ L.S$$

وبما أنه سيسدد نقداً وفوراً مبلغ 1466.667 فإن المبلغ المتبقي من القيمة الحالية يساوي:

$$9466,667 - 1466.667 = 8000\ L.S.$$

تفرض أن القيمة الاسمية للكمبيالة هي X 6 وهي تستحق بعد 6 أشهر، فإن قيمتها الحالية تساوي:

$$V = X(1 - n.P) =$$

$$8000 = X(1 - \frac{6}{12} \cdot \frac{8}{100}) = 0,96 \cdot X$$

ومنه نجد أن القيمة الأسمية X تساوي:

$$X = 8333,333\ L.S$$

الحالة الخامسة: استبدال عدة ديون بدين معلوم وبتاريخ استحقاق متوسط:

إن هذه الحالة تشترط أن تكون القيمة الاسمية للدين الجديد S مساوية لمجموع القيم الاسمية للديون القديمة. أي يشترط أن يكون:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ...$$

وبتطبيق القاعدة السابقة على القيم الحالية التجارية، والتي تعنى ضرورة أن تكون القيم الحالية التجارية للدين الجديد Vt مساوية لمجموع القيم الحالية التجارية للديون القديمة، أي يجب أن يكون:

$$Vt = Vt_1 + Vt_2 + Vt_3 + ...$$

وبفرض أن المدة المتوسطة لاستحقاق الدين الجديد هي t، ومدة الديون القديمة هي n_1, n_2, n_3 ، عندها نجد أن :

$$S(1 - t \cdot p) = S_1(1 - n_1 p) + S_2(1 - n_2 p) + S_3(1 - n_3 p) + ..$$

$$S - S \cdot t \cdot p = S_1 + S_2 + S_3 + ..p \cdot (S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 + ...)$$

وبما أن $S = S_1 + S_2 + S_3 + ...$ فرضاً لذلك نختصرهما من الطرفين فنحصل على مايلي:

$$S \cdot t \cdot p = p \cdot (S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 + ...)$$

$$t = \frac{S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 + ...}{S} \qquad (4-5)$$

أي أن المدة المتوسطة للدين الموحد الجديد تساوي المتوسط المثقل لمدد القروض القديمة بواسطة القيم الأسمية لها.

مثال 10:
بتاريخ 2003/3/1 أراد أحد التجار استبدال ديونه التالية:
5000 ل.س ويستحق في 2003/9/15
4000 ل.س ويستحق في 2003/10/25
6000 ل.س ويستحق في 2003/12/10
بدين موحد مساوٍ لهم بالقيمة، والمطلوب حساب المدة المتوسطة للدين الموحد وتاريخ استحقاقه.

الحل:

نقوم أولاً بحساب المدد الزمنية لكل من الديون السابقة فنجد أن:
مدة استحقاق الدين الأول بالأيام 198 = 60 - 258
مدة استحقاق الدين الثاني بالأيام 238 = 60 - 298
مدة استحقاق الدين الثالث بالأيام 284 = 60 - 344
وبما أن $S_1 = 5000$ $S_2 = 5000,$ وأن $S_3 = 6000$ فإن :

$$S = 5000 + 4000 + 6000 = 15000 \ L.S$$

ولإيجاد المدة المتوسطة للدين الموحد نطبق العلاقة (4-5) فنجد أن:

$$t = \frac{5000 \cdot 198 + 4000 \cdot 238 + 6000 \cdot 284}{15000}$$

$$t = \frac{3646000}{15000} = 243.06 \approx 244 \text{ يوماً}$$

أي إن العدد التراكمي لتاريخ استحقاق الدين $244 + 60 = 304$
وهو يقابل تاريخ 2003/10/31.

ملاحظة:

نلاحظ إن المدة المتوسطة للدين الجديد ليست لها علاقة بسعر الفائدة أو الخصم p. ولكنها ترتبط بشكل كبير بالقيم الاسمية للديون القديمة، ومع أنها تقع بين أصغر مدة وأكبر مدة لها ولكنها تنزاح نحو القيمة الاسمية الكبيرة.

الحالة السادسة: استبدال عدة ديون بدين موحد وبتاريخ استحقاق مناسب (الحالة العامة):

يمكن معالجة هذه الحالة عن طريق القيم الحالية الصحيحة وبدون أية شروط على القيمة الاسمية للدين الجديد S أو على سعر الفائدة P. وتنطلق هذه المعالجة من القاعدة العامة حيث يجب أن يكون لدينا:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ...$$

حيث V هي القيمة الحالية الصحيحة للدين الجديد S ، و V_1, V_2, V_3 هي القيم الحالية الصحيحة للديون القديمة. وبفرض أن t هي المدة الوسطى للدين الجديد، وأن سعر الفائدة الجديد هو P'. وبإرجاع كل ذلك إلى لحظة البدء نجد أن:

$$\frac{S}{1+tp'} = V_1 + V_2 + V_3 = V$$

$$1+tp' = \frac{S}{V_1+V_2+V_3} = \frac{S}{V}$$

$$tp' = \frac{S}{V} - 1 = \frac{S-V}{V}$$

$$t = \frac{S-V}{P' \cdot V} \qquad (5-5)$$

وهنا يشترط فقط أن يكون $S \geq V$ وهو أمر يمكن تحقيقه عند الاتفاق.

مثال 11:

حتى نطبق العلاقة (5-5) نأخذ مثالاً عاماً لاتوجد فيه أية شروط. لذلك نفترض أن أحدهم مدين لآخر بالديون التالية التي تحسب عليها فائدة بسيطة بسعر 9% سنوياً.

5000 ل.س ويستحق في 2003/9/15

4000 ل.س ويستحق في 2003/10/25

6000 ل.س ويستحق في 2003/12/10

وتاريخ 2003/3/1 أراد أن يستبدل هذه الديون بدين واحد قيمته الاسمية 16000 ل.س ، وبفائدة بسيطة 12% سنوياً.

فما هو تاريخ الاستحقاق المتوسط للدين الجديد.

الحل:

لدينا:

$$S = 16000, \quad P' = 0.12 \ , P = 0.09,$$

$$S_3 = 6000 \quad S_2 = 4000, \quad S_1 = 5000$$

كما نجد أن المدد المقابلة لهذه الديون تساوي:

يوماً $n_1 = 198$ ، يوماً $n_2 = 238$ ، يوماً $n_3 = 284$ ، وبذلك نجد أن القيم الحالية لهذه الديون تساوي:

$$V_1 = \frac{S_1}{1+n_1 p} = \frac{5000}{1+\frac{198}{365}(0.09)} = \frac{5000}{1.04882} = 4767.25 \ \ L.S$$

$$V_2 = \frac{S_2}{1+n_2 p} = \frac{4000}{1+\frac{238}{365}(0.09)} = \frac{4000}{1.058685} = 3778.27 \ \ L.S$$

$$V_3 = \frac{S_3}{1+n_3 p} = \frac{6000}{1+\frac{284}{365}(0.09)} = \frac{6000}{1.07003} = 5607.33 \ \ L.S$$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الإجمالية تساوي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 4767,25 + 3778,27 + 5607,33 =$$

$$V = 14152,85 \ \ L.S$$

وبذلك نجد أن المدة المتوسطة تساوي:

$$t = \frac{S-V}{p'v} = \frac{16000-14152.85}{0.12(14152.85)} = 1.0876 \text{ سنة } = 365 + 32 \text{ يوماً}؛$$

أي إن وتاريخ الاستحقاق المتوسط سيكون بعد عام و32 يوماً اعتباراً من تاريخ الاستبدال2003/3/1؛ أي إنه سيقع في سنة 2004 الكبيسة، لذلك سيكون تاريخ الاستحقاق المتوسط في 2004/4/1 ، وهوتاريخ يقع بعد المدد المحددة للديون السابقة، وذلك بسبب أننا جعلنا *S=16000* أكبر من مجموعها *15000*.

ملاحظة:

من العلاقة العامة (5-5) يمكننا استخلاص العلاقة الخاصة التي تشترط أن يكون سعر الفائدة P موحداً، وأن تكون القيمة الاسمية للدين الجديد S مساوية لمجموع القيم الاسمية للديون القديمة؛ أي أنه عندها يشترط أن يكون:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_1 = V_1(1 + n_1 p) = V_1 + V_1 n_1 p \Rightarrow S_1 - V_1 = V_1 n_1 p$$

$$S_2 = V_2(1 + n_2 p) = V_2 + V_2 n_2 p \Rightarrow S_2 - V_2 = V_2 n_2 p$$

$$S_3 = V_3(1 + n_3 p) = V_3 + V_3 n_3 p \Rightarrow S_3 - V_3 = V_3 n_3 p$$

وبتعويض ذلك في العلاقة (5-5) والتي تحولت إلى الشكل التالي:

$$t = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - (V_1 + V_2 + V_3)}{pV} = \frac{(S_1 - V_1) + (S_2 - V_2) + (S_3 - V_3)}{pV}$$

$$t = \frac{V_1 n_1 p + V_2 n_2 p + V_3 n_3 p +}{pV} = \frac{V_1 n_1 + V_2 n_2 + V_3 n_3}{V} \ldots\ldots\ldots$$

وبذلك نحصل على علاقة أخرى لحساب المدة المتوسطة هي:

$$t = \frac{V_1 n_1 + V_2 n_2 + V_3 n_3}{V} \qquad (6-5)$$

وهي شبيهة بالعلاقة (5-4)، ولكنها بدلالة القيم الحالية للديون القديمة، وتمتاز بأنها أكثر دقةً ولكنها أطول حساباً.

مثال 12:

لنأخذ معطيات المثال 10 السابق، ولنفترض أن سعر الفائدة الموحد 9%، وأن الشرط الأساسي محقق؛ أي إن القيمة الاسمية للدين الجديد = مجموع القيم الاسمية للديون القديمة.

والمطلوب حساب المدة المتوسطة بدلالة القيم الحالية؛ أي من العلاقة (5-6).

الحل:

لدينا $S = 15000,,\quad S_3 = 6000,\quad S_2 = 4000,\quad S_1 = 5000$

ولتطبيق العلاقة (5-6) يجب حساب القيم الحالية V_1, V_2, V_3 ، وبذلك نجد أن:

$$V_1 = \frac{S_1}{1+n_1 p} = \frac{5000}{1+\frac{198}{365}(0.09)} = \frac{5000}{1.04882} = 4767.25 \ \ L.S$$

$$V_2 = \frac{S_2}{1+n_2 p} = \frac{4000}{1+\frac{238}{365}(0.09)} = \frac{4000}{1.05868} = 3778.27 \ \ L.S$$

$$V_3 = \frac{S_3}{1+n_3 p} = \frac{6000}{1+\frac{284}{365}(0.09)} = \frac{6000}{1.07003} = 5607.33 \ \ L.S$$

ثم نحسب القيمة الحالية الإجمالية، فنجد أنها تساوي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 4767,25 + 3778,27 + 5607,33 =$$

$$V = 14152,85 \ \ L.S$$

وبذلك نجد أن المدة المتوسطة تساوي:

$$t = \frac{4767,25 + \frac{198}{365} + 3778,27.\frac{238}{365} + 5607,33.\frac{284}{365}}{14152,85} = 0,6651 \text{ سنة}$$

وبتحويل ذلك العدد إلى أيام نجد أنه يساوي 243 يوماً $(365 \cdot 0,6651)$ وأن العدد التراكمي لتاريخ الاستحقاق المتوسط يصبح $303 = 60 + 243$ وأن ذلك العدد يقابل تاريخ الاستحقاق المتوسط، وهو في 2003/10/30 ، وهو تاريخ يختلف قليلاً عن التاريخ المحسوب في المثال 10 السابق.

تمرينات

1 ـ يدين أحدهم بمبلغ 60000 ليرة سورية للمصرف، ويستحق بعد 50 يوماً من الآن، ويريد استبداله بدين آخر يستحق بعد 250 يوماً، فما هي القيمة الاسمية للدين الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 7% سنوياً.

2 ـ يدين أحدهم لآخر بالمبالغ التالية:

20000 ليرة سورية ويستحق في 2004/4/30.

30000 ليرة سورية ويستحق في 2004/7/3.

50000 ليرة سورية ويستحق في 2004/10/31.

ويريد استبدال هذه الديون بدين واحد يستحق بتاريخ 2004/12/31، فما هي القيمة الاسمية لذلك الدين الجديد إذا علمت أن معامل الخصم يساوي 7% سنوياً.

3 ـ يدين أحدهم لآخر بالمبالغ التالية:

12000 ليرة سورية ويستحق بعد 150 يوماً من الآن.

16000 ليرة سورية ويستحق بعد 200 يوم من الآن.

20000 ليرة سورية ويستحق بعد 250 يوماً من الآن.

واتفق مع الدائن على أن يسدد له مبلغ 25000 ليرة سورية فوراً، وأن يحرر له سنداً جديداً يستحق بعد 300 يوم من الآن.

والمطلوب حساب القيمة الاسمية لذلك السند إذا كان سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً.

4 ـ أعد حل نفس التمرين السابق إذا كان معدل الخصم يساوي 6% سنوياً.

5 ـ يشتري تاجر بضاعته بدفع مبلغ 10000 ليرة سورية نقداً، أو بتحرير كمبيالتين متساويتين بالقيمة، تستحق الأولى بعد 60 يوماً، وتستحق الثانية بعد 120 يوماً. فاحسب القيمة الاسمية لكل من الكمبيالتين، ثم احسب ثمن البضاعة المشتراة، إذا علمت أن معدل الخصم يساوي 8% سنوياً.

الفصل السادس

حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة)

ويشمل الفقرات التالية:

1 ـ حصيلة الدفعات الدورية العادية

2 ـ حصيلة الدفعات الدورية الفورية

3 ـ تمرينات

الفصل السادس

حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة بسيطة)

يعالج هذا الفصل قضايا حساب حصيلة الدفعات الدورية والفوائد المستحقة عليها، والدفعات الدورية هي الدفعات التي تودع خلال كل فترة بانتظام في أحد المصارف، وتكون متساوية بالقيمة النقدية، ويمكن أن تكون فترات الدفع كل أسبوع أو كل شهر أو كل شهرين، أو كل فصل، أو كل سنة، أو بصورة عامة كل فترة زمنية معينة.

وسنميز هنا بين نوعين أساسيين من هذه الدفعات، وهما:

الدفعات العادية:

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي تدفع في نهاية الفترات الزمنية المحددة، أي في نهاية كل أسبوع أو كل شهر أو كل شهرين، أو كل فصل، أو كل سنة، أو غير ذلك. ويتم حساب الفوائد عليها خلال هذه الفترات حسب مدة إيداع كل دفعة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة؛ أي بعد إيداع الدفعة الأخيرة مباشرةً.

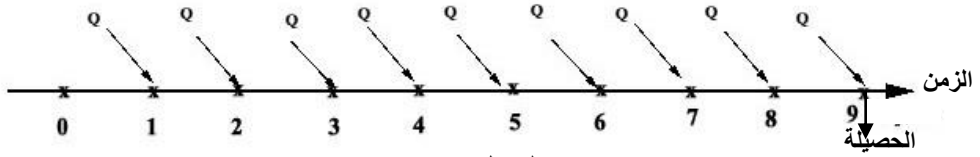
الدفعات الفورية:

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي تدفع في بداية الفترات الزمنية المحددة، أي في نهاية كل أسبوع أو كل شهر أو كل شهرين، أو كل فصل، أو كل سنة، أو غير ذلك. ويتم حساب الفوائد عليها خلال هذه الفترات حسب مدة إيداع كل دفعة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة أيضاً؛ أي بعد مرور فترة زمنية كاملة على إيداع الدفعة الأخيرة.

ونسمي التاريخ الذي نحسب فيه حصيلة تلك الدفعات بتاريخ الاستحقاق (النظري)، كما يمكن أن تُحسب حصيلة هذه الدفعات بعد فترة تأجيل معينة لتاريخ الاستحقاق الأساسي المحدد بنهاية فترات الإيداع.

6-1- حصيلة الدفعات الدورية العادية:

وهي الدفعات التي تودع في نهاية كل شهر أو فصل أو سنة أو فترة زمنية معينة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة، أي بعد إيداع الدفعة الأخيرة مباشرة وهي تمثل على المحور الزمني كما يلي (لتسع دفعات).



الشكل (1-6)

وحسب الشكل السابق نلاحظ أن عدد الدفعات هو 9 دفعات، ويتم إيداع الدفعة الأولى في نهاية الشهر الأول والثانية في نهاية الشهر الثاني ..... والتاسعة في نهاية الشهر التاسع، ونحسب حصيلة هذه الدفعات في نهاية الشهر التاسع، أي بعد إيداع الدفعة التاسعة الأخيرة مباشرة ودون انتظار.

مثال توضيحي:

لتوضيح كيفية حساب حصيلة هذه الدفعات، حيث نفترض أن أحد المواطنين يودع في نهاية كل شهر مبلغ 1000 ل. س ولمدة 9 أشهر وبفائدة بسيطة 14%. فما هي حصيلة هذا الإيداع في نهاية الشهر التاسع؟

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات عادية لأنها تدفع في نهاية كل شهر وأن عددها 9 دفعات، وإن حصيلتها = مجموع المبالغ المودعة + مجموع الفوائد المستحقة عليها.

وإن مجموع المبالغ المودعة = $1000 \times 9 = 9000$ ل.س .

أما الفوائد المستحقة فتختلف من دفعة لأخرى بسبب اختلاف مدة الإيداع، ونجد أن:

الفائدة المستحقة على الدفعة الأولى المودعة لمدة 8 أشهر فقط = $1000.\frac{14}{100}.\frac{8}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثانية المودعة لمدة 7 أشهر = $1000.\frac{14}{100}.\frac{7}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثالثة المودعة لمدة 6 أشهر = $1000.\frac{14}{100}.\frac{6}{12}$

.....

الفائدة المستحقة على الدفعة قبل الأخيرة المودعة لمدة شهر واحد = $1000.\frac{14}{100}.\frac{1}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الأخيرة لمدة صفر شهر = $1000.\frac{14}{100}.\frac{0}{12}$

وبذلك نجد أن مجموع الفوائد المستحقة يساوي:

$$I_9 = 1000 \cdot \frac{14}{100}\left(\frac{8}{12}+\frac{7}{12}+\frac{6}{12}+\frac{5}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{0}{12}\right)$$

$$I_9 = 1000 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{9}{2}\left(\frac{8}{12}+\frac{0}{12}\right) = 420 \quad L.S$$

وبملاحظة أن ما داخل القوس هو عبارة عن مجموع حدود متوالية حسابية حدها الأول $\frac{8}{12}$ والأخير $\frac{0}{12}$، وأساسها $\frac{1}{12}$ وعدد حدودها 9، لذلك يكون لدينا:

وبذلك نجد أن حصيلة هذه الدفعات العادية Q_9 تساوي

$$Q_9 = 9000 + 420 = 9420 \ L.S$$

وبناء على ماتقدم يمكننا استخلاص العلاقة الرياضية لحساب مجموع الفوائد المستحقة لـ m دفعة دورية عادية وشهرية قيمة كل منها K وكتابتها على الشكل التالي (للدفعات الشهرية):

$$I_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1}{12}+\frac{0}{12}\right) \qquad (1-6)$$

حيث إن M_1 هي مدة إيداع الدفعة الأولى بالأشهر. أما مدة الدفعة الأخيرة فتساوي الصفر. وبذلك نجد أن حصيلة هذه الدفعات العادية تساوي:

$$Q_m = K \cdot m + I_m$$

$$Q_m = K \cdot m + K \cdot P \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1}{12}+\frac{0}{12}\right) \qquad (2-6)$$

أما إذا كانت المدة الزمنية محسوبة بالأيام فإن العلاقتين السابقتين تأخذان الشكل الآتي (للدفعات المتساوية والجارية بانتظام):
الفائدة:

$$I_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{d_1+0}{365}\right) \qquad (3-6)$$

أما الحصيلة فتساوي:

$$Q_m = K.m + KP.\frac{m}{2}\left(\frac{d_1+0}{365}\right) \qquad (4-6)$$

حيث رمزنا بـ d_1 لمدة إيداع الدفعة الأولى بالأيام، أما مدة الدفعة الأخيرة فتساوي الصفر.

ملاحظة:

إذا كانت السنة كبيسة، وكانت المدد محسوبة بالأيام، فإننا نستبدل الرقم 365 بالرقم 366.

أما إذا كان المطلوب إجراء الحسابات على أساس السنة التجارية فإننا نضع مكان الرقم 365 الرقم 360 ونجري الحسابات كالعادة، كما يمكن إضافة مدة تأجيل الاستحقاق إلى مدة الإيداع في أي من العلاقات السابقة.

مثال 1:

قرر أحمد أن يودع في آخر كل شهر مبلغ 2000 ل.س من راتبه ولمدة عام، فاحسب حصيلة الإيداع والفوائد المستحقة إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 14%.

الحل:

بما أن هذه الدفعات الدورية عادية وشهرية فإننا نطبق العلاقتين (1-6) و(2-6)، فنجد أنه لدينا المعطيات التالية:

$$I_m = ? \qquad Q_m = ? \qquad P = 0{,}14 \qquad m = 12, \qquad K = 2000$$

ولحساب الحصيلة نطبق العلاقة:

$$Q_m = 2000 \cdot 12 + 2000\,\frac{14}{100}.\frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right) = 25540\ L.S$$

ولحساب الفوائد المستحقة نطبق العلاقة:

$$I_m = 2000.\frac{14}{100}.\frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right) = 1540\ L.S$$

مثال 2:

يريد محمد توفير مبلغ 20000 ل.س لشراء حاسوب، فقرر أن يقوم بإيداع دفعات شهرية عادية ولمدة خمسة عشر شهراً، فما هو مقدار الدفعة الدورية إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 18% سنوياً.

الحل:

لدينا البيانات التالية:

$$K = ? \qquad ,P = 0.18 \qquad ,n = 15, \qquad Q = 20000$$

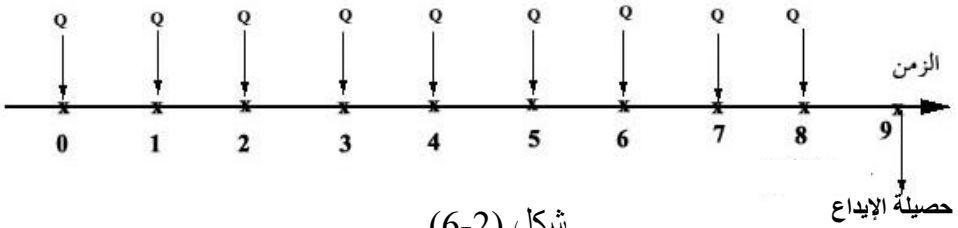
نعوض من العلاقة (2-6)، فنجد أن:

$$20000 = K.15 + K\frac{18}{100}\cdot\frac{15}{2}\left(\frac{14+0}{12}\right) = 16{,}5750\cdot k$$

$$K = \frac{20000}{16{,}5750} = 1206{,}64\ L.S$$

6-2- حصيلة الدفعات الدورية الفورية:

وهي الدفعات التي تودع في أول كل شهر أو فصل أو فترة زمنية معينة، وتحسب حصيلتها في نهاية الفترة الأخيرة للإيداع، تمثل على المحور الزمني كمايلي (لتسع دفعات).



شكل (2-6)

وحسب الشكل السابق نلاحظ أن عدد الدفعات هو 9 دفعات، ويتم إيداع الدفعة الأولى في أول الشهر الأول والثانية في أول الشهر الثاني ..... والتاسعة في أول الشهر التاسع، ولكن حصيلتها تحسب في نهاية الشهر التاسع، أي بعد مرور شهر على إيداع الدفعة التاسعة الأخيرة.

ولمعالجة هذه المسألة وحساب حصيلة هذه الدفعات الدورية، نأخذ المثال العددي التالي:

مثال توضيحي:

نفترض أن أحد المواطنين قرر أن يودع مبلغ 1000 ليرة سورية في أول كل شهر ولمدة 9 أشهر وبفائدة بسيطة 14%. فما هي حصيلة إيداعه في نهاية الشهر التاسع؟

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات دورية فورية لأنها تدفع في أول كل شهر، ومن الواضح أن حصيلة ذلك الإيداع = مجموع المبالغ المودعة + الفوائد المستحقة عليها.

وأن مجموع المبالغ المودعة = $1000 \times 9 = 9000$ ل.س .

وأن مدد الإيداع موضحة كما على الشكل السابق.

أما الفوائد المستحقة فتختلف من دفعة لأخرى بسبب اختلاف مدة الإيداع، ونجد أن:

الفائدة المستحقة على الدفعة الأولى المودعة لمدة 9 أشهر فقط $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{9}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثانية المودعة لمدة 8 أشهر $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{8}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة الثالثة المودعة لمدة 7 أشهر $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{7}{12}$

.....

الفائدة المستحقة على الدفعة الثامنة المودعة لمدة شهرين $= 1000.\frac{14}{100}.\frac{2}{12}$

الفائدة المستحقة على الدفعة التاسعة المودعة لمدة شهر واحد$= 1000.\frac{14}{100}.\frac{1}{12}$

وبذلك نجد أن مجموع الفوائد المستحقة لهذه الدفعات، والذي سنرمز له بالرمز I يساوي:

$$I_9' = 1000.\frac{14}{100}.\frac{9}{12} + 1000.\frac{14}{100}.\frac{8}{12} 1000.\frac{14}{100}.\frac{7}{12} + ... 1000.\frac{14}{100}.\frac{1}{12}$$

$$I_9' = 1000.\frac{14}{100}.\left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \frac{7}{12} + \frac{6}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

وبملاحظة أن المجموع ضمن القوس هو مجموع حدود متوالية عددية حدها الأول $\frac{9}{12}$ والأخير $\frac{1}{12}$ وعدد حدودها 9. نجد أن:

$$I_9' = 1000 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{9}{2}\left(\frac{9}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

$$I_9' = 1000 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{90}{12} = 525\ L.S$$

وبذلك نجد أن حصيلة هذه الدفعات العادية والتي سنرمز لها بـ Q_9' تساوي:

$$Q_9' = 9000 + 525 = 9525\ L.S$$

وبناء على ماتقدم يمكننا ببساطة أن نستخلص العلاقتين الرياضيتين اللتين تعطياننا مجموع الفوائد المستحقة للدفعات الدورية الفورية وحصيلتهما التاليتين:

$$I'_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + 1}{12}\right) \qquad \text{مجموع الفوائد المستحقة} \qquad (5-6)$$

$$Q'_m = K.m + KP.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + 1}{12}\right) \qquad \text{حصيلة الإيداع} \qquad (6-6)$$

وكتطبيق على ذلك نحسب حصيلة الدفعات الواردة في المثال السابق، فنجد أن:

$$Q'_9 = 1000 \cdot 9 + 1000.\frac{14}{100}.\frac{9}{12}\left(\frac{9+1}{12}\right) = 9525\ L.S$$

ملاحظة :

يمكننا دمج العلاقتين (1-6)، (5-6) بعلاقة واحدة للدفعات العادية والفورية تتضمن رمزين لمدتي إيداع الدفعة الأولى M_1 والأخيرة M_m كما يلي:

$$I_n = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_2}{12}\right) \qquad \text{للأشهر} \qquad (7-6)$$

حيث رمزنا M_1 لمدة إيداع الدفعة الأولى، وبـ M_m لمدة إيداع الدفعة الأخيرة بالأشهر.

وكذلك نستخلص أن حصيلة تلك الدفعات الشهرية Q_n' تساوي:

$$Q_n' = K.m + KP.\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right) \qquad \text{للأشهر} \qquad (8-6)$$

مع الانتباه إلى أن M_1 هي مدة إيداع الدفعة الأولى العادية أو الفورية مع أي فترة تأجيل لها، وإلى أن M_m هي مدة إيداع الدفعة الأخيرة العادية أو الفورية مع أي فترة تأجيل لها، وأن حساب هاتين المدتين يتم حسب شروط كل مسألة على حدة.

أما إذا كانت فترة الإيداع الدورية تحسب بالأيام فإن العلاقتين السابقتين تأخذان الشكل التالي:

$$I'_m = K.P.\frac{m}{2}\left(\frac{d_1 + d_m}{365}\right) \qquad \text{للأيام} \qquad (9-6)$$

حيث إن d_1 , d_n مدتا إيداع الدفعتين الأولى والأخيرة مع أي تأجيل لهما (بالأيام).

$$Q'_n = K.m + K \cdot P \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{d_1 + d_m}{365}\right) \qquad \text{للأيام} \qquad (10-6)$$

ملاحظة:

يستبدل الرقم 365 بـ 366 إذا كانت السنة كبيسة، ويمكن أن يستبدل بـ 360 إذا كانت السنة تجارية، كما يمكن استخدام العلاقات السابقة عندما يكون تاريخ الاستحقاق مؤجلاً لمدة معينة، كما سنرى لاحقاً.

مثال 4:

يودع أحد العمال في بداية كل أسبوع مبلغ 500 ل.س من أجرته في أحد المصارف. فما هي حصيلة إيداعه في نهاية الأسبوع العاشر؟ علماً بأن سعر الفائدة البسيطة 9% سنوياً.

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات دورية وفورية، وإنه لدينا:

$$Q'_n = ? \qquad P = 0,09 \qquad m = 10 \qquad K = 500$$

ولحساب الحصيلة Q'_m نطبق العلاقة (10-6)، ونحسب مدد هذا الإيداع بالأيام، ونلاحظ أن مدة الدفعة الأولى هي 70 يوماً، ومدة الدفعة الأخيرة 7 أيام، وبذلك نجد أن:

$$Q'_{10} = 500 \cdot 10 + 500 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{70+7}{365}\right) = 5047,47 \ \ L.S$$

أما الفوائد المستحقة له فبلغت مايلي:

$$I'_{10} = 500 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{70+7}{365}\right) = 47,47 \ L.S$$

وكان يمكن حسابها بطريقة أخرى فهي:

$$I_{10} = 5047,47 - 5000 = 47,47 \ L.S$$

مثال 5:

كان أحد التجار يودع في المصرف التجاري مبلغ 5000 م.س في نهاية كل شهر، وبعد مرور عام طلب من المصرف أن يحسب له رصيده فكان 62200 ل.س فما هو سعر الفائدة البسيطة التي يتعامل بها المصرف.

الحل:

لدينا $K = 5000$, $m = 12,$ $Q_n = 62200$

والمجهول هو سعر الفائدة P.

وبما أن هذه الدفعات دورية وعادية وشهرية نطبق العلاقة:

$$Q_n = K.m + kp \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + 0}{12}\right)$$

$$62200 = 5000 \cdot 12 + 5000 \cdot P \cdot \frac{12}{2} \cdot \left(\frac{11+0}{12} \right)$$

$$62200 = 60000 + 60000 \cdot \frac{11}{24} \cdot P$$

$$2200 = 27500\ P$$

$$P = \frac{2200}{27500} = 0{,}08 \Rightarrow 8\%$$

أي إن سعر الفائدة هو 8%.

مثال 6:

كان أحد الأشخاص يودع في بداية كل ثلاثة أشهر مبلغاً معيناً في المصرف وبفائدة بسيطة 6% سنوياً. وبعد انقضاء سنة ونصف على ذلك بلغ رصيده 5070 ل.س . فما هي قيمة الدفعة الفصلية التي كان يدفعها؟

الحل:

نلاحظ أن الدفعات فورية، وأن المدة الكلية للإيداع تساوي 18 شهراً، وأن عدد الدفعات $m = \frac{18}{3} = 6$ ، وأن حصيلة ذلك الإيداع $Q'_n = 5070$.

كما نلاحظ أن مدة إيداع الدفعة الأولى 18 شهراً، ومدة إيداع الدفعة الأخيرة 3 أشهر فقط، وبذلك نجد أن:

$$Q'_n = K.m + KP \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{M_1 + M_6}{12} \right)$$

$$5070 = K \cdot 6 + K \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{6}{2}\left(\frac{18+3}{12} \right) = 6{,}3150 \cdot K$$

$$K = \frac{5070}{6{,}3150} = 802{,}85\ L.S$$

مثال 7:

تعاهد زميلان ليشتريا حاسوباً لكل منهما واتفقا على أن يدخرا من راتبيهما مبلغ 500 ل.س كل شهر ولمدة ثلاث سنوات، وبفائدة بسيطة سعرها 9% سنوياً، فاحسب حصيلة كل منهما حسب مايلي:

- إذا كان الأول يودع دفعاته الشهرية في بداية كل شهر.
- إذا كان الثاني يودع دفعاته الشهرية في نهاية كل شهر.

الحل:

إن حصيلة الزميل الأول هي نتيجة دفعات دورية فورية وشهرية لذلك فإنها تساوي:

$$Q'_m = k \cdot m + kp \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12} \right)$$

لدينا هنا عدد الدفعات: دفعة $m = 12 \cdot 3 = 36$، ولدينا أيضاً:

$$p = 0.09 \qquad k = 500$$

وإن مدة الدفعة الأولى = 36 شهراً
وإن مدة الدفعة الأخيرة = 1 شهراً واحداً
وبالتطبيق المباشر نجد أن حصيلة الزميل الأول تساوي:

$$Q'_m = 500 \cdot 36 + 500.\frac{9}{100} \cdot \frac{36}{12}\left(\frac{36+1}{12}\right) =$$

$$Q'_m = 20497{,}5 \ \ L.S$$

ولحساب حصيلة الزميل الثاني نطبق العلاقة (لأنها دفعات عادية):

$$Q_m = 500 \cdot 36 + 500.\frac{9}{100} \cdot \frac{36}{12}\left(\frac{35+0}{12}\right) =$$

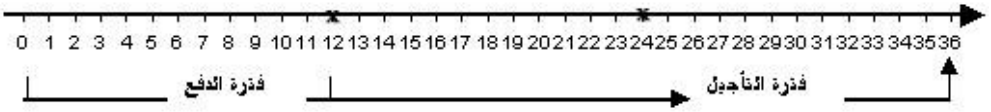
$$Q_m = 20362{,}5 \ \ L.S$$

مثال 8:

كان أحمد يقوم بإيداع مبلغ 3000 ل.س في نهاية كل شهر خلال السنة الأولى من مباشرته العمل ثم أصبح يودع مبلغ 2000 ل.س في نهاية كل شهر خلال السنة الثانية من مباشرته العمل، ولكنه انقطع عن الإيداع خلال السنة الثالثة. ماهي حصيلة إيداعاته في نهاية السنة الثالثة علماً بأن سعر الفائدة البسيطة هو 7%.

الحل:

نلاحظ أن دفعات السنة الأولى هي دفعات شهرية وعادية مؤجلة لمدة عامين، وأن عددها $n = 12$ دفعة ، وأن مدة الدفعة الأولى $M_1 = 35$ شهراً، ومدة الأخيرة $M_{12} = 24$ شهراً كما هو موضح على الشكل التالي:



شكل (4-6)

$$Q'_m = K \cdot m + kp \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_{12}}{2}\right)$$

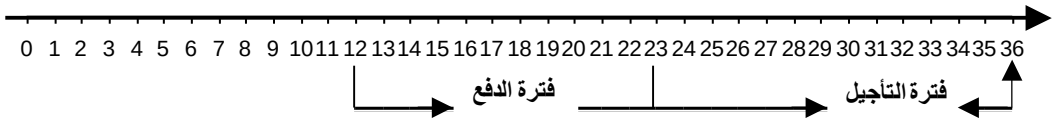
$$Q'_m = 3000 \cdot 12 + 3000 \cdot \frac{7}{100} \cdot \frac{12}{2}\left(\frac{35+24}{12}\right)$$

$$= 36000 + 6195$$

$$Q'_{12} = 42195 \ \ L.S$$

أما دفعات السنة الثانية فهي أيضاً دفعات شهرية عادية ومؤجلة لمدة عام، وإن عددها $n = 12$ ، وإن مدة الدفعة الأولى $M_1 = 23$ شهراً، ومدة الدفعة الأخيرة $M_{12} = 12$ كما هو موضح على الشكل الآتي:

شكل (5-6)



وبذلك نجد أن حصيلة الدفعات الثانية:

$$Q_{12} = 2000 \cdot 12 + 2000.\frac{7}{100}.\frac{12}{2}\left(\frac{23+12}{12}\right)$$

$$= 24000 + 2450$$

$$Q_{12} = 26450 \ L.S$$

وإن حصيلة هذه الدفعات خلال هاتين السنتين وفي نهاية السنة الثالثة تساوي:

$$Q = 42195 + 26450 = 68645 \ L.S$$

تمرينات

1 ـ أوجد حصيلة 10 دفعات عادية ربع سنوية مقدار كل منها 2000 ل.س أودعت بفائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

2 ـ احسب حصيلة الدفعات السابقة إذا كانت دفعات فورية.

3 ـ احسب حصيلة الدفعات السابقة إذا كانت دفعات عادية شهرية، ثم فورية شهرية.

4 ـ يودع أحدهم في نهاية كل شهر مبلغ 5000 ل.س وذلك اعتباراً من شهر آذار عام 2004، والمطلوب حساب حصيلة هذه الدفعات في 2004/12/31 إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً، ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة.

5 ـ أوجد حصيلة الدفعات المذكورة في التمرين السابق إذا كانت تدفع في بداية كل شهر، ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة، وقارن النتائج مع نتائج التمرين السابق.

6 ـ كان أحدهم يودع في نهاية كل شهر من أشهر عام 2004 مبلغاً من المال. وفي نهاية العام بلغت حصيلة دفعاته 6160 ل.س، فاحسب مقدار الدفعة الشهرية إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 5% سنوياً.

7 ـ احسب مقدار الدفعة الشهرية للتمرين السابق إذا كانت الدفعات تدفع في بداية كل شهر من عام 2004.

8 ـ كان أحدهم يودع في بداية كل شهر مبلغ 500 ل.س، واستمر بذلك خلال الأشهر الأربعة الأولى من عام 2004. ثم أصبح يودع مبلغ 1000 ل.س خلال الأشهر

الأربعة التالية، ثم أصبح يودع مبلغ 1500 ل.س خلال الأشهر الأربعة الأخيرة من العام، والمطلوب:

- حساب حصيلة هذه الدفعات في نهاية العام إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 5% سنوياً.
- حساب إجمالي الفوائد المستحقة عن تلك الدفعات.

5-2 : حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية (بفائدة بسيطة)

2قات الأساسية لحساب القيمة الحالية:

تعريف القيمة الحالية: إن القيمة الحالية لـ m دفعة دورية (عادية أو فورية) هي المبلغ الذي إذا أودعناه الآن في المصرف وبنفس سعر الفائدة البسيطة P لأصبحت حصيلته مساوية لحصيلة تلك الدفعات في آخر المدة. وإذا رمزنا للقيمة الحالية لهذه الدفعات بالرمز V ولحصيلتها بالرمز Q، فإنه يجب أن يكون لدينا:

$$Q_m = V \cdot (1 + np)$$

حيث n هي كامل فترة الإيداع وتحسب بالسنوات، وm عدد الدفعات.

*** حساب القيمة الحالية الصحيحة:**

وهي القيمة التي يمكننا استخلاصها بكل بساطة من العلاقة السابقة وتساوي:

$$V = \frac{Q_m}{1 + np} \qquad (28-2)$$

واعتماداً على العلاقة (2 27) التي تعطينا الحصيلة Q_m نجد أن V تساوي:

$$V = \frac{K.m + K.p\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{M_1 + M_m}{12}\right)}{1 + np} \qquad \text{للأشهر} \qquad (29-2)$$

حيث إن M_1 و M_m هما مدتا الدفعتين الأولى والأخيرة(بالأشهر).و n هي المدة الكلية محسوبة بالسنوات

ملاحظة: يجب الانتباه عند الحساب إلى المدتين M_1 و M_m ، والتمييز بين الدفعات العادية والفورية، لأن هاتين المدتين تتأثران بنوع الدفعات، وهذا ما يجعل حصيلة الدفعات الفورية أكبر من حصيلة الدفعات العادية.

مثال 1: ما هي القيمة الحالية لـ 10 دفعات شهرية قيمة كلٍ منها $K = 500$ ، وتدفع في نهاية كل شهر. علماً بأن سعر الفائدة البسيطة 8%.

الحل: نلاحظ أنهذه الدفعات هي دفعات عادية، ولدينا:

$$M_{10}=0\ ,\ M_1=9\ ,\ n=\frac{10}{12}\ ,\ P=\frac{8}{100}\ ,\ K=500\ ,\ m=10$$

وهكذا نجد أن:

$$V=\frac{500\cdot 10+500\dfrac{8}{10}.\dfrac{10}{2}\left(\dfrac{9+0}{12}\right)}{1+\dfrac{10}{12}\left(\dfrac{8}{100}\right)}=\frac{5150}{1{,}0666667}=4828{,}125\,L.S$$

*** حساب القيمة الحالية التجارية:**

وتعتمد هذه القيمة على حذف الخصم التجاري من القيمة الاسمية. ويتم حساب الخصم التجاري بتطبيق سعر الفائدة P على القيمة الاسمية S ويحسب من العلاقة:

$$Dt=S\cdot n\cdot p \qquad (30-2)$$

كما أنها تعتمد على مدة الخصم وليس على مدة الإيداع في المصرف. وبذلك نجد أن القيمة الحالية التجارية لمبلغ أو دفعة k مدتها n سنة تساوي:

ولمعالجة الموضوع بشكل عام للدفعات العادية والفورية، $Vt=k-k\cdot n\cdot p$ نفترض

ـ أن الفترة الواقعة بين الدفعة والأخرى ثابتة وتساوي t (شهر، أو شهرين أو ثلاثة أشهر).

ـ وأن عدد الدفعات m دفعة دورية. ـ وأن حجم أو قيمة الدفعة هو K.

ـ وأن معدل الفائدة البسيطة هو P. ـ

وأن مدة الخصم تساوي الفترة التي تسبق لحظة الإيداع لكل دفعة (من البداية حتى لحظة الإيداع).

ـ وأن المدة الكلية للإيداع معلومة، ونرمز لها بـ n، وهي تساوي $n=m.t$.

والمطلوب حساب القيمة الحالية في بداية عملية الإيداع.

وهكذا نجد أن القيم الحالية لهذه الدفعات تتأثر بمدة الخصم التي تسبق كل دفعة وتساوي:

القيمة الحالية التجارية للدفعة الأولى $=Vt_1=K-K\cdot t\cdot P=K(1-tP)$

القيمة الحالية التجارية للدفعة الثانية $=Vt_2=K-K\cdot 2t\cdot P=K(1-2tP)$

القيمة الحالية التجارية للدفعة الثالثة $=Vt_3=K-K\cdot 3t\cdot P=K(1-3tP)$

.....

القيمة الحالية التجارية للدفعة $Vt_m=K-K\cdot mt\cdot P=K(1-m\cdot t\cdot p)=m$

وإن القيمة الحالية التجارية لهذه الدفعات = مجموع قيمها الحالية التجارية؛ أي:

$$Vt = Vt_1 + Vt_2 + Vt_3 + Vt_4 + ...+ Vt_m$$
$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot t[1 + 2 + 4 + ...+ m]$$
$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot t \cdot \frac{m}{2}(1 + m)$$
$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot \frac{m}{2}(t + m \cdot t)$$

وبملاحظة أن t هي مدة الخصم للدفعة الأولى، ونرمز لها بـ l_1، وأن mt هي مدة الخصم للدفعة الأخيرة، ونرمز لها بـ l_m.
ولذلك يمكننا كتابة العلاقة الأخيرة بشكلها العام

$$Vt = K \cdot m - K \cdot P \cdot \frac{m}{2}(\ell_1 + \ell m) \qquad (31-2)$$

وهي تصلح للدفعات العادية والفورية، بشرط أن يتم الانتباه إلى حساب كل من l_1، و l_m لكل من النوعين، مع ملاحظة أن كل من l_1، و l_m لكل من النوعين تحسب بالسنوات؛ أي يجب تحويل الأشهر إلى سنوات. وهي تعبر عن الفترة التي تسبق إيداع كل من الدفعة الأولى والأخيرة.

مثال 2: أوجد القيمة الحالية التجارية للدفعات المذكورة في المثال السابق.

الحل: نلاحظ أن الدفعات عادية:

$$\ell_{10} = \frac{10}{12}\ ,\ \ell_1 = \frac{1}{12}\ ,\ t = 1\ ,\ n = \frac{10}{12}\ ,\ P = \frac{8}{100}\ ,\ K = 500\ ,\ m = 10$$

وبتطبيق العلاقة (31-2) نجد أن:

$$Vt = 500 \cdot 10 - 500\frac{8}{10} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{10}{12}\right)$$
$$Vt = 5000 - 183{,}333 = 4816{,}67\ L.S$$

*** ملاحظة:**

نلاحظ أن القيمة التجارية في المثال المدروس أقل من القيمة الحالية الصحيحة، في المثال السابق، وذلك بسبب استخدام معدل الفائدة لحساب الخصم من القيمة الاسمية. وللتأكد من دقة الحسابات وصحتها نقوم بالتحقق من أن حصيلة القيمة الحالية يجب أن تساوي حصيلة جميع الدفعات. لذلك نقوم بحساب حصيلة الدفعات العشر السابقة فنجد أن:

$$Q_{10} = Km + K \cdot p\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)$$

$$Q_{10} = 500 \cdot 10 + 500\frac{8}{100} \cdot \frac{10}{2}\left(\frac{9+0}{12}\right) = 5150 \quad L.S$$

فإذا أخذنا القيمة الحالية الصحيحة وحسبنا حصيلتها بعد $\frac{10}{12}$ سنة نجد أن:

$$Q = V(1+np) = 4828{,}125\left(1 + \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{1000}\right) = 5150\, L.S$$

وهو الحصيلة الأساسية 5150 نفسها.
أما إذا أخذنا القيمة الحالية التجارية فنحصل على:

$$Q' = Vt(1+np) = 4816{,}67\left(1 + \frac{10}{12}.\frac{8}{12}\right) = 5137{,}778\, L.S$$

وهو مبلغ أقل من الحصيلة الأساسية؛ أي إن القيمة الحالية التجارية تتضمن غبناً يقع على صاحب الدفعات.

* **حساب الخصم الصحيح:** وهو يساوي ما يلي:

$$D = K \cdot m - V \qquad (32-2)$$

* **حساب الخصم التجاري:** وهو يساوي ما يلي:

$$Dt = K \cdot m - Vt = K \cdot P \cdot \frac{m}{2}(l_1 + l_m) \qquad (33-2)$$

* **الفرق بين الخصمين والقيمتين الحاليتين:**

$$Dt - D = V - Vt \qquad (34-2)$$

مثال 3:
احسب الخصم الصحيح والتجاري والفرق بينهما للدفعات الواردة في المثال 1:
الحل:
من المعلومات السابقة نجد أن الخصم الصحيح يساوي:

$$D = 500 \cdot 10 - 4828{,}125 = 171{,}875 L.S$$

وأن الخصم التجاري يساوي:

$$Dt = 500 \cdot 10 - 4816{,}67 = 183{,}33 L.S$$

$$Dt - D = 183{,}33 - 171{,}875 = 11{,}455$$

وكذلك نجد أن الفرق بين القيمتين الحاليتين الصحيحة والتجارية يساوي:

$$V - Vt = 4828{,}125 - 4816{,}67 = 11{,}455$$

مثال4:

أراد أحدهم شراء براد سعره النقدي 15000 ل.س بالتقسيط، فاتفق مع المؤسسة على تسديد قيمته على شكل دفعات شهرية وخلال عام واحد، على أن يتم تسديد الدفعة الأولى بعد شهر من الآن، فماهي قيمة الدفعة الدورية إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 9%.

الحل: لدينا $n=1 \ , \ m=12 \ , \ P=\frac{9}{100} \ , \ V=15000$

ونلاحظ أن هذه الدفعات هي عادية وشهرية لأن تسديد الدفعة الأولى يبدأ في نهاية كل شهر الأول، وهكذا نجد أن المطلوب حساب قيمة الدفعة الدورية K:

لحساب K نطبق العلاقة (29-2) ونضع القيمة الحالية مساوية للسعر النقدي:

$$V = \frac{K \cdot m + K \cdot p \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)}{1+np}$$

مع ملاحظة أن مدة إيداع الدفعة الأولى $M_1 = 11$، وأن مدة إيداع الدفعة الأخيرة $M_{12} = 0$.

$$15000 = \frac{K \cdot 12 + K \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right)}{1+1 \cdot \left(\frac{9}{100}\right)} =$$

$$15000(1{,}09) = 12K + 0{,}495K = 12{,}495K$$

$$K = \frac{15000(1{,}09)}{12{,}495} = 1308{,}5\, L.S$$

وهو مقدار القسط الشهري أو قيمة الدفعة الشهرية.

ملاحظة:

إذا اعتبرنا قيمة البراد هي القيمة الحالية التجارية فإنه يجب علينا تطبيق العلاقة:

$$Vt = K.m - K.p.\frac{m}{2}(l_1 + lm)$$

مع ملاحظة أن مدة خصم الدفعة الأولى $l_l = \frac{1}{12}$، ومدة خصم الدفعة الأخيرة $l_{l2} = \frac{12}{12}$، وبالتعويض نجد أن:

$$15000 = K \cdot 12 - K \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{12}{2}\left(\frac{1+12}{12}\right) = 12K - 0{,}585K = 11{,}415K$$ و

منها نجد أن:

$$K = \frac{15000}{11{,}415} = 1314{,}06 \ L.S$$

ومرة أخرى نجد أنه من مصلحة التاجر أن يلجأ إلى القيمة الحالية التجارية.

مثال5: تبيع إحدى المؤسسات التجارية مكانس تنظيف تقسيطاً لمدة عام. فإذا وقع اختيار المشتري على مكنسة سعرها التجاري 5755 ل.س. فما هي قيمة الدفعة الدورية؟ إذا علمت أن المؤسسة تشترط أن يتم التسديد على دفعات كل شهرين، وأنه يتم تسديد الدفعة الأولى عند الشراء مباشرةً، وأن سعر الفائدة البسيطة 7% سنوياً. وما هو الفرق بين القيمة التجارية الحالية وإجمالي الدفعات؟

الحل: لدينا $Vt = 5755$, $m = \frac{12}{2} = 6$, $P = \frac{7}{100}$, $n = 1$

ولإيجاد قيمة الدفعة الدورية نطبق العلاقة:

$$VT = K \cdot m - K \cdot p \cdot \frac{m}{2}(l_1 + lm)$$

حيث إن مدة خصم الدفعة الأولى $l_1 = 0$، و مدة خصم الدفعة الأخيرة

$$5755 = K \cdot 6 - K \cdot \frac{7}{100} \cdot \frac{6}{2}\left(\frac{0+10}{12}\right)$$

$$5755 = K \cdot 6 - 0{,}175K = 5{,}825K$$

$$K = \frac{5755}{5{,}825} = 987{,}98 \ L.S$$

وأخيراً نقوم بحساب إجمالي هذه الدفعات فنجده يساوي:

$$K_m = 987{,}98 \cdot 6 = 5927{,}88 \ L.S$$

وإن الفرق بين الشراء النقدي والشراء بالتقسيط هو مقدار النصب ويساوي:

$$5927{,}88 - 5755 = 172{,}88 \approx 173 \ L.S$$

مثال6: عرض التاجر على المشتري سجادة سعرها 12000 ل.س. على أن يدفع نصف سعرها الآن، وأن يتم تقسيط الباقي على دفعات شهرية تدفع في آخر كل شهر ولمدة ستة أشهر، وقيمة كل منها 1500 ل.س. فما هو سعر الفائدة المستخدمة في هذه العملية.

الحل: لدينا السعر $= 12000$، وإن القيمة المتبقية $= Vt = \frac{12000}{2} = 6000$

ونلاحظ أن الدفعات عادية وأن $m = 6$، وأن $K = 1500$، وأن $n = \frac{6}{12}$.

ولإيجاد سعر الفائدة P نطبق العلاقة:

$$Vt = K \cdot m - K \cdot p \cdot \frac{m}{2}(l_1 + lm)$$

مع ملاحظة أن مدة خصم الدفعة الأولى $\ell_1 = 1L12$، ومدة خصم الدفعة الأخيرة $\ell_6 = 6L12$، وبذلك نجد أن:

$$6000 = 1200 \cdot 6 - 1200 \cdot P\frac{6}{2}\left(\frac{1+6}{12}\right)$$

$$6000 = 7200 - 2100 \cdot P$$

$$1200 = 2100 \cdot P$$

$$P = \frac{1200}{2100} = 0{,}57114 = \qquad (57{,}14\%)!!$$

تمرينات

1 ـ أوجد القيمة الحالية لـ 10 دفعات عادية تدفع في نهاية كل شهر، وقيمة كلٍ منها تساوي 300 ل.س إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية البسيطة 5%.

2 ـ أوجد القيمة الحالية للدفعات المذكورة في التمرين السابق إذا كانت تدفع في بداية كل شهر.

3 ـ اشترى أحدهم سيارة، واتفق مع الوكيل على أن يسدد من ثمنها مبلغ 500000 ل٫ مباشرةً ونقداً. وأن يتم تسديد باقي الثمن على 8 دفعات شهرية تدفع في نهاية كل شهر من تاريخ الشراء، وقيمة كلٍ منها 25000 ل.س.
والمطلوب حساب ثمن شراء تلك السيارة إذا علمت أن سعر الفائدة السنوية البسيطة 8%.

4 ـ لنفترض أن وكيلاً آخر يعرض شروطاً أخرى لتسديد المتبقي من ثمن السيارة على شكل 8 دفعات تدفع في نهاية كل شهرين اعتباراً من تاريخ الشراء، وقيمتها 25000 ل. س أيضاً. فاحسب الثمن الجديد لتلك السيارة إذا كان سعر الفائدة السنوية البسيطة 8% أيضاً.

6-2 : حسابات القروض القصيرة (بفائدة بسيطة)

1-6-2 : مقدمة

إن اتساع العمليات التجارية وانتعاش الحياة الاقتصادية، وازدياد الاعتماد على المشاريع الخاصة الزراعية والصناعية والخدمية ، اقتضت أن يتعامل الناس بعضهم مع البعض أو مع المصارف الخاصة أو العامة عن طريق الاقتراض والاستدانة، ومن هنا ظهرت الحاجة إلى العمل على تسهيل وتنظيم طريقة الاقتراض وطريقة السداد، وإلى توضيح حقوق كل من الدائن والمدين، وصياغة الاتفاق بينهما بما يضمن تحقيق العدالة ومصلحة كلٍ منهما، ويتناسب مع إمكانيات المدين المادية، ويحافظ على حقوق الدائن المالية.

وتصنف القروض حسب مددها الزمنية إلى نوعين رئيسيين هما:

1 ـ القروض قصيرة الأجل: وهي القروض التي لا تتجاوز مدتها السنة أو السنتين على الأكثر، وتطبق عليها قوانين الفائدة البسيطة.

2 ـ القروض طويلة الأجل: وهي القروض التي تتجاوز مدتها السنة (أو السنتين)، فقد تكون سنتين أو ثلاثة أو خمسة أو عشرة أو خمسة عشر...إلخ، وتطبق عليها قوانين الفائدة المركبة.

2-6-2 : المبدأ العام والطرائق المتبعة:

وحتى يتم تسديد هذه القروض بطريقةٍ عادلةٍ تضمن حقوق الطرفين يجب أن نعتمد على مبدأ عادل، وفي مثل هذه الحالات يتم اعتماد أحد المبدأين الآتيين:

المبدأ الأول: حصيلة الأقساط = حصيلة القرض.

(35-2)

المبدأ الثاني: القيمة الحالية للأقساط =قيمة القرض.

وهناك عدة طرائق لتسديد هذه القروض أو استهلاكها؛ وأهمها:

أ ـ الاتفاق على تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده عند استحقاقه؛أي في نهاية المدة .

هـ ـ الاتفاق على تسديد قيمة القرض والفوائد على شكل أقساط دورية متساوية من أصل القرض وفوائده.

و ـ الاتفاق على تسديد جزء ثابت من أصل القرض مع تسديد الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي من أصل القرض (طريقة الاقساط المتناقصة)

ز ـ الاتفاق على تسديد جزء ثابت من أصل القرض مع تسديد الفواءد المستحقة على تلك الاقساط حسب مدة كل منها.(طريقة الاقساط المتزايدة)

2-6-3: طريقة الدفعة الواحدة : تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده في نهاية المدة دفعة واحدة.

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرائق المذكورة، وهي لا تتطلب غير حساب حصيلة ذلك القرض عند سعر فائدة بسيطة معينة، وعلى مدة استحقاق القرض. فإذا رمزنا للمتحولات المستخدمة في ذلك بما يلي:

L : قيمة القرض الأصلي التي يستلمها المقترض.

P: سعر الفائدة البسيطة السنوية.

n: مدة استحقاق القرض، وتحسب بالسنوات (يتم تحويل الأشهر إلى سنوات).

Sn: حصيلة القرض في نهاية مدة الاستحقاق n.

واعتماداً على العلاقة (2-2) نجد أن حصيلة ذلك القرض في نهاية المدة تساوي:

$$Sn = L.(1 + P \cdot n) \qquad (36-2)$$

وهو المبلغ الذي يجب على المدين تسديده في نهاية مدة الاستحقاق للدائن.

مثال 1:

اقترض أحدهم من المصرف مبلغ 15000 ل.س بفائدة سنوية بسيطة 8%، ولمدة ستة أشهر. واتفقا على تسديد القرض وفوائده في نهاية المدة دفعة واحدة. فما هي قيمة تلك الدفعة؟

الحل: لحساب قيمة تلك الدفعة نحسب حصيلة القرض في نهاية المدة، فنجد أن:

$$Sn = 15000\left(1 + \frac{8}{100} \cdot \frac{6}{12}\right) = 15600\ L.S.$$

مثال 2: اقترض أحمد من المصرف مبلغ 20000 ل.س ولمدة 8 أشهر. وعندما أراد تسديد قيمة القرض مع فوائده في نهاية المدة، طلب منه المصرف أن يدفع مبلغ 21000 ل.س. فما هو سعر الفائدة البسيطة المستخدم في المصرف؟

الحل: لحساب معدل الفائدة P نطبق العلاقة (1-8) السابقة، فنجد أن:

$$21000 = 20000\left(1 + P \cdot \frac{8}{12}\right) =$$

$$\frac{21000}{20000} - 1 = \frac{8}{12}P$$

$$P = 0{,}075 = (7{,}5\%)$$

4-6-2: طريقة الأقساط المتساوية: تسديد القرض والفوائد على شكل أقساط دورية متساوية من أصل القرض والفوائد:

وتقتضي هذه الطريقة أن يقوم المدين بدفع أقساط دورية متساوية بحيث يكون كل قسط منها أكبر من مقدار الفائدة المستحقة. وذلك لتغطية الفائدة المستحقة على القرض حتى تاريخه، ولتسديد جزء من أصل القرض حتى يتم استهلاكه خلال المدة المحددة.

وحتى تكون النتائج منصفة يجب أن تتحقق بين الطرفين العلاقة التالية:

حصيلة القرض = حصيلة الأقساط المدفوعة.

واعتماداً على العلاقات والرموز السابقة نجد أن ذلك يقتضي أن يكون:

$$Sn = Q_m$$

$$L.(1 + np) = K \cdot m + K \cdot p\frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)$$ بالأشهر ($M_1 + M_m$)

وهكذا نجد أن قيمة الدفعة K تساوي:

$$K = \frac{L.(1 + np)}{m + p \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{M_1 + M_m}{12}\right)} \qquad (37-2)$$

مثال3: اقترض أحد الحرفيين مبلغ 100000 ل.س من المصرف لمدة 9 أشهر وبفائدة بسيطة 8% سنوياً. واتفق على أن يتم تسديده على شكل أقساط شهرية متساوية من أصل القرض والفوائد وتدفع في نهاية كل شهر. فاحسب قيمة القسط الشهري، ثم قم بإعداد جداول لاستهلاك القرض المذكور.

الحل: لدينا : $L=100000$, $m=9$, $\ell=1$, $n=\frac{9}{12}$, $P=\frac{8}{100}$

و $M_1=8$ و $M_9=0$. وبذلك نجد أن قيمة القسط الشهري تساوي:

$$K=\frac{100000\left(1+\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{100}\right)}{9+\frac{8}{100}\cdot\frac{9}{2}\left(\frac{8+0}{12}\right)}=\frac{106000}{9,24}=11471,86\ L.S$$

وأن إجمالي المبلغ الذي سيدفع إلى المصرف نقداً يساوي:

$$K.m=11471,86\cdot 9=103246,74\ L.S$$

وأن إجمالي الفائدة التي تحملها المقترض يساوي:

103246.74 -100000 =3246.74 ل.س

مثال4: اقترض أحد العمال مبلغ 40000 ل.س من المصرف الصناعي لمدة سنة، وبفائدة 9% ، على أن يسددها على شكل أقساط عادية شهرية متساوية من أصل القرض والفوائد، فماهي قيمة القسط الشهري؟ وماهو مقدار الفوائد التي يتحملها العامل من جراء ذلك؟

الحل:

لدينا : $L=40000$, $m=12$, $n=\frac{12}{12}$, $P=\frac{9}{100}$ $M_1=11$

و $M_{12}=0$ ، وبتطبيق العلاقة (8-8) نجد أن:

$$K=\frac{40000\left(1+1\cdot\frac{9}{100}\right)}{12+\frac{9}{100}\cdot\frac{12}{2}\left(\frac{11+0}{12}\right)}=\frac{43600}{12,495}=3489,40\ L.S$$

وإن إجمالي المبلغ المسدد للمصرف نقداً :

$$K\cdot m=3489,40\cdot 12=41872,75\ L.S$$

وبذلك نجد أن مقدار الفوائد التي تحملها المقترض يساوي:

$$41872,75-40000=1872,75\,L.S$$

.2-6=5 : طريقة الأقساط المتزايدة: وتعتمد على تقسيم قيمة القرض إلى أجزاء متساوية وتوزيعها على الدورات لتدفع مع الفوائد المستحقة عليها على شكل أقساط دورية متزايدة:

وتعتمد هذه الطريقة على تقسيم القرض إلى m جزءاً متساوياً من خلال العلاقة

$$K = \frac{L}{m} = \qquad (38-2)$$

وتدفع هذه الأجزاء مع الفوائد المستحقة عليها في مواعيد دورية محددة، وتحسب الفوائد المستحقة على كل جزء بمفرده حسب مدة استحقاقه عند الدفع. وبذلك تصبح قيمة كل قسط من هذه الإقساط المتزايدة مساوية لحصيلة الجزء الثابت وتساوي ما يلي :

$$R_i = K + I_i = K.(1+n_i \cdot p) \qquad (39-2)$$

ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال السابق ونعالجه كمايلي:

مثال 9: لنفترض أن أحدهم اقترض من المصرف الزراعي مبلغ 100000 ل.س بفائدة بسيطة 9% سنوياً، واتفق معه على تقسيم القرض إلى 9 أجزاء متساوية كل منها يساوي:

$$k = \frac{100000}{9} = 11111{,}11\ L.S$$

وعلى أن يتم تسديد هذه الأجزاء مع الفوائد المستحقة عليها عند تسديدها على شكل 9 دفعات شهرية تسدد في آخر كل شهر، اعتباراً من نهاية شهر الاتفاق.

والمطلوب حساب قيم الدفعات الشهرية وإعداد جدول خاص لاستهلاك هذا القرض.

الحل: نلاحظ أن قيمة كل دفعة تساوي الجزء الأصلي + الفائدة المستحقة عليه عند تسديده . وبعد إجراء الحسابات المطلوبة نقوم بإعداد الجدول التالي:

رقم الدفعة	تاريخ الدفعة	قيمة الجزء الثابت	مدة استحقاق الجزء الثابت	الفائدة المستحقة على الجزء	قيمة الدفعة الشهرية	القيمة الحالية للدفعة الشهرية
1	نهاية الشهر الأول	11111,11	1	83,333	11194,444	11111,11
2	نهاية الشهر الثاني	11111,11	2	166,667	11277,778	11111,11
3	نهاية الشهر الثالث	11111,11	3	250	11361,11	11111,11
4	نهاية الشهر الرابع	11111,11	4	333,333	11444,444	11111,11
5	نهاية الشهر الخامس	11111,11	5	416,667	11527,778	11111,11

6	نهاية الشهر السادس	11111,11	6	500	11611,11	11111,11
7	نهاية الشهر السابع	11111,11	7	583,333	11694,444	11111,11
8	نهاية الشهر الثامن	11111,11	8	666,667	11777,778	11111,11
9	نهاية الشهر التاسع	11111,11	9	750	11861,11	11111,11
المجموع	-	100000	-	3750	103750	100000

2-6-6 : طريقة الأقساط المتناقصة : وتعتمد على تقسيم قيمة القرض إلى أجزاء متساوية وتوزيعها على الدورات لتدفع مع الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض، وتكون على شكل أقساط دورية متناقصة.

ونعتمد هذه الطريقة على أن يتم تقسيم مبلغ القرض إلى m جزءاً متساوياً من العلاقة:

$$K = \frac{L}{m} \qquad (40-2)$$

أما الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي فتحسب بالتسلسل من العلاقات المتتالية وتصبح قيمة القسط الدوري المتناقص مساوية لما يلي:

قيمة القسط الدوري = الجزء الثابت+ الفائدة المستحقة

$$R_i = K + \quad Ii \qquad (41-2)$$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال 10: اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س ولمدة 9 أشهر بفائدة بسيطة 8% سنوياً، على أن يتم تسديد جزء ثابت من أصل القرض ، ويدفع في نهاية كل شهر مع الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض.

والمطلوب:

1 ـ حساب قيمة الجزء الثابت من أصل القرض.

2 ـ حساب قيم الفوائد المستحقة على الرصيد المتبقي.

3 ـ حساب قيمة الدفعة الدورية (الجزء الثابت+ الفائدة المستحقة).

الحل: أولاً نلاحظ أن معطيات هذا المثال هي نفسها الواردة في المثال السابق لذلك سنقوم بمقارنة النتائج بين المثالين: وبما أنه لدينا :

$$m = 9 \ , \ P = \frac{8}{100} \ , \ n = \frac{9}{12}$$

$$l = \frac{1}{12} \ , \ L = 100000$$

فإن قيمة الجزء الشهري لأصل القرض:

$$K = \frac{L}{9} = \frac{100000}{9} = 11111{,}11\ L.s$$

وبعد حساب ا لفواءدعلى بواقي القرض يمكننا حساب الأقساط المتناقصة من العلاقة:

قيمة الأقساط الدورية = الجزء الثابت+ الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض وهي تساوي:

$$R_i = K + I_i \qquad (42-2)$$

وأخيراً نقوم بتنظيم جدول يوضح لنا هذه العمليات كمايلي:

الشهر	الرصيد المتبقي في بداية الشهر	الجزء الثابت من أصل القرض	الفائدة المستحقة على الرصيد	قيم الأقساط المتناقصة شهرياً	الرصيد المتبقي في نهاية الشهر
1	100000	11111,11	666,67	11777,78	88888,89
2	88888,89	11111,11	592.59	11703,37	77777,78
3	77777,78	11111,11	518.52	11629.63	66666,67
4	66666,67	11111,11	444.44	11555.55	55555,56
5	55555,56	11111,11	370.37	11481.48	44444,45
6	44444,45	11111,11	296.30	11407.41	33333,34
7	33333,34	11111,11	222,22	11333.33	22222,23
8	22222,23	11111,11	148.15	11259.26	11111,11
9	11111,11	11111,11	74.07	11185.18	0
	المجموع	100000	3332.98	103332.98	-

ومن هذا يتضح لنا أن إجمالي قيمة الفوائد التي يتحملها المقترض 3332.98 ل.س، وهو أصغر من إجمالي قيمة الفوائد التي تحملها في المثال السابق، والتي كانت تساوي 3750 ل.س. وإن هذا الفرق يعود إلى طريقة التعامل والحساب.

تمرينات

1 ـ اقترض أحدهم مبلغ 80000 ل.س. لمدة 10 أشهر، وبفائدة بسيطة قدرها 7% سنوياً. واتفق مع الدائن على تسديد القرض مع فوائده دفعة واحدة نهاية المدة. فما هو المبلغ الذي سيسدده المدين؟

2 ـ اشترى أحدهم عقاراً بمبلغ 1500000 ل.س، واتفق مع البائع على أن يسدد له نقداً وفوراً مبلغ 800000 ل.س، وأن يتم تسديد المبلغ المتبقي على شكل أقساط شهرية متساوية من أصل القرض والفوائد ولمدة عامين، وبفائدة بسيطة 8% سنوياً. والمطلوب حساب مقدار القسط الشهري.

الجزء الثالث

نظام الفائدة المركبة

إن نظام الفائدة هو أحد أنظمة إيداع الأموال والتعامل بها لمدد زمنية طويلة الأجل، ويعتمد هذا النظام على إضافة الفائدة المستحقة في مواعيد محددة إلى المبلغ الأصلي، لتحسب ضمن الرصيد، ولتأخذ فوائد جديدة.
ويهدف هذا الفصل إلى معالجة القضايا التالية:

حصيلة إيداع المبالغ وفوائدها
ـ القيمة الحالية والخصم
ـ تسوية الديون طويلة الأجل
ـ حصيلة الدفعات الدورية المتساوية
ـ القيمة الحالية للدفعات الدورية
ـ القروض طويلة الأجل طريقة تسديدها
. الاستهلاك المنتظم
. الاهتلاك
. التكلفة الرأسمالية

1-3 : حساب حصيلة إيداع المبالغ وفوائدها

1-1-3 - تعاريف عامة:

نظام الفائدة المركبة:

لقد أشرنا سابقاً إلى أن نظام الفائدة المركبة يقتضي أن تضاف الفائدة المستحقة على المبلغ المودع إلى المبلغ الأصلي (أي تعلى عليه) في نهاية كل عام (أو في مواعيد محددة في نهاية كل عام، أو في منتصف كل عام أو في نهاية كل فصل) وتحسب ضمن الرصيد المودع لتأخذ معه فائدة جديدة. ويطبق هذا النظام في معظم المصارف وعلى جميع العمليات المالية والإيداعات التي تزيد مدتها عن الفترة المحددة لإضافة الفائدة المركبة.

. **المبلغ المودع:** وهو المبلغ الذي يتم إيداعه في بداية المدة، وسنرمز له بالرمز K.

. **سعر الفائدة السنوية:** وهو عبارة عن نسبة مئوية محددة تحدد مسبقاً لحساب الفائدة السنوية عن المبلغ المودع مقابل إيداعه لمدة عام كامل، وسنرمز له بالرمز P.

. **مدة الإيداع:** وهي الفترة الزمنية التي يبقى خلالها المبلغ K مودعاً في المصرف، وهي تحسب بالسنوات، ونرمز لها بالرمز n.

. **الرصيد الجاري:** هو الرصيد السابق + الفوائد المستحقة عليه.

. **حصيلة إيداع المبلغ:** وهي الرصيد الأخير الناتج عن إضافة الفوائد المتتالية إلى المبلغ المودع مع الفوائد المستحقة عليها، وسنرمز لها بالرمز Kn.

. **فترة العلاوة:** وهي الفترة المحددة التي تحسب في نهايتها الفائدة المستحقة على المبلغ المودع، وتضاف إلى الرصيد السابق، وقد تكون فترة العلاوة سنة كاملة، أو نصف سنة، أو ربع سنة. وإذا قسمنا السنة k إلى طول فترة العلاوة، نحصل على عدد المرات التي تضاف إليها الفائدة خلال العام، فمثلاً، إذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة، فإن عدد المرات التي تضاف فيها الفائدة خلال العام تساوي مرتين سنوياً .

2-1-3- حصيلة إيداع مبلغ واحد K:

إن حصيلة إيداع مبلغ K هي عبارة عن القيمة المالية التي يبلغها المبلغ المودع K بفائدة مركبة P بعد مرور n سنة على إيداعه.

ولإيجاد العلاقة التي تعطينا هذه الحصيلة، نقوم بحسابها سنةً فسنة. فنجد أن حصيلة المبلغ K بعد مرور سنة واحدة = المبلغ الأصلي + الفائدة المستحقة عليه.

وإذا رمزنا لحصيلة المبلغ K بعد مرور سنة واحدة على إيداعه بالرمز G_1 نجد أن:

$$G_1 = K + K \cdot P = K(1+P)$$

وبما أننا نعالج الموضوع ضمن نظام الفائدة المركبة، فإن الفائدة المستحقة خلال العام الثاني ستحسب على الرصيد الجديد G_1، ولنفترض أن حصيلة الرصيد G_1 ستصبح في نهاية السنة الثانية G_2، فإننا نجد أن:

$$G_2 = G_1 + G_1 \cdot P = G_1(1+P)$$

وبتعويض G_1 من العلاقة الأولى نحصل على حصيلة الإيداع في نهاية السنة الثانية G_2 كالتالي:

$$G_2 = K(1+p)\cdot(1+P) = K(1+P)^2$$

وخلال السنة الثالثة سنحسب الفائدة على الرصيد الجديد G_2 ، وإن الحصيلة في نهاية السنة الثالثة ستصبح G_3 وتساوي:

$$G_3 = G_2 + G_2 \cdot P = G_2(1+P) = K \cdot (1+P)^3$$

وفي نهاية السنة الرابعة نحصل على الحصيلة G_4 والتي تساوي:

$$G_4 = G_3 + G_3 \cdot P = G_3(1+P) = K \cdot (1+P)^4$$

.....

وفي نهاية السنة n نحصل على الحصيلة G_n والتي تساوي:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-1} \cdot P = G_{n-1} \cdot (1+P) = K \cdot (1+P)^n$$

وبذلك نجد أن حصيلة إيداع المبلغ K بفائدة مركبة P ولمدة n سنة تساوي G_n ، وتحسب من العلاقة التالية:

$$G_n = K \cdot (1+P)^n \qquad (1-3)$$

وتسهيلاً للعمليات الرياضية والحسابية سنرمز بـ r للعدد $(1+P)$؛ أي نضع دائماً $r = 1+P$. ونعوض ذلك في العلاقة (1-1) السابقة فنحصل على أن الحصيلة المطلوبة تساوي.

$$G_n = K \cdot r^n \qquad (2-3)$$

حيث ن: $r = 1+P$.

وهنا نلاحظ أن هذه العلاقة تتضمن أربعة متحولات هي: Gn ، K، n وr أو $(P+1)$. فإذا علمنا ثلاثاً منها، يمكننا حساب الرابع. ولكن إجراء مثل هذه الحسابات قد يكون أمراً صعباً أو مطولاً، لذلك يجب أن نستخدم الآلات الحاسبة التي تتضمن التوابع الرياضية الأساسية، أو نستخدم جداول خاصة معدة لذلك، وملحقة في آخر الكتاب لحساب قيمة r^n حسب قيم n.

وعند الضرورة، يمكن أن نقوم بتبسيط العمليات الحسابية، وذلك بتحويل العلاقة (2-3) السابقة إلى شكل لوغاريتمي، حيث نقوم بأخذ لوغاريتم الطرفين، فنجد أن:

$$\lg G_n = \lg K + n \lg r \qquad (3-3)$$

وبعد حساب $\lg G_n$ نعود ونحسب G_m باستخدام عكس اللوغاريتم $\text{int}\lg$، وسنوضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

مثال 1: ما هي حصيلة إيداع مبلغ 100000 ل.س. بفائدة مركبة 8% سنوياً ولمدة 10 سنوات؟

الحل: لدينا $K=100000$ ، $P=0,08$ ، $n=10$، $G_{10} = ?$

وبتطبيق العلاقة (1-3) أو (2-3) نجد أن:

$$G_n = kr^n$$
$$G_{10} = 100000(1+0,08)^{10} = 100000(2,158925)$$
$$G_{10} = 215892,5 \ \ L.S$$

مثال 2: يريد أحدهم أن يوفر مبلغ 215892.5 بعد 10 سنوات من الآن، فما هو المبلغ الذي يجب أن يودعه الآن إذا علمت أن سعر الفائدة 8% سنوياً ؟

الحل: لدينا : $K=?$ ، $P=0,08$ ، $n=10$ ، $G_n = 215892,5$

وبالتعويض في العلاقة (1-3) أو (2-3) نجد أن:

$$G_n = K \cdot r^n$$
$$215892,5 = K(1+0,08)^{10}$$
$$215892,5 = 2,158925K$$
$$K = 100000 \ \ L.S.$$

مثال 3: ما هي المدة اللازمة لإيداع مبلغ 100000 ل.س. بفائدة مركبة 8% سنوياً لنحصل على مبلغ 215892.5 ل.س؟

الحل: لدينا $K=100000$ ، $P=0,08$ ، $n=?$ ، $G_n = 215892,5$

وبالتعويض في العلاقة (1-3) أو (2-3) نجد أن:

$$G_n = kr^n$$
$$215892,5 = 100000(1+0,08)^n$$

ولحساب عدد السنوات n، نلاحظ أنه يقع في الأس، وأن حسابه يعتبر صعباً دون استخدام اللوغاريتمات، لذلك نأخذ لوغاريتم الطرفين، فنجد أن:

$$\lg(215892,5) = \lg(100000) + n \cdot \lg(1+0,08)$$
$$5,3342376 = 5 + n(0,033423755)$$
$$0,3342376 = 0,033423755 \, .n$$
$$n = \frac{0,3342376}{0,033423755} = 10$$

مثال 4: أودع أحدهم مبلغ 100000 ل.س. في المصرف، وبعد عشر سنوات وجد أن حصيلتها مبلغ 215892.5 ل.س، فما هو سعر الفائدة المركبة المستخدم في ذلك المصرف؟

الحل: لدينا $K=100000$ ، $n=10$ ، $G_n = 215892,5$ ، $P=?$.

وبالتعويض في العلاقة (2-3) نجد أن:

$$G_n = kr^n$$
$$215892,5 = 100000 \cdot r^{10}$$

ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على العلاقة (3-3) الآتية:

$$\lg(215892,5) = \lg(100000) + 10\lg r$$
$$5,3342376 = 5 + 10\lg r$$
$$0,3342376 = 10\lg r$$
$$\lg r = 0,03342376$$
$$r = Int\lg(0,03342376) = 1,08$$
$$1 + P = 1,08 \Rightarrow P = 0,08 = 8\%$$

ملاحظة: يمكن حل المثال السابق من العلاقة (2-3) بواسطة استخدام الجذر العاشر، فنجد أن:

$$G_n = Kr^n$$
$$215892,5 = 100000r^{10}$$
$$r^{10} = \frac{215892,5}{100000} = 2,158925$$

وبأخذ الجذر العاشر للطرفين نجد أن

$$r = \sqrt[10]{215892,5} = 1,08$$
$$1 + p = 1,08$$

أي أن :

p= 0.08

3

3-1-3: حساب الفائدة المستحقة على المبلغ المودع K:

إن مقدار الفائدة المستحقة على المبلغ المودع K يساوي مقدار الزيادة التي حققتها عملية الإيداع؛ أي إنه يساوي مقدار الفرق بين الحصيلة G_n والمبلغ الأصلي K.

فإذا رمزنا لمقدار الفائدة المستحقة خلال n عاماً بالرمز I_n فنجد أن:

$$I_n = G_n - K \qquad (4-3)$$

ويمكن تعويض G_n من العلاقة (2-3)، فنحصل على العلاقة:

$$I_n = Kr^n - K = K(r^n - 1) \qquad (5-3)$$

وهي علاقة تتضمن أربعة متحولات إذا علمنا ثلاثاً منها أمكننا حساب الرابع.

ملاحظة: إن طريقة حساب الفائدة المركبة تختلف عن طريقة حساب الفائدة البسيطة المعرفة في العلاقة (2-1) ، وذلك بسبب النظام المتبع في التعامل مع كل منهما .

مثال 5: أوجد الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 100000 ل.س لمدة 10 سنوات ، وبفائدة مركبة 8% سنوياً.

الحل: يمكننا حساب هذه الفائدة مباشرة من العلاقة (3-5) كمايلي:

$$I_n = 100000\left[(1{,}08)^{10} - 1\right] = 100000\left[2{,}158925 - 1\right]$$
$$I_n = 100000\left[1{,}158925\right] = 115892{,}5 \ L.S$$

كما كان يمكننا حسابها من العلاقة (3-4) حيث نجد اعتماداً على المثال (1) أن:
$$I_n = G_n - K = 215892{,}5 - 100000 = 115892{,}5 \ L.S$$

مثال 6: أعلن أحد المصارف عن بيع شهادات استثمار قيمة الواحدة منها 5000 ل.س، ويتعهد بدفع فائدة عليها بعد خمس سنوات قدرها 2500 ل.س. فماهو سعر الفائدة المركبة التي يتعامل المصرف في هذه الحالة.

الحل: لدينا: $I_n = 2500$ ، $n = 5$ ، $K=5000$

ولكن المتحول r مجهول. لذلك نطبق العلاقة (3-5) فنجد أن:

$$I_n = K(r^n - 1)$$
$$2500 = 5000(r^5 - 1)$$
$$\frac{2500}{5000} = (r^5 - 1)$$
$$0{,}5 = (r^5 - 1)$$
$$r^5 = 1{,}5$$
$$r = \sqrt[5]{1{,}5} = 1{,}0845$$
$$1 + P = 1{,}0845$$
$$P = 0{,}0845 = 8{,}45\%$$

تمرين: حاول أن تقوم بحساب P من العلاقة (3-4)؟

مثال 7: ما هي المدة اللازمة لإيداع مبلغ 5000 ل.س بفائدة مركبة 8% سنوياً، ليصبح 7000 ل.س؟

الحل: لدينا: $K = 5000$, $P = 0{,}08$, $G_n = 7000$, $n = ?$

يمكننا إيجاد n من إحدى العلاقتين (3-4) و (3-5) ، لنأخذ العلاقة (3-4) فنجد أن:

$$I_n = G_n - K = 7000 - 5000 = 2000$$
$$I_n = K(r^n - 1)$$
$$2000 = 5000\left[(1{,}08)^n - 1\right]$$
$$\frac{2000}{5000} = (1{,}08)^n - 1$$
$$1{,}4 = (1{,}08)^n$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$\lg(1,4) = n \cdot \lg(1,08)$$
$$0,146128 = n \cdot (0,0334238)$$
$$n = \frac{0,146128}{0,0334238} = 4,37 \text{ سنة}$$

ولحساب كسر السنة بالأيام نقوم بضرب الكسر العشري 0.37 بالعدد 365 فنجد أن
عدد الأيام = $0,37 \cdot 365 = 136$ يوماً
وبذلك نجد أن المدة اللازمة تساوي أربع سنوات و136 يوماً.

مثال 8: ما هو المبلغ اللازم إيداعه لمدة 5 سنوات، وبفائدة مركبة 7% سنوياً، ليصبح 100000 ل.س.

الحل : يمكن حساب هذا المبلغ من العلاقة (2-3) ، ولكننا هنا سنقوم بحسابه بواسطة العلاقتين (4-3) و (5-3) فنجد أن:

$$I_n = G_n - K = K(r^n - 1)$$
$$100000 - K = K\left[(1,07)^5 - 1\right]$$
$$100000 - K = K(0,40255)$$
$$100000 = K(0,40255) + K = 1,40255.K$$
$$K = \frac{100000}{1,40255} = 71298,62 \quad L.S$$

ملاحظة 1: إذا كانت الفائدة تحسب وتضاف m مرة في العام فإن حصيلة إيداع مبلغ K بعد مرور n عاماً على إيداعه وحساب فوائده m مرة في العام تحسب من العلاقة الآتية:

$$G_n = K\left(1 + \frac{P}{m}\right)^{n \cdot m} \qquad (4a-3)$$

حيث P هو السعر السنوي للفائدة المركبة، وm عدد مرات حسابها في العام.

مثال 9: احسب حصيلة مبلغ 200000 ل.س ، أُودع لمدة 5 سنوات في مصرف يحسب الفائدة المركبة ويضيفها إلى الرصيد كل ثلاثة أشهر، وبسعر قدره 6% سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المحققة من ذلك الإيداع.

الحل: لدينا $K = 200000$, $m = 4$, $P = 0,06$, $n = 5$, $G_5 = ?$

وبتطبيق العلاقة (3- $4a$) مباشرة نجد أن:

$$G_5 = K\left(1 + \frac{P}{m}\right)^{n \cdot m}$$
$$G_5 = 200000\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{5 \cdot 4} = 200000(1,346855)$$
$$G_5 = 269371 \quad L.S$$

أما مقدار الفائدة المستحقة فيساوي:

$$I_5 = G_5 - K = 269371 - 200000$$

$$I_5 = 69371\ L.S$$

ملاحظة 2 : لقد لاحظنا أنه عندما تُحسب الفائدة وتضاف أكثر من مرة خلال العام فإن مقدار الفائدة يكون أكبر من مقدارها عندما تُحسب وتضاف مرة واحدة فقط خلال العام، لذلك يبرز لدينا سؤال هام هو: ما هو السعر الحقيقي السنوي للفائدة عندما تحسب وتضاف m مرة خلال العام؟

إن السعر الحقيقي للفائدة P_m يحسب من العلاقة التالية:

$$P_m = \left(1 + \frac{P}{m}\right)^m - 1 \qquad (4b-3)$$

مثال 10: أودع أحدهم 50000 ل.س لمدة 4 سنوات وبفاءدة مركبة 8% سنوياً , والمطلوب حساب السعر الحقيقي للفائدة عندما تضاف مرة واحدة ’ثم مرتين ، ثم أربع مرات في العام ، ثم قم بحساب حصيلة كل من المبالغ السابقة حسب السعر الحقيقي.

الحل: لدينا: $P = 0,08$ ، وبذلك نجد أن:

أ ـ إذا كانت الفائدة تضاف مرة واحدة خلال العام فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_1 = \left(1 + \frac{P}{1}\right)^1 - 1 = P = 0,08$$

أي إن السعر الحقيقي في هذه الحالة يساوي السعر الاسمي نفسه $= P = 0,08$

وإن حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$G_4 = K(1+P_1)^4 = 50000(1+0,08)^4 = 68024,45\ L.S$$

ب ـ إذا كانت الفائدة تضاف مرتين خلال العام $(m = 2)$ فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_2 = \left(1 + \frac{P}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^2 - 1 = 0,0816 = (8,16\%)$$

أي إن سعر الفائدة الحقيقي أصبح *8,16%* نتيجة إضافتها مرتين خلال العام.

ولحساب حصيلة ذلك المبلغ حسب السعر الحقيقي نجد أن:

$$G_4 = K(1+P_2)^4 = 50000(1+0,0816)^4 = 68428,45\ L.S$$

جـ ـ إذا كانت الفائدة تضاف أربع مرات خلال العام $(m = 4)$ فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_4 = \left(1 + \frac{P}{4}\right)^4 - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 = 0,0824 = (8,24\%)$$

وإن حصيلة ذلك المبلغ حسب ذلك السعر الحقيقي تساوي:

$$G_4 = K(1+P_4)^4 = 50000(1+0{,}0824)^4 = 68639{,}29 \ \ L.S$$

نتيجة: من خلال هذا المثال نستنتج أن السعر الحقيقي للفائدة يزداد كلما ازداد عدد مرات إضافة الفائدة خلال العام. أي كلما ازداد m.

5-1-3 : مقارنة الحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة:

إن حصيلة إيداع مبلغ K ولمدة n عاماً وبفائدة بسيطة P سنوياً تعطى بواسطة العلاقة (2-) الآتية:

$$Sn = K(1+nP)$$

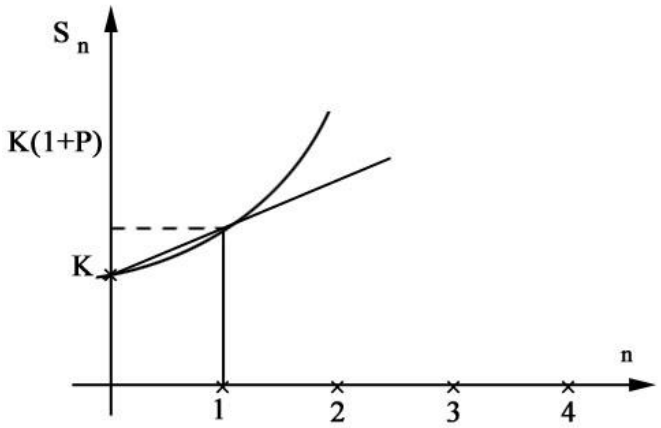
أما حصيلة إيداع المبلغ K نفسه بفائدة مركبة P ولمدة n سنة فتساوي Kn، وتحسب من العلاقة (3-1) التالية:

$$G_n = K \cdot (1+P)^n = \qquad (1-3)$$

ولمقارنة هاتين الحصيلتين وحسب تزايد المدة n، نلاحظ أن الحصيلة البسيطة Sn هي عبارة عن معادلة مستقيم بدلالة n لأنه يمكننا كتابتها كما يلي:

$$S_n = K + (K \cdot P) \cdot n$$

هي ترسم المستقيم المبين على الشكل (1-3) الآتي:



الشكل (1-3) :التمثيل البياني للحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة

أما الحصيلة المركبة G_n فهي عبارة عن معادلة أسية بدلالة n، لأنها تكتب على الصيغة التالية:

$$G_n = Kr^n \qquad (2-3)$$

وهي ترسم المنحني البياني المبين على الشكل (1-3) نفسه.

ومن المعادلتين S_n و G_n نلاحظ ما يلي:

عندما $n = 0$ فإن: $S_0 = G_0 = K$ والمنحنيان يمران من النقطة $(0, K)$

وعندما $n = 1$ فإن: $S_1 = G_1 = K(1+P)$ والمنحنيان يمران من النقطة $[1\,,\, K(1+P)]$

عندما $0 < n < 1$ فإن: $S \geq_n G_n$ ؛ أي إن الحصيلة البسيطة أكبر من الحصيلة المركبة.
عندما $n > 1$ فإن: $S_n \leq G_n$ ؛ أي أن الحصيلة المركبة أكبر من الحصيلة البسيطة.

ونستنتج مما سبق أن نظام الفائدة البسيطة أفضل للمودع من نظام الفائدة المركبة إذا كانت المدة n أصغر من سنة، ولذلك فهو يستخدم في الحسابات قصيرة الأجل (أقل من سنة).

أما إذا كانت $n > 1$ فإن نظام الفائدة المركبة يصبح أفضل للمودع من نظام الفائدة البسيطة، ولذلك فهو يستخدم في الحسابات طويلة الأجل (أكثر من سنة).

3-1-6- الحسابات الجارية حسب الفائدة المركبة:

إن تنظيم عمليات الحسابات الجارية في نظام الفائدة المركبة يدمج بين نظامي الفائدة البسيطة والمركبة، ويتم حساب الفوائد عند كل حركة للحساب، وكذلك عند كل موعد لحسابها وفق التالي:

- إذا كانت المدة بين حركتين متتاليتين للحساب أقل من الفترة المقررة لإضافة الفائدة، فإن مقدار الفائدة المستحقة يحسب وفق نظام الفائدة البسيطة، ولا يضاف إلى الرصيد إلا عند نهاية الفترة المقررة، أو عند إغلاق الحساب.
- إذا كانت المدة بين حركتين متتاليتين للحساب أكبر من الفترة المقررة لإضافة الفائدة، فإن مقدار الفائدة المستحقة يحسب وفق نظام الفائدة المركبة، ويضاف في نهاية الفترة الأخيرة، ويتم استكمال حساب مقدار الفائدة عن الأيام المتبقية حسب نظام الفائدة البسيطة، ولا تضاف إلى الرصيد إلا عند نهاية الفترة التالية، أو عند إغلاق الحساب.

ويمكن تمثيل عمليات حركة الحساب الجاري لنظام فائدة مركبة يضيف الفائدة مرتين خلال السنة،

مثال 11: أوجد حصيلة الحساب الجاري التالي في نهاية العام مع بيان حركات الإيداع والسحب والإضافة، علماً بأن الفائدة تضاف مرتين خلال العام، وأن سعرها 8% سنوياً (للحالتين البسيطة والمركبة).

التاريخ	العمليات			الحسابات			نوع المعالجة
	إيداع	سحب	إضافة فائدة	الرصيد المعتمد	مدة الإيداع بالأيام	الفائدة المستحقة	
2004/2/5	3000	-	-	3000	34	22.30	بسيطة
2004/3/10	5000	-	-	8000	15	26.23	بسيطة
2004/3/25	-	2000	-	6000	16	20.98	بسيطة
2004/4/10	-	3000	-	3000	21	13.77	بسيطة
2004/5/1	4000	-	-	7000	60	91.80	بسيطة
مجموع الفوائد 6/30	-	-	-	-	-	175.08	-
الحصيلة في 6/30	-	-	175.08	7175.08	15	23.52	مركبة
2004/7/15	5000	-	-	12175.08	72	191.61	بسيطة
2004/9/25	-	3000	-	9175.08	61	122.33	بسيطة
2004/11/25	6000	-	-	15175.08	15	49.75	بسيطة

2004/12/10	4000	-	-
الفائدة 12/31	-	-	-
الحصيلة 12/31	-	-	475.23

بسيطة	88.02	21	19175.08
	475.23	-	-
مركبة	-	-	19650.3

ولقد قمنا بإجراء الحسابات على الجدول السابق مباشرةً كما يلي:

1 ـ نلاحظ أن سنة 2004 هي سنة كبيسة وتتألف من 366 يوماً.

2 ـ حسبنا مدة إيداع المبلغ الأول 3000 من 2004/2/5 حتى 2004/3/10، فكانت 33+1=34 يوماً.لأن شباط هنا يتألف من29 يوماً .

3 ـ حسبنا الفائدة المستحقة عليه فوجدناها $I = K \cdot P \cdot n = 22,30$.

4 ـ حسبنا الرصيد في 3/10/ فأصبح 8000، ولم نضف إليه الفائدة السابقة لأن عملية الإيداع جرت خلال فترة الإضافة.

5 ـ حسبنا الأرصدة الباقية والفوائد المستحقة عليها كما سبق.

6 ـ في 6/30؛ أي في نهاية فترة الإضافة قمنا بحساب مجموع الفوائد المستحقة على جميع الأرصدة السابقة وكان يساوي 175.08 ل.س.

7 ـ أضفنا مجموع الفوائد إلى الرصيد الأخير فحصلنا على 7175.08 ل.س. وهي الحصيلة في 2004/6/30، أو الرصيد الأول لنصف السنة الثاني.

8 ـ تابعنا حساب النصف الثاني من السنة كالسابق، وحصلنا على مجموع الفوائد 475.23 ل.س.

9 ـ أضفنا مجموع الفوائد إلى الرصيد الأخير فحصلنا على الحصيلة في 2004/12/31 وتساوي 19650.31 ل.س.

10 ـ وهكذا يمكننا متابعة الحسابات بنفس الطريقة لعدة سنوات.

تمرينات

1 ـ أودع شخص مبلغ 7000 ل.س. بفائدة مركبة 6% سنوياً، فاحسب حصيلة هذا المبلغ بعد 5 سنوات، ومقدار الفائدة المستحقة.

2 ـ أودع أحدهم المبالغ التالية:

12000 ل.س لمدة 3 سنوات بفائدة 6% سنوياً

8000 ل.س لمدة 5 سنوات بفائدة 5% سنوياً

7000 ل.س لمدة 6 سنوات بفائدة 5% سنوياً

فاحسب حصيلة كل من هذه المبالغ، والفائدة المستحقة عليها. ثم احسب الحصيلة الكلية لها .

3 ـ احسب حصيلة مبلغ 4000 ل.س. تم إيداعه لمدة 3 سنوات وبفائدة مركبة 7% سنوياً في الحالات التالية:

أ ـ إذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة.

ب ـ إذا كانت الفائدة تضاف كل 3 أشهر.

جـ ـ إذا كانت الفائدة تضاف كل شهر.

ثم احسب الفائدة المستحقة عنها في نهاية المدة لكل الحالات السابقة، ثم أوجد السعر الحقيقي لسعر الفائدة لكل منها، ثم السعر الحقيقي المتوسط لها.

2-3: حساب القيمة الحالية والخصم :

3-2-1: مفاهيم عامة :

لا تختلف المفاهيم العامة المستخدمة في هذا الفصل كثيراً عن المفاهيم التي تعرضنا لها في الفصل السابق حول القيمة الحالية والخصم بفائدة بسيطة، وهي:

- **القيمةالاسمية**: هي القيمة التي تسجل على السندات والكمبيالات، وهي عبارة عن القيمة المستحقة الدفع للدائن في تاريخ الاستحقاق .
- **تاريخ الاستحقاق**: هو التاريخ المدون على السند أو الوثيقة المالية الذي يحدد اللحظة التي يلتزم المدين بحلولها بتسديد القيمة الاسمية المسجلة على السند .
- **تاريخ الخصم أو القطع**: هو التاريخ الذي يريد الدائن أو المدين تسوية الدين فيه، أو هو التاريخ الذي يريد الدائن فيه أن يبيع السند في السوق، وهو تاريخ يكون سابقاً لتاريخ الاستحقاق على السند .
- **مدة الاستحقاق**: وهي الفترة الزمنية المتبقية لتسديد السند وهي الفترة الممتدة من تاريخ التحرير أو الخصم أو القطع حتى تاريخ الاستحقاق، وتقاس بالسنوات .
- **القيمة الحالية للدين**: هي القيمة المكافئة حالياً للدين المؤجل، أو هي المبلغ الذي إذا أودع الآن (أو في لحظة التسوية) في المصرف وبفائدة مركبة P ولمدة الاستحقاق n ، لأصبحت حصيلته تساوي القيمة الاسمية المسجلة على السند .
- **مقدار الخصم**: وهو الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية أي أنه يساوي:

مقدار الخصم = القيمة الاسمية – القيمة الحالية

3-2-2: العلاقات الأساسية بين القيمتين الحالية والاسمية والخصم :

لنرمز للقيمة الاسمية للسند بالرمز S .

وللقيمة الحالية الصحيحة للسند بالرمز V .

وبناء على ذلك يمكننا حساب المؤشرات التالية:

- **حساب القيمة الحالية الصحيحة** :

إن القيمة الحالية الصحيحة V هي عبارة عن المبلغ الي إذا أودعناه الآن بفائدة مركبة P ولمدة الاستحقاق n، أصبحت قيمته أو حصيلته المركبة مساوية للقيمة الاسمية Sk، وانطلاقاً من هذا التعريف نجد أن V وS يرتبطان مع بعضها حسب العلاقتين (2-1) و(2-2) واللتين تأخذان الشكل :

$$S = V(1 + P)^n = V * r^n \qquad (3-6)$$

ومنها نجد أن القيمة الحالة الصحيحة V تساوي:

$$V = \frac{S}{(1 + P)^n} = \frac{S}{r^n} \qquad (3-7)$$

ولتسهيل العمليات الرياضية نرمز بـــ h للمقدار $\frac{1}{1+P}$ ، أي نستخدم بشكل دائم التحويل الآتي:

$$h = \frac{١}{١ + P} = \frac{١}{r} \qquad (٣ - ٨)$$

فنجد أن القيمة الحالية الصحيحة تأخذ الشكل المختزل التالي:

$$V = S * h^n \qquad (٣ - ٩)$$

- **حساب مقدار الخصم الصحيح (الحطيطة الداخلية):**

وهو الفرق بين القيمة الاسمية و القيمة الحالية الصحيحة، أي أنه يساوي :

مقدار الخصم الصحيح = القيمة الاسمية – القيمة الحالية الصحيحة

وإذا رمزنا لمقدار الخصم عن n عاماً بالرمز D_n فإنه يكون لدينا:

$$D_n = S - V \qquad (٣ - ١٠)$$

وبتعويض V من (3-9) نحصل على:

$$D_n = S - Sh^n = S(١ - h^n) \qquad (٣ - ١١)$$

كما يمكننا حساب مقدار الخصم بدلالة القيمة الحالية، وذلك بتعويض S من العلاقة (3-6) كما يلي:

$$D_n = S - V = Vr^n - V = V(r^n - ١) \qquad (٣ - ١٢)$$

- **حساب معدل الخصم الصحيح:**

بما أن الخصم يحسم من القيمة الاسمية، فإن معدل الخصم السنوي هو عبارة عن نتيجة قسمة مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة على القيمة الاسمية للسند S ، وبما أن مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة حسب العلاقة(3-11) يساوي:

$$D_١ = S(١ - h)$$

وإذا رمزنا لمعدل الخصم الصحيح السنوي بالرمز q فإننا نجد أن ذلك المعدل يساوي:

$$q = \frac{D_١}{S} = \frac{S(١ - h)}{S} = ١ - h \qquad (٣ - ١٣)$$

- ***علاقة معدل الخصم الصحيح q بسعر الفائدة P :***

من العلاقة (3-13) يمكننا أن نستنتج العلاقة التي تربط معدل الخصم q بمعدل الفائدة p، حيث نجد أن:

$$q = ١ - h = ١ - \frac{١}{١ + P} = \frac{١ + P - ١}{١ + P} = \frac{P}{١ + P}$$

أي أن:

$$q = \frac{P}{١ + P} \qquad (٣ - ١٤)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن $q < P$، لأنه ناتج عن قسمة P على العدد $1+P$ الذي يزيد عن الواحد .ومنها يمكن أن نستنتج بالمقابل أن : $P = \frac{q}{١ - q}$

- **حساب القيمة الحالية الصحيحة بدلالة معدل الخصم الصحيح q :**

لقد وجدنا في (3-13) أن $q = ١ - h$، وهذا يعطينا أن $h = ١ - q$

بتعويض ذلك في العلاقة (3-9) نحصل على أن :

$$V = S * (١ - q)^n \qquad (٣ - ١٥)$$

- **مقدار الخصم التجاري (الحطيطة الخارجية) :**

وجدنا أن مقدار الخصم الصحيح يحسب من إحدى العلاقتين (3-11) و (3-12) التاليتين:

$$D_n = S(1 - h^n) \qquad (16-3)$$

$$D_n = V(r^n - 1) \qquad (17-3)$$

وإذا وضعنا فيها $n=1$ فإننا نحصل على مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة فقط ويساوي:

$$D_1 = S(1 - h) = S * q \qquad (18-3)$$

$$D_1 = V * (r - 1) = V * P \qquad (19-3)$$

وهذا يعني أنه يمكننا حساب مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة بإحدى الطريقتين التاليتين:

- إما أن نقوم بضرب القيمة الاسمية S بمعدل الخصم الصحيح q، حيث إن q تحسب من معدل الفائدة P بالعلاقة $q = \frac{P}{1+P}$.
- وإما أن نقوم بضرب القيمة V بمعدل الفائدة P .

ولكن التجار في السوق لا يستخدمون أي من هاتين الطريقتين، بل يتشاطرون ويقومون بحساب الخصم لسنة واحدة من جراء ضرب القيمة الاسمية S بمعدل الفائدة السائد P (أو بمعدل أكبر منه) فيحصلون على ما يسمى بالخصم التجاري والذي سنرمز له بـــ Dt ، وهو عندما يحسب عن سنة واحدة يساوي:

$$Dt = S * P = S * (r - 1) \qquad (20-3)$$

أي أنهم يقومون بتحوير العلاقة ا (3-18) ويستبدلون معدل الخصم q بمعدل الفائدة P، وهذا يحقق لهم خصماً أكثر، وبالتالي ربحاً أكبر دون أن يدري البائع المدين بذلك، (وذلك لأن $P > q$، كما رأينا سابقاً)، أو أنهم يقومون بتحوير العلاقة (3-19) ويستبدلون القيمة الحالية V بالقيمة الاسمية S، فيحصلون على الخصم السابق نفسه .

- **القيمة الحالية التجارية:**

عندما يريدون حساب القيمة الحالية التجارية يقومون أيضاً بتحوير العلاقة (3-15) باستبدال معدل الخصم q بسعر الفائدة P وتحسبون القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$V_t = S(1 - P)^n \qquad (21-3)$$

وهكذا يقومون بحساب الخصم التجاري من العلاقة:

$$Dt = S - V_t \qquad (22-3)$$

مثال 1: يريد أحد الأشخاص بيع سند لديه قيمته الاسمية 20000 ليرة سورية، يستحق الدفع بعد ثلاث سنوات من الآن ، وإذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً ، فأوجد ما يلي:

- القيمة الحالية الصحيحة لهذا السند .
- مقدار الخصم الصحيح ومعدله .
- مقدار الخصم التجاري ومعدله .
- القيمة الحالية التجارية .

الحل : لدينا $S = 20000, \quad n = 3, \quad P = 0.07, \quad V = ?$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الصحيحة تساوي:

$$V = S * h^n = ٢٠٠٠٠ \left(\frac{١}{١ + ٠.٠٧}\right)^٣ = ١٦٣٢٥.٩٦ \quad L.S$$

أما مقدار الخصم الصحيح لمدة 3 سنوات فيساوي:

$$D = S - V = ٢٠٠٠٠ - ١٦٣٢٥.٩٦ = ٣٦٧٤.٠٤ \quad L.S$$

أما معدل الخصم الصحيح فيساوي:

$$q = ١ - h = ١ - \frac{١}{١.٠٧} = ٠.٠٦٥٤ = (٦.٥٤)\%$$

ولحساب القيمة الحالية التجارية نستخدم العلاقة (21-3) التالية:

$$V_t = S(١ - P)^n$$

$$= ٢٠٠٠٠(١ - ٠.٠٧)^٣ =$$

$$V_t = ٢٠٠٠٠(٠.٨٠٤٣٥٧)$$

$$V_t = ١٦٠٨٧.١٤$$

أما مقدار الخصم التجاري فهو يساوي:

$$D_t = S - V_t = ٢٠٠٠٠ - ١٦٠٨٧.١٤ = ٣٩١٢.٨٦$$

وهنا نلاحظ أن القيمة الحالية الصحيحة V أكبر من القيمة الحالية التجارية V_t .

مثال 2: تقدم أحد الأشخاص إلى المصرف بطلب لقطع كمبيالة قيمتها 50000 ليرة سورية، وتستحق الدفع بعد أربع سنوات من الآن، فقطعها المصرف قطعاً صحيحاً بمبلغ44500 ل.س . فما هو مقدار الخصم الصحيح؟ وما هو معدله؟ وما هو سعر الفائدة المركبة المعتمدة في المصرف؟

الحل: لدينا $S = ٥٠٠٠٠, \quad n = ٣, \quad V = ٤٤٥٠٠, \quad n = ٤$

لحساب مقدار الخصم الصحيح نجد أنه يساوي:

$$D = S - V = ٥٠٠٠٠ + ٤٤٥٠٠ = ٥٥٠٠ \; L.S$$

أما معدل الخصم q فنحسبه من العلاقة العامة كما يلي:

$$V = S(١ - q)^n$$

$$٤٤٥٠٠ = ٥٠٠٠٠(١ - q)^٤$$

$$\frac{٤٤٥٠٠}{٥٠٠٠٠} = (١ - q)^٤$$

$$٠.٨٩ = (١ - q)^٤$$

$$١ - q = \sqrt[٤]{٠.٨٩} = ٠.٩٧١٣$$

$$q = ٠.٠٢٨٧ = (٢.٨٧٪)$$

ولحساب سعر الفائدة P المعتمدة في المصرف نطبق العلاقة $q = \frac{P}{١+P}$ أو العلاقة:

$$P = \frac{q}{١ - q} = \frac{٠.٠٢٨٧}{١ + ٠.٠٢٨٧} = ٠.٠٢٩٥٥ = (٢.٩٥٥٪)$$

3-3 : تسوية الديون طويلة الأجل (بفائدة مركبة):

3-3-1: أسس التسوية :

لقد عالجنا سابقاً كيفية تسوية الديون قصيرة الأجل اعتماداً على نظام الفائدة البسيطة، ولكن معالجة تسوية الديون طويلة الأجل تتم اعتماداً على نظام الفائدة المركبة، وحتى لا يتضرر أي طرف من أطراف عملية التعاقد (الدائن أو المدين) من عملية التسوية، لابد من اتباع أساس سليم لمعالجة مختلف الحالات، وبحيث نضمن حقوق الطرفين ، أي بحيث تتم إضافة الفوائد المستحقة عن كل دين يتم تأجيل تاريخ استحقاقه، ويتم إنقاص قيمة الدين الذي يسدد قبل موعده أو يتقدم تاريخ استحقاقه، بمقدار الخصم الصحيح المستحق عن ذلك التقديم .

والقاعدة العامة المتبعة في تسوية الديون قصيرة الأجل وطويلة الأجل والتي تحفظ حقوق الطرفين هي القاعدة التي تستند على القاعدة الذهبية التالية :

القاعدة الذهبية : لا يجوز جمع أو طرح المبالغ المالية إلا إذا كانت قيمها منسوبة إلى لحظة زمنية واحدة .

لذلك كان لابد من اختيار لحظة زمنية معينة وحساب قيم جميع الديون عند تلك اللحظة ، وإن أفضل لحظة هي لحظة التسوية ، ولهذا يتم تحديد تاريخ معين للتسوية (واعتباره لحظة الصفر)، وحساب القيم الحالية لتلك الديون منسوبة إلى ذلك التاريخ ، ثم تطبيق المعادلة التالية والتي تسمى معادلة التوازن التالية:

مجموع القيم الحالية للديون قبل التسوية = مجموع القيم الحالية للديون بعد التسوية

(في لحظة التسوية) $\sum V_1 = \sum V$ **(في لحظة التسوية)**

وبوضع القيم الحالية للديون قبل التسوية والقيم الحالية للديون بعد التسوية في هذه المعادلة، والمطابقة بين الطرفين، يمكننا حساب أي متحول مجهول في أحد الطرفين، وخاصة في الطرف الثاني .

ويتم حساب القيم الحالية لتلك الديون في الطرفين وفق إحدى الحالتين التاليتين:

- من حساب القيم الحالية الصحيحة حسب معدل الفائدة المركبة P من (3-7).
- من حساب القيم الحالية التجارية باستخدام معدل الخصم التجاري $q_t = P$.

وهنا نذكر بأهم العلاقات المستخدمة في حساب القيم الحالية الصحيحة والتجارية، وهي:

نحسب القيمة الحالية الصحيحة للطرفين من أحدى العلاقتين:

بدلال معدل الفائدة P:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = S * h^n \qquad (٢٣-٣)$$

بدلالة معدل الخصم الصحيح q:

$$V = S(1-q)^n \qquad (٢٤-٣)$$

أونحسب القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$V_t = S(1-P)^n \qquad (٢٥-٣)$$

3-3-2: حالات التسوية :

الحالة الأولى: حالة تسديد الدين قبل موعده :

وهنا يتم حساب القيمة الحالية لهذا الدين، ثم تسديد قيمته مباشرة:ونستخدم لذلك إحدى العلاقتين:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = S * h^n \quad , \quad V_t = S(1-P)^n$$

مثال 1: اكتشف ورثة التاجر أحمد أن والدهم يدين لجاره بسند قيمته الاسمية 100000 ل.س، ويستحق بعد 3 سنوات من الآن، فاحسب المبلغ الذي يجب أن يدفعه الورثة للدائن من أجل تبرئة ذمة والدهم، حتى يتقاسموا باقي المال الموروث (حسب القاعدة: بعد وصية أو دين) علماً بأن سعر الفائدة المركبة $P=0.05$.

الحل:

لدينا : $S = ١٠٠٠٠٠ \quad , \quad n = ٣ \quad , \quad P = ٠.٠٥ \quad , \quad V =?$

نلاحظ أن المبلغ الذي يجب أن يدفعه الورثة هو القيمة الحالية الصحيحة لذلك السند وتحسب من العلاقة:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = \frac{١٠٠٠٠٠}{(1+٠.٠٥)^٣} = ٨٦٣٨٣.٧٦ \ L.S$$

أما إذا اتفق الطرفان على حساب القيمة الحالية التجارية فنحسبها من العلاقة:

$$V_t = S[1-P]^n = ١٠٠٠٠ * [1-(٠.٠٥)]^٣ = ٨٥٧٣٣٥$$

وهي هنا لصالح الورثة .

مثال2: أراد أحمد أن يسدد (كمبيالة) عليه قيمتها 50000 ل.س وتستحق بعد 4 سنوات، فما هو المبلغ الذي سيدفعه للدائن إذا كان معدل الخصم الصحيح 7%، وما هو مقدار الخصم الصحيح المحقق؟ .

الحل:

لدينا : $S = ٥٠٠٠٠ \quad , \quad n = ٤ \quad , \quad q = ٠.٠٧$

وبذلك نجد أن المبلغ الذي سيدفعه للمدين يساوي القيمة الحالية الصحيحة لتلك (الكمبيالة) ، وحسب العلاقة (3-24) فهي تساوي:

$$V = S(1-q)^n$$

$$V = ٥٠٠٠٠(1-٠.٠٧)^٤ = ٣٧٥٠٢.٦٠ \ L.S$$

يكون المدين قد حقق خصماً صحيحاً قدره:

$$D = S - V = ٥٠٠٠٠ - ٣٧٤٠٢.٦٠ = ١٢٥٩٧.٤ \ L.S$$

الحالة الثانية: حالة استبدال دين واحد بآخر جديد :

لمعالجة هذه الحالة، نفترض أن قيمة الدين الجديد مجهولة، ونرمز لها بـــ X، ونفترض أن مدة استحقاقه m معلومة، (أو بالمقابل نفترض أن قيمة الدين الجديد معلومة، وأن مدة استحقاقه m مجهولة) . سنوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال 3: يدين أحدهم للمصرف بسند قيمته 200000 ل.س، ويستحق الدفع بعد 5 سنوات، ويريد استبداله بسند جديد يستحق بعد 7 سنوات. احسب القيمة الاسمية للسند الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً .

الحل: لدينا : $S = ٢٠٠٠٠٠ \quad , \quad n_١ = ٥ \quad , \quad P = ٠.٠٨ \quad , \quad m = ٧$

نفترض أن القيمة الاسمية المجهولة للدين الجديد هي X، فإن القاعدة العامة تعطينا المعادلة التالية: $V_1 = V$

وباستخدام العلاقة (3-23) للطرفين نحصل على أن:

$$\frac{٢٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{٥}} = \frac{X}{(١+٠.٠٨)^{٧}}$$

$$١٣٦١١٦.٦٤ = \frac{X}{(١+٠.٠٨)^{٧}} \Rightarrow$$

$$X = ١٣٦١١٦.٦٤(١+٠.٠٨)^{٧}$$

$$X = ٢٣٣٢٨٠ \quad L.S$$

مثال 4: لنفترض أن صاحب الدين السابق طلب من المصرف استبداله بسند آخر قيمته الجديدة 300000 ل.س فاحسب مدة استحقاق السند الجديد .

الحل: لنفترض أن مدة استحقاق الدين الجديد m سنة ثم نضع معادلة التوازن كما يلي:

$$V_1 = V$$

وبتطبيق (3-23) على الطرفين نجد أن:

$$\frac{٢٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{٥}} = \frac{٣٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{m}}$$

$$١٣٦١١٦.٦٤ = \frac{٣٠٠٠٠٠}{(١+٠.٠٨)^{m}} \Rightarrow$$

$$(١.٠٨)^{m} = \frac{٣٠٠٠٠٠}{١٣٦١١٦.٦٤} = ٢.٢٠٣٩٩$$

ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن:

$$m\log(١.٠٨) = \log(٢.٢٠٣٩٩)$$

$$m(٠.٠٣٣٤٢٤) = ٠.٣٤٣٢٠٩٦$$

$$m = \frac{٠.٣٤٣٢٠٩٦}{٠.٠٣٣٤٢٤} = ١٠.٢٦٨ \quad \text{سنة}$$

ولحساب كسر السنة بالأيام نضرب الكسر 0.268 بالعدد 365 فنحصل على:

$$٠.٢٦٨ \times ٣٦٥ = ٩٧.٩٥ \approx ٩٨ \quad \text{يوماً}$$

أي إن مدة استحقاق السند الجديد تساوي 10 سنوات و 98 يوماً من الآن .

الحالة الثالثة: تسوية عدة ديون بدين واحد :

لمعالجة هذه الحالة نطبق القاعدة نفسها، ونستعرضها من خلال الأمثلة التالية:

مثال 5: يريد حمودة تسوية الديون التي عليه للمصرف بدين واحد جديد، والديون هي:

40000 ل.س ويستحق بعد 3 سنوات .

50000 ل.س ويستحق بعد 6 سنوات .

70000 ل.س ويستحق بعد 8 سنوات .

فاحسب القيمة الاسمية للدين الجديد إذا علمت أنه تم الاتفاق مع المصرف على أن تكون مدة الدين الجديد 5 سنوات، وأن سعر الفائدة المركبة المعتمدة هو 6% سنوياً.

الحل: لدينا: $S_1 = ٤٠٠٠٠$, $S_2 = ٥٠٠٠٠$, $S_3 = ٧٠٠٠٠$, $P = ٠.٠٦$

$n_1 = ٣$, $n_2 = ٦$, $n_3 = ٨$, $m = ٥$

لتطبيق القاعدة العامة نفترض أن القيمة الاسمية للدين الجديد تساوي X، وبذلك نجد أن القاعدة العامة تأخذ الشكل التالي:

$$V_1 + V_2 + V_3 = V$$

وبتطبيق العلاقة (3-23) على الطرفين نجد أن :

$$\frac{٤٠٠٠٠}{(١ + ٠.٠٦)^{٣}} + \frac{٥٠٠٠٠}{(١ + ٠.٠٦)^{٦}} + \frac{٧٠٠٠٠}{(١ + ٠.٠٦)^{٨}} = \frac{X}{(١ + ٠.٠٦)^{٥}}$$

$$٣٣٥٨٤.٧٧ + ٣٥٢٤٨٠.٣ + ٤٣٩١٨.٨٧ = \frac{X}{١.٣٣٥٢٣}$$

$$١١٢٧٥١.٦٧ = \frac{X}{١.٣٣٥٢٣}$$

$$X = ١١٢٧٥١.٦٧(١.٣٣٥٢٣) = ١٥٠٨٨٧.٦٧ \ L.S$$

3-4: حساب حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة مركبة):

3-4-1: مقدمة :

سنعالج في هذه الفقرة كيفية حساب حصيلة عدة دفعات دورية متساوية في نهاية مدة الإيداع. ونقصد بالدفعات الدورية الدفعات التي تودع بانتظام خلال فترات زمنية دورية (كل سنة أو نصف سنة أو فصل أو شهر)، في أحد المصارف وحسب نظام الفائدة المركبة، وهي قد تكون متساوية، فعندها تسمى الدفعات الدورية المتساوية، وقد تكون غير متساوية، وعندها تسمى الدفعات الدورية غير المتساوية .

وستقتصر دراستنا في هذا الفصل على الدفعات الدورية المتساوية لكونها تخضع إلى قوانين رياضية محددة، ونترك الدفعات الدورية غير المتساوية لمعالجتها بشكل منفرد حسبما ورد في فقرة الحسابات الجارية (2=1=6) السابقة.

-- **أنواع الدفعات الدورية:** يمكن أن نصنف الدفعات الدورية إلى عدة أنواع هي:

- **الدفعات العادية:**

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي يتم دفعها باستمرار في نهاية كل دورة زمنية محددة للدفع(أي في نهاية كل شهر أو في كل فصل أو سنة)، اعتباراً من لحظة الاتفاق، وقد سميت دفعات عادية لأن الدفعة الأولى منها تدفع في نهاية الفترة الأولى التي تم الاتفاق عليها، أي بعد مرور فترة زمنية على الاتفاق، وتحسب حصيلة هذه الدفعات بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة .

- الدفعات الفورية:

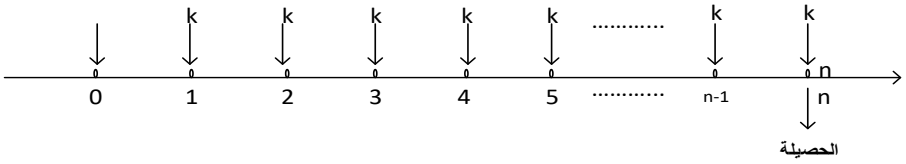
وهي الدفعات الدورية المتساوية التي يتم دفعها باستمرار في بداية كل دورة زمنية محددة للدفع (أي في بداية كل سنة أو فصل أو شهر)، اعتباراً من لحظة الاتفاق، وقد سميت دفعات فورية لأن الدفعة الأولى منها تدفع فوراً وفي بداية الفترة الأولى (أي في لحظة الاتفاق) ، وتحسب حصيلة هذه الدفعات بعد مرور دورة زمنية كاملة على إيداع الدفعة الأخيرة .

وقبل الدخول في الحسابات والاستنتاجات الرياضية، نرمز للمتحولات التي يمكن أن تدخل في حسابات هذه الدفعات بكل أنواعها بالرموز التالية :

1- قيمة الدفعة الدورية ونرمز لها كالعادة بـ k .
2- عدد الدفعات الدورية: ونرمز له بالرمز n ، وهو يساوي أيضاً مدة الإيداع إذا كان الإيداع سنوياً .
3- طول مدة الدورة: وهو يساوي وحدة زمنية يتفق عليها (سنة أو فصل أو شهر) ونرمز له بالرمز l .
4- المدة الكاملة للإيداع: وهي تساوي n فترة زمنية دورية، وتحسب بالسنوات .
5- سعر الفائدة المركبة: ونرمز له بالرمز P، وهو نسبة مئوية سنوية .
6- مدة التأجيل والسماح: ونرمز لها بالرمز t، وتحسب بالفترات الزمنية المعتمدة .
7- حصيلة الدفعات الدورية: ونرمز لها بالرمز Q_n لأنها مرتبطة بعدد الدفعات n.
8- الفائدة المستحقة للدفعات الدورية: ونرمز له بالرمز I_n لأنها مرتبطة بعدد الدفعات n أيضاً .

3-4-2: حساب حصيلة الدفعات العادية السنوية :

لحساب حصيلة هذه الدفعات ننطلق من تعريف الدفعات العادية التي تدفع في نهاية كل سنة، وتحسب حصيلتها بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة، ونقوم بتمثيل سير عمليات الدفع والحساب كما في الشكل الآتي:



الشكل (3-2) تمثيل الدفعات العادية

ومن الشكل نلاحظ أنه لحساب الحصيلة الكلية لهذه الدفعات يجب حساب حصيلة كل منها بشكل منفرد منسوبة إلى نهاية المدة ، وذلك اعتماداً على العلاقة المعروفة (3-2) الآتية : $G_n = k.r^n$ فنجد أن:

حصيلة الدفعة الأولى التي أودعت في نهاية العام الأول، واستمر إيداعها حتى نهاية العام n، أي التي بلغت مدة إيداعها $(n-1)$ عاماً تساوي : kr^{n-1} .

حصيلة الدفعة الثانية التي أودعت في نهاية العام الثاني، واستمر إيداعها حتى نهاية العام n، أي التي بلغت مدة إيداعها $(n-2)$ عاماً تساوي : kr^{n-2} .

حصيلة الدفعة الثالثة التي استمرت لمدة $(n-3)$ عاماً تساوي: kr^{n-3} .

حصيلة الدفعة الرابعة التي استمرت لمدة $(n-4)$ عاماً تساوي: kr^{n-4} .

.....
حصيلة الدفعة قبل الأخيرة التي استمر إيداعها عاماً واحداً تساوي: kr^{1} .
حصيلة الدفعة الأخيرة التي سحبت مباشرة بعد إيداعها تساوي نفسها: k .
وهكذا نجد أن الحصيلة الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع حصائلها، اي أن:

$$Q_n = kr^{n-1} + kr^{n-2} + \cdots \ldots \ldots kr + k$$

ولتسهيل عملية التحليل نكتب الطرف الثاني بترتيب معاكس، فنحصل على أن :

$$Q_n = k + kr + kr^{2} + \cdots \ldots kr^{n-2} + kr^{n-1}$$

لإيجاد صيغة مختصرة لهذه المعادلة، نلاحظ أن الطرف الثاني منها ما هو إلا عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية، حدها الأول K، وأساسها r، وعدد حدودها n حداً، وحسب العلاقة (1-) نجد أن ذلك المجموع يساوي:

$$k * \frac{r^n - 1}{r - 1} = k * A_n \qquad (٢٦ - ٣)$$

حيث رمزنا بـــ A_n للكسر $\frac{r^n-1}{r-1}$ وتحسب قيمته مباشرة أوتؤخذ من الجداول الملحقة .
وهذه العلاقة تعطينا حصيلة n دفعة عادية قيمة كل منها k ، وهي تتضمن أربعة متحولات إذا علمنا ثلاثة منها أمكننا حساب الرابع .
ولحساب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات نطبق العلاقة:

$$I_n = Q_n - n * k \qquad (٢٧ - ٣)$$

مثال *1*: قرر الوالدان أن يودعا في المصرف لصالح طفلهما الجديد، في نهاية كل عام مبلغ 1000 ل.س . فاحسب حصيلة تلك الدفعات عندما يصبح ذلك الطفل راشداً ويبلغ 18 عاماً، علماً بأن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً، ثم احسب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات .

الحل: لدينا $k = ١٠٠٠, \quad n = ١٨, \quad P = ٠.٠٨, \quad Q_n = ?$
وبما أن الدفعات السابقة هي دفعات سنوية متساوية وعادية لذلك نقوم بتطبيق العلاقة (26-3) فنحصل على أن حصيلتها تساوي :

$$Q_{١٨} = ١٠٠٠ \frac{(١.٠٨)^{١٨} - ١}{(١.٠٨) - ١} = ٣٧٤٥٠ \; L.S$$

ولحساب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات، نطبق العلاقة (27-3) فنجد أن:

$$I_n = Q_n - n * k = ٣٧٤٥٠ - ١٨ * ١٠٠٠ = ١٩٤٥٠ \quad L.S$$

مثال *2*: يريد أحدهم أن يوفر مبلغ 500000 ل.س لشراء سيارة خلال 4 سنوات فقط، وذلك عن طريق إيداع دفعات عادية سنوية . فاحسب قيمة الدفعة الدورية k، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً .

الحل: لدينا $k = ?, \quad P = ٠.٠٧, \quad n = ٤, \quad Q_n = ٥٠٠٠٠٠$
وبما أن الدفعات هي دفعات عادية وسنوية نطبق العلاقة السابقة، فنجد أن:

$$٥٠٠٠٠٠ = k\frac{(١.٠٧)^{٤}-١}{(١.٠٧)-١} = ٤.٤٣٩٩٤٣ * k$$

فنجد أن قيمة الدفعة السنوية تساوي:

$$k = \frac{٥٠٠٠٠٠}{٤.٤٣٩٩٤٣} = ١١٢٦١٤.٠٦\ L.S$$

ملاحظة: إن حصيلة الدفعات الجزئية العادية التي تدفع بواقع *m* مرة في العام تحسب من العلاقة:

$$Q_{n*m} = k * \frac{\left(r^{\frac{١}{m}}\right)^{n*m}-١}{\left(r^{\frac{١}{m}}\right)-١} = k * \frac{r^{n}-١}{\left(r^{\frac{١}{m}}\right)-١} \qquad (٢٨-٣)$$

وهي العلاقة التي تعطينا حصيلة الدفعات الجزئية التي عددها $n*m$ دفعة وتدفع خلال n عاماً.

مثال *3*: يقوم أحدهم بإيداع مبلغ 1000 ل.س في آخر كل شهر، فاحسب حصيلة هذه الدفعات في نهاية السنة الثالثة، علماً بأن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً.

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات عادية وشهرية ، لأنها تدفع في نهاية كل شهر، وأن عددها في السنة $m=12$ دفعة، وأن عددها خلال ثلاث سنوات يساوي $n*m=36$ دفعة، ونجد أن حصيلة هذه الدفعات بفائدة مركبة 7% سنوياً تساوي:

$$Q_{nm} = Q_{٣٦} = ١٠٠٠\frac{r^{٣}-١}{r^{\frac{١}{١٢}}-١} = ١٠٠٠\frac{(١.٠٧)^{٣}-١}{(١.٠٧)^{\frac{١}{١٢}}-١}$$

$$Q_{٣٦} = ١٠٠٠\frac{١.٢٢٥٠٤٣-١}{١.٠٠٥٦٥٤-١} = ١٠٠٠\frac{٠.٢٢٥٠٤٣}{٠.٠٠٥٦٥٤١٤٥} =$$

$$Q_{٣٦} = ١٠٠٠(٣٩.٨٠١٤٢٠٠٢) = ٣٩٨٠١.٤٢\ L.S$$

مثال *4*: يريد أحدهم أن يوفر بعد 5 سنوات من الآن مبلغ 100000 ل.س من خلال إيداع دفعات شهرية تدفع في نهاية كل شهر بفائدة مركبة 8% سنوياً، فاحسب مقدار الدفعة الشهرية المطلوبة .

الحل: لدينا $Q =?,\quad P = ٠.٠٨,\quad Q_{٦٠} = ١٠٠٠٠٠,\quad k = ١٢,\quad n = ٥$

وبما أن هذه الدفعات عادية وجزئية نقوم بتطبيق العلاقة (3-28) فنجد أن:

$$١٠٠٠٠٠ = k * \frac{(١.٠٨)^{٥}-١}{(١.٠٨)^{\frac{١}{١٢}}-١}$$

$$١٠٠٠٠٠ = k\frac{١.٤٦٩٣٢٨-١}{١.٠٠٦٤٣٤-١} =$$

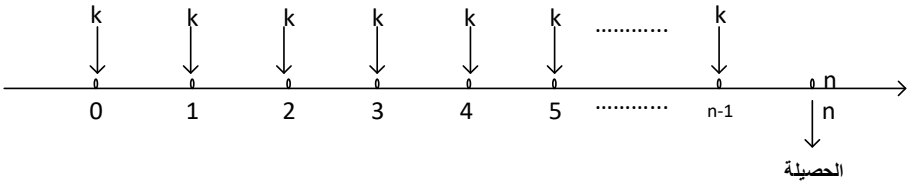
$$١٠٠٠٠٠ = k * (٧٢.٩٤٤٩٨)$$

ومنها نجد أن:

$$k = \frac{١٠٠٠٠٠}{٧٢.٩٤٤٩٨} = ١٣٧٠.٩٠\ \ L.S$$

3-4-3: حساب حصيلة الدفعات الفورية السنوية :

لحساب حصيلة الدفعات الفورية ننطلق من تعريف الدفعات الفورية التي تدفع في بداية كل عام، وتحسب حصيلتها بعد مرور عام على إيداع الدفعة الأخيرة، ولتوضيح سير عمليات الدفع والحساب نقوم بتمثيل ذلك على الشكل البياني التالي:



الشكل (3-3) : التمثيل البياني للدفعات الفورية

ومن الشكل البياني نلاحظ أن لحظة حساب حصيلة هذه الدفعات هي نهاية السنة الأخيرة n، أي بعد مرور سنة على موعد تسديد الدفعة الأخيرة، وهذا يعني أنه لحساب الحصيلة الكلية لهذه الدفعات، يجب حساب حصيلة كلٍ منها بشكل منفرد منسوبة إلى تلك اللحظة n ، وذلك اعتماداً على العلاقة المعروفة: $G_n = k * r^n$

وبذلك نجد أن حصيلة الدفعة الأولى التي يستمر إيداعها n عاماً تساوي: $k * r^n$

وحصيلة الدفعة الثانية التي يستمر إيداعها n-1 عاماً تساوي : $k * r^{n-1}$

وحصيلة الدفعة الثانية التي يستمر إيداعها n-2 عاماً تساوي : $k * r^{n-2}$

.....

وحصيلة الدفعة قبل الأخيرة التي يستمر إيداعها 2 سنة تساوي : $k * r^2$

وحصيلة الدفعة الأخيرة التي يستمر إيداعها سنة واحدة تساوي : $k * r$

وهكذا نجد أن الحصيلة الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع حصائلها، أي إنها تساوي:

$$Q'_n = kr^n + kr^{n-1} + kr^{n-2} + \cdots + kr^2 + kr$$

ولتسهيل المعالجة نقوم بكتابة المجموع الأيمن بترتيب معاكس، فنحصل على أن:

$$Q'_n = kr + kr^2 + kr^3 + \cdots + kr^{n-1} + kr^n$$

وهنا نلاحظ أن المجموع في الطرف الأيمن ما هو إلا عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول (kr) وأساسها r، وعدد حدودها n حداً، لذلك فإن العلاقة السابقة تساوي:

$$Q'_n = kr * \frac{r^n - 1}{r} = k * r * An \qquad (٢٩ - ٣)$$

وهي علاقة تضم أربعة متحولات، إذا علمنا ثلاثة منها أمكننا حساب الرابع .

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (3-26) نجد أن:

$$Q'_n = r * Q_n \qquad (٣٠ - ٣)$$

ولحساب مقدار الفائدة المستحقة عن هذه الدفعات نطبق العلاقة البسيطة :

$$I'_n = Q'_n - n * k \qquad (٣١ - ٣)$$

مثال 5:

احسب حصيلة 10 دفعات كانت تدفع في بداية كل عام، إذا علمت أن مقدار كل منها 5000 ل.س. وبفائدة مركبة 8% سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات .

الحل: لدينا $n = ٥٠٠٠,\quad k = ٥٠٠٠,\quad P = ٠.٠٨,\quad 15Q_n = ?$

بما أن الدفعات تدفع في بداية كل عام فهي دفعات فورية لذلك نطبق العلاقة (3-29)

$$Q'_n = kr * \frac{r^n - ١}{r - ١} = ٥٠٠٠ * (١.٠٨)\frac{(١.٠٨)^{١٠} - ١}{١.٠٨}$$

$$Q'_n = ٥٠٠٠(١.٠٨) * (١٤.٤٨٦٥٦) = ٧٨٢٢٧.٤٤\ L.S$$

أما مقدار الفائدة المستحقة فيساوي :

$$I'_n = Q'_n - n * k = ٧٨٢٢.٧ - ١٠ * ٥٠٠٠ = ٢٨٢٢٧.٤٤\ L.S$$

مثال 6:

قرر الزوجان أن يسجلا على شراء سيارة سعرها 500000 ل.س بواسطة إيداع دفعات متساوية في بداية كل عام، ولمدة 4 سنوات، فاحسب قيمة الدفعة السنوية إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً .

الحل: لدينا $k = ?,\quad P = ٠.٠٦,\quad n = ٤,\quad Q'_n = ٥٠٠٠٠٠$

بما أن الدفعات تدفع في بداية كل عام فهي دفعات فورية وسنوية لذلك نطبق العلاقة (3-29) فنجد أن:

$$Q'_n = kr * \frac{r^n - ١}{r - ١} =$$

$$٥٠٠٠٠٠ = k(١.٠٦)\frac{(١.٠٦)^{٤} - ١}{(١.٠٦) - ١} = Q(١.٠٦) * (٤.٣٧٤٦١٦)$$

$$٥٠٠٠٠٠ = k(٤.٦٣٧٠٩٢٩٦)$$

$$k = \frac{٥٠٠٠٠٠}{٤.٦٣٧٠٩٢٩٦} = ١٠٧٨٢٦.١٨\ L.S$$

ملاحظة: إذا كانت الدفعات جزئية وفورية وتدفع بواقع *m* دفعة في العام فإن حصيلتها تحسب من العلاقة :

$$Q_{n*m} = k.r^{\frac{١}{m}} * \frac{r^n - ١}{r^{\frac{١}{m}} - ١} \qquad (٣٢ - ٣)$$

مثال 7:

قرر أحدهم أن يودع مبلغ 1000 ل.س في بداية كل شهر ولمدة 3 سنوات فاحسب حصيلة هذه الدفعات إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً .

الحل:

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات فورية جزئية (شهرية) وإن حصيلتها تحسب من العلاقة :

$$Q'_{n*m} = k * r^{\frac{١}{m}}.\frac{r^n - ١}{r^{\frac{١}{m}} - ١}$$

وبما أن لدينا $r = ١.٠٨,\quad m = ١٢,\quad n = ٣,\quad k = ١٠٠٠$

نعوض فنجد أن:

$$Q'_{n*m} = ١٠٠٠(١.٠٧)^{\frac{١}{١٢}} * \frac{(١.٠٧)^{٣} - ١}{(١.٠٧)^{\frac{١}{١٢}} - ١} =$$

$$Q'_{n*m} = ١٠٠٠(١.٠٠٥٦٥٤١٥)\frac{٠.٢٢٥٠٤٣}{٠.٠٠٥٦٥٤١٤٥} =$$

$$Q'_{n*m} = ٤٠٠٢٢.٤٦ \ L.S$$

تمرينات

1 ـ يودع شخص في صندوق التوفير مبلغ 10000 ل.س. في نهاية كل عام. أوجد رصيد ذلك الشخص في نهاية السنة الخامسة، واحسب مقدار الفائدة المستحقة له، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 8% سنوياً.

2ـ كان أحد الأشخاص يودع في آخر كل سنة مبلغ 5100 ل.س. وفي نهاية السنة الرابعة وجد أنه حصل على فوائد مركبة قدرها 3600 ل.س. والمطلوب:

ـ حساب حصيلة تلك الدفعات.

ـ حساب معدل الفائدة السنوي.

3ـ يودع أحدهم في أول كل عام مبلغ 2500 ل.س. ولمدة 5 أعوام. احسب حصيلة هذا الإيداع، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 6% سنوياً، واحسب مقدار الفائدة المستحقة له.

3- 5 : حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية (بفائدة مركبة)

سنقوم في هذا الفصل بحساب القيمة الحالية للدفعات العادية وللدفعات الفورية، ، وفق الترتيب التالي:

3-5-1 : حساب القيمة الحالية للدفعات العادية السنوية :

نقصد بمصطلح الدفعات العادية السنوية الدفعات التي تودع في نهاية كل عام. وإن حساب القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات ، يقتضي أن نقوم بحساب القيمة الحالية لكل منها ثم نأخذ مجموعها. ولتوضيح ذلك نرسم الشكل البياني التالي لتمثيل عملية حساب القيمة الحالية للدفعات العادية:

الشكل (3-4) تمثيل القيم الحالية للدفعات العادية

ولحساب القيم الحالية لكل من هذه الدفعات نعود إلى العلاقة العامة لها ، وهي العلاقة الآتية:

$$V_n = \frac{K}{(1+P)^n} = K \cdot h^n \qquad h = \frac{1}{P+1} \text{ حيث إن} \qquad (33-3)$$

وهكذا نجد أنه يمكننا أن نستخدم هذه العلاقة لحساب القيم الحالية لكل من الدفعات الدورية حسب مدة كل منها.

فالقيمة الحالية للدفعة الأولى التي أودعت في نهاية العام الأول تساوي : $V_1 = K \cdot h^1$

والقيمة الحالية للدفعة الثانية التي أودعت في نهاية العام الثاني تساوي : $V_2 = K \cdot h^2$

والقيمة الحالية للدفعة الثالثة التي أودعت في نهاية العام الثالث تساوي : $V_3 = K \cdot h^3$

.....

والقيمة الحالية للدفعة ما قبل الأخيرة التي أودعت في نهاية العام $(n-1)$:

$V_{n-1} = K \cdot h^{n-1}$.

والقيمة الحالية للدفعة الأخيرة التي أودعت في نهاية العام n تساوي : $V_n = K \cdot h^n$.

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع قيمها الحالية ، أي إن:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ...V_{n-1} + V_n \qquad (34-3)$$

أي إن:

$$V_n = K \cdot h + K \cdot h^2 + K \cdot h^3 + ...K \cdot h^{n-1} + k \cdot h^n$$

وبملاحظة أن المجموع في الطرف الثاني ما هو إلا مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $K \cdot h$ ، وأساسها h وعدد حدودها n حداً. فإن مجموع حدودها يساوي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{h^n - 1}{h - 1} \qquad (35-3)$$

وبما أن $h < 1$ (لأن $h = \frac{1}{P+1} < 1$.) فإنه يفضل كتابة العلاقة السابقة على الشكل التالي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{1 - h^n}{1 - h} \qquad (36-3)$$

وبما أن $(1-h)$ يساوي:

$$1 - h = 1 - \frac{1}{P+1} = \frac{P+1-1}{P+1} = P \cdot h$$

لذلك نكتب العلاقة (3-36) على الشكل التالي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{1 - h^n}{P \cdot h} =$$

$$V_n = K \cdot \frac{1 - h^n}{P} = \qquad (37-3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا القيمة الحالية الكلية لـ n دفعة عادية سنوية مقدار كل منها K بفائدة مركبة P سنوياً.

مثال 1: يبيع أحد التجار السيارات نقداً بمبلغ 450000 ل.س، أو بالتقسيط، بشرط أن يتم دفع مبلغ 300000 ل.س نقداً وفوراً، ويتم دفع أقساط سنوية قدرها 40000 في نهاية كل عام ولمدة خمسة أعوام.

والمطلوب: حساب الثمن الحقيقي (القايم) للسيارة عند بيعها بالتقسيط إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

ثم قارن ذلك الثمن مع الثمن النقدي المعروض. واستنتج ما تراه مناسباً.

الحل: إن الثمن الحقيقي للسيارة = الدفعة النقدية + القيمة الحالية للأقساط.

ولحساب القيمة الحالية للأقساط نلاحظ أولاً أنها عبارة عن دفعات سنوية عادية . لذلك نطبق العلاقة (37-3) مباشرة فنجد أنه:

لدينا : $K = 40000$, $P = 0{,}08$, $n = 5$ ولدينا أيضاً:

$$h = \frac{1}{1+p} = \frac{1}{1+0{,}08} = 0{,}9259259$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة (37-3) نجد أن:

$$V_5 = 40000 \cdot \frac{1-(0{,}9259259)^5}{0{,}08}$$

$$V_5 = 40000(3{,}99271) = 159708{,}40 \quad L.S$$

وبذلك نجد أن الثمن الحقيقي للسيارة:

$$300000 + 159708{,}40 = 459708{,}40 \quad L.S$$

وبمقارنة هذا الثمن مع الثمن النقدي نجد أنه يزيد عنه بمقدار:

$$459708{,}40 - 450000 = 9708{,}40 \quad L.S$$

وهذا يعني إن التاجر قد استفاد من عملية التقسيط، وحصل على مبلغ إضافي قدره *9708,40* ل.س وهو مقدار النصب بسبب التقسيط غير العادل ، لذلك نطلب من الطلاب حساب قيمة القسط العادل.

مثال 2: يريد أحدهم أن يشتري شقة ثمنها الحالي 1500000 ل.س واتفق مع صاحب الشقة على تسديد مبلغ نقدي فوراً قدره 500000 ل.س، وأن يتم تقسيط المبلغ المتبقي على 10 دفعات سنوية تدفع كل منها في نهاية العام. فاحسب قيمة القسط السنوي إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً.

الحل: لدينا الثمن الحالي = 1500000 ل.س ، والدفعة النقدية= 500000 ل.س، والمبلغ المتبقي = 1000000 ل.س

ولحساب قيمة القسط السنوي نلاحظ أن الأقساط عبارة عن دفعات سنوية وعادية لمدة 10 سنوات، وبفائدة مركبة 6% سنوياً، وحتى تغطي هذه الدفعات المبلغ المتبقي من ثمن الشقة ، يجب أن تكون قيمتها الحالية مساوية للمبلغ المتبقي 1000000 ل.س ،

لذلك نطبق العلاقة (37-3) ونضع المبلغ المتبقي مكان القيمة الحالية ونترك القسط السنوي مجهولاً ، فنجد أن :

لدينا $V_n = 1000000$, $p = 0{,}06$, $n = 10$, $K = ?$. وأن :

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{0{,}06} = 0{,}943396$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة (37-3) نجد أن:

$$1000000 = K \cdot \frac{1-(0{,}943396)^{10}}{0{,}06} = K.(7{,}360100387)$$

وبذلك نجد أن:

$$K = \frac{1000000}{7{,}360100387} = 135867{,}55 \quad L.S$$

أي إن القسط السنوي العادل يجب أن يساوي *135867,55* ل.س حتى يمكنه من أن يغطي تماماً القيمة المتبقية من ثمن الشقة المذكورة مع الفواد المستحقة عليه .

ملاحظة : إن القيمة الحالية لجملة من الدفعات الجزءية العادية ، التي تدفع بواقع *m* دفعة في العام ولمدة *n* عاماً تحسب من العلاقة الآتية :

$$V_{n\cdot m} = K, h^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-h^n}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (38-3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا القيمة الحالية للدفعات العادية الجزئية بواقع m دفعة متساوية خلال العام.

مثال 5: اشترى أحدهم جهاز حاسوب بالتقسيط على أن يدفع ثمنه على شكل أقساط تدفع في نهاية كل شهر، وقيمة كل منها تساوي 2000 ل.س ، ولمدة ثلاث سنوات فاحسب الثمن الحقيقي لذلك الجهاز. إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

الحل: لدينا $k = 12$, $P = 0{,}08$, $n = 3$, $K = 2000$, $V = ?$.

لحساب الثمن الحقيقي لذلك الجهاز نطبق علاقة القيمة الحالية لتلك الدفعات العادية الجزئية التالية :

$$V_{n\cdot m} = K, h^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-h^n}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (38-3)$$

وبما أن $P = 0{,}08$ ، فإن :

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{1+0{,}08} = 0{,}9259259$$

وبالتعويض نحصل على أن:

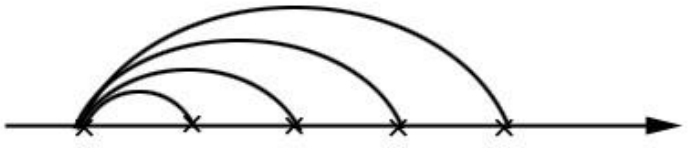
$$V_{n\cdot m} = 2000(0{,}9259259)^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1-(0{,}9259259)^{3}}{1-(0{,}9259259)^{\frac{1}{12}}}$$

$$V_{n\cdot m} = 2000(0{,}9259259) \cdot \frac{1-0{,}793832}{1-0{,}9936071}$$

$$V_{n\cdot m} = 64086{,}68 \quad L.S$$

3-5-2: القيمة الحالية للدفعات الفورية السنوية:

لحساب القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات الفورية نتبع نفس الأسلوب الذي اتبعناه في حساب القيمة الحالية للدفعات العادية، ولكننا هنا يجب أن نلاحظ أن الدفعة الأولى تدفع في بداية العام الأول، والثانية في بداية العام الثاني، والثالثة في بداية العام الثالث.... والأخيرة في بداية العام الأخير، وإن عمليات الدفع تمثل كما في الشكل البياني التالي:



الشكل البياني *(3-5)*

ومن الشكل نلاحظ أن القيمة الحالية للدفعة الأولى تساوي نفسها أي: $V'_1 = K$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الثانية التي مدتها عام واحد تساوي : $V'_2 = K.h^1$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الثالثة التي مدتها عامان تساوي: $V'_3 = K.h^2$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الرابعة التي مدتها ثلاثة أعوام تساوي: $V'_4 = K.h^3$.

.....

وأن القيمة الحالية للدفعة ماقبل الأخيرة تساوي : $V'_{n-1} = K.h^{n-2}$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الأخيرة التي تدفع في بداية العام الأخير تساوي :

$$V'_n = K.h^{n-1}$$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات الفورية السنوية V' تساوي:

$$V'_n = V'_1 + V'_2 + V'_3 + V'_4 + \ldots\ldots V'_{n-1} + V'_n$$

$$V'_n = K + K.h + K.h^2 + .K.h^3 + \ldots.K.h^{n-2} + K.h^{n-1}$$

وبما أن الطرف الثاني هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول K وأساسها h وعدد حدودها n حداً، فإننا نجد أن القيمة الحالية المطلوبة تساوي:

$$V'_n = K.\frac{1-h^n}{1-h} \qquad (39-3)$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة *(37-3)* نجد أن القيمة الحالية للدفعات الفورية V'_n ترتبط مع القيمة الحالية للدفعات العادية بالعلاقة:

$$V'_n = \frac{V_n}{h} \qquad (40-3)$$

ملاحظة : إذا كانت الدفعات جزءية وفورية وتدفع بواقع m دفعة في العام ولمدة n عاماً ، فإن قيمتها الحالية تحسب من العلاقة التالية :

$$V_{n\cdot m} = K,\cdot\frac{1-h^n}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (41-3)$$

مثال 13: يريد أحدهم شراء سيارة خاصة، فاتفق مع البائع على أن يسدد له قيمتها على خمسة أقساط سنوية تدفع في بداية كل عام، اعتباراً من تاريخ الشراء، قيمة كل منها *75000* ل.س. فاحسب الثمن الحقيقي (القايم) لهذه السيارة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً.

الحل: نلاحظ أن الدفعات هي دفعات فورية لأنها تدفع في بداية كل عام، وأن القيمة الحالية لهذه الدفعات هي نفسها ثمن شراء السيارة المذكورة، كما نلاحظ أن:

$Q = 75000, \quad n = 5$ وأن $P = 0,06$ وإن:

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{1,06} = 0,943396$$

وبتطبيق العلاقة (39-3) نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات الفورية تساوي:

$$V'_n = Q.\frac{1-h^5}{1-h} = 7500\,\frac{1-(0,943396)^5}{1-0,943396}$$

$$V'_n = 334882,77 \quad L.S$$

مثال 16: اشترى أحدهم حاسوباً واتفق مع البائع على أن يسدد له قيمته خلال سنتين على شكل دفعات دورية تدفع في بداية كل شهر، اعتباراً من تاريخ الشراء، وقيمة كل منها *2000* ل.س. فاحسب الثمن القائم لذلك الحاسوب إذا علمت أن سعر الفائدة 8% سنوياً.

الحل: نلاحظ أن الدفعات هي دفعات فورية جزئية بفائدة سنوية،وأن *n=2*، وأن عدد الدفعات $m = 12$ دفعة في السنة، و $K = 2000$ ، و $P = 0,08$ ، وبذلك نجد أن:

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{1,08} = 0,9259259$$

وبتطبيق العلاقة (41-3) نجد أن:

$$V_{2/12} = K.\frac{1-h^m}{1-h^{\frac{1}{m}}} = 2000\frac{1-(0{,}9259259)^2}{1-(0{,}9259259)^{\frac{1}{12}}}$$

$$V_{2/12} == 2000\frac{0{,}14266123}{0{,}0063929003} = 44631{,}14 \quad L.S$$

6-3 : حسابات القروض طويلة الأجل وطرق تسديدها

إن القروض طويلة الأجل هي القروض التي تكون مدتها أكثر من سنتين، وإن عملية تسديد هذه القروض تعتمد على دفع أقساط دورية سنوية أو فصلية أو شهرية، وتنطلق من أحد المبدأين المعادلين التاليين:

المبدأ الأول: حصيلة الأقساط حتى نهاية المدة = حصيلة القرض عند انتهاء المدة. وهذا يجعل التعادل في نهاية المدة.

المبدأ الثاني: القيمة الحالية للأقساط عند الإقراض= القيمة الأصلية للقرض ' وهذا يجعل التعادل في بداية المدة.

ولهذا فإنه يتوجب على المصرف أن يقوم بتحديد وحساب قيمة كل قسط من الأقساط الدورية حسب أحد هذين المبدأين، علماً بأن هذه الأقساط يمكن أن تكون متساوية أو غير متساوية، كما عليه أن يقوم بتنظيم عملية دفعها وتحديد مواقيت تسديدها حتى يتم تسديد قيمة القرض كاملة مع جميع الفوائد المستحقة في نهاية الفترة المحددة. (*)

3-6-1: إيجاد العلاقة العامة (للأقساط المتساوية):

لنفترض أن حجم القرض المقدم من المصرف هو L ، وأن مدة القرض هي n سنة، وأن سعر الفائدة المركبة هو P سنوياً ، وأن معاملها $r = 1 + P$ ، وأن مقدار القسط السنوي المتساوي هو R، وأن القسط الأول يستحق الدفع بعد عام من تاريخ القرض، وهكذا تتوالى الأقساط حتى يتم تسديد القرض مع فوائده خلال n عاماً.

لإيجاد العلاقة الرياضية التي تربط بين S وR وn وr. نعتمد على المبدأ الثاني، وهنا نلاحظ أولاً أنه حتى يتم تسديد القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع القيم الحالية لجميع الأقساط السنوية مساوياً لقيمة القرض الأصلية L .

وهكذا فإننا نفترض أن القيمة الحالية للقسط الأول تساوي V_1 فيكون: $V_1 = \frac{R}{r}$

وأن القيمة الحالية للقسط الثاني تساوي : $V_2 = \frac{R}{r^2}$

وأن القيمة الحالية للقسط الثالث تساوي: $V_3 = \frac{R}{r^3}$

(*) يتشرط أن يكون مقدار القسط السنوي R أكبر من إجمالي الفائدة السنوية المترتبة على قيمة القرض والتي تساوي S.P . أي يجب أن يكون $R > S.P$.

.....

وبذلك تكون القيمة الحالية للقسط الأخير الذي يدفع بعد n سنة تساوي: $V_n = \frac{R}{r^n}$

وحتى يتم تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع هذه القيمة الحالية مساوياً لقيمة القرض، أي يجب أن يكون:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = L$$

$$R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + ... + \frac{1}{r^n}\right) = L$$

وبملاحظة أن ما داخل القوس هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{r}$ وأساسها $\frac{1}{r}$ أيضاً، وعدد حدودها n حداً، نجد أن:

$$L = R, \frac{1}{r} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R\frac{1}{r} \cdot \frac{r^{-n} - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R\frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$$

وهكذا نجد أن العلاقة المطلوبة هي:

$$L = R.\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (42-3)$$

ومنها يمكننا أن نحسب مقدار القسط السنوي المتساوي R فنجد أن:

$$R = L \cdot \frac{r - 1}{r - 1^{-n}} \qquad (43-3)$$

ويسمى المقدار $\frac{(r-1)}{1-r^{-n}}$ بمعامل التسديد وتحسب قيمته مباشرة، أو تعطى بواسطة جداول خاصة ملحقة في آخر الكتاب ، أما إجمالي المبلغ الذي قام المقترض بتسديده فيساوي:

$$K_n = n \cdot R = n \cdot L \cdot \frac{(r-1)}{1-r^{-n}} \qquad (44-3)$$

وإجمالي الفائدة المترتبة على القرض I_n يساوي:

$$I_n = K_n - L \qquad (45-3)$$

(2-15) العلاقة الخاصة للأقساط الجزئية المتساوية:

عندما يتم الاتفاق على تسديد القرض على شكل أقساط أو دفعات جزئية (فصلية وشهرية)، متساوية عددها m دفعة خلال كل عام ولمدة n عاماً، فإن العلاقة التي تعطينا مقدار القسط الجزئي R' هي:

$$R' = L \cdot \frac{(r^{1/m} - 1)}{1 - r^{-n}} \qquad (46-3)$$

وعندها فإن إجمالي المبلغ المترتب على المقترض يساوي:

$$K'_n = n \cdot m \cdot R' = n \cdot m \cdot L \cdot \frac{(r^{\frac{1}{m}} - 1)}{1 - r^{-n}} \qquad (47-3)$$

وإن إجمالي الفائدة المترتبة على المقترض يساوي:

$$P'_n = K'_n - L \qquad (48-3)$$

مثال 1:

اقترض أحدهم مبلغ 40000 ل.س، من المصرف لمدة 15 عاماً، فماهو مقدار القسط السنوي الذي يضمن تسديد القرض مع فوائده ؟، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً .وماهو إجمالي المبلغ الذي سيدفعه المقترض للمصرف؟ وماهو مقدار الفائدة المترتبة على القرض؟

إذا أراد المقترض أن يكون القسط شهرياً، فماهو مقدار القسط الشهري وإجمالي ماسيدفعه وإجمالي مقدار الفائدة؟

الحل: نحسب مقدار القسط السنوي من العلاقة *(43-3)* فنجد أن:

$$R = 40000 \frac{1{,}08 - 1}{1 - (1{,}08)^{-15}} = 4673{,}18 \ L.S$$

ونحسب إجمالي ما سيدفعه المقترض من *(44-3)* فنجد أن:

$$K_n = 15 \ . 4673{,}18 = 70097{,}70 \ L.S$$

وبذلك نجد أن إجمالي الفائدة المترتبة على القرض يساوي:

$$I_n = K_n - S = 70097{,}70 - 40000 = 30097{,}70 \ L.S$$

أما إذا أراد المقترض أن يسدد قرضه على شكل دفعات شهرية، فإننا نحسب مقدار القسط الشهري من العلاقة (46-3)، فنجد أن:

$$R' = 40000 \frac{\left[(1{,}08)^{\frac{1}{12}} - 1\right]}{1 - (1{,}08)^{-15}} = 375{,}84 \, L.S$$

شهرياً

وإن إجمالي ماسيدفعه المقترض في هذه الحالة للمصرف يساوي:

$$K_n = 15 \cdot 12 \cdot 375{,}84 = 67651{,}2 \ \ L.S$$

وإن إجمالي الفائدة المترتبة على القرض تساوي:

$$I_n = 67651{,}2 - 40000 = 27651{,}2 \ \ L.S$$

وهنا نلاحظ أن الأقساط الشهرية تكون لصالح المقترض لأنها ستقلل من تكاليف القرض.

3-6-2: الطرائق المختلفة لتسديد القروض:

هناك عدة طرائق لتسديد القروض نذكر منها ما يلي:

أ ـ الطريقة الأولى: طريقة الأقساط المتساوية لتغطية الفائدة وجزء من أصل القرض: وتعتمد هذه الطريقة على تسديد أقساط سنوية متساوية تدفع في نهاية كل عام ،أي إن هذه الطريقة تشترط أن تكون جميع هذه الأقساط متساوية، وتساوي مقدار القسط السنوي R المحسوب من العلاقة *(43-3)* الآتية:

$$R = L.\frac{r-1}{1-r^{-n}}$$

، وتشترط أيضاً أن يتضمن القسط الدوري على ما يلي:

1 ـ جزء مخصص لتغطية كامل الفائدة المستحقة على القرض أو على باقي القرض.

2 ـ جزء آخر مخصص لتسديد جزء من أصل القرض ويسمى بجزء الاستهلاك.

فإذا رمزنا لمقدار القرض بـ L ، ولمقدار القسط الدوري المتساوي بـ R، ولمقدار جزء الاستهلاك من القرض المتضمن في القسط ذي الرقم i بالرمز D_i ، فإننا نجد أن القسط الأول يتألف من عنصرين:

ـ الفائدة المترتبة على القرض خلال العام الأول، وتساوي $I_1 = L \cdot P$.

ـ الجزء المخصص للاستهلاك الأول من القرض ومقداره D_1 .

ومنه نجد أن مقدار القسط الأول يساوي: $R = I_1 + D_1$.

ومنه نحصل على أن الجزء المخصص للاستهلاك من القرض يساوي: $R - I_1 = D_1$ ، وبعد تسديد هذه الدفعة يبقى من أصل القرض $(L - D_1)$. وإن الفائدة المستحقة عليه تساوي $I_2 = (L - D_1) \cdot P$. حيث P هو سعر الفائدة المركبة السنوي

وبعد مرور عام آخر (سنتين) على تاريخ القرض، فإن مقدار القسط الثاني سيشمل فائدة ما تبقى من القرض وجزءاً مستهلكاً جديداً نرمز له بـ D_2 فيكون:

$$R = I_2 + D_2$$

ويكون لدينا : $D_2 = R - I_2$

وهكذا يكون لدينا أيضاً : $D_3 = R - I_3$

وهكذا نجد أن القسط الأخير يساوي: $R = I_n + D_n$

ويكون : $D_n = R - I_n$

ولذلك نقوم بحساب القسط السنوي R أولاً، ثم نقوم بحساب الفوائد على المبالغ المتبقية من أصل القرض وحساب الاستهلاكات السنوية والمتراكمة، ويتم تنظيم هذه العمليات عبر جدول خاص بذلك يسمى جدول استهلاك القرض. ويتضمن المدفوعات والاستهلاكات خلال أعوام هذا القرض. ويأخذ هذا الجدول الشكل التالي:

العام 1	الرصيد المتبقي من القرض في مطلع العام (2)	الفائدة المترتبة عليه في نهاية العام I_i (3)	القسط السنوي (4) R	الاستهلاك السنوي (5) D_i	الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام (6)	الرصيد المتبقي من القرض من نهاية العام (7)
1	L	$L.P$	R	D_1	D_1	$L-D_1$
2	$L-D_1$	$(L-D_1)\cdot P$	R	$_2D$	D_1+D_2	$L-(D_1+D_2)$
3	$(L-D_1-D_2)$	$(L-D_1-D_2)\cdot P$	R	$_3D$	$D_1+D_2+D_3$	$L-(D_1+D_2+D_3)$
...	...	...	...	...	...	.....
...	...	...	...	...	...	.....
n	$(L-D_1-D_2\ldots.-D_{n-1})$.	$(L-D_1-D_2\ldots.-D_{n-1}).P$	R	D_n	$D_1+D_2+D_3+\ldots+D_n$	0
المجموع		I	$n.R$	L	-	

ولحساب عناصر هذا الجدول نتبع أسلوب التتابع، فبعد أن نحدد مقدار القسط السنوي R من العلاقة(43-3) نقوم بحساب الفائدة الأولى المستحقة $I_1 = L \cdot P$ ثم نقوم بحساب الاستهلاك الأول D_1 من العلاقة.

$$D_1 = R - L \cdot P \qquad (49-3)$$

وذلك بطرح عنصر العمود (3) من عنصر العمود (4). ثم نقوم بحساب الاستهلاك المتراكم والرصيد المتبقي من القرض *(L-D1)*، ونضعهما في العمودين (6) و(7) ، ولمتابعة العمل نضع الرصيد المتبقي $(L-D_1)$ في بداية السطر الثاني من العمود (2) ثم نحسب الفائدة المستحقة عليه، وبعدها نقوم بحساب D_2 انطلاقاً من عناصر العمودين (3) و(4) اعتماداً على العلاقة:

$$D_2 = R - I_2 \qquad (50-3)$$

وهكذا نتابع العمل حتى نصل إلى نهاية الجدول، وبعدها نتحقق من أن مجموع الاستهلاكات يساوي مقدار القرض L .

ملاحظة هامة: هناك طريقة أخرى لحساب عناصر الجدول السابق تعتمد على العلاقة التي تربط بين الاستهلاكات السنوية D_{i+1}, D_i والتي يمكن استخراجها كما يلي :

بما أن الأقساط متساوية، إذن القسط R_i يساوي R_{i+1} وبذلك يكون:

$$
\begin{aligned}
&R_1 = R_2 \\
&I_1 + D_1 = I_2 + D_2 \\
&L \cdot P + D_1 = (L - D_1) \cdot P + D_2 \qquad (51-3) \\
&L \cdot P + D_1 = L \cdot P - D_1 + P \\
&D_1 = -D_1 P + D_2 \\
&D_2 = D_1 + D_1 P \\
&D_2 = D_1 \cdot (1 + P) \\
&D_2 = D_1 \cdot r
\end{aligned}
$$

وهكذا نجد أن:

$$
\begin{aligned}
&D_3 = D_2 \cdot r \\
&D_4 = D_3 \cdot r
\end{aligned}
$$

وبصورة عامة يكون لدينا:

$$D_{i+1} = D_i \cdot r \qquad (52-3)$$

وهكذا نجد أن الجزء المستهلك من القرض في نهاية العام $(i+1)$ يساوي الجزء المستهلك منه في نهاية العام (i) مضروباً بمعامل الفائدة r. وتستخدم العلاقة (52-3) لحساب عناصر العمود (5) من الجدول الاستهلاكي السابق، وذلك بعد حساب R ثم حساب D_1 من العلاقتين (43-3) (49-3) على الترتيب. وعندما نقوم بحساب عناصر العمود (5) يمكننا بسرعة حساب عناصر بقية الأعمدة.

مثال 2:

اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س لمدة 5 سنوات وبفائدة مركبة 8% سنوياً على أن يقوم بتسديده بطريقة الأقساط المتساوية من أصل القرض والفوائد .

المطلوب : حساب قيمة القسط السنوي ومقادير الاستهلاكات السنوية، ثم إعداد جدول لاستهلاك هذا القرض .

الحل: لدينا : $S = 100000 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad P = 0.08$

لحساب القسط السنوي المتساوي نطبق العلاقة (43-2) فنجد أن :

$$R = S\frac{r-1}{1-r^{-n}} = 100000\frac{(1.08)-1}{1-(1.08)^{-5}} =$$

$$R = 25045.65 \;\; L.S$$

ولحساب مقادير الاستهلاكات السنوية من أصل القرض نحسب D_1 أولاً فنجد أن:

$$D_1 = R - I_1 = R - L.P = 25045.65 - 100000 * (0.08)$$

$$D_1 = 17045.65$$

ثم نحسب الاستهلاكات المتتالية من العلاقة (52-2) فنجد أن:

$$D_2 = D_1 * R = 17045.65(1.08) = 18409.30$$

$$D_3 = D_2 * R = 18409.30(1.08) = 19882.05$$

ثم ننظم جدولاً لاستهلاك هذا القرض كما يلي:

العام	الرصيد المتبقي من القرض في بداية العام i	الفائدة المستحقة على المتبقي	القسط للسنوي R	الاستهلاك السنوي D_i	الاستهلاك المتراكم	المتبقي من أصل القرض في نهاية العام
1	*100000*	*8000*	*25045.65*	*17045.65*	*17045.65*	*82954.35*
2	*82954.35*	*6636.35*	*25045.65*	*18409.30*	*35454.95*	*64545.05*
3	*65656.05*	*5163.60*	*25045.65*	*19882.05*	*55337*	*44663*
4	*44663*	*2573.04*	*25045.65*	*21472.61*	*76809.61*	*23190.30*
5	*23190.39*	*1855.22*	*25045.65*	*23190.42*	*100000*	*0*
المجموع	-----	*25228.22*	*125228.22*	*100000.02*	------	------

مثال 3:

اقترض أحدهم مبلغ *(40000)* ل.س من المصرف العقاري بفائدة 7% ، ولمدة 15 سنة، احسب القسط السنوي المتساوي ، ثم نظم جدول الاستهلاك لهذا القرض.

الحل: قبل كل شيء نحسب مقدار القسط السنوي المتساوي فنجد أن:

$$R = 40000\,\frac{(1{,}07)-1}{1-(1{,}07)^{-15}} = 4391{,}79 \quad L.S$$

ثم نقوم بحساب الفائدة الأولى فنجد أن $I_1 = S.P = 2800$:

ثم نقوم بحساب الاستهلاك الأول فنجد أن:

$$D_1 = R - S.P = 4391{,}78 - 2800 = 1591{,}79$$

ثم نقوم بإعداد الجدول المطلوب التالي:

العام	المتبقي من القرض في مطلع العام	الفائدة المترتبة في نهاية العام I_i	القسط السنوي R	الاستهلاك السنوي D_i	الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام	الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام
1	*40000*	*2800*	*4391,79*	*1591,79*	*1591,79*	*38404,21*
2	*38408,21*	*2688,5*	*4391,79*	*1703,22*	*3295,01*	*36704,99*
3	*36704,99*	*2569,35*	*4391,79*	*1822,44*	*5117,45*	*34704,99*
4	*34882,55*	*2441,78*	*4391,79*	*1950,a0*	*7067,45*	*32932,55*

5	*32932,55*	*2305,28*	*4391,79*	*2086,51*	*9153,96*	.....
6	.....	.....	.....	.....	.....	.....
7						
:						
15						

ونترك الأسطر المتبقية للطالب ليتممها بنفسه على سبيل التمرين ثم التأكد من صحة المجاميع.

ب ـ الطريقة الثانية: وهي طريقة الأقساط المتناقصة لتغطية الفائدة وجزء ثابت من القرض.

وفي هذه الطريقة يتم تقسيم القرض L إلى n جزءاً متساوياً وتساوي $L|n$ ، ثم يتم توزيع هذه الاجزاء على السنوات المتتالية (جزء لكل سنة) ، لتسديدها في نهاية كل عام مع الفائدة المترتبة على القرض (أو على الباقي من القرض)

وضمن هذه الشروط، فإن مقدار القسط الأول يساوي:

$$R_1 = L.P + \frac{L}{n}$$

ومقدار القسط الثاني بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_2 = \left(L - \frac{L}{n} \right) \cdot P + \frac{L}{n}$$

ومقدار القسط الثالث بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_3 = \left(L - \frac{2L}{n} \right) P + \frac{L}{n}$$

.....

ومقدار القسط n بعد حذف كل ما استهلك من القرض يساوي (3-53)

$$R_n = \left(L - \frac{(n-1)L}{n} \right) P + \frac{L}{n}$$

(وهنا نلاحظ أن هذه الأقساط غير متساوية، ولكن مقدار الاستهلاك السنوي من أصل القرض ثابت ويساوي $\frac{L}{n}$ ، وإن عدم تساوي الأقساط يعود إلى أن مقادير الفوائد تتناقص عاماً بعد عام،

ويمكن تنظيم هذه العمليات في جدول لاستهلاك القرض كما يلي:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
العام	الرصيد المتبقي من القرض في مطلع العام	الفائدة المترتبة في نهاية العام I_i	الاستهلاك السنوي R_i	الأقساط السنوية	مجموع ما استهلك من القرض في نهاية العام	الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام
1	L	$L \cdot p$	$\frac{L}{n}$	$\frac{L}{n} + L \cdot p$	$\frac{L}{n}$	$L - \frac{L}{n}$
2	$L - \frac{L}{n}$	$\left(L - \frac{L}{n}\right)P$	$\frac{L}{n}$	(4) + (3)	$\frac{2L}{n}$	$L - \frac{2L}{n}$
3	$L - \frac{2L}{n}$	$\left(L - 2.\frac{L \cdot}{n}\right)P$	$\frac{L}{n}$	(4) + (3)	$\frac{3L}{n}$	$L - \frac{3l}{n}$
4	...	...	...		...	
...	...	...	...		...	

مثال 4:

اقترض أحدهم مبلغ *(100000)* ل.س من مصرف التسليف الشعبي ، على أن يتم تسديده على أقساط سنوية بطريقة الأقساط المتناقصة وخلال 5 سنوات، أي على أن يتضمن كل قسط كامل الفائدة المستحقة على القرض (أو باقي القرض)، إضافةً إلى مبلغ ثابت من أصل القرض، والمطلوب : حساب قيمة الجزء الثابت المخصص للاستهلاك السنوي من أصل القرض ثم حساب الأقساط السنوية المتناقصة وإعداد جدول لعمليات استهلاك هذا القرض علماً بأن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

الحل: إن الجزء الثابت $= \frac{100000}{5} = 20000$ ل.س سنوياً ،

وإن القسط الأول يستحق بعد مرور عام على تاريخ القرض =الجزء الثابت+الفائدة على كامل القرض =20000+8000=28000 ل.س

وهكذا نجد أن كل من الأقساط التالية = الجزء الثابت + الفائدة على باقي القرض ،

واعتماداً على العلاقات السابقة نجد أن الجدول المطلوب هو كما يلي:

العام	المتبقي من القرض في مطلع العام *i*	الفائدة المستحقة في نهاية العام *i*	الاستهلاك السنوي D_i	الأقساط السنوية ***Ri***	الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام *i*	الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام
1	***100000***	**8000**	***20000***	**28000**	**20000**	***80000***
2	***80000***	**6400**	***20000***	**26400**	**40000**	**60000**
3	***60000***	**4800**	***20000***	***24800***	***60000***	**40000**

20000	***80000***	***23200***	***20000***	**3200**	**40000**	**4**
0	**100000**	**21600**	**20000**	**1600**	**20000**	***5***
----	**----**	**124000**	**100000**	**24000**	**---**	**المجموع**

جـ ـ الطريقة الثالثة: طريقة الأقساط المتزايدة لتسديد جزء ثابت من القرض مع الفاءدة المستحقة عليه حسب مة استحقاقه .

وتعتمد هذه الطريقة على تجزئة القرض L إلى n جزءاً متساوياً مقدار كل منها L/n، ثم توزيعها على السنوات المتتالية (بواقع جزء لكل سنة) لتسديدها مع الفوائد المستحقة عليها في نهاية كل عام . وإذا استخدمنا نفس الرموز السابقة نجد أن:

الجزء السنوي الثابت المخصص لاستهلاك القرض = L/n

,إن إضافة الفائدة المستحقة عليه في نهاية العام تجعل القسط السنوي مساوياً لحصيلة ذلك الجزء الثابت ، وبذلك نجد أن القسط السنوي في العام ***i*** يساوي:

$R_i = (L/n),r^i$

أي أن قيمة القسط R_i تساوي حصيلة الجزء L/n في نهاية العام ***i***

وتتميز هذه الطريقة بأنها سهلة الحساب والفهم لذلك تستخدم كثيراً في العمليات التجارية وتسمى بطريقة (الكمبيالات).

مثال 4: اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س من مصرف التسليف بفائدة 8% بشرط أن يقوم بتسديده خلال 5 سنوات بطريقة الأقساط المتزايدة. والمطلوب : حساب قيمة الجزء الثابت ثم حساب القسط السنوي ومقادير الاستهلاكات السنوية، ثم إعداد جدول لاستهلاك هذا القرض .

الحل: لدينا : $S = 100000$, $n = 5$, $P = 0.08$

وإن قيمة الجزء السنوي الثابت المخصص لاستهلاك القرض يساوي :

L /n= 20000

ثم نقوم بتنظيم الجدول التالي لعمليات تسديد هذا القرض:

2 – 3 = 4	***3***	***2***	***1***
الفائدة المستحقة على الجزء الثابت I_i	**مقدار القسط السنوي** $(L/n),r^i$	**قيمة الجزء الثابت** L/n	العام
1600	***21600***	***20000***	***1***

2	***20000***	***23328***	***3328***
3	***20000***	***25194.24***	***5194.24***
4	***20000***	***27209.78***	***7209.56***
5	***20000***	***29386.56***	***9386.56***
المجموع	***100000***	***126718.58***	***26718.58***

ملاحظة: إن مقادير الفائدة لنفس الأمثلة(1و3و4) في هذه الطرق الثلاثة مختلفة ، فهي في طريقة الأقساط المتناقصة (24000 ل.س) أصغر منها في الأقساط المتزايدة (26718.58 ل.س) , وذلك لأنه في المتناقصة تبدأ بأقساط كبيرة وتنتهي بأقساط صغيرة (وهذا ما يخفف من عبء الفائدة المستحقة)، أما في المتزايدة فتبدأ بأقساط صغيرة وتنتهي بأقساط كبيرة (وهذا ما يزيد من عبء الفائدة المستحقة) ، أما طريقة الأقساط المتساوية فتأخذ موقعاً وسطاً ، حيث بلغت الفائدة فيها(25045.65 ل.س) ، وهذا يدل على فعالية هذه الطرق في إقامة العدالة في كل الظروف ، ويثبت أن كل من هذه الطرق الثلاثة عادلة تماماً..

تمرينات

1 ـ اقترض أحدهم مبلغ 400000 ل.س. لمدة 5 سنوات وبفائدة سنوية 7%، احسب القسط الشهري لتسديد ذلك القرض حسب الطريقة الأولى (ثم نظم جدولاً لتسديد ذلك القرض).

2 ـ اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س. من المصرف التجاري بفائدة سنوية 5%، وتعهد بسدادها خلال أربع سنوات، على شكل أقساط سنوية حسب طريقة الأقساط المتناقصة، والمطلوب تنظيم جدول لتسديد ذلك القرض.

4 ـ قرض قيمته 100000 ل.س. يسترد على شكل دفعات سنوية متساوية خلال 5 سنواتٍ، ويستحق القسط الأول بعد عام من تاريخ القرض.

ـ أوجد مقدار القسط السنوي إذا علمت أن سعر الفائدة هو 7% سنوياً.

ـ أوجد جدول الاستهلاك الخاص بهذا القرض.

5 ـ قرض قيمته 200000 ل.س. يسترد على شكل دفعات سنوية ولمدة أربعة أعوام، ويستحق القسط الأول بعد عام من تاريخ القرض.

ـ أوجد مقدار القسط السنوي إذا علمت أن سعر الفائدة هو 8%.

ـ أوجد جدول الاستهلاك الخاص بهذا القرض.

6 ـ اقترض أحدهم مبلغ 96000 ل.س. وتعهد بسداده على شكل أقساط سنوية وخلال 6 أعوام ، بطريقة الأقساط المتزايدة،

ـ أوجد جدول الاستهلاك الخاص بهذا القرض إذا علمت أن سعر الفائدة هو 7%سنويا.

3--7 : الاستهلاك المنتظم:

نقصد بالاستهلاك المنتظم عملية سحب مبالغ متساوية وبشكلٍ دوري من مبلغ معين مودع في المصرف قيمته K.

وإن أفضل مثالٍ على الاستهلاك المنتظم هو رواتب المتقاعدين، التي تسحب من حصيلة إيداعاتهم في مؤسسة التأمينات. فعندما يتقاعد الموظف يكون قد دفع أقساطاً شهرية أو سنوية إلى مؤسسة التأمينات، وتكون حصيلة هذه الأقساط قد بلغت عند انتهاء الخدمة مبلغاً قدره K

وبعد مرور عام على التقاعد (أو بعد مرور شهر)، تبدأ مؤسسة التأمينات بدفع رواتب سنوية (أو شهرية) إلى ذلك المتقاعد وذلك لمدة n عاماً (أو تدفع له راتباً ما بقي على قيد الحياة).

وبغض النظر عن الحالات الخاصة التي قد تدخل ضمن هذا البند، فإننا سنناقش الموضوع بشكله العام كما يلي:

لنفترض أن شخصاً ما أودع (أو تجمع لديه) مبلغاً من المال في المصرف وقدره K، وذلك من أجل أن يستهلكه خلال n عاماً ، على شكل سحوبات سنوية متساوية قيمة كلٍ منها D، كما نفترض أن سعر الفائدة المركبة هو P سنوياً.

وأن المودع سيبدأ بسحب مبالغه بعد مرور عام على إيداع (أوتجميع)المبلغ K المذكور.

ولإيجاد العلاقة التي تربط بين متحولات هذه المسالة نقوم بما يلي:

نفترض أن المبلغ قد أودع في بداية الزمن، وبذلك نجد أن حصيلة المبلغ المودع ستصبح بعد مرور عام على إيداعها(في نهاية العام الأول) مساوية لـ K_1 حيث أن:

$$K_1 = K.r$$

وفي بداية العام الثاني يقوم المودع بسحب المبلغ الأول D من الحصيلة K_1 لسد حاجاته الشخصية، وبذلك يبقى في المصرف المبلغ $(K_1 - D)$.

وفي نهاية العام العام الثاني تصبح حصيلة المبلغ المتبقي من العام الماضي مساوي لـ K_2 ، حيث أن:

$$K_2 = (K_1 - D).r = (K.r - D).r = Kr^2 - Dr$$

وفي بداية العام الثالث يقوم المودع بسحب المبلغ الثاني من الحصيلة K_2 ليسد حاجاته الشخصية، وبذلك يبقى في المصرف المبلغ $(K_2 - D)$.

وفي نهاية العام الثالث تصبح حصيلة المبلغ المتبقي من العام الماضي مساوياً لـ K_3 ، حيث أن: $K_3 = (K_2 - D) \cdot r$

$$K_3 = (K_2 - D)r = (K.r^2 - Dr - D)r = Kr^3 - Dr^2 - Dr$$

وهكذا يمكننا أن نجد أن المبلغ سيبلغ بعد نهاية السنة الرابعة K_4 مايلي:

$$K_4 = Kr^4 - Dr^3 - Dr^2 - Dr$$

وأنه بعد مرور n سنة على الإيداع تصبح حصيلة الإيداع في المصرف مساويةً لـ K_n حيث أن:

$$K_n = (K_{n-1} - D) \cdot r$$

وهي تساوي أيضاً مايلي :

$$K_n = Kr^n - Dr^{n-1} - Dr^{n-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - Dr^2 - Dr$$

ولكن الدفعة الأخيرة ستسحب بعد n سنة أيضاً ، أي ستسحب في نهاية العام الأخير مباشرة. وحتى يستهلك المودع كامل المبلغ الذي أودعه (مع فوائده) في نهاية المدة، يجب أن يكون ما بقي في المصرف بعد n سنة مطابقاً لمقدار الدفعة الأخيرة D أي يجب أن يكون:

$$K_n = D$$

$$Kr^n - Dr^{n-1} - Dr^{n-2} - Dr^{n-3} \ldots\ldots\ldots\ldots - Dr^2 - Dr = D$$

وبذلك نجد أن:

$$Kr^n = D + Dr + Dr^2 + \ldots\ldots\ldots + Dr^{n-2} - Dr^{n-1}$$

وبما أن الطرف الأيمن وهو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول D، وأساسها r، وعدد حدودها n، نجد أن:

$$Kr^n = D\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$K = D\frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1}$$

وبما أن $h = \frac{1}{r}$ فإن العلاقة السابقة تصبح كما يلي:

$$K = D\frac{1 - h^n}{r - 1} = D\frac{1 - h^n}{P} \qquad (55-3)$$

ولكننا نفضل استخدام الصيغة التالية:

$$K = D\frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (56-3)$$

وهي العلاقة التي تربط بين المبلغ المودع K ومقدار الدفعة السنوية D ومعامل الفائدة r وعدد السنوات n، وهي أربعة متحولات أو مجاهيل إذا علمنا ثلاثة منها يمكننا حساب الرابع.

وهنا نلاحظ أن العلاقة (55-3) تشبه تماماً العلاقة (3- 36) للقيمة الحالية للدفعات العادية ، لأن عملية الاستهلاك المنتظم هي عملية مشابهة للإيداع المنتظم العادي من حيث القيمة الحالية لكلٍ منهما.

ملاحظة: ـ إذا كانت الدفعات الاستهلاكية تسحب m مرةً في العام فإن العلاقة (13-29) تأخذ الشكل التالي:

$$K = D' \frac{1 - r^{-n}}{r^{1/m} - 1} \qquad (57-3)$$

حيث إن D' هي مقدار الدفعة الجزئية، وr هو معامل الفائدة السنوية، ويساوي $r = 1 + P$.

مثال 23: ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه ليمول دفعات عادية سنوية قدرها 2000 ل.س. ولمدة عشر سنوات، علماً بأن سعر الفائدة المركبة $P = 0,05$ سنوياً.

الحل: من العلاقة (3-56) نجد أن:

$$K = D \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} = 2000 \frac{1 - (1,05)^{-10}}{1,05 - 1} = 15443,47$$

مثال 25:

كان أحد الموظفين يسدد للتأمينات في بداية كل عام دفعة مقدارها 1000 ل.س. بفائدة $P = 0,06$ ولمدة عشرين عاماً. فما هي حصيلته بعد 5 سنوات على إيداع الدفعة الأخيرة؟ وما هو عدد الدفعات التي قيمة كل منها تساوي 3500 ل.س سنوياً. والتي تسحب أولها بعد ست سنوات من تاريخ الدفعة الأخيرة وبحيث تستهلك كامل المبلغ في نهاية المدة.

الحل:

إن حصيلة المودع بعد مرور سنة واحدة على الدفعة الأخيرة تساوي حصيلة تلك الدفعات الفورية وتساوي:

$$K_{20} = Dr \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1000(1,06) \frac{(1,06)^{20} - 1}{1,06 - 1} = 38992,73 \quad L.S$$

وحتى نحصل على حصيلة المودع بعد مرور 5 سنوات على الدفعة الأخيرة نقوم بحساب حصيلة المبلغ الأخير بعد مرور 4 سنوات أخرى حسب العلاقة المعروفة الآتية:

$$Q_{24} = K_{20}.r^4 = 38992,73(1,06)^4 = 49227,42 \quad L.S$$

وبما أن عملية استهلاك المبلغ الأخير ستبدأ بعد مرور ست سنوات من تاريخ الدفعة الأخيرة أي بعد مرور عام آخر من تكوينه بواسطة سحب مبالغ متساوية فهي تعطى بالعلاقة (3-56) الآتية:

$$49227,42 = 3500\frac{1-(1,06)^{-n}}{1,06-1}$$

$$\frac{49227,42}{3500} = 1-(1,06)^{-n}$$

$$0,843898-1 = -(1,06)^{-n}$$

$$0,15610 = (1,06)^{-n}$$

$$\lg(0,15610) = -n\lg(1,06)$$

$$-0,80659328 = -n(0,025305865)$$

$$n = \frac{-0,80659328}{-0,025305865}$$

$$n = 31,87376$$

دفعة أو سنة

وتسهيلاً للأمر، نعتبر أن عدد الدفعات $n=32$ دفعة، ونعتمد على أن يكون 31 دفعة منها مساوية لـ 3500 ل.س. أما الدفعة الثانية والثلاثون فنحسب قيمتها بحيث تستهلك كامل المبلغ المتبقي في المصرف، لذلك نقوم بحساب المبلغ الذي ستستهلكه الدفعات الـ31 الأولى، فنجد أنه يساوي:

$$K_{31} = 3500\frac{1-(1,06)^{-31}}{1,06-1} = 48751,62 \ \ L.S$$

وبذلك يكون المبلغ المتبقي في المصرف بعد ذلك مساوياً لـ:

$$49227,42-48751,80 = 475,62 \ \ L.S$$

وأن حصيلة هذا المبلغ المتبقي من الرصيد الأصلي ستبلغ بعد 32 عاماً ما يلي:

$$(475,62)(1,06)^{32} = 3069,36 \ \ L.S$$

وهو مقدار السحبة الأخيرة الثانية والثلاثين التي تستهلك كامل المبلغ المتجمع.

ملاحظة: يلاحظ أن المودع كان قد دفع مبلغ 1000 ل.س. لمدة عشرين سنة، وهذا غطى صرفياته لمدة 32 سنة. وبمعدل 3500 ل.س سنوياً للسنوات الـ 31 الأولى و *3069,36* ل.س للسنة الأخيرة

3-8- حسابات الإهتلاك:

من المعلوم أن الأصول الثابتة (وسائل الإنتاج، الأثاث ...إلخ) تتعرض إلى اهتلاك مستمر حتى تصل إلى مرحلة تصبح غير صالحة للاستعمال. ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي لهذه الأصول نقوم بتعريف المصطلحات التالية:

ـ القيمة الأصلية: وهي ثمن تكلفة الأصول قبل الاستخدام مباشرةً، ونرمز لها بـ K_0. ويفترض أنها ستستهلك خلال n عاماً ، وما يبقى منها يعتبر نفاية .

ـ القيمة الدفترية: وهي القيمة الأصلية مطروحاً منها مجموع الاهتلاكات المتراكمة، ونرمز لها في العام i بـ K_i.

ـ مدة الاستخدام: وهي المدة التي تبقى فيهاالأصول صالحة للاستخدام، ونرمز لها بـ n سنة.

ـ القيمة المتبقية: وهي قيمة الأصول كنفاية في آخر المدة، ونرمز لها بـ K_n.

ـ القيمة المستهلكة: وهي تساوي الفرق بين القيمة الأصلية والقيمة المتبقية، ونرمز لها بـ $K_0 - K_n$.

ـ قسط الاهتلاك: وهو المبلغ المخصص سنوياً للاهتلاك، ونرمز له بـ A.

ولحساب الاهتلاك تتبع إحدى الطرق الآتية:

1-8-3 :الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك:

وتعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري بشكل ثابت، ففي كل عام يستهلك جزء ثابت من الأصول الثابتة، وبذلك يكون مقدار الاهتلاك السنوي مساوياً لمقدار ثابت A،يحسب من العلاقة الخطية التالية:

$$A = \frac{K_0 - K_n}{n} \qquad (58-3)$$

وأن مقدار الاهتلاك المتراكم في نهاية العام i يساوي S_i ويساوي:

$$S_i = i \cdot A$$

وأن القيمة الدفترية للأصول الثابتة بعد مرور i عاماً على استعمالها تصبح مساوية لـ K_i حيث أن:

$$K_i = K_0 - i \cdot A$$

2-8-3 : الطريقة التناسبية(أو النسبية):

وتعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري على شكل نسبة ثابتة من القيمة المتبقية من الأصول الثابتة، وتسمى هذه النسبة بمعدل الاهتلاك ونرمز لها بـ P.

وهكذا نجد أن مقدار الاهتلاك في العام i تساوي:

$$A_i = K_{i-1} \cdot P \qquad (59-3)$$

وأن القيمة الدفترية للأصول الثابتة في نهاية العام i تساوي K_i وتساوي:

$$K_i = K_{i-1} - A_i = K_{i-1} - K_{i-1} \cdot P \qquad (60-3)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن:

$$K_1 = K_0(1-P)$$

وبطريقةٍ مشابهة نجد أن:

$$K_2 = K_1(1-P) = K_0(1-P)^2$$

$$K_3 = K_2(1-P) = K_0(1-P)^3$$

.....

وبالتالي نحصل على أن القيمة المتبقية من الأصول تساوي:

$$K_n = K_0(1-P)^n \qquad (61-3)$$

وبذلك نجد أن معدل الاهتلاك يحسب من العلاقة التالية:

$$1-P = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$P = 1-\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \qquad (62-3)$$

ويمكننا التعبير عن مقدار الاهتلاك في العام i بدلالة P و K_0 ، فنجد أنه:

$$A_i = K_{i-1} \cdot P = K_0(1-P)^{i-1} \cdot P \qquad (63-3)$$

وأن إجمالي الاهتلاك المتراكم في الأصول الثابتة في نهاية العام i يساوي S_i ويساوي $S_i = \sum A_i$ ، ويساوي:

$$S_i = K_0 - K_i = K_0 - K_0(1-P)^i$$

$$S_i = K_0\left[1-(1-p)^i\right] \qquad (64-3)$$

ملاحظة: يمكن استخدام الطريقتين معاً (الخطية والتناسبية) في حساب الاهتلاك السنوي للأصول الثابتة، ففي التطبيقات العملية تستخدم الطريقة التناسبية في حساب الاهتلاك في بداية المدة، حيث تكون نسبة الاهتلاك كبيرة، ثم تستخدم الطريقة الخطية في حساب الاهتلاك في الفترة الأخيرة حيث يعتبر مقدار الاهتلاك ثابتاً، وهذا ما يساعد على تصفية تلك الأصول كلياً في نهاية المدة.

مثال 6: تقدر مدة اهتلاك أحد أنواع الأصول الثابتة بعشر سنوات، ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي تستخدم الطريقة التناسبية خلال خمس السنوات الأولى، وبمعدل اهتلاك قدره 25%. وتستخدم الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك خلال خمس السنوات المتبقية.

والمطلوب حساب مقدار الاهتلاك السنوي خلال السنوات العشرة المذكورة.

الحل: لحساب الاهتلاك السنوي نعد الجدول التالي، ونفترض أن قيمة هذه الأصول تساوي 100 ل.س.

العام في المرحلة الأولى	مقدار الاهتلاك في نهاية العام حسب الطريقة التناسبية $A_i = K_{i-1}.P$	القيمة الدفترية المتبقية في نهاية العام i $K_i = K_{i-1} - A_i$	إجمالي الاهتلاك المتراكم في نهاية العام $S_i = K_0 - K_i = \sum A_i$
1	$A_1 = (100)\frac{25}{100} = 25$	$K_1 = 100 - 25 = 75$	$S_1 = 100 - 75 = 25$
2	$A_2 = (75)\frac{25}{100} = 18{,}75$	$K_2 = 75 - 18{,}75 = 56{,}25$	$S_2 = 43{,}75$
3	$A_3 = (56{,}25)\frac{25}{100} = 14{,}06$	$K_3 = 56{,}25 - 14{,}06 = 42{,}19$	$S_3 = 57{,}81$
4	$A_4 = (42{,}19)\frac{25}{100} = 10{,}55$	$K_4 = 4319 - 10{,}55 = 31{,}64$	$S_4 = 68{,}36$
5	$A_5 = (31{,}64)\frac{25}{100} = 7{,}91$	$K_5 = 31{,}64 - 7{,}91 = 23{,}73_i$	$S_5 = 76{,}27$
العام في المرحلة الثانية	مقدار الاهتلاك في نهاية العام حسب الطريقة الخطية $A = \frac{K_5 - K_n}{n}$	$K_i = K_5 - i.A$	$S_i = i.A = \Sigma A_i$
1	$A = \frac{23{,}73 - 0}{5} = 4{,}746$	$K_6 = 23{,}73 - 4{,}746 = 18{,}984$	$S_6 = 81{,}016_i$
2	$A = 4{,}746$	$K_7 = 18{,}984 - 4{,}746 = 14{,}238$	$S_7 = 85{,}762$
3	$A = 4{,}746$	$K_8 = 14{,}238 - 4{,}740 = 9{,}492$	$S_8 = 90{,}508$
4	$A = 4{,}746$	$K_9 = 9{,}492 - 4{,}746 = 4{,}7462$	$S_9 = 95{,}254$
5	$A = 4{,}746$	$K_{10} = 4{,}746 - 4{,}746 = 0$	$S_{10} = 100_i$

3-8-3 : طريقة الأقساط الأستثمارية المتساوية:

وتعتمد هذه الطريقة على حساب أقساط الاهتلاك منذ البداية وفق الطريقة الخطية السابقة من العلاقة:

$$A = \frac{K_o - K_n}{n}$$

ثم القيام باستثمار هذه الأقساط في أحد المصارف وتسديدها على شكل دفعات عادية سنوية, وذلك لتأمين المبلغ اللازم لاستبدال تلك الأصول بعد n عاماً .

ولكن حساب المبلغ A يمكن أن يتم بطريقةٍ أخرى، وذلك انطلاقاً من مبدأ تعادل الطرفين، والذي يقتضي أن تتحقق المعادلة الآتية:

حصيلة أقساط الاهتلاك = القيمة المستهلكة من الأصول في نهاية المدة.

وبما أن حصيلة أقساط الاهتلاك كدفعات عادية تعطى بالعلاقة:

$$Q_n = A\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

وأن القيمة المستهلكة من الأصول في نهاية المدة تساوي: $(K_o - K_n)$، فإننا نحصل على المعادلة التالية:

$$A\frac{r^n - 1}{r - 1} = K_0 - K_n \qquad (65-3)$$

وبذلك نجد أن مقدار قسط الاهتلاك السنوي يساوي:

$$A = (K_0 - K_n)\frac{r - 1}{r^n - 1} = \qquad (66-3)$$

مثال 7: اشترى أحدهم آلة تصوير قيمتها 20000 ل.س.وقدر عمرها الإنتاجي بـ 5 سنوات فقط، كما قدرت قيمتها كنفاية في آخر المدة بـ 2000 ل.س. والمطلوب حساب قسط الاهتلاك حسب طريقة الأقساط الاستثمارية المتساوية، ثم إعداد جدول خاص باستهلاك هذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 7% سنوياً.

الحل: لدينا: $K_0 = 20000$, $n = 5$, $K_5 = 2000$, $P = 0{,}07$.

وهكذا نجد أن: $A = (20000 - 2000)\frac{(1{,}07) - 1}{(1{,}07)^5 - 1} = 3130{,}03$

وبناءً على ذلك نعد جدول الاستهلاك التالي:

العام	قسط الاهتلاك في نهاية العام	فوائد الاستثمار في بداية العام I_i بمعدل 7%	القيمة المخصصة للاهتلاك D_i	المجموع التراكمي الاستهلاكي	القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة
1	3130.03	-	3130.03	1310.32	16869.97
2	3130.03	219.12	3349.13	6479.45	13520.84
3	3130.03	453.54	3583.57	10063.02	9937.27
4	3130.03	704.39	3834.42	13897.44	6102.85
5	3130.03	972.80	4102.83	18000.00	2000.00
المجموع	15650.15	2349.85			

ولتوضيح كيفية حساب عناصر هذا الجدول نورد الخطوات التالية:

1 ـ نضع قسط الاهتلاك في العمود 2.

2 ـ نقوم بحساب القيمة المخصصة للاهتلاك فنجد أن : $D_1 = 3130{,}03$،

ثم نحسب D_2 من العلاقة:

$$D_2 = D_1.r = 3130{,}03 \times (1{,}07) = 3349{,}3 \ \ L.S.$$

ثم نحسب D_3 من العلاقة:

$$D_3 = D_2.r = 3349{,}3 \times (1{,}07) = 3583{,}57 \ \ L.S.$$

وهكذا نتابع حساب D_4 و D_5 ونضع النتائج في الجدول.

3 ـ نحسب فوائد الاستثمار من العلاقة: $I_i = D_i - A$ ونضعها في الجدول.
4 ـ نحسب المجموع التراكمي المخصص للاهتلاك ,وذلك بإضافة كل قيمة إلى التي تليها حتى الأخير.
5 ـ نحسب القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة، وذلك بطرح المجموع التراكمي للاهتلاك من القيمة الأصلية 200000 ، فنحصل على العمود الأخير.

3-9 : التكلفة الرأسمالية

تعرّف التكلفة الرأسمالية لمشروع ما أو لآلة معينة بأنها مجموع القيمة الأصلية لذلك المشروع + القيمة الحالية لجميع نفقات الصيانة والإصلاح أو الاستبدال التي ستصرف عليه خلال فترة عمره الاقتصادي. علماً بأن عمليات الصيانة والإصلاح أو الاستبدال تجري دورياً وكل عدة سنوات وفي نهاية كل دورة. وسنعالجها بالترتيب عل النحو التالي :

3-9-1- التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والإصلاح:

لنرمز للتكلفة الرأسمالية بالرمز KC ، وللقيمة الأصلية بالرمز S، ولمقدار الدفعة الدورية للصيانة أو الإصلاح بالرمز Q، ولطول الفترة الزمنية بين كل إصلاح وآخر بالرمز ℓ ، وللقيمة الحالية لدفعات الصيانة أو الإصلاح بالرمز V، فإننا نجد أن هذه المتحولات مرتبطة حسب التعريف بالعلاقة الآتية:

$$KC = S + V \qquad (67-3)$$

وبما أن دفعات الصيانة أو الإصلاح هي دفعات عادية ودائمة، ولكنها تتميز بأن كل منها يدفع في نهاية الدورة التي مدتها ℓ سنة فإننا نجد أن:
القيمة الحالية للدفعة الأولى التي ستدفع في نهاية الدورة الأولى؛ أي التي ستدفع بعد مرور ℓ عاماً تساوي : $V_1 = Qh^{\ell}$.
أما القيمة الحالية للدفعة الثانية التي ستدفع في نهاية الدورة الثانية؛ أي التي ستدفع بعد مرور 2ℓ عاماً تساوي : $V_2 = Qh^{2\ell}$.
وكذلك نجد أن القيمة الحالية للدفعة الثالثة تساوي : $V_3 = Qh^{3\ell}$

.....

وهكذا يستمر الأمر إلى ما لا نهاية تقريباً.
وبذلك نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات تساوي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + ...$$

$$V = Qh^{\ell} + Qh^{2\ell} + Qh^{3\ell} + Qh^{4\ell} + ...$$

وهنا نلاحظ أن الطرف الثاني هو مجموع حدود متوالية هندسية لا نهائية، حدها الأول Qh^{ℓ}، وأساسها h^{ℓ} ، وعدد حدودها لا نهائي، وبذلك يكون مجموع حدودها مساوياً لـ:

$$V = Qh^{\ell} \cdot \frac{1}{1-h^{\ell}} \qquad (h<1)$$

$$V = Q\frac{h^{\ell}}{1-h^{\ell}} \qquad (68-3)$$

ويمكننا معالجة هذه العلاقة للحصول على قيمة V بدلالة P فنجد أن:

$$V = Q\frac{\left(\frac{1}{1+P}\right)^{\ell}}{1-\left(\frac{1}{1+P}\right)^{\ell}} = Q\frac{\frac{1}{(1+P)^{\ell}}}{\frac{(1+P)^{\ell}-1}{(1+P)^{\ell}}}$$

وبالاختصار على $(1+P)^{\ell}$ نحصل على:

$$V = Q\frac{1}{(1+P)^{\ell}-1} = Q\cdot\frac{1}{r^{\ell}-1} \qquad (69-3)$$

وبتعويض ذلك في العلاقة *(67-3)* نحصل على أن التكلفة الرأسمالية لأي مشروع أو جهاز أو آلة تحسب من العلاقة الآتية:

$$KC = S + Q\frac{1}{r^{\ell}-1} \qquad (70-3)$$

مثال 1: قررت إدارة الجامعة إنشاء مدرج لطلابها، فكلفت الدائرة الهندسية بإعداد الدراسة الفنية وتقدير تكاليف الإنشاء والصيانة، فكانت تكاليف الإنشاء 3000000 ل.س. وكانت تكاليف الصيانة 100000 ل.س ، وذلك بشرط أن تُجرى كل ثلاث سنوات، والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لهذا المدرج باعتبار أن عمره الاقتصادي كبير جداً، وأن سعر الفائدة المركبة هو 8% سنوياً.

الحل: لدينا $P = 0{,}08, \quad \ell = 3, \ S = 3000000$

وبذلك نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة تحسب من العلاقة *(70-3)* الآتية:

$$KC = S + Q\frac{1}{r^{\ell}-1}$$

$$KC = 3000000 + 100000\,\frac{1}{(1{,}06)^{3}-1}$$

$$KC = 3523516{,}36 \ \ L.S$$

2-14: التكلفة الرأسمالية والاستبدال:

لنفترض الآن أن عمليات الإنتاج أو الخدمة في المنشأة تقتضي أن نقوم باستبدال الآلات أو الأجهزة الموجودة كل ℓ عاماً، وهذا يعني أنه علينا أن ندفع في نهاية كل فترة مؤلفة من ℓ عاماً مبلغاً جديداً يساوي القيمة الأصلية S لتلك الأجهزة (بفرض أن السعار ثابتة)، وبفرض أنه يمكننا تصريف أو تسويق الأجهزة القديمة (كنفاية أو خردة)

بمبلغ معلوم وليكن S_0. فإننا نجد أن قيمة كل من الدفعات الدورية لاستبدال تلك الاجهزة تصبح مساوية لما يلي : $Q = (S - S_0)$

ومن العلاقة *(3-69)* نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات العادية تساوي:

$$V = Q\frac{1}{r^{\ell} - 1} = \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} \qquad (71-3)$$

وهكذا نحصل على أن التكلفة الرأسمالية لمثل هذه المشاريع تساوي القيمة الأصلية $S+$ القيمة الحالية للدفعات الدورية التي قيمة كل منها $(S - S_0)$، أي إن:

$$KC = S + V$$

$$KC = S + (S - S_0)\frac{1}{r^{\ell} - 1}$$

$$KC = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} \qquad (72-3)$$

حالة خاصة: وكحالة خاصة لعملية الاستبدال يمكننا النظر في الحالة التي تكون فيها قيمة النفاية معدومة أو مهملة، أي الحالة التي تكون فيها $S_0 = 0$. فعندها تأخذ العلاقة *(3-69)* الشكل التالي:

$$KC = S + \frac{S}{r^{\ell} - 1} = S\left[1 + \frac{1}{r^{\ell} - 1}\right]$$

$$KC = S.\frac{r^{\ell}}{r^{\ell} - 1} \qquad (73-3)$$

مثال 2: يريد أحدهم أن يشتري جهازاً للتحليل. فوجد أمامه العرضين الآتيين:
العرض الأول: ثمن الجهاز 25000 ل.س ويقتضي استبداله كل 5 سنوات.
العرض الثاني: ثمن الجهاز 30000 ل.س ويقتضي استبداله كل 6 سنوات.
والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لكل من هذين الجهازين، علماً بأن قيمة الجهاز الأول كنفاية 3000 ل.س ، وقيمة الجهاز الثاني كنفاية 5000 ل.س ، وأن سعر الفائدة المركبة 9% سنوياً. ثم قارن بين العرضين وحدد أيهما الأفضل.

الحل: لدينا بالنسبة للعرض الأول:

$$S_0 = 3000, \quad P = 0{,}09, \quad \ell = 5, \quad S = 250000$$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة للجهاز الأول تساوي:

$$KC_1 = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} = 25000 + \frac{25000 - 3000}{(1{,}09)^5 - 1})$$

$$KC_1 = 65844{,}82 \quad L.S$$

ولدينا بالنسبة للعرض الثاني أن:

$$S_0 = 5000, \quad P = 0{,}09, \quad \ell = 6, \quad S = 30000$$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة للجهاز الثاني تساوي:

$$KC_2 = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} = 30000 + \frac{30000 - 5000}{(1{,}09)^6 - 1})$$

$$KC_2 = 66922{,}16\ L.S$$

وبالمقارنة نجد أن العرض الأول أفضل من العرض الثاني من الناحية الاقتصادية.

مثال 3: يريد صاحب إحدى المكتبات شراء آلة نسخ لخدمة الزبائن، قيمتها الأصلية *40000* ل.س ، ويجب استبدالها كل سبع سنوات. وقيمتها في نهاية المدة كنفاية معدومة أو مهملة، فاحسب التكلفة الرأسمالية لهذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8 % سنوياً.

الحل: لدينا: $S_0 = 0$, $P = 0{,}08$, $\ell = 7$, $S = 40000$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية لهذه الآلة حسب العلاقة *(14-10)* تساوي:

$$KC = S \cdot \frac{r^{\ell}}{r^{\ell} - 1} = 40000 \cdot \frac{(1 + 0{,}08)^7}{(1 + 0{,}08)^7 - 1}$$

$$KC = 96036{,}20\, L.S$$

مثال 4: أوجد التكلفة الرأسمالية لإنشاء نفق أو جسر عند إحدى العقد المرورية، ثم قرر أيهما الأفضل، وذلك ضمن البيانات التالية:

تكلفة إنشاء النفق 1800000، ويحتاج إلى صيانة بـ 200000 كل سنتين.

تكلفة إنشاء الجسر 2500000، ويحتاج إلى صيانة بـ 100000 كل ثلاث سنوات.

علماً بأن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً.

الحل : إن التكلفة الرأسمالية للنفق مع الصيانة تحسب من العلاقة *(14-5)* وتساوي ما يلي:

$$KC_1 = 1800000 + 200000\, \frac{1}{(1{,}06)^2 - 1}$$

$$KC_1 = 3418122{,}98\, L.S$$

أما التكلفة الرأسمالية للجسر مع الصيانة فتساوي مايلي:

$$KC_2 = 2500000 + 100000\, \frac{1}{(1{,}06)^3 - 1}$$

$$KC_2 = 3023516{,}36\, L.S$$

وهكذا نجد أن تكاليف الجسر أقل من تكاليف النفق، وبذلك يكون الجسر أفضل من الناحية الاقتصادية.

3-8-3 : التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والاستبدال

لمعالجة هذه الحالة نفترض أن عمر الآلة أو المنشأة المستثمرة L عاماً، وأنها تحتاج خلال عمرها إلى صيانة دورية كل l عاماً، وأن عمليات الصيانة تجري عليها

خلال عمرها الاقتصادي m مرة. وهذا يعني أن العمر L هو من مضاعفات دورة الصيانة l، وأن $L = m \cdot l$ ولتوضيح ذلك نرسم الشكل البياني التالي:

الشكل (6-3)

ومن خلال هذا الشكل نلاحظ أن عمليات الصيانة تجري بعد ℓ عاماً من مباشرة العمل، ثم بعد $2l$، ثم بعد $3l$... حتى يتم استبدالها في نهاية العام L. وهنا يجب أن نلاحظ أن عملية الصيانة الأخيرة في نهاية كل دورة عمرية لا تنجز، لأنه يتم استبدال الآلة بآلة جديدة في نهاية تلك الدورة.

وإذا رمزنا:

للقيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً دون انقطاع حتى الاستبدال بالرمز V_1.

وللقيمة الحالية لتكاليف الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية بالرمز V_2.

وللقيمة الحالية لتكاليف الاستبدال في نهاية كل دورة عمرية للآلة بالرمز V_3.

وللقيمة الأصلية اللازمة لشراء هذه الآلة (ونعتبرها ثابتةً عند كل استبدال) بالرمز S.

فعندها نجد أن التكلفة الرأسمالية للآلة المستثمرة تساوي:

$$KC = S + (V_1 - V_2) + V_3 \qquad (74-3)$$

ولقد قمنا بطرح V_2 من V_1 حتى نحصل على القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المنجزة فعلياً حيث أن الصيانة الاخيرة لم تنجز بسبب الاستبدال.

وبفرض أن قيمة تكاليف الصيانة في كل مرة تساوي Q، نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً من العلاقة (3-68) وهي تساوي:

$$V_1 = \frac{Q}{r^{\ell} - 1} \qquad (75-3)$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف عمليات الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية والتي طول كل منها L عاماً، من العلاقة (3-68) نفسها، وهي تساوي:

$$V_2 = \frac{Q}{r^{L} - 1} \qquad (76-3)$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف الاستبدال مع وجود نفاية S_0 من العلاقة

$$V_3 = \frac{(S - S_0)}{r^L - 1}$$

(3-68) فنجد أن:

وبذلك نجد أن التكلفة الرأسمالية للآلة أو المنشأة المستثمرة والمعرفة بالعلاقة (3-69) تأخذ الشكل التالي:

$$KC = S + \frac{Q}{r^\ell - 1} - \frac{Q}{r^L - 1} + \frac{(S - S_0)}{r^L - 1} \qquad (77-3)$$

وهي تضم عدة حدود هي:

S، الثمن الأصلي للآلة عند الشراء، أو في بداية الاستثمار (ونعتبره ثابتاً عند كل استبدال).

$\frac{Q}{r^\ell - 1}$ القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً دون انقطاع حتى الاستبدال.

$\frac{Q}{r^L - 1}$ القيمة الحالية لتكاليف الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية.

$\frac{(S - S_0)}{r^L - 1}$ القيمة الحالية لدفعات الاستبدال مع وجود نفاية في نهاية كل دورة عمرية.

ملاحظة: إذا كانت قيمة النفاية $S_0 = 0$ فإن العلاقة السابقة (3-77) تبقى نفسها، ولكنها تأخذ شكلاً آخر هو:

$$KC = S + \frac{S}{r^L - 1} + \frac{Q}{r^\ell - 1} - \frac{Q}{r^L - 1}$$

$$KC = S\left[1 + \frac{1}{r^L - 1}\right] + Q\left[\frac{1}{r^\ell - 1} - \frac{1}{r^L - 1}\right]$$

$$KC = S + \left[\frac{r^L}{r^L - 1}\right] + Q\left[\frac{r^L - r^l}{(r^\ell - 1)\cdot(r^L - 1)}\right] \qquad (78-3)$$

مثال 5: لنأخذ آلة النسخ المعروضة في المثال 3 السابق، ولنفترض أن ثمن الآلة عند الشراء $S = 40000$ ل.س ، وأنها تحتاج إلى صيانة كل عام بقيمة 2000 ل.س سنوياً، وأنه يجب استبدالها كل سبع سنوات. وأن قيمتها في نهاية كل مدة عمرية كنفاية معدومة أو مهملة، فاحسب التكلفة الرأسمالية لاستثمار هذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8 % سنوياً.

ثم احسب صافي ربح استثمار هذه الآلة، إذا علمت أنها قادرة على إنجاز 500000 نسخة خلال عمرها الاقتصادي، وأن صاحب المكتبة يأخذ مقابل كل نسخة 0.90 ل. س. وأن تكلفة الورق والحبر تساوي 0.40 ل.س. لكل نسخة، وأنه يودع صافي ربحه منها في المصرف في نهاية كل عام . ثم احسب القيمة الإجمالية لإجمالي العوائد.

الحل: لحساب التكلفة الرأسمالية نلاحظ أنه لدينا:

$$KC = ? \quad , \quad P = 0{,}08 \quad , \quad Q = 20000 \quad , \quad L = 7 \quad , \quad S_0 = 0 \quad , \quad S = 40000$$

وبتطبيق العلاقة *(14-14)* أو *(14-15)* نجد أن:

$$KC = 40000 + \frac{2000}{(1+0{,}08)^1 - 1} - \frac{2000}{(1+0{,}08)^7 - 1} + \frac{(4000-0)}{(1+0{,}08)^7 - 1}$$

$$KC = 40000 + 25000 - 2801{,}81 + 56036{,}20$$

$$KC = 118235{,}00 \ \ L.S.$$

ولحساب صافي الربح نلاحظ أن الآلة قادرة على إنجاز 500000 نسخة خلال سبع سنوات، وهي بذلك قادرة على إنجاز حوالي

$$71428{,}57 = \frac{500000}{7}$$

نسخة خلال العام. وبذلك نجد أن صافي ربح المستثمر خلال العام الواحد يساوي:

$$NP = (0{,}90 - 0{,}40) \times 71428{,}57 = 35714{,}28 L.S$$

وبما أن هذه الأرباح الصافية تدفع في نهاية كل عام، فهي عبارة عن دفعات عادية، وبذلك نجد أن قيمتها الحالية تساوي:

$$V_7 = Q\frac{r^7 - 1}{r - 1} = 35714{,}28\frac{(1{,}08)^7 - 1}{1{,}08 - 1} =$$

$$V_7 = 318671{,}50 \ \ L.S$$

وبمقارنة هذه القيمة الحالية مع التكلفة الرأسمالية نجد أن القيمة الحالية لإجمالي العوائد الصافية من هذه الآلة يساوي:

$$318671{,}50 L.S. - 118235{,}00 = 200436{,}50 L.S$$

تمرينات

1 ـ قام أحدهم بشراء مستودع لاستثماره في العمل التجاري بقيمة 1500000 ل.س ، ويحتاج إلى صيانة وترميم كل 3 سنوات، بتكلفة 60000 ل.س ، احسب التكلفة الرأسمالية لهذا المستودع إذا كان سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

2 ـ يريد أحدهم شراء سيارة لاستثمارها في النقل الداخلي، فإذا علمت أن ثمنها الحالي 800000 ل.س ، وإن تكاليف صيانتها تقدر بـ 5000 ل.س كل عام، وأن تكاليف تجديد التأمين وتسجيلها تساوي 65000 ل.س ، والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لهذه السيارة بفرض أن عمرها كبير جداً، وأن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً؟

3 ـ يريد أحدهم أن يقوم بمشروع استثماري لصناعة الأجبان، فاشترى آلات حديثة بقيمة 4000000 ل.س، وإذا علمت أن هذه الآلات تحتاج إلى صيانة عامة كل سنتين بقيمة 200000 ل.س، وأنه سيقوم باستبدالها كل عشر سنوات، وتقدر قيمتها كنفاية بـ 300000 ل.س، فما هي التكلفة الرأسمالية لهذه الآلات إذا كان سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً.

4 ـ أراد أحدهم أن يفرش منزله بالسجاد، فاشترى 200 م2 منه بسعر المتر 600 ل.س، فإذا كان العمر الاقتصادي للسجاد 15 سنة، فاحسب قيمة الاهتلاك السنوي في الحالات التالية:

أ ـ حسب الطريقة التناسبية، علماً بأن نسبة الاهتلاك 15%، ثم احسب المتبقي من القيمة الأساسية والتي تستخدم كنفاية.

ب ـ حسب الطريقة الخطية.

جـ ـ حسب الطريقتين معاً: 6 سنوات للطريقة التناسبية، ثم 4 سنوات للطريقة الخطية.

د ـ حسب طريقة الأقساط الأستثمارية.

الفصل الرابع

الأسهم والسندات

ويشمل الفقرات التالية:

١ . الأسهم.

. تعاريف عامة.

. أنواع الأسهم.

. قيم الأسهم.

. معدل تكلفة الأسهم.

. عوائد الأسهم ومعدلاتها.

٢ . السندات الاستثمارية.

. أنواع السندات.

. قيم السندات.

. تكلفة السندات.

. حالات عمليات الشراء.

١٦-١- الأسهم:

تعاريف عامة:

تقوم الشركات المساهمة عند إحداثها، أو عند توسعها بإصدار أسهم جديدة يكون لها نفس القيمة، ولها نفس الحقوق، وعليها نفس الواجبات، ثم طرحها للاكتتاب العام لشرائها من قبل المواطنين.

تعريف السهم: هو وثيقة مالية ذات قيمة اسمية موحدة تمثل حصة من رأسمال الشركة المساهمة تكون مخصصة للاكتتاب العام، والأسهم هي أوراق قابلة للتداول بين المواطنين وغير قابلة للتجزئة، وتستحق حصة متناسبة من الأرباح المحققة أو الموزعة سنوياً، وتتحمل حصة متناسبة من الخسائر الناجمة عن عمل أو نشاط تلك الشركة، ولايوجد تاريخ معين لتسديد قيمتها لأصحابها.

وتصنف الأسهم المالية في نوعين أساسيين:

الأسهم العادية: وهي الأكثر شيوعاً وانتشاراً، وهي التي تمثل حصة من رأس المال، ويتمتع صاحبها بجملة من الحقوق ويلتزم بجملة من الواجبات، ولا تتمتع هذه الأسهم بأية أفضلية عند تسديد الأرباح، أو عند تصفية الشركة، ولا يتم توزيع الأرباح السنوية على حامليها إلا بقرار من إدارة الشركة تحدد فيه نسبة التوزيع على كل سهم.

الأسهم الممتازة: وهي أسهم تتميز بأن لها أفضلية على الأسهم العادية، وذلك بتخصيصها بحد معين من الأرباح المحققة، ومنح أصحابها حق الاستلام قبل أصحاب الأسهم العادية، مهما كانت حصة السهم العادي، كما تعطى هذه الأسهم حقوق الأولوية في التسديد عند تصفية أعمال وأملاك الشركة المساهمة، ولكن لا يحق لأصحابها الاشتراك في إدارة الشركة، ولا استعادة ثمنها من الشركة في تاريخ معيّن.

وهكذا نجد أن الأسهم الممتازة تجمع بين صفات السهم العادي، وبعض صفات السند (كما سنرى لاحقاً)؛ فهي جزء من الملكية ورأس المال، ولا تستحق الدفع بتاريخ معين، ولكنها تضمن تأمين ربح ثابت لحاملها، وتجنبه مخاطر الخسارة، وتعطيه حق

الأولوية في الاستلام والتسديد عند التصفية، كما يمكن تحويلها إلى أسهم عادية عند الاتفاق على ذلك.

القيمة الاسمية للسهم: وهي القيمة المالية المسجلة على وثيقة السهم، وتشترط الدولة أن يكون لها حد أدنى محدود، ولكنه يختلف من دولة لأخرى.

القيمة الدفترية للسهم: وهي قيمة السهم الحسابية بعد مرور فترة من الزمن على بداية العمل في الشركة، وتحسب من المعادلة التالية:

$$\text{القيمة الدفترية للسهم} = \frac{\text{قيمة حقوق الملكية للشركة في لحظة ما}}{\text{عدد الأسهم}} \qquad (١٦-١)$$

ولكن حقوق الملكية تساوي:

(١٦-٢) قيمة حقوق الملكية للشركة= قيمة الموجودات . قيمة المطاليب . قيمة الأسهم الممتازة

وذلك لأنه . كما أشرنا سابقا . الأسهم الممتازة تتمتع بحق الأفضلية في التسديد عند أية تصفية لحسابات الشركة.

أما إذا لم يكن عند الشركة أسهم ممتازة فإن القيمة الدفترية للسهم تساوي:

$$\text{القيمة الدفترية للسهم} = \frac{\text{قيمة الموجودات . قيمة المطاليب}}{\text{عدد الأسهم}} = \frac{\text{حقوق الملكية}}{\text{عدد الأسهم}} \qquad (١٦-٣)$$

وبما أن حقوق الملكية تشمل ما يلي:

رأس المال المدفوع + الاحتياطات + الأرباح المحجوزة – المطاليب

فإن القيمة الدفترية للسهم تزداد بتقدم نجاح عمل الشركة، لأن احتياطياتها وأرباحها المحجوزة تكون مرتفعة، وبالمقابل نجد أن القيمة الدفترية للسهم تنقص كلما تراجع نشاط الشركة، لذلك فإن نجاح وتطور الشركة ينعكس بصورة إيجابية على القيمة الدفترية للسهم.

وأخيراً نشير إلى أن القيمة الدفترية للسهم في بداية عمل الشركة تساوي القيمة الاسمية له، لأن قيمة المطاليب تكون معدومة.

القيمة السوقية (الفعلية): وتمثل ثمن السهم في الأسواق المالية، حيث يتم تداوله بين المواطنين، أو غيرهم، وتختلف القيمة السوقية عن القيمتين الاسمية والدفترية لأنها تتأثر بالعوامل والمعطيات التالية:

. القيمة الدفترية: وتتعلق بوضع الشركة ومركزها المالي.

. ظروف الطلب والعرض على الأسهم في الأسواق المالية.

. الظروف الاقتصادية المتعلقة بالتضخم والانكماش.

. توقعات المحللين الماليين لمستقبل أوضاع الشركة.

. نسب الأرباح التي توزعها الشركة في نهاية كل عام.

لذلك فإن القيمة السوقية تتذبذب صعوداً وهبوطاً بحسب تغير وتطور تلك العوامل.

معدل العائد الفعلي للسهم: ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\text{قيمة الربح الذي حققه السهم}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \times ١٠٠ \qquad (١٦-٤)$$

علماً بأن قيمة الربح الذي يحققه السهم يختلف من سنة لأخرى، ويتم حسابه كنسبة مئوية من القيمة الاسمية، ويمكن حساب معدل العائد الفعلي للسهم مباشرةً من العلاقة التالية:

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \times ١٠٠ \qquad (١٦-٥)$$

مثال ١:

أصدرت إحدى الشركات المساهمة أسهماً عادية قيمة كل منها ٥٠٠ ل.س، وبعد مرور عام على نشاطها أصبحت قيمة أسهمها في السوق تساوي ٦٥٠ ل.س. وعند حساب الأرباح قررت أن توزع ربحاً عن كل سهم بنسبة ٢٥% من القيمة الاسمية.

والمطلوب حساب قيمة الربح لكل سهم، ثم حساب معدل العائد الفعلي للسهم:

الحل:

إن قيمة الربح للسهم = $\frac{25}{100} \times 500 = 125$ ل.س.

معدل العائد الفعلي للسهم = $\frac{125}{650} \times 100 = 0,1923 = 19,23\%$ ل.س.

القيمة التصفوية للسهم: وهي القيمة التي يمكن أن يحصل عليها المساهم مقابل كل سهم في حالة تصفية أعمال الشركة وسداد الالتزامات التي عليها (المطاليب + الأسهم الممتازة)، وغالباً ما تكون عمليات التصفية مضرة بمصالح أصحاب الأسهم العادية لأن الشركة تكون مضطرة لتسديد جميع الديون، ودفع قيمة جميع الأسهم الممتازة قبل أن تقوم بإجراءات الحسابات التصفوية الخاصة بالأسهم العادية.

وتسمى القيمة التصفوية للأسهم العادية بالقيمة الحقيقية للسهم عند التصفية، وتحسب من العلاقة التالية:

$$\text{القيمة التصفوية للسهم} = \frac{\text{قيمة الموجودات في السوق} - \text{قيمة الالتزامات}}{\text{عدد الأسهم}} \quad (١٦-٥)$$

علماً بأن قيمة الالتزامات = قيمة المطاليب + قيمة الأسهم الممتازة.

قيمة السهم حسب العائد:

عندما يقدم المستثمر على شراء أحد الأسهم فإنه يفكر في كيفية تحقيق معدل عائد فعلي من ذلك السهم معادل لمعدل استثمار معين، فإذا كان ذلك المعدل معلوماً، فإن ذلك المستثمر يبدي استعداداً لدفع قيمة معينة لذلك السهم، والتي تعطيه عائداً معادلاً للعائد الذي يطمح إلى تحقيقه مقابل استثمار أمواله في شراء هذه الأسهم أو غيرها، وقياساً على العلاقة السابقة يمكنه أن يقوم بحساب قيمة السهم حسب ذلك العائد من العلاقة التالية:

$$\text{قيمة السهم حسب العائد المطلوب} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{معدل العائد الذي يطلبه المستثمر}} \times ١٠٠ \quad (١٦-٦)$$

مثال ٢:

لنفترض أن القيمة الاسمية للسهم الذي أصدرته إحدى الشركات تساوي ١٠٠٠ ل.س. وأن القيمة السوقية له تساوي ١٢٥٠ ل.س. وأنها توزع أرباحاً بنسبة ٢٠% من القيمة الاسمية. فاحسب أولاً معدل العائد الفعلي، ثم احسب القيمة حسب العائد المطلوب من قبل أحد المستثمرين والمحدد بـ ١٨%.

الحل:

نحسب أولاً معدل العائد الفعلي، فنجد أنه يساوي:

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \times ١٠٠$$

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\frac{20}{100} \times 1000}{1250} \times 100 = 0,16 = 16\%$$

وبما أن المستثمر يطمح إلى تحقيق معدل عائد قدره ١٨%، فإن قيمة السهم حسب العائد تساوي:

$$\text{قيمة السهم حسب العائد المطلوب} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{معدل العائد الذي يطلبه المستثمر}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{20}{100} \times 1000}{0,18} = 1111,11$$

أي إن هذا المستثمر يمكن أن يدفع فقط 1111,11 ل.س. ثمناً للسهم المطروح في السوق والذي يباع بـ 1250 ل.س، لأنه يرغب في أن يحقق معدلاً للعائد قدره ١٨%.

معدل تكلفة الأسهم العادية:

وهو عبارة عن النسبة المئوية من صافي القيمة السوقية التي تتحملها الشركة وتسددها كأرباح لأصحاب تلك الأسهم.

وبما أن صافي القيمة السوقية = القيمة السوقية – مصاريف العمولة والتوثيق. وأن الأرباح التي تتحملها الشركة = قيمة الأرباح المتوقعة سنوياً + مقدار النمو السنوي لتلك الأرباح.

فإننا نجد أن معدل تكلفة السهم يمكن أن يحسب من العلاقة التالية:

(١٦-٧) معدل تكلفة السهم = معدل الربح المتوقع + معدل نمو الأرباح السنوي

ولكن:

(١٦-٨) معدل الربح المتوقع= قيمة الربح المتوقع للسهم

القيمة السوقية – قيمة المصاريف

وهكذا نجد أن:

$$\text{معدل تكلفة السهم} = \frac{\text{قيمة الربح المتوقع للسهم}}{\text{القيمة السوقية – قيمة المصاريف}} + \text{معدل نمو الأرباح السنوي} \quad (١٦-٩)$$

مثال ٣:

أصدرت شركة الألبان أسهماً قيمتها الاسمية ٣٠٠ ل.س، ولكن هذه الأسهم تباع في السوق بسعر ٢٧٥ ل.س، ويسدد عنها مصاريف عمولة ٥ ل.س عن كل سهم. فإذا كانت قيمة الأرباح المستحقة عن كل سهم تقدر بـ ٢٥ ل.س سنوياً، وكانت هذه الأرباح تنمو بمعدل ٨% سنوياً، فالمطلوب حساب معدل تكلفة السهم.

الحل:

من العلاقة السابقة نجد أن:

$$\text{معدل تكلفة السهم} = \frac{\text{قيمة الربح المتوقع للسهم}}{\text{القيمة السوقية – قيمة المصاريف}} + \text{معدل نمو الأرباح السنوي}$$

$$0,08 + \frac{25}{5-275} = \%17,259 = 0,17259 = 0,08 + 0,09259$$

أي إن معدل تكلفة كل سهم يبلغ حوالي *17,259*% من صافي القيمة السوقية.

مثال ٤:

تباع أسهم إحدى الشركات بنفس قيمتها الاسمية والتي تساوي ٤٠٠ ل.س، ويوزع على كل منها ٣٥ ل.س ربحاً سنوياً. فإذا كانت أرباح هذه الشركة تنمو بمعدل ٧% سنوياً، وكانت مصاريف بيع كل سهم تبلغ ٨ ل.س. فالمطلوب:

. حساب معدل تكلفة السهم.

. حساب سعره السوقي في نهاية السنة الأولى.

. حساب سعره السوقي في نهاية السنة الثانية.

. حساب سعره السوقي في نهاية السنة الخامسة.

الحل:

لحساب معدل تكلفة السهم نطبق العلاقة الآتية:

معدل تكلفة السهم = $\frac{\text{قيمة الربح المتوقع سنوياً}}{\text{القيمة السوقية –مصاريف عمولة}}$ + معدل نمو الأرباح السنوي

$$= 0,07 + \frac{35}{8 - 400} =$$

$$\%15,929 = 0,15929 = 0,07 + 0,0892857 =$$

لحساب السعر السوقي للسهم في نهاية السنة الأولى نستخدم العلاقة الآتية:

معدل الربح المتوقع= $\frac{\text{قيمة الربح السنوي المتوقع}}{\text{القيمة السوقية –مصاريف عمولة}}$

ومنها نجد أن:

القيمة السوقية – مصاريف عمولة = $\frac{\text{مقدار الربح المتوقع}}{\text{معدل الربح المتوقع}}$

القيمة السوقية = $\frac{\text{مقدار الربح المتوقع}}{\text{معدل الربح المتوقع}}$ + مصاريف عمولة

وبالتعويض نجد أن:

معدل الربح المتوقع = $\frac{35}{8 - 400} = 0,08929 = \%8,929$

وأن مقدار الربح المتوقع في نهاية السنة الأولى = $35 \times (0,07 + 1) = 37,45$ ل.س.

السعر السوقي في نهاية السنة الأولى = $\frac{\text{الربح المتوقع في نهاية السنة الأولى}}{\text{معدل الربح المتوقع}}$ + مصاريف عمولة

$$= 8 + \frac{37,45}{0,08929} = 427,42 \text{ ل.س.}$$

وكذلك نجد أن مقدار الربح المتوقع في نهاية السنة الثانية

$$35 \times (0,07 + 1)^2 = 40,07 \text{ ل.س.}$$

والسعر السوقي في نهاية السنة الثانية = $8 + \frac{40,07}{0,08929} = 456,76$ ل.س.

وكذلك نجد أن مقدار الربح المتوقع في نهاية السنة الخامسة:

$$= 35 \times (1 + 0,07)^{15} = 49,06 \text{ ل.س.}$$

والسعر السوقي في نهاية السنة الخامسة $= 8 + \frac{49,09}{0,08929} = 557,77$ ل.س.

*** عائد السهم العادي:**

يمكن أن نحسب عائد السهم العادي بعدة مقاييس هي:

١ . نصيب السهم العادي من الأرباح المحققة: ويحسب من العلاقة الآتية:

$$\text{نصيب السهم من الأرباح المحققة} = \frac{\text{صافي الربح الخاص بالمساهمين العاديين}}{\text{عدد الأسهم العادية}} \quad (١٠-١٦)$$

ويعتبر هذا العائد من أهم المقاييس التي يأخذها المستثمرون بعين الاعتبار عندما يفكرون في الاستثمار بشراء أحد الأسهم.

مثال ٥:

إذا كان صافي الربح في إحدى الشركات يساوي ٥٠٠٠٠٠ ل.س، وكان عدد الأسهم المباعة يساوي ٢٠٠٠ سهماً عادياً، و٥٠٠ سهماً ممتازاً.

فالمطلوب حساب نصيب السهم العادي:

الحل:

نقوم أولاً بحساب نصيب الأسهم الممتازة، فنجد أن:

مجموع عدد الأسهم = ٢٠٠٠+ ٥٠٠= ٢٥٠٠ سهماً.

حصة الأسهم الممتازة من الربح $= \frac{500}{2500} \times 500000 = 100000$ ل.س.

حصة الأسهم العادية من الربح $= \frac{2000}{2500} \times 500000 = 400000$ ل.س.

نصيب السهم العادي $= \frac{400000}{2000} = 200$ ل.س.

*** نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة:**

لقد أشرنا سابقاً أن إدارة الشركة قد تقرر عدم توزيع كامل الأرباح المحققة، كأن تقرر الاحتفاظ بجزء منها لاستخدامها في استثمارات جديدة، وتقوم بتوزيع الجزء الباقي

على المساهمين. وعندها نقوم بحساب نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة باستخدام العلاقة الآتية:

$$\text{نصيب السهم من الأرباح الموزعة} = \frac{\text{الأرباح المخصصة للتوزيع على المساهمين العاديين}}{\text{عدد الأسهم العادية}} \qquad (١٦-١١)$$

ويمكن احتساب نصيب السهم من الأرباح الموزعة بضرب القيمة الاسمية للسهم بنسبة التوزيع المقررة، أي إن نصيب السهم من الأرباح الموزعة = القيمة الاسمية × نسبة التوزيع.

مثال ٦:

إذا كان صافي ربح إحدى الشركات يساوي ٥٠٠٠٠٠ ل.س ، وكان عدد أسهمها العادية ٢٠٠٠ سهماً، وعدد أسهمها الممتازة ٥٠٠ سهماً، وعند توزيع هذه الأرباح قررت إدارة الشركة تسديد الأرباح الخاصة بالأسهم الممتازة كاملة، والاحتفاظ بـ ٣٥% من أرباح الأسهم العادية لاستخدامها في استثمارات جديدة، فالمطلوب: حساب نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة، ثم حساب نسبة التوزيع إذا علمت أن القيمة الاسمية للسهم تساوي ١٦٠٠ ل.س.

الحل:

إن إجمالي عدد الأسهم = ٥٠٠+٢٠٠٠=٢٥٠٠ ل.س.

إن حصة الأسهم الممتازة = $500000.\frac{500}{2500} = 100000$ ل.س.

إن حصة الأسهم العادية = $500000.\frac{2000}{2500} = 400000$ ل.س.

إن الحصة التي ستخصص للاستثمار الجديد = $400000.\frac{35}{100} = 140000$ ل.س.

إن الحصة المتبقية المخصصة للتوزيع = ٤٠٠٠٠٠-١٤٠٠٠٠=٢٦٠٠٠٠ ل.س.

وبذلك نجد أن نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة = $\frac{26000}{2000} = 130$ ل.س.

وكذلك نجد أن نسبة التوزيع = $\frac{130}{1600} = 0,08125 = \%8,125$

مثال ٧:

احسب نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة إذا علمت أن القيمة الاسمية للسهم = ١٥٠٠ ل.س . وأن نسبة التوزيع من الأرباح الموزعة تساوي 12%.

الحل:

نصيب السهم من الأرباح الموزعة = $1500 \times \frac{12}{100} = 180$ ل.س.

*** الريع الجاري للسهم العادي:**

ويعرف بأنه نسبة نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة على القيمة السوقية للسهم؛ أي أنه يساوي:

$$\text{معدل الريع الجاري للسهم العادي} = \frac{\text{نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \times ١٠٠$$

ويتضح من هذه العلاقة أن معدل الريع الجاري للسهم العادي يتناسب عكساً مع القيمة السوقية له. فإذا ازدادت القيمة السوقية نقص ذلك الريع، وإذا نقصت القيمة السوقية ازداد ذلك الريع (بفرض أن النصيب ثابت).

وإن معدل الريع الجاري للسهم يعبر عن مردودية الليرة الواحدة من القيمة السوقية، أو عن مردودية كل مائة ليرة سورية (إذا كان مضروباً بـ ١٠٠).

مثال ٨:

إذا كان نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة ١٨٠ ل.س ، وكانت القيمة السوقية للسهم تساوي ٢٠٠٠ ل.س، فالمطلوب حساب معدل الريع الجاري للسهم العادي.

الحل:

$$\text{الريع الجاري للسهم الجاري} = \frac{180}{2000} \cdot 100 = 0,09 = 9\%$$

أي إن كل مائة ليرة سورية من القيمة السوقية تؤمن ريعاً من الأرباح الموزعة قدره ٩ ليرات سورية.

*** معدل الريع طيلة فترة الاقتناء:**

ويحسب هذا الريع خلال وطيلة فترة الاقتناء منذ شراء السهم لأول مرة حتى لحظة بيعه في السوق. ويحسب من العلاقة الآتية:

$$\text{معدل الريع طيلة فترة الاقتناء} = \frac{\text{مجموع الأرباح المقبوضة خلال الفترة} + (\text{سعر بيع السهم} - \text{سعر شراء السهم})}{\text{سعر شراء السهم}} \times 100 \quad (١٦-١٢)$$

مثال ٩:

اشترى أحدهم عدة أسهم من أسهم شركة الرخام بسعر ٤٥٠٠ ل.س للسهم، وخلال سنتين من اقتنائه لها كانت الشركة توزع أرباحاً سنوية بنسبة ٨% من القيمة الاسمية للأسهم. وبعد ذلك قام ببيعها بسعر ٥٠٠٠ ل.س للسهم. احسب الريع طيلة فترة الاقتناء إذا علمت أن القيمة الاسمية للسهم تساوي ٤٠٠٠ ل.س .

الحل:

نلاحظ أن سعر المبيع = ٥٠٠٠ ل.س.

وأن سعر الشراء = ٤٥٠٠ ل.س.

وأن مجموع الأرباح المقبوضة خلال الفترة عن كل سهم = $4000.\frac{8}{100}.2 = 160$ ل.س.

وبذلك نجد أن معدل الريع طيلة الفترة =

$$= \frac{160 + (5000 - 4500)}{4500} \times 100 = 14,667\%$$ ل.س.

١٦-٢: السندات الاستثمارية:

تستخدم السندات في عمليات تمويل المشاريع الاستثمارية الجديدة ومافي حكمها أو في دعم المنشآت الاقتصادية المختلفة عندما تتعرض إلى مخاطر معينة.

ويعرف السند الاستثماري: بأنه وثيقة تنص على دين محدود المدة ويستحق فائدة دورية معينة، ويتعهد فيه الطرف الذي يصدره لمن يحمله بدفع قيمته (الاسمية أو

الاستهلاكية) عند موعد استحقاقه، كما يلتزم بدفع الفوائد الدورية المترتبة عليه في فترات محدودة.

أنواع السندات:

يمكن تصنيف السندات في نوعين أساسيين:

السندات التجارية (الكمبيالات): وهي السندات التي يكتتبها الناس بعضهم على بعض لتثبيت حقوق وواجبات الدائن والمدين. وهذه السندات يكون لها قيمة اسمية تتضمن مباشرة الفوائد المستحقة على الدين، ويكتب عليها تاريخ الاستحقاق، ولاتستحق فوائد دورية عن المبلغ المقترض.

السندات الاستثمارية: وهي السندات التي تصدرها الحكومات أو المؤسسات أو الشركات أو المنظمات الإقليمية أو الدولية. بهدف تمويل مشروعاتها الجديدة أو تغطية عجوزاتها المتراكمة أو دعم أوضاعها المتردية.

ويكون لهذه السندات قيمة اسمية ومدة محدودة، وتستحق فائدة دورية بنسبة محددة وفي فترات زمنية معينة.

وتتميز هذه السندات عن الأسهم بأنها تستحق الدفع بتاريخ معين، وتضمن لصاحبها دخلاً دورياً ثابتاً (الفائدة الدورية)، ويتمتع أصحابها بحقوق الأفضلية عند تصفية أعمال الشركة، وليس من الضروري أن يكون للسندات قيمة موحدة كالأسهم.

وسنقتصر في هذه الفقرة على دراسة السندات الاستثمارية التي تصدرها الشركات الصناعية أو الزراعية أو التجارية أو الخدمية لأغراض زيادة رأس مالها أو التوسع في أعمالها أو دعم أوضاعها ، وتقسم السندات الاستثمارية إلى الأصناف التالية:

١ . السندات القابلة للتحويل إلى أسهم عادية: وهي سندات تتعهد الشركة المصدرة بتحويلها إلى أسهم عادية خلال زمنية معينة. لذلك تكون أسعار الفائدة على هذه السندات أقل من أسعار فائدة السندات العادية.

٢ . السندات القابلة للاستدعاء : وهي السندات التي تحتفظ الشركة المصدرة لها بحق استدعائها ورد قيمتها لأصحابها قبل مواعيد استحقاقها. وفي هذه الحالة تكون الشركة ملزمة بدفع قيمة عنها تفوق القيم الاسمية للسندات كتعويض عن عملية الاستدعاء.

٣ . **السندات القابلة للاستهلاك:** وهي السندات التي تلتزم الشركة برد قيمتها حسب جدول زمني معين قبل مواعيد استحقاقها. وحسب نسب محدودة سنوياً. تقوم بشرائها من السوق حسب تسلسل الإصدار أو حسب رغبة المستثمر، ويتم تحديد حجم الاستهلاك السنوي من هذه السندات بقرار من الإدارة ، ويمكن تنفيذ ذلك بواسطة القرعة. وتكون أسعار الفائدة لهذه السندات أقل من أسعارها للسندات العادية، وذلك لأن المستثمر يتمتع بحماية أكبر لكون الشركة تستهلك السندات بصورة منتظمة.

٤ . **السندات المضمونة بأصل:** وهي السندات التي تكون مضمونة برهن أحد أصول أو ممتلكات الشركة، أو بضمان سندات أخرى أو أسهم عائدة إلى مشروع آخر، أو بضمان شركات أخرى. وهذه السندات تشبه السندات العادية ولكنها مكفولة بأصول ثابتة ومحددة.

٥ . **سندات الدخل:** وهي السندات التي يكون لها جدول غير دوري لتسديد الفوائد، ولا تدفع فوائدها إلا إذا حققت الشركة أرباحاً قبل تاريخ استحقاق الفوائد.

*** ميزات السندات وعيوبها:**

يتميز الاستثمار باقتناء السندات الاستثمارية بالخصائص التالية:

١ . يدعم موقف الشركة مالياً، ويزيد من مقدرتها على سداد الالتزامات واسترجاع السندات السابقة.

٢ . يضمن للمستثمر ربحاً ثابتاً يتمثل في مقدار الفائدة الدورية.

٣ . ينشط حركة الأموال في الأسواق المالية.

٤ . يضمن للمستثمر حق الأفضلية عند تصفية أعمال الشركة.

ومن عيوبها مايلي:

١ . يتعرض المستثمر للخسارة إذا اقتنى سنداً يفوق سعره سعر الاستدعاء.

٢ . يتعرض المستثمر لفقدان جزء من سنداته بدون رغبته إذا تم الاستدعاء بالقرعة.

*** قيم السندات:**

يمكننا أن نميز عدة مفاهيم لقيمة السند هي:

القيمة الاسمية: وهي القيمة التي تكون مدونة على السند والتي تلتزم الشركة المصدرة للسند بتسديدها لحامله في موعد الاستحقاق.

القيمة الاستهلاكية: وهي القيمة التي يمكن الاتفاق مع الشركة على تسديدها لحامل السند في موعد استحقاقه. وهي قد تكون أكبر أو أقل من القيمة الاسمية أو تساويها.

وهنا نشير إلى أن السند يمكن أن يتضمن بندين خاصين بالقيمتين الاسمية والاستهلاكية، لأن القيمة الاسمية تستخدم لحساب الفوائد الدورية بضربها بسعر الفائدة الدورية P. أما القيمة الاستهلاكية فقد تكون محدودة كمياً أو تحسب كنسبة مئوية من القيمة الاسمية أيضاً.

القيمة السوقية (الفعلية): وهي ثمن شراء السند في سوق الأوراق المالية، وإن هذه القيمة تختلف عن القيمتين الاسمية والاستهلاكية، وتتأثر بعدة عوامل أهمها:

. القيمة الاستهلاكية للسند.

. ظروف الطلب والعرض على تلك السندات.

. الحالة الاقتصادية للشركة المصدرة والتوقعات المستقبلية.

. معدل الفائدة الذي تخصصه الشركة لحساب الفوائد الدورية.

. معدل الفائدة الذي يطمح المستثمر إلى أن يحققه من استثمار أمواله.

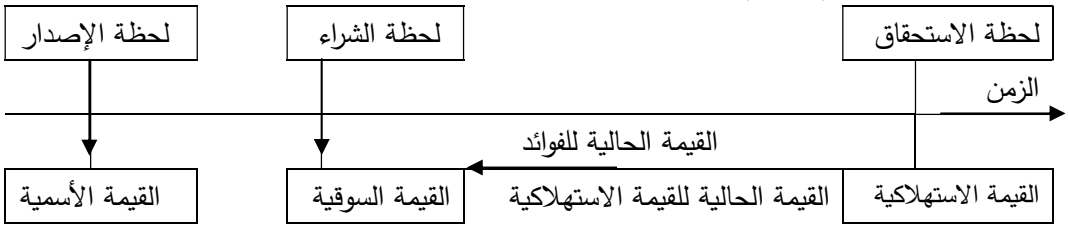
وبذلك نجد أن المستثمر يقوم بحساب القيمة السوقية لهذه السندات انطلاقاً من معدل الفائدة الذي يطمح إلى أن يحققه من الاستثمار فيها، وذلك من خلال المعادلة التالية:

القيمة السوقية في لحظة ما	=	القيمة الحالية للقيمة الاستهلاكية	+	القيمة الحالية للفوائد المستحقة للسند والمنتظر تحصيلها حتى تاريخ الاستحقاق

(١٦-١٣)

وهنا لابد من أن نشير إلى أن المستثمر يقوم بحساب القيم الحالية للقيمة الاستهلاكية وللفوائد المستحقة مستخدماً معدل الفائدة الذي يطمح إلى أن يحققه في استثمار أمواله، ولايعتمد في ذلك على معدل الفائدة المعتمد في الشركة لحساب الأرباح أو غيرها.

ولتوضيح الفروقات بين هذه القيم المختلفة، وربطها بزمان حسابها نقوم بتمثيلها على الشكل البياني التالي:



الشكل (١٦-١)

وحتى نستطيع إجراء الحسابات اللازمة لهذه السندات نقوم بترميز المتحولات الداخلة في تعاريفها وفق الآتي:

S . القيمة الاسمية للسند.

K . القيمة الاستهلاكية للسند.

CP . نصيب السند من المصاريف المتعلقة بعمولة التوزيع والتسويق.

SN . صافي القيمة الاستهلاكية للسند، وهي تساوي $SN=S-CP$

I . مقدار الفائدة الدورية (كوبون الفائدة).

P . معدل الفائدة المركبة السنوي المعتمد في الشركة.

q . معدل الفائدة المركبة السنوي الذي يطمح المستثمر لتحقيقه.

n . عدد السنوات المتبقية حتى موعد الاستحقاق.

V_1 . القيمة الحالية للقيمة الاستهلاكية K.

V_2 . القيمة الحالية للفوائد المستحقة حتى تاريخ الاستحقاق.

M . القيمة السوقية (ثمن الشراء الفعلي).

MN . صافي القيمة السوقية (ثمن الشراء – المصاريف المختلفة).

وحتى نصوغ العلاقة (16-13) بشكل رياضي نجد أن القيمة السوقية للسند M تساوي:

$$M = V_1 + V_2 \qquad (14-16)$$

وبما أن القيمة الحالية للقيمة الاستهلاكية V_1 هي عبارة عن القيمة الحالية لمبلغ K مؤجل الدفع لمدة n عاماً بفائدة مركبة يحدد سعرها المستثمر ،ويضعه مساوياً لـ q فإن قيمته الحالية تساوي:

$$V_1 = \frac{K}{(1+q)^n} = K \cdot h^n \qquad (15-16)$$

حيث إن:

$$h = \frac{1}{1+q}$$

ولحساب القيمة الحالية للفوائد المستحقة والمنتظر تحصيلها خلال مدة الاستهلاك بفائدة يحدد سعرها المستثمر وبمقدار q، نلاحظ أنها عبارة عن القيمة الحالية لدفعات عادية قدرها I وعددها n دفعة، وأن قيمتها الحالية تحسب من العلاقة الآتية:

$$V_2 = I \cdot \frac{1-h^n}{1-h} \qquad (16-16)$$

حيث إن:

$$h = \frac{1}{1+q}$$

وحيث إن I هو مقدار الفائدة الدورية ويساوي $I = S \cdot P$. وبذلك نجد أن القيمة السوقية تأخذ الشكل التالي:

$$M = Kh^n + I\frac{1-h^n}{1-h} \qquad (17-16)$$

ملاحظة:

إذا كانت الفائدة تحسب وتضاف m مرة خلال العام، فإن العلاقة السابقة تعدل باستبدال كل P بـ $P' = \frac{P}{m}$، وكل q بـ $q' = \frac{q}{m}$، وكل I بـ $I' = S \cdot P'$ وكل n بـ $n' = n \cdot m$ وكل h بـ $h' = \frac{1}{1+q'}$.

وبذلك تأخذ العلاقة (16-17) التي تعطينا القيمة الاستهلاكية M' الشكل التالي:

$$M' = K \cdot h'^{n'} + I' \frac{1 - h'^{n'}}{1 - h'} \qquad (18-16)$$

مثال ٩:

احسب القيمة السوقية لسند يستحق بعد ٥ سنوات من الآن وقيمته الاسمية ٣٠٠ ل.س ، وتحسب الفائدة عليه بمعدل ٨% سنوياً، وقيمته الاستهلاكية ٣٥٠ ل.س. والمستثمر الذي يريد شراءه يرغب في تحقيق معدل ١٠% في استثمار أمواله. ثم احسب قيمته السوقية الجديدة إذا أصبحت الفائدة تحسب مرتين في العام.

الحل:

نلاحظ أن: $S = 300$ ، وأن $P = 0{,}008$ ، وبذلك نجد أن قيمة الفائدة الدورية تساوي:

$$I = S \cdot P = 300(0{,}08) = 24 \quad L.S$$

كما نلاحظ أن $K = 350$ وأن المعدل الذي يرغبه المستثمر $q = 0{,}10$ ، وبذلك نجد أن:

$$h = \frac{1}{1 + 0{,}10} = \frac{1}{1{,}10} = 0{,}909091$$

ومن العلاقة (١٦-١٧) نجد أن القيمة السوقية تساوي:

$$M = 350(0{,}909091)^5 + 24 \cdot \frac{1 - (0{,}909091)^5}{1 - 0{,}909091}$$

$$M = 217{,}3225 + 100{,}0768 = 317{,}40 \quad L.S$$

وهي أقل من القيمة الاستهلاكية ٣٥٠ ل.س.

ولحساب القيمة السوقية الجديدة لهذا السند عندما تحسب الفائدة مرتين في العام. نطبق العلاقة (١٦-١٨)، لذلك نقوم بحساب ما يلي:

$$P' = \frac{P}{m} = \frac{0,02}{2} = 0,04 \quad , \quad q' = \frac{q}{m} = \frac{0,10}{2} = 0,05$$

$$I' = S \cdot P' = 300 \cdot (0,04) = 12 L.S$$

$$n' = n \cdot m = 5 \cdot 2 = 10$$

$$h' = \frac{1}{1+q'} = \frac{1}{1+0,05} = 0,952381$$

وبتعويض ذلك في العلاقة (١٦-١٨) نجد أن القيمة السوقية الجديدة لذلك السهم تساوي:

$$M' = 350(0,952381)^{10} + 12 \cdot \frac{1-(0,952381)^{10}}{1+0,952381}$$

$$M = 214,8697 + 97,29388 = 312,16 L.S$$

وهذا يعني أن القيمة السوقية للسند قد تناقصت بسبب نظام إضافة الفائدة مرتين في العام، ونلاحظ أن قيمتها أقل من القيمة الاستهلاكية ٣٥٠ ل.س.

ملاحظة:

إن القيمة السوقية، أو ثمن الشراء للسند قد تكون أصغر من القيمة الاستهلاكية، أو أكبر منها.

فإذا كانت القيمة السوقية M أصغر من القيمة الاستهلاكية K، فعندها نقول: إنه تم شراء السند بخصم من القيمة الاستهلاكية، وإن مقدار الخصم يساوي $(K-M)$، ويحدث ذلك عندما يكون معدل الفائدة الذي يطلبه المستثمر q أكبر من معدل الفائدة المعتمد في الشركة لحساب الفوائد.

أما إذا كانت القيمة السوقية M أكبر من القيمة الاستهلاكية K، فعندها نقول: إنه تم شراء السند بعلاوة على القيمة الاستهلاكية، قدرها $(M-K)$، ويحدث ذلك عندما يكون معدل الفائدة الذي يطلبه المستثمر q أصغر من معدل الفائدة المعتمد في الشركة لحساب الفوائد.

*** تكلفة السندات:**

لحساب تكلفة السندات التي تصدرها الشركة نأخذ بعين الاعتبار جميع المصاريف التي تتكبدها الشركة من جراء ذلك، وتشمل هذه المصاريف ما يلي:

. المتوسط السنوي للفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الفعلية.

. الفائدة المستحقة على السند سنوياً، وتحسب بنسبة مئوية من القيمة الاسمية، ويطلق على هذه الفوائد اسم (كوبونات السند).

ـ تكاليف الإصدار وتشمل: تكاليف الدراسات والموافقات ونفقات الطباعة والإعلان ...إلخ.

. الرسوم المرتبطة بعمليات الرهن والضمان.

. العمولات التي تدفعها الشركة للشركات الأخرى لقاء التوزيع والتسويق.

. الضريبة المفروضة على حركة السندات، أو دخولها (إن وجدت).

. أية نفقات أخرى مترتبة على تلك السندات.

ويمكن حساب التكلفة السنوية المتوسطة للسند الواحد والتي سنرمز لها بالرمز CP من العلاقة التالية:

$$CP = S \cdot P + \frac{K - S}{N} + \frac{C}{N} + C_1 \qquad (14-16)$$

حيث إن:

S . هي القيمة الاسمية للسند.

P . سعر الفائدة السنوية المعتمدة في الشركة.

K . القيمة الاستهلاكية للسند في تاريخ الاستحقاق.

C . إجمالي التكاليف المختلفة الناجمة عن إصدار السندات.

C_1 . عمولة توزيع وتسويق السند.

N . عدد السنوات التي تم إصدارها.

كما يمكننا حساب معدل تكلفة التمويل بواسطة هذه السندات من العلاقة:

$$AV = \frac{CP}{\frac{S + SN}{2}} \times 100 \qquad (15-16)$$

مثال ١٠:

أصدرت إحدى الشركات ٣٠٠٠ سنداً، القيمة الاسمية لكلٍ منها ٥٠٠ ل.س

لمدة ١٠ سنوات، وتعهدت بتسديد قيمة استهلاكية عن كل منها في موعد الاستحقاق ٦٠٠ ل.س. وأن تدفع فوائدها الدورية بمعدل ٧% سنوياً، وبلغت مصاريف إصدار هذه السندات ٢٥٠٠٠ ل.س. والمطلوب حساب التكلفة السنوية المتوسطة لكل من هذه السندات، ثم حساب معدل تكلفة التمويل لهذه السندات، إذا علمت أن الشركة تدفع لشركات التسويق عمولة توزيع قدرها ١٥ ل.س، عن كل سند، ثم احسب القيمة التسويقية لهذه السندات بعد سنتين على إصدارها، إذا علمت أن المستثمر يطمح إلى أن يحقق معدل استثمار لأمواله يساوي ٩% سنوياً.

الحل:

لحساب التكلفة السنوية نطبق المعادلة (١٦-١٤) فنجد أن:

$$CP = 500 \times \frac{7}{100} + \frac{600-500}{3000} + \frac{25000}{3000} + 15$$

$$CP = 35 + 0{,}03333 + 8{,}3333 + 15 = 58{,}36667 \ \ L.S$$

أي إن كل سند يكلف حوالي ٥٨.٣٦٦٧ ل.س. لإصداره.

لحساب معدل تكلفة التمويل للسند الواحد نطبق العلاقة (١٦-١٥) فنجد أنه يلزمنا حساب صافي القيمة الاسمية SN حيث نجد أن:

$$SN = S - CP = 500 - 58{,}3667 = 441{,}6333$$

وبذلك نجد أن معدل التمويل يساوي:

$$AV = \frac{CP}{\frac{S + SN}{2}} \times 100 = \frac{58{,}3667}{\frac{500 + 441{,}633}{2}} \times 100 = 12{,}397\%$$

أي إن كل سهم يكلف حوالي ١٢.٣٩٧% من قيمته المتوسطة $\left(\frac{S+SN}{2}\right)$.

لحساب القيمة التسويقية بعد سنتين من إصدارها (ويبقى ٨ سنوات لاستحقاقها ضمن رغبات المستثمر)، نطبق العلاقة (١٦-١٣)، لذلك نقوم بحساب القيمة الحالية للقيم الاستهلاكية للسند للمدة المتبقية $(n=8)$، وباستخدام معدل الفائدة المطلوب تحقيقه ٩%. وبتطبيق العلاقة الآتية:

$$V_1 = \frac{K}{r^n} = \frac{600}{(1{,}09)^8} = 301{,}12 L.S$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية للفوائد المستحقة، والمنتظر تحصيلها جميعاً، وذلك بتطبيق علاقة القيمة الحالية لدفعات عادية قيمة كلٍ منها تساوي:

$$D = S \cdot P = 500 \cdot \frac{7}{100} = 35 \quad L.S$$

وبذلك نجد أن قيمتها الحالية حسب المدة المتبقية وباستخدام معدل الفائدة المطلوب تحقيقه من قبل المستثمر ٩% تساوي:

$$V_2 = D\frac{1-h^n}{1-h} = 35\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}09}\right)^8}{1-\frac{1}{1{,}09}} = 35 \cdot \frac{0{,}4981337}{0{,}0825688}$$

$$V_2 = 211{,}15 \quad L.S$$

وبذلك نجد أن القيمة السوقية لكل سهم من هذه الأسهم بعد سنتين من إصدارها وحسب معدل الفائدة الذي وضعه المستثمر الشاري تساوي:

$$M = V_1 + V_2 = 301{,}12 + 211{,}15 = 512{,}37 \quad L.S$$

*** حالات عمليات الشراء:**

بما أن عمليات شراء السهم يمكن أن تحدث في أي وقت من أوقات السنة، فهي تتأثر كثيراً بموعد توزيع الفائدة الدورية، فإذا كانت قبل توزيع الفائدة مباشرةً فإن تلك الفائدة تصبح من حق المشتري، أما إذا كانت بعد موعد توزيع الفائدة مباشرةً فإن الفائدة تكون قد حسبت، وتكون من حق البائع، ولا يستفيد المشتري من السند حتى حلول الموعد القادم لتوزيع الفائدة. ولكن إذا كانت عملية الشراء تقع بين موعدين متتاليين لتوزيع الفائدة، فإن القيمة السوقية تساوي ثمن شراء السند بعد الموعد الأول مباشرةً + الفوائد المستحقة على ذلك الثمن حتى لحظة الشراء. ومن أجل توضيح كيفية معالجة هذه الحالات نقدم مثالاً عددياً على كلٍ منها.

مثال ١١:

يريد أحدهم بيع سند قيمته الاسمية ٥٠٠٠٠ ل.س وقيمته الاستهلاكية ٦٠٠٠٠ ل.س. ويستحق الدفع بعد ٥ سنوات من الآن، وتسدد عليه فوائد بمعدل ٥% من القيمة الاسمية سنوياً. ولكن هذه الفوائد تحسب وتدفع كل ستة أشهر. والمطلوب أوجد القيمة السوقية لهذا السند إذا علمت أن المستثمر المشتري يطمح إلى أن يحقق معدل فائدة مركبة قدره ٣% عن كل نصف عام، وذلك في الحالات التالية:

١ . إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد توزيع الفائدة مباشرةً (بعد صرف الكوبون مباشرةً).

٢ . إذا كانت عملية الشراء ستتم قبل توزيع الفائدة مباشرةً (قبل صرف الكوبون مباشرةً).

٣ . إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد مرور أربعة أشهر على توزيع الفائدة.

الحل:

الحالة الأولى:

١ . إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد توزيع الفائدة مباشرةً، فعندها نقوم بحساب الفائدة الدورية المستحقة كل ستة أشهر من العلاقة:

$$I' = S \cdot P' = S \cdot \frac{P}{2} = 50000 \cdot \frac{0,05}{2} = 1250 \;\; L.S$$

وبما أن القيمة الاستهلاكية $K=60000$، وعدد مرات حساب الفائدة $m=2$، فإن:

$$n' = 2 \cdot 5 = 10$$

$$P' = \frac{P}{2} = 0,025$$

$$q' = 0,03$$

$$h' = \frac{1}{1+q'} = \frac{1}{1,03} = 0,970874$$

وبذلك نجد أن القيمة السوقية الجديدة لهذا السند تساوي:

$$M_1' = 60000(0{,}970874)^{10} + 1250 \cdot \frac{1-(0{,}970874)^{10}}{1-0{,}970874} =$$

$$M_1' = 244645{,}635 + 10982{,}65 = 55628{,}29 \quad L.S$$

الحالة الثانية: إذا كانت عملية الشراء ستتم قبل توزيع الفائدة مباشرةً.

فإن ذلك يعني أن تلك الفائدة تصبح من حق المشتري، وعليه في هذه الحالة أن يجعل ثمن الشراء متضمناً لتلك الفائدة، وبذلك نجد أن:

ثمن الشراء قبل التوزيع مباشرةً = القيمة السوقية بعد التوزيع مباشرةً + قيمة الفائدة الدورية.

$$M_2' = 55628{,}29 + 1250 = 56878{,}29 \quad L.S$$

وهو القيمة السوقية للسند في هذه الحالة.

الحالة الثالثة: إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد مرور أربعة أشهر على توزيع الفائدة.

لحساب القيمة السوقية في هذه الحالة نحسب القيمة السوقية بعد توزيع الفائدة مباشرةً، والتي وجدنا أنها تساوي:

$$M_1' = 55628{,}29 \quad L.S$$

ثم نقوم بحساب الفوائد المستحقة على هذا المبلغ لمدة أربعة أشهر من كل نصف عام:

$$I' = M_1' \cdot q' \cdot \frac{4}{6} = 55628{,}29(0{,}03) \cdot \frac{4}{6} =$$

$$I' = 1112{,}57 \quad L.S.$$

وبإضافة قيمة هذه الفوائد إلى القيمة السوقية السابقة نحصل على القيمة السوقية بعد مرور أربعة أشهر، وهي تساوي:

$$M = M_1' + I' = 55628{,}29 + 1112{,}57$$

$$M = 56740{,}86 \quad L.S$$

ملاحظة:

كان يمكن حساب القيمة السوقية للحالة الثالثة بحساب حصيلة القيمة السوقية بعد توزيع الفائدة مباشرةً M_1' لمدة أربعة اشهر وحسب نظام الفائدة البسيطة كما يلي:

$$M = M_1'(1+n.q) = 55628,29 \cdot \left(1+\frac{4}{6}(0,03)\right) = 56740,86 \quad L.S$$

كما يمكن استخدام نظام الفائدة المركبة كما يلي:

$$M = M_1'(1+q)^n = 55628,29 \cdot (0,03)^{\frac{4}{6}} = 56735,3786 \quad L.S$$

ومن هنا يتضح أن نظام الفائدة البسيطة في مثل هذه الحالات القصيرة أفضل للبائع.

تمرينات

١ . لدى أحدهم سهم عادي قيمته الاسمية ٢٠٠ ل.س. وقيمته السوقية ٤٠٠ ل.س. ويتوقع أن توزع الشركة أرباحاً لكل سهم بمعدل ٢٥%، وإذا كانت مصاريف البيع تشكل ٨%، وكانت الأرباح تنمو بمعدل ١٢% سنوياً، فالمطلوب إيجاد تكلفة التمويل لهذا السهم.

٢ . أصدرت إحدى الشركات ١٥٠٠٠ لمدة خمس سنوات، القيمة الاسمية لكل منها ١٠٠ ل.س. وبمعدل فائدة مركبة ٩%. فإذا كان البنك يأخذ عمولة توزيع ٣%، ومصاريف الإصدار بلغت ٢٤٥٠٠ ل.س. ومصاريف رهن الأصول ١٨٠٠ ل.س، فالمطلوب حساب تكلفة التحويل علماً بأن القيمة الاستهلاكية لهذه السندات تساوي قيمتها الاسمية.

جدول المصطلحات العلمية الإنجليزية . العربية

A	
Account	حساب
Allowance	تخفيض، تساهل
Alternative	بديل
Amortization	الاهتلاك، الاستهلاك
Annual payment	الدفع السنوي
Appendixes	الملحقات
Arithmetic Mean	الوسط الحسابي
Assets	الممتلكات، الأصول
Auditing	مراجعة الحسابات
Authorization	ترخيص، إجازة
Automation	تلقائية
B	
Balance	موازنة
Balance Sheet	صفحة الموزانة
Bankrupting	إفلاس
Bills	سندات
Binomial Expansion	المحددات الثنائية
Bond	سند
Coupon Bond	سند ذو قسائم
Callable bond	سند تجميع
Collateral bond	سند ضمان
Mortgage bond	سند ضد الممتلكات

Redeemed bond	سند سددت قيمته (متقاعد)
Registered bond	سند مسجل
Retired bond	سند متقاعد
Break Even Point	نقطة التعادل (نقطة التوزيع المتساوي)
Bribe	رشوة
Budget	ميزانية
C	
Cancelable	قابل للإلغاء
Capital	رأس المال
Capital Recovery	تغطية رأس المال
Capitalization	الحصيلة ، الناتج(الرسملة)
Capitalized Amount	رأس المال
Cash	نقدي
Cash Flow and Expenditure	سير الدفع والقبض
Cash Flow Bank	سير الدفع العكسي
Charge	حمل
Chartered	مؤجر
Cheque	شك، حوالة مصرفية
Clause	شرط، بند
Commutative	تبادلي، تعاوني
Competition	منافسة، مضاربة
Competitive	قدرة على المنافسة
Compound amount	الحصيلة
Condition	شرط
Confidential	مميز
Consolidate	صمَّد

Counter Security	الكفيل
Continuous Compounding	التركيب المستمر
Continuous payment	الدفع المستمر
Corporation	شركة مساهمة
Cost	الكلفة
Capacity cost	كلفة السعر
Customer's cost	كلفة العملاء
Direct Cost	الكلفة المباشرة
D	
Debenture	اعتماد، سند
Demand	الطلب
Depletion	التفريغ
Deposit	عربون، إيداع
Depreciation	الاهتلاك
Diminishing Balance Depreciation	الاهتلاك طبقاً لنسبة متناقصة
Fixed-percentage Depreciation	الاهتلاك طبقاً لنسبة مئوية
Straight- Line- Usage Depreciation	الاهتلاك طبقاً لخط مستقيم
Sum of the Years Depreciation	الاهتلاك طبقاً لمجموع السنين
Depreciation Rate	معدل الاهتلاك
Discount	الحسم، الخصم لسند
Sicrete	سري
Distinct term	أجل محدد (مميز)
Distraint	حجز
Distribution	توزيع
Diversity Factor	عامل التوزيع

Dividend	حصة
Stock Dividend	سهم الحصة أو الربح
Dumping	تباطؤ
E	
Economic Desirability	الرغبة الاقتصادية
Efficiency	المردود، الكفاءة
Economical Efficiency	المردود الاقتصادي
Physical Efficiency	المردود الفيزيائي (المادي)
Elacticity	المرونة
Endorsable (Indorsable)	قابل للتجيير
Equity	ملكية وحق
Estimated	مقدار
Over estimated	غلو في التقدير
Under estimated	تساهل في التقدير
Expense statement	كشف النفقات
F	
Factor	عامل
Capacity Factor	عامل السعة
Demand Factor	عامل الطلب
Diversity Factor	عامل التوزيع
Load Factor	عامل الحمل
Power Factor	عامل القدرة
Flat Rate	المعدل الموحد
Fund	الرصيد، اعتماد مالي
Fund flow	سير الدفع

G	
Game Theory	نظرية اللعب
Generalization	التعميم
Giro	التحويل
Grant	هبة، منحة
H	
Heuristic Technique	طريقة البديهة
I	
Identification	التعريف
Inadequacy	عدم الكفاية
Income	الدخل، الإيراد
Net Income	الدخل الصافي
Income and Expense Statement	كشف الإيرادات والمصاريف
Inflation	تضخم مالي
Input	الإدخال
Insurance	التأمين
Integer	عدد صحيح
Interchangeability	قابلية التبادل
Interest	الفائدة
Compound Interest	الفائدة المركبة
Continuous Interest	الفائدة المستمرة
Effective Interest	الفائدة الفعلية
Nominal Interest	الفائدة الاسمية
Simple Interest	الفائدة البسيطة

Inventory	التخزين، قائمة المخزونات
Investment	الاستثمار
Long time investment	الاستثمار طويل الأمد
Short time investment	الاستثمار قصير الأمد
Invoice	كشف، وصل بالمبلغ المستحق
J	
Joint interest	مصلحة مشتركة
L	
Lead Time	الزمن المسبق
Lease	استئجار، عقد الإيجار
Leave Pay	بدل (تعويض) إجازة
Lessor	مؤجر
Letting	إيجار
Life	الحياة
Accounting Life	الحياة المحاسبية
Benefit Life	الحياة المفيدة
Economic Life	الحياة الاقتصادية
Ownership Life	الحياة المفيدة التي تبقى الآلة خلالها في الخدمة
Physical Life	الحياة المادية وهي أطول من الحياة المفيدة
Useful Life	الحياة المفيدة
Tax Life	الحياة الضريبية
Limiting factor	العامل المحدد
Liquidation	تصفية، تحويل الممتلكات إلى نقد

Liquidity	سيولة
Load Factor	عامل الحمل
Loan	قرض، سلفة
M	
Machine rate	معدل الآلة
Maintenance	الصيانة
Marginal Utility	المنفعة الحدية
Market	سوق
Differential Market	سوق مميز
Maturity date	أجل، الاستحقاق
Minimum Cost Point	نقطة الكلفة الصغرى
Mode	صيغة، أسلوب
Model	نموذج، طراز، نمط
Monopolistic Composition	منافسة احتكارية
Monopolizer	محتكر
Monopoly	الاحتكار
Mortgage	أملاك مرهونة
N	
Note	كمبيالة، ورقة نقدية
Long-Term Note	دين طويل الأمد
Short -Term Note	دين قصير الأمد
O	
Objective factors	عوامل الهدف (العوامل المادية)
Optimization	التفضيل، الأمثلية

Order	طلب (أمر الدفع أو الطلب)
Output	الإنتاج، الإخراج
Over Estimated	غلو التقدير
Over Draft	عجز في الحساب، حساب مكشوف
Over Priced	غلو في التسعير
Ownership	الملكية
P	
Par Value	القيمة الاسمية
Payee	المستفيد، المدفوع له
Payment	الدفع
Perfectness	الكمال
Permutation Procedures	طرق التبادل
Perpetual	مستمر، دائم
Pledge	رهن، ضمان، عربون
Power Factor	عامل القدرة
Premium	قسط التأمين، مكافأة
Present worth (Value)	القيمة الحالية
Pre-set Re-order Level	مستوى الطلب المحدد مسبقاً
Probability	الاحتمالات
Procedure	الخطة المتبعة، الاسلوب
Production	الإنتاج
Profit	الربح
Proprietorship	الملكية
Proxy	الوكالة
Public Funds	أموال الدولة

Public Interest	مصلحة عامة
Q	
Quality	الجودة
R	
Rarity Value	قيمة الندرة
Rate	معدل
Effective Tax Rate	معدل الضريبة العملي
Machine Rate	معدل الآلة
Receipts	مقبوضات
Recovery	التغطية
Redeemed	مغطى، مسدد، فك الرهن
Redemption	استهلاك تدريجي للقروض، فك الرهن
Registered share	حصة اسمية
Registered stock	سهم اسمي
Registered Bond	سند اسمي
Repair	إصلاح
Return	العوائد، الدخل
Reserve	دفعات، مدخرات
S	
Sale and Lease Back	بيع وشراء
Scarcity Law	قانون الندرة
Service Life	مدة الخدمة
Set –up	الإعداد
Settlement	سداد الدين

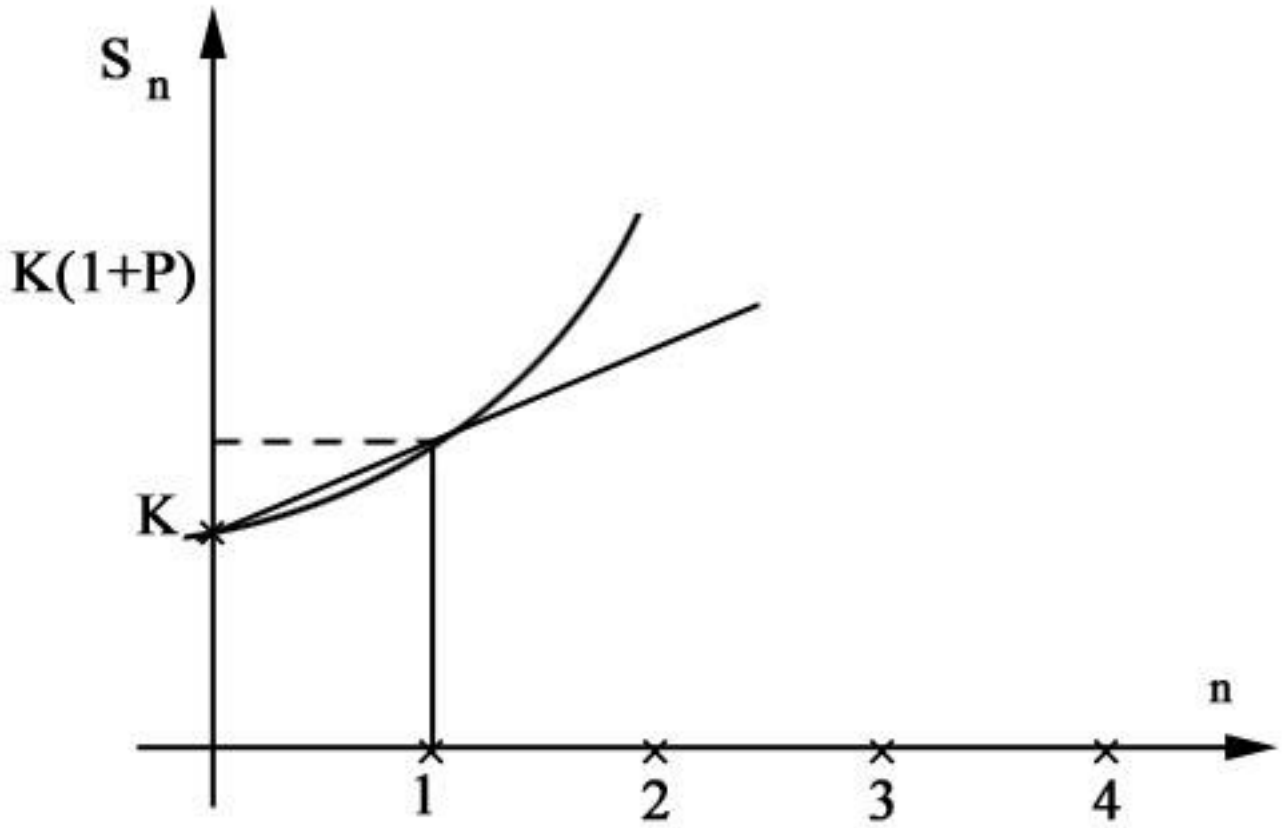
Share	حصة
Shutdown point	نقطة الإغلاق
Single Payment	دفعة واحدة
Sinking Fund	رأس المال المتناقص بانتظام
Social Security	التأمين الاجتماعي
Solution	الحل
Specialization	التخصص
Speculate	المضاربة النقدية
Standard deviation	الانحراف المعياري
Standardization	المعيرة
Statement	كشف، لائحة حساب
Expense Statement	كشف النفقات
Profit- Loss Statement	كشف الربح والخسارة
Statistics	الإحصاء
Descriptive Statistics	الإحصاء الوصفي
Stipulate Rate	معدل الريع الشرطي
Stock	سهم، جرد، مخزون
General Stock	سهم عادي (عام)
Stock Holder	مالك السهم
Subjective Factors	العوامل المعنوية
Supply	العرض
Surplus	الأرباح قبل توزيعها
T	
Tacit Term	أجل ضمني
Tax	الضريبة

Income Tax	ضريبة الدخل
Tanant	مستأجر
Tentative Guess	تخمين ظني
Time ticket	بطاقة الزمن
Tolerance	تسامح
Trade-in	المبادلة
Transformation	تحويل
Two-pin-System	النظام المزدوج أو المضاعف
Undeclared Dividend	الأرباح قبل توزيعها
Undertaking	مشروع، مقاولة، تعهد
Under tenant	المستأجر من الباطن
Usury	ربا، الفائدة الفاحشة
Utility	المنفعة
V	
Value	القيمة
Book Value	القيمة المسجلة
Covered Value	القيمة المغطاة
Face Value	القيمة الاسمية
Present Value	القيمة الحالية
Range Value	قيمة المدى أو المجال
Uncovered Value	القيمة غير المغطاة
W	
Wealth	ثروة، غنى
Worth	ذو قيمة، ثمين
Net Worth	قيمة صافية

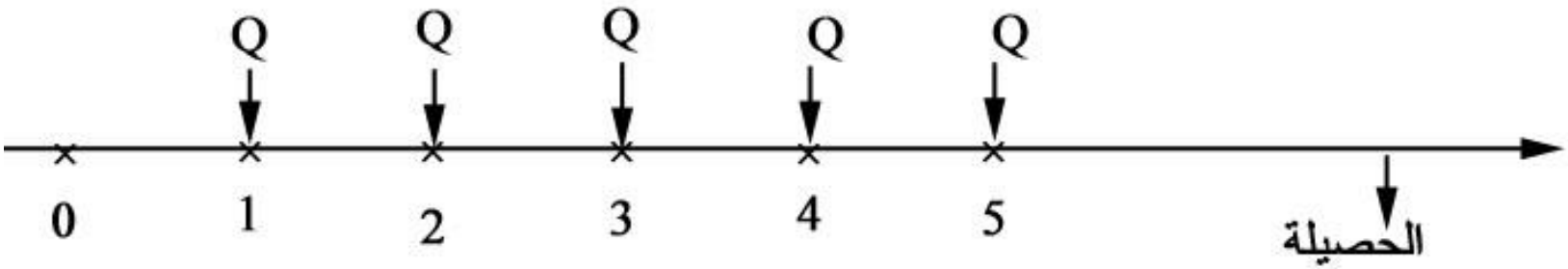
Write- off	حذف
Y	
yield	غلة، عائدات مالية، محصول

الحركة				عناصر الحل حسب الفائدة البسيطة				
تسلسل	تاريخ القيد	البيان	العملية		الرصيد الجاري	مدة الرصيد n بالأيام	مقدار الفائدة $k.p.n$	تراكم الفوائد عند الحركة الثانية	الحصيلة الجارية
			سحب	إيداع					
1	2002/1/5	الإيداع الأول (السابق)	–	5000	5000	74	50.68	–	5000
2	2002/3/20	إيداع	–	3000	8000	38	41.64	50.68	805968
3	2002/4/27	سحب	2000	–	6000	94	77.26	92.32	6092.32
4	2002/7/30	إيداع	–	2500	8500	74	86.16	169.58	8669.38
5	2002/10/12	إيداع	–	3500	12000	80	131.51	255.74	12255.74
6	2002/12/31	سحب	10000	–	2000	–	–	387.25	2387.25
نتيجة الحسابات		–	12000	14000	2000	–	387.25	–	2387.25

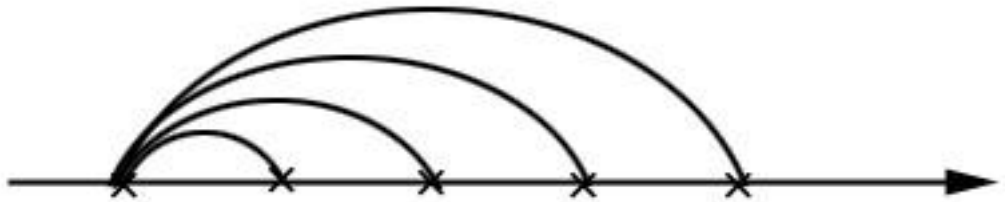
الشكل 1-9



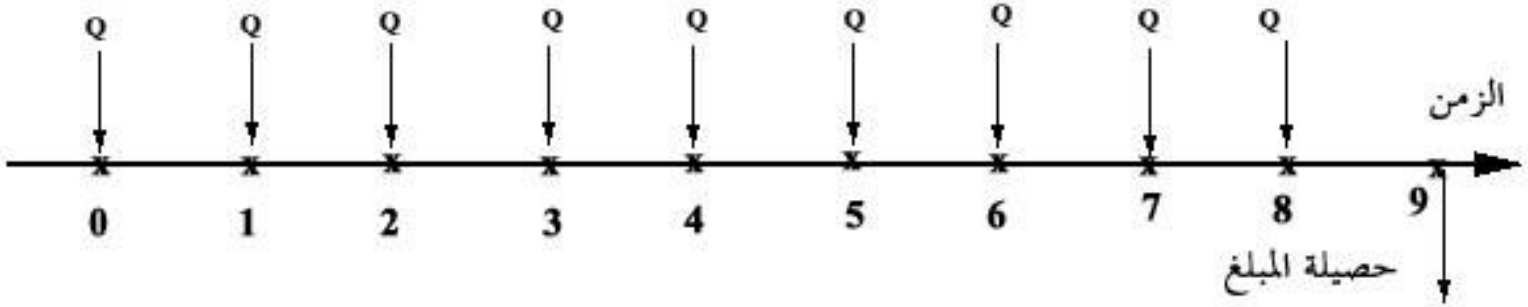
الشكل 1–12



الشكل 1-13



الشكل 2-6



تسلسل	تاريخ القيد	البيان	العملية		الرصيد k	أقل رصيد خلال الشهر	المدة بالأشهر	النمرة
			سحب	إيداع				
1	2003/1/10	إيداع	–	1000	1000	لا يحسب	–	–
2	2003/2/1 2003/2/25	رصيد الشهر السابق إيداع	– –	– 4000	1000 5000	1000	1	1000
3	2003/3/1 2003/3/15 2003/3/25	رصيد الشهر السابق إيداع سحب	– – 5000	– 3000 –	5000 8000 3000	3000	1	3000
4	2003/4/1 2003/4/20 2003/4/27	رصيد الشهر السابق سحب إيداع	– 1000 –	– – 7000	3000 2000 9000	2000	1	2000
5	2003/5/1 2003/5/10 2003/5/20 2003/5/25	رصيد الشهر السابق إيداع سحب إيداع	– – 3000 –	– 5000 – 2000	9000 14000 11000 13000	11000	1	11000
6	2003/6/1 2003/6/10 2003/6/20	رصيد الشهر السابق إيداع الرصيد عند الإغلاق	– – –	– 2000 –	13000 15000 15000	1300	لا تحسب	–

1-5- جدول الرقم التراكمي لأيام السنة الميلادية.

م	الشهر	جدول مساعد لحساب مدة الإيداع بالأيام ويتم ذلك بطرح عدد التراكم في يوم الإيداع من عدد التراكم في يوم السحب																														
1	كانون الثاني يناير 31	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		تراكم الأيام	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	شباط فبراير 28	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28			
		تراكم الأيام	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59			
3	أذار مارس 31	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		تراكم الأيام	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
4	نيسان أبريل 30	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
		تراكم الأيام	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	
5	أيار مايو 31	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		تراكم الأيام	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151
6	حزيران جوان 30	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
		تراكم الأيام	181	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181
7	تموز جولية 31	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		تراكم الأيام	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212
8	آب أغسطس 31	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		تراكم الأيام	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243
9	أيلول سبتمبر 30	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
		تراكم الأيام	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	
10	تشرين الأول أكتوبر 31	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		تراكم الأيام	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304
11	تشرين الثاني نوفمبر 30	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
		تراكم الأيام	334	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334
12	كانون الأول ديسمبر 31	أيام الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		تراكم الأيام	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365

ملاحظة: إذا كانت السنة كبيسة وكانت فترة الإيداع تشمل 29 شباط نضيف يوماً واحداً إلى حاصل الطرح السابق.

الفهرس

الجزء الأول مبادئ عامة		**11**
الفصل الأول: أهم المفاهيم والمصطلحات المالية		**13**
1	أنواع الأموال.	15
2	مؤسسات الإيداع.	18
3	أنظمة الإيداع والادخار.	18
4	سعر الفائدة السنوي.	19
5	مدة الإيداع والجدول التراكمي.	19
6	إرشادات حول استخدام الآلة الحاسبة	21
7	جدول الأرقام العشرية ورموزها المختلفة.	23
8	الأحرف العربية واللاتينية واليونانية.	24
9	بعض الرموز الرياضية المستخدمة	25
الفصل الثاني: المتواليات العددية		**27**
1	مفهوم المتوالية العددية.	29
2	المتوالية الحسابية وتطبيقاتها.	29
3	المتوالية الهندسية وتطبيقاتها.	36
4	المتواليات غير المنتهية.	39
5	السلاسل العددية.	40
6	مجموع السلاسل المتقاربة.	41
7	السلسلة الهندسية.	44
8	تمرينات	45
الجزء الثاني نظام الفائدة البسيطة		**47**
الفصل الثالث: حساب فائدة وحصيلة الإيداع بفائدة بسيطة.		
1	تعاريف أولية	51
2	حساب الفائدة الصحيحة.	52
3	حساب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة لعدة مبالغ.	52
4	حساب مقدار الفائدة التجارية.	57
5	حساب حصيلة مبلغ k.	59
6	حساب حصيلة عدة مبالغ.	62

7	الحسابات الجارية	63
8	تمرينات.	71
الفصل الرابع: حساب القيمة الحالية والخصم بفائدة بسيطة.		**73**
1	المفاهيم العامة	73
2	العلاقات الأساسية.	74
3	تطبيقات عملية وأمثلة عددية.	*80*
4	تمرينات	90
الفصل الخامس: تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة).		**93**
1	أسس التسوية:	95
2	حالات التسوية:	96
3	تسديد الدين قبل موعده.	96
4	تسوية دين واحد بآخر جديد.	97
5	تسوية عدة ديون بدين واحد.	99
6	تسوية عدة ديون بدفعة نقدية ودين جديد بالباقي.	101
7	استبدال عدة ديون بدين موحد وتاريخ استحقاق متوسط .	105
8	استبدال عدة ديون بدين موحد وبتاريخ استحقاق مناسب.	107
9	تمرينات	111
الفصل السادس: حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية المتساوية بفائدة بسيطة.		**113**
1	حصيلة الدفعات الدورية العادية	115
2	حصيلة الدفعات الدورية الفورية	119
3	تمرينات	127
الفصل السابع: حسابات تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة).		**129**
1	العلاقات الأساسية لحساب القيمة الحالية.	131
2	تطبيقات مختلفة	136
3	تمرينات	143
الفصل الثامن: حسابات القروض قصيرة الأجل وطرق تسديدها (بفائدة بسيطة).		**145**
1	المبدأ العام والطرائق المتبعة	147
2	طريقة تسديد كامل القرض مع فائدته في آخر المدة	148
3	طريقة تسديد الفائدة مقدماً وتسديد القرض في آخر المدة.	149
4	طريقة تسديد الفائدة مقدماً وتسديد القرض على أقساط متساوية.	151

5	طريقة تسديد القرض وفوائده على أقساط والقرض في آخر المدة	152
6	طريقة تسديد أصل القرض على أقساط والفوائد على المتبقي.	158
7	طريقة تسديد القرض وفوائده على دفعات غير متساوية وغير دورية.	161
8	تمرينات	165
الجزء الثالث . نظام الفائدة المركبة		**167**
الفصل التاسع . حصيلة المبالغ المودعة وفوائدها:		**169**
1	تعاريف عامة	171
2	حصيلة إيداع مبلغ K.	172
3	حساب الفائدة المستحقة المبلغ K.	176
4	حصيلة الإيداع عند حساب الفائدة m مرة في العام.	179
5	السعر الاسمي والسعر الحقيقي للفائدة.	183
6	مقارنة الحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة	190
7	الحسابات الجارية حسب الفائدة المركبة.	192
8	تمرينات	195
الفصل العاشر . القيمة الحالية والخصم:		**197**
1	مفاهيم عامة	199
2	العلاقات الأساسية بين القيمتين الحالية والاسمية والخصم	199
3	تطبيقات عملية	219
4	تمرينات	320
الفصل الحادي عشر . تسوية الديون طويلة الأجل:		**221**
1	أسس التسوية	223
2	حالات التسوية	224
3	تمرينات	241
الفصل الثاني عشر . حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة مركبة)		**243**
1	مقدمة	245
2	حصيلة الدفعات العادية السنوية.	247
3	حصيلة الدفعات العادية الجزئية.	253
4	حصيلة الدفعات الفورية السنوية	256
5	قضايا مختلفة	262
6	حصيلة الدفعات الفورية الجزئية	267

7	حصيلة الدفعات المؤجلة	273
8	تمرينات	275
الفصل الثالث عشر . القيمة الحالية للدفعات الدورية:		**277**
1	القيمة الحالية للدفعات العادية المحدودة.	279
2	القيمة الحالية للدفعات العادية الجزئية المحدودة.	287
3	القيمة الحالية للدفعات الفورية العادية الدائمة.	297
4	القيمة الحالية للدفعات الفورية المحدودة	301
5	القيمة الحالية للدفعات الفورية الجزئية	305
6	القيمة الحالية للدفعات الفورية الدائمة	307
7	القيمة الحالية للدفعات المؤجلة.	311
8	الاستهلاك المنتظم.	312
9	تمرينات	319
الفصل الرابع عشر . التكلفة الرأسمالية والاستبدال والاستهلاك		**321**
1	التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والإصلاح.	323
2	التكلفة الرأسمالية مع الاستبدال.	325
3	التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والاستبدال .	328
4	الاهتلاك.	332
الفصل الخامس عشر . القروض طويلة الأجل وطرق تسديدها		**339**
1	العلاقة العامة مع القرض والأقساط السنوية.	341
2	العلاقة الخاصة بين القرض والأقساط الجزئية.	343
3	طرائق تسديد القروض طويلة الأجل.	345
4	تمرينات	354
الفصل السادس عشر . السندات والأسهم.		**355**
1	تعارف عامة حول الأسهم.	357
2	السندات الاستثمارية.	367
3	استهلاك السندات الاستثمارية وطرق تسديدها.	379
4	تمرينات	392
المصطلحات العلمية		**393**
المراجع		
الجداول المالية		

المراجع

1- Qazi, Z., KHANNA, V., K., Bhambri, S., K., 1992, Business Mathematics. VIKAS Publishing House PUT LTD, Delhi.

2 . حمد، محمد فوزي، 1984 . الاقتصادي الهندسي، جون وايلي وأبنائه، نيويورك، ط2.

3 . خربوش، حسين علي وآخرون، 1999 . دار زهران، عمان، الأردن.

4 . درويش، أحمد عبد الله، 1983 . مبادئ الرياضيات المالية، مجدلاوي، عمان، الأردن.

5 . درويش، محمد كامل/ 1991 . رياضيات الاستثمار والتوظيف المالي، دار يحسون، بيروت.

6 . زغلول، يحيى سعد، 1989 رياضيات الاستثمار والتمويل، الدار الجامعية، بيروت.

7 . قاسم، سميع وعرفات صفوت، 1986 . الرياضيات المالية، المؤسسة الجامعية، بيروت.

8 . عز، عبد الحميد عادل، 1991 . أساسيات الرياضية للتجاريين (2)، مركز التعليم المفتوح، جامعة القاهرة.

9 . عبد ربه، إبراهيم، 1988 . الرياضيات المالية، دار النهضة العربية، بيروت.

10 . عبد ربه، إبراهيم، 1999 . رياضيات المال والاستثمار، مطبعة الإشعاع، الإسكندرية، مصر.

11 . العلي، إبراهيم، 1993 . الرياضيات الاقتصادية، جامعة تشرين، اللاذقية.