# الرياضيات الاقتصادية

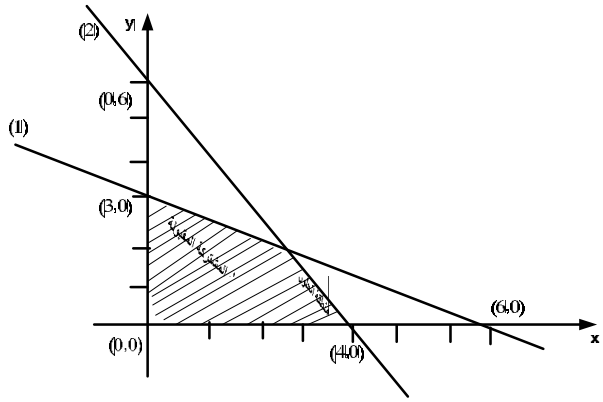
الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة تشرين
كلية الاقتصاد

# الرياضيات الاقتصادية

## تأليف

الدكتور
ابراهيم محمد العلي
أستاذ في قسم الإحصاء و البرمجة

الدكتور
عبدالهادي ممدوح الرفاعي
أستاذ في قسم الإحصاء و البرمجة




لطلاب السنة الثانية

1437-1438هـ
2016-2017م

| فهـرس المحتويات | رقـم الصفحة |
|---|---|
| **المقدمة** | **9** |
| **الفصل الأول**<br>**المتواليات** | **11** |
| 1-1- تعريف المتوالية. | 11 |
| 1-2- المتوالية الحسابية. | 12 |
| 1-3- المتوالية الهندسية. | 26 |
| **الفصل الثاني**<br>**نظام الفائدة البسيطة** | **37** |
| 2-1- حساب فائدة الإيداع وحصيلته . | 37 |
| 2-2- حساب القيمة الحالية والخصم . | 42 |
| 2-3- تسوية الديون قصيرة الأجل . | 48 |
| **الفصل الثالث**<br>**نظام الفائدة المركبة** | **53** |
| 3-1- حساب حصيلة إيداع المبالغ وفوائدها. | 53 |
| 3-2- حساب القيمة الحالية والخصم . | 63 |
| 3-3- تسوية الديون طويلة الأجل . | 68 |
| 3-4- حساب حصيلة الدفعات الدورية المتساوية . | 71 |
| 3-5- حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية . | 78 |

| | |
|---|---|
| 3-6- حسابات القروض طويلة الأجل وطرق تسديدها. | 84 |
| 3-7- حسابات الاستهلاك المنتظم. | 95 |
| 3-8- حسابات الاهتلاك. | 100 |
| 3-9- حسابات التكلفة الرأسمالية. | 106 |
| **الفصل الرابع**<br>**الأسهم والسندات والأسواق المالية** | **117** |
| 4-1- الأسهم. | 117 |
| 4-2- السندات الاستثمارية. | 127 |
| 4-3- الأسواق المالية. | 139 |
| 4-4- أهم المؤشرات العالمية في الأسواق المالية. | 150 |
| **الفصل الخامس**<br>**التوابع لمتحولَين و لعدة متحولات** | **161** |
| 5-1 تعريف التابع لمتحولَين. | 161 |
| 5-2- مجموعة (منطقة) تعريف التابع لمتحولَين. | 162 |
| 5-3- النهايات والاستمرار. | 164 |
| 5-4- المشتقات الجزئية. | 166 |
| 5-5- التفاضل الكلي للتابع لمتحولَين. | 171 |
| 5-6- النقاط الحرجة للتابع ذي المتحولَين. | 173 |
| 5-7- التوابع لعدة متحولات. | 184 |
| 5-8- تجانس التوابع. | 187 |
| **الفصل السادس**<br>**بعض التوابع الاقتصادية الهامة** | **193** |
| 6-1- توابع الإنتاج. | 193 |

| | |
|---|---|
| 6–2– تابع التكاليف. | 206 |
| 6–3– تابع المنفعة و سلوك المستهلك. | 210 |
| 6–4– توابع العرض و الطلب. | 215 |
| **الفصل السابع**<br>**نماذج المدخلات و المخرجات**<br>**( نموذج ليونيتيف )** | **223** |
| 7–1– نموذج ليونيتيف. | 223 |
| 7–2– خواص مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج $A$. | 232 |
| 7–3– المعاملات الكلية للإنتاج. | 233 |
| 7–4– تقدير قيم المعاملات الفنية للإنتاج في سنة قادمة. | 236 |
| 7–5– تأثير تغير المعاملات الفنية في المعاملات الكلية للإنتاج. | 239 |
| 7–6– تأثير تغير المعاملات الفنية للإنتاج في حجوم الإنتاج. | 243 |
| **الفصل الثامن**<br>**أسس البرمجة الخطية** | **245** |
| 8–1– المتراجحات. | 245 |
| 8–2– مفهوم البرمجة الخطية. | 252 |
| 8–3– حل مسائل البرمجة الخطية. | 256 |
| **الفصل التاسع**<br>**مبادئ التخطيط الشبكي** | **275** |
| 9–1– مقدمة وتعاريف. | 275 |
| 9–2– تحليل المخططات الشبكية بالنسبة للزمن. | 284 |
| **المصطلحات** | **301** |
| **المراجع** | **305** |

| | |
|---|---|
| **الملاحق** | **309** |
| **اللجنة العلمية** | **317** |

# المقدمة

## بسم الله الرحمن الرحيم

### المقدمة

يعتقد كثير من علماء الاقتصاد المعاصرين أن اتخاذ القرارات هو أساس العمل الإداري، أو التنفيذي، وفي أغلب الأحيان يرى المدراء، أو القائمون على العمل أن عملية اتخاذ القرار هي عملهم الأساس، لذا ينبغي عليهم وبصورة دائمة الإجابة عن الأسئلة التالية: ماذا ينبغي عمله؟ ومن الذي سيقوم بالعمل؟ وكيف، وأين، ومتى؟،...إلخ.

لقد شهدت السنوات الأخيرة تطورات متسارعة في استخدام الأساليب الكمية في اتخذا القرار، ويعود ذلك إلى النمو المتسارع أيضاً في استخدام الحاسوب، والتقنيات الحديثة في مجال إدارة العمل الاقتصادي.

من جهة أخرى، فإنه في أيامنا هذه لا يوجد من يشكك بأهمية الرياضيات في مجالات العلوم كافة. كما أن الأبحاث التي تستند إلى طرائق رياضية كمية في الدراسة والتحليل تكون أبحاثا قاصرة عن بلوغ أهدافها بشكل علمي صحيح. وبناءً عليه كان لابد لدارس الاقتصاد من أن يلم ببعض الطرائق والأساليب الرياضية، والكمية التي تساعده في أداء عمله بأكمل وجه عن طريق اتخاذ القرارات الصحيحة في الأماكن والأوقات الصحيحة.

لذلك تناولنا في هذا الكتاب مجموعة من الطرائق الرياضية الأكثر استخداماً من قبل الاقتصاديين والتي تساهم في تحليل المشكلات التي تواجههم وتعينهم في اتخاذ القرار. وقد حاولنا تناول المادة العلمية بأسلوب مبسط وواضح قدر الإمكان، دون الخوض في براهين رياضية معقدة، بالإضافة إلى إعطاء العديد من الأمثلة والحالات العملية لتحقيق المزيد من الفهم والاستيعاب من قبل الطالب.

# المقدمة

و مع أننا نلتزم بالعمل المشترك و الجماعي، فإننا ننوه إلى أن الأستاذ الدكتور إبراهيم محمد العلي قد قام بتأليف الفصل الثاني و الثالث و الرابع و التاسع، و قام الأستاذ الدكتور عبد الهادي الرفاعي بتأليف الفصل الأول و الخامس و السادس و السابع و الثامن

والله نسأل أن نكون قد وفقنا بتقديم مساهمة متواضعة للمكتبة العربية. وإننا إذ نضع هذا الكتاب بين أيدي زملائنا الأفاضل، وأبنائنا الطلاب الأعزاء، فإننا لا ندعي الكمال فيه، و سنكون شاكرين لكل من يزودنا بأية ملاحظة حول محتوياته وأسلوب إخراجه، حتى نتلافاها في الطبعات القادمة.

والله من وراء القصد

**اللاذقية: 2017/08/13 م**

المؤلفان

# الفصل الأول

# المتواليات

## 1-1- تعريف المتوالية:

تعرف المتوالية (أو المتتالية): بأنها مجموعة من الأعداد المرتبة (تسمى حدود المتوالية) و تولد من بعضها حسب علاقة رياضية محددة، و يمكن حساب قيمة كل عدد (كل حد) من هذه الحدود، إذا عُلم الرقم الذي يدل على ترتيب هذا الحد ضمن مجموعة الحدود. أو بشكل آخر، نقول عن مجموعة حدود (مجموعة من الأعداد)، بأنها تشكل متوالية من الشكل:

$$a_1, a_2, a_3, ....., a_k, ....., a_n$$

إذا كان كل حد من حدودها ينتج عن الحد الذي يسبقه (باستثناء الحد الأول) وفق علاقة رياضية محددة، أي بمعنى آخر، هناك علاقة رياضية ثابتة بين كل حدين متتاليين في الشكل السابق حتى يكوّن متوالية، وبناء عليه نسمي الرموز السابقة كما يلي:

$a_1$ الحد الأول للمتوالية

$a_2$ الحد الثاني للمتوالية

$a_k$ الحد العام للمتوالية

$a_n$ الحد الأخير للمتوالية

عندما يكون عدد الحدود n محدوداً ومعروفاً، فإننا نقول: إن المتوالية منتهية، أما إذا كان n عدداً غير محدود فإننا نقول: إن المتوالية غير منتهية.

نقول عن المتوالية: إنها متزايدة، إذا كانت حدودها متزايدة من الشكل:

$$a_1 < a_2 < a_3 < ..... < a_k < ..... < a_n$$

كما نقول عن المتوالية: إنها متناقصة، إذا كانت حدودها متناقصة من الشكل:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_k > \ldots\ldots > a_n$$

هناك عدة أنواع من المتواليات، نذكر منها: المتوالية الحسابية، والمتوالية الهندسية، والمتوالية التوافقية، والمتوالية الحسابية–الهندسية.

وسوف نقتصر على دراسة المتواليتين الحسابية و الهندسية فقط فيما يلي:

## 1-2- المتوالية الحسابية Arithmetical Progression:

نقول عن متوالية معينة: إنها متوالية حسابية إذا كان الفرق بين أي حد من حدودها (فيما عدا الحد الأول) والحد الذي يسبقه مباشرة، يساوي مقداراً ثابتاً، أو بمعنى آخر، إذا كان كل حد من حدود المتوالية (فيما عدا الحد الأول) ينتج عن الحد الذي يسبقه بإضافة مقدار ثابت. هذا المقدار الثابت يسمى أساس المتوالية الحسابية ويرمز له بـ r (حيث $r \neq 0$ لأن الصفر عنصر حيادي في عملية الجمع).

ما ذكر أعلاه يمكن أن نعبر عنه على الشكل الآتي:

حتى تشكل مجموعة حدود متوالية حسابية، يجب أن يكون:

$$a_k - a_{k-1} = r$$

حيث: $k = 2,3,\ldots,n$

فالمتوالية: $3, 7, 11, 15, 19, \ldots\ldots$

هي متوالية حسابية، لأن الفرق بين كل حدين متتاليين يساوي مقداراً ثابتاً:

$$\left.\begin{array}{l} 7-3=4 \\ 11-7=4 \\ 15-11=4 \\ 19-15=4 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 4$$

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية متزايدة، ومنه نستنتج أنه عندما يكون $r > 0$ تكون المتوالية الحسابية متزايدة.

أما المتوالية التالية: $25,22,19,16,\ldots\ldots$

فهي أيضاً متوالية حسابية؛ لأن الفرق بين كل حدين متتاليين يساوي مقداراً ثابتاً أيضاً:

$$\left.\begin{array}{l} 22-25=-3 \\ 19-22=-3 \\ 16-19=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow r=-3$$

وهذه المتوالية، هي متوالية متناقصة، وهنا نستنتج أيضاً أنه عندما يكون $r < 0$ تكون المتوالية الحسابية متناقصة.

أي إن هناك نوعين من المتواليات الحسابية، حسب قيمة أساس المتوالية وذلك على الشكل التالي:

1- المتوالية الحسابية المتزايدة وفيها يكون $r > 0$.

2- المتوالية الحسابية المتناقصة وفيها يكون $r < 0$.

ولا يمكن لأساس المتوالية الحسابية أن يساوي الصفر $r \neq 0$.

1-2-1- الحد العام للمتوالية الحسابية:

بقليل من التفكير واستناداً لتعريف المتوالية الحسابية، يمكننا أن نعبر أو نوجد كل حد من حدود المتوالية الحسابية بدلالة الحد الأول للمتوالية وأساس هذه المتوالية، وترتيب الحد المطلوب، وذلك على الشكل الآتي:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2 \cdot r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2 \cdot r + r = a_1 + 3 \cdot r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

و قياساً على ذلك نجد:

$$a_k = a_{k-1} + r = a_1 + (k-1) \cdot r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)\cdot r$$

حيث نسمي الحد $a_k$ بالحد العام للمتوالية و يعطى بالعلاقة التالية:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot r \qquad (1-1)$$

الحد العام للمتوالية الحسابية، يمكن تحديده إذا علم الحد الأول وأساس المتوالية الحسابية، وترتيب الحد المطلوب.

إذن، يمكننا معرفة قيمة أي حد في المتوالية الحسابية، إذا علمنا قيمة الحد الأول لها وأساسها، وترتيب ذلك الحد في المتوالية.

واستناداً للعلاقة (1-1) يمكننا إيجاد الحد الأخير في المتوالية الحسابية، ذي الترتيب n، وذلك على الشكل التالي:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \qquad (2-1)$$

**مثال (1-1):**

متوالية حسابية حدها الأول $a_1 = 8$ ، وأساسها $r = 3$، اكتب الحدود الأربعة الأولى، ثم اكتب الحد ذي الترتيب 20.

**الحل:**

$$a_1 = 8$$
$$a_2 = a_1 + r = 8 + 3 = 11$$
$$a_3 = a_1 + 2\cdot r = 8 + 2\cdot 3 = 14$$
$$a_4 = a_1 + 3\cdot r = 8 + 3\cdot 3 = 17$$

أما الحد العام لهذه المتوالية فهو:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot r$$

و هكذا نجد أن الحد ذا الترتيب 20 يساوي بعد استبدال k بـ 20 في الحد العام:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)\cdot r = 8 + (19)\cdot 3 = 65$$

بالعودة إلى العلاقة (1−1) $a_k = a_1 + (k-1)\cdot r$ نلاحظ أنها تحتوي أربعة متحولات هي:

$a_k$ الحد العام

$a_1$ الحد الأول

$k$ ترتيب الحد العام

$r$ أساس المتوالية

فإذا علمنا ثلاثة من هذه المتحولات يمكننا بعملية حسابية بسيطة معرفة المتحول الرابع.

**مثال (1−2):**

بفرض أنه في المتوالية المذكورة في المثال (1−1) كانت قيمة أحد الحدود تساوي 53 فما هو ترتيب هذا الحد.

**الحل:**

من الحد العام نلاحظ:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot r \Rightarrow 53 = 8 + (k-1)\cdot 3$$
$$53 = 8 + 3\cdot k - 3 \Rightarrow 53 = 5 + 3\cdot k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 48 = 3\cdot k \Rightarrow k = \frac{48}{3} = 16$$

أي إن ترتيب هذا الحد هو 16 في المتوالية المذكورة.

**مثال (1−3):**

بفرض أنه لدينا متوالية حسابية حدّها الأول $a_1 = 3$ وحدّها ذو الترتيب العشرون أي $a_{20} = 79$ فما هو أساس هذه المتوالية:

**الحل:**

نلاحظ أن:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot r$$
$$a_{20} = a_1 + (20-1)\cdot r$$
$$79 = 3 + 19\cdot r$$

$$76 = 19 \cdot r \Rightarrow r = \frac{76}{19} = 4$$

أي إن أساس المتوالية السابقة يساوي $r = 4$ .

**مثال (1-4):**

بفرض أنه في المثال السابق كان الحد الأول هو المجهول فيمكن إيجاده على الشكل الآتي:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$$
$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot r$$
$$\Rightarrow 79 = a_1 + 19 \cdot (4) \Rightarrow 79 = a_1 + 76$$
$$\Rightarrow a_1 = 79 - 76 = 3$$

وهو المطلوب.

## 1-2-2- مجموع حدود المتوالية الحسابية:

لكي نستطيع إيجاد مجموع حدود المتوالية الحسابية، لابد من إيجاد علاقة رياضية نستطيع من خلالها حساب هذا المجموع، ولكن قبل إيجاد مجموع حدود المتوالية الحسابية لنتعرف على الخاصية التالية التي تتمتع بها حدود المتوالية الحسابية.

**خاصية:**

إن مجموع أي حدين متناظرين (متقابلين) في المتوالية الحسابية يساوي مقداراً ثابتاً، وهذا المقدار الثابت يساوي مجموع الحدين الأول والأخير في المتوالية الحسابية. أي إن:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots\ldots$$

وهذا يمكننا التأكد منه على الشكل الآتي:

$$\left.\begin{aligned} a_1+a_n &= [a_1]+[a_1+(n-1)\cdot r] = 2\cdot a_1+(n-1)\cdot r \\ a_2+a_{n-1} &= [a_1+r]+[a_1+(n-2)\cdot r] = 2\cdot a_1+(n-1)\cdot r \\ a_3+a_{n-2} &= [a_1+2\cdot r]+[a_1+(n-3)\cdot r] = 2\cdot a_1+(n-1)\cdot r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (2-1)$$

وبذلك نجد أن المقادير السابقة جميعها متساوية، وتساوي $[2a_1+(n-1)r]$ وهو ما يثبت صحة الخاصية المذكورة أعلاه، والتي تقول: إن مجموع أي حدين متناظرين في المتوالية الحسابية يساوي مقداراً ثابتاً ويساوي $[2\cdot a_1+(n-1)\cdot r]$ وهو مجموع الحدين الأول والأخير في المتوالية الحسابية.

أما مجموع حدود المتوالية الحسابية فيمكن أن نوجده على الشكل الآتي:

لنرمز إلى مجموع حدود المتوالية الحسابية بالرمز $P_n$ (مجموع n حد الأولى من حدود المتوالية الحسابية)، أي إن:

$$P_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

لنكتب مجموع حدود المتوالية الحسابية مرتين، بعضها تحت بعض وبشكل متعاكس، مستفيدين من الخاصية التبديلية لعملية الجمع، فنجد:

$$P_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (I)$$
$$P_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1 \quad (II)$$

لنجمع المعادلتين السابقتين (I) (II) طرفاً إلى طرف، بحيث نأخذ مجموع كل حدين تحت بعضهما (متقابلين) معاً مستفيدين من الخاصية السابقة، فنحصل على الشكل التالي:

$$2\cdot P_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots\ldots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$$

نلاحظ أن الأزواج ( ضمن الأقواس) التي في الطرف الأيمن متساوية (حسب الخاصية المذكورة) وتساوي $(a_1 + a_n)$، عدد الأزواج (الأقواس) يساوي n ، لذلك يمكننا أن نكتب ما يلي:

$$2 \cdot P_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_2) \qquad (3-1)$$

وهي العلاقة التي تعطينا مجموع حدود المتوالية الحسابية، بدلالة الحد الأول والحد الأخير وعدد الحدود.

وباعتبار أن $(a_1 + a_n) = [2a_1 + (n-1)r]$ حسب الخاصية المذكورة أعلاه، فإننا نستطيع كتابة العلاقة (1−3) على الشكل الآتي:

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot r] \qquad (4-1)$$

وهذه العلاقة أيضاً تمكننا من حساب مجموع حدود المتوالية الحسابية بدلالة عدد حدود المتوالية وحدّها الأول وأساسها.

إن كلاً من العلاقتين (1−3) و (1−4) تحتويان على أربعة متحولات، إذا علمنا ثلاثة منها فيمكن حساب المتحول الرابع، بعملية حسابية بسيطة.

**مثال (1−5):**

أوجد مجموع حدود المتوالية الحسابية التالية:

3,7,11,15,……,43

**الحل:**

نلاحظ في هذه المتوالية الحسابية أن أساسها يساوي r = 4 أما عدد حدودها فيمكن حسابه بالاعتماد على العلاقة (1−2) حيث نجد:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 43 = 3 + (n-1) \cdot (4) \Rightarrow n = 11$$

أي إن عدد حدود المتوالية هو 11 حدّ، وبالتالي يمكن حساب مجموع حدود هذه المتوالية من خلال إحدى العلاقتين (1−3) أو (1−4).

فباستخدام العلاقة (1−3) نجد أن مجوع حدود هذه المتوالية يساوي:

$$P_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) \Rightarrow P_{11} = \frac{11}{2}\cdot(3+43) = 253$$

أما باستخدام العلاقة (1−4) فنجد أن مجموع حدود المتوالية المذكورة يساوي:

$$P_n = \frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1 + (n-1)\cdot r\right] \Rightarrow P_{11} = \frac{11}{2}\cdot\left[2\cdot(3) + (11-1)\cdot(4)\right] = 253$$

وهو المطلوب.

**مثال (1−6):**

متوالية حسابية حدها الأول $a_1 = 7$، وأساسها $r = 5$، ومجموع حدودها $P_n = 196$، أوجد عدد حدود هذه المتوالية $\text{n} = ?$ .

**الحل:**

باستخدام العلاقة (1−4) نجد أن:

$$P_n = \frac{n}{2}\cdot[2\cdot a_1 + (n-1)\cdot r] \Rightarrow 196 = \frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot(7) + (n-1)\cdot 5\right] \Rightarrow$$

$$196 = \frac{n}{2}\cdot(14 + 5\cdot n - 5) \Rightarrow 392 = 9\cdot n + 5\cdot n^2 \Rightarrow$$

$$5\cdot n^2 + 9\cdot n - 392 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ n بحلها نجد أن لها حلّين على الشكل التالي:

الحل الأول: $n = 8$ وهو العدد المطلوب أي إن عدد حدود المتوالية هو 8 حدود.

الحل الثاني: $n = -9.8$ وهو حل مرفوض؛ لأنه سالب وغير صحيح، إذ أن عدد حدود المتوالية الحسابية يجب أن يكون عدداً صحيحاً موجباً.

**مثال (1-7):**

بيّن فيما إذا كانت مجموعة الحدود الأربعة التالية تشكل فيما بينها متوالية حسابية، ثم أوجد أساس هذه المتوالية:

$$3\cdot c-2\cdot b,\ \ 4\cdot c-b,\ \ \ 5\cdot c,\ \ 6\cdot c+b$$

**الحل:**

لكي تشكل هذه الحدود متوالية حسابية يجب أن يكون الفرق بين كل حدين متتاليين يساوي مقداراً ثابتاً:

نلاحظ أن:

$$a_1 = 3\cdot c-2\cdot b$$
$$a_2 = 4\cdot c-b$$
$$a_3 = 5\cdot c$$
$$a_4 = 6\cdot c+b$$

وبالتالي يجب أن يكون:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3$$

أي:

$$(4\cdot c-b)-(3\cdot c-2\cdot b)=4\cdot c-b-3\cdot c+2\cdot b=c+b$$
$$(5\cdot c)-(4\cdot c-b)=5\cdot c-4\cdot c+b=c+b$$
$$(6\cdot c+b)-(5\cdot c)=6\cdot c+b-5\cdot c=c+b$$

نلاحظ أن الفرق ثابت بين كل حدين متتاليين ويساوي $c+b$، هذا يعني أن الحدود السابقة تشكل متوالية حسابية، وأساس هذه المتوالية يساوي $r=c+b$.

1-2-3- مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية:

إن متوالية الأعداد الطبيعية التالية :

$$1,2,3,4,.....,(n-2),(n-1),n$$

هي عبارة عن متوالية حسابية حدّها الأول $a_1 = 1$ وأساسها $r = 1$ وعدد حدودها n حد. لحساب مجموعها نطبق العلاقة (1−3) حيث:

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow p_n = \frac{n}{2} \cdot (1+n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (5-1)$$

وهي العلاقة التي تمكننا من حساب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى n.

**مثال(1−8):**

أوجد مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 100.

**الحل:**

باستخدام العلاقة (1−5) نجد:

$$P_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \Rightarrow P_{100} = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} =$$

$$P_{100} = \frac{10100}{2} = 5050$$

وهو المطلوب.

1−2−4− مجموع حدود متوالية الأعداد الفردية ومتوالية الأعداد الزوجية الطبيعية:

إن متوالية الأعداد الطبيعية الفردية: هي متوالية حسابية حدّها الأول $a_1 = 1$ وأساسها $r = 2$ وعدد حدودها n فيكون حدّها الأخير بدلالة ترتيب الحدود يساوي $a_n = 2n - 1$ .

أي إن حدودها هي:

$$1, 3, 5, 7, 9, ....., (2 \cdot n - 1)$$

ولإيجاد مجموع هذه الحدود الفردية، باستخدام العلاقة (1−3) نجد:

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow P_n = \frac{n}{2} \cdot [1 + (2 \cdot n - 1)] = n^2 \qquad (6-1)$$

**مثال (1−9):**

أوجد مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية الفردية المحصورة بين 1 و100.

**الحل:**

نلاحظ أن الحد الأول $a_1 = 1$ والحد الأخير $a_n = 99$ وعدد الحدود n=50.

وباستخدام العلاقة (1−6) نجد:

$$P_n = n^2 \Rightarrow P_{50} = 50^2 = 2500$$

أما متوالية الأعداد الطبيعية الزوجية: فهي أيضاً متوالية حسابية حدّها الأول $a_1 = 2$ وأساسها $r = 2$ وعدد حدودها n فيكون حدّها الأخير بدلالة ترتيب الحدود يساوي $a_n = 2n$ . أي إن حدودها هي:

$$2, 4, 6, 8, ....., (2 \cdot n)$$

ولإيجاد مجموع هذه الحدود الزوجية، باستخدام العلاقة (1−3) نجد:

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow P_n = \frac{n}{2} \cdot [2 + 2 \cdot n] = n \cdot (n+1) \qquad (7-1)$$

**مثال (1−10):**

أوجد مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية الزوجية المحصورة بين2 و100.

**الحل:**

نلاحظ أن الحد الأول $a_1 = 2$ والحد الأخير $a_n = 100$ وعدد الحدود n=50.

وباستخدام العلاقة (1−7) نجد:

$$P_n = n \cdot (n+1) \Rightarrow P_{50} = 50 \cdot (50+1) = 50 \cdot 51 = 2550$$

1−2−5− مجموع حدود متوالية مربعات الأعداد الطبيعية:

إن حدود هذه المتوالية تأخذ الشكل التالي:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ....., k^2, ....., n^2$$

الحقيقة أن هذه الحدود لا تشكل متوالية حسابية (ما هو السبب؟) ولكن يمكن إيجاد مجموع هذه الحدود على الشكل التالي:

لنكتب مجموع حدودها كما يلي:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ..... + n^2$$

لحساب هذا المجموع نستعين بالمتطابقة التالية:

$$k^3 - (k-1)^3 = k^3 - (k^3 - 3\cdot k^2 + 3\cdot k - 1) = 3\cdot k^2 - 3\cdot k + 1$$

لنعطِ في العلاقة الأخيرة المتحول k قيماً مختلفة من 1 حتى n فيكون:

$$\text{k} = 1 \text{ عندما } \Rightarrow 1^3 - 0^3 = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1$$

$$\text{k} = 2 \text{ عندما } \Rightarrow 2^3 - 1^3 = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1$$

$$\text{k} = 3 \text{ عندما } \Rightarrow 3^3 - 2^3 = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1$$

.....

$$\text{k} = \text{n} \text{ عندما } \Rightarrow n^3 - (n-1)^3 = 3\cdot n^2 - 3\cdot n + 1$$

نجمع شاقولياً حدود كل طرف على حدة في المعادلات السابقة فنجد:

$$n^3 = 3\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + ..... + n^2) - 3\cdot(1 + 2 + 3 + ..... + n) + n$$

$$n^3 = 3\cdot S_n - 3\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n$$

$$\Rightarrow 3\cdot S_n = n^3 + \frac{3}{2}\cdot n\cdot(n+1) - n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{3}\cdot\left[n^2 + \frac{3}{2}\cdot(n+1) - 1\right]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \qquad (8-1)$$

وهي العلاقة التي تعطينا مجموع حدود متوالية مربعات الأعداد الطبيعية.

**مثال (1-11):**

أوجد مجموع مربعات الأعداد الطبيعية التي تقع بين 1 و100.

**الحل:**

بتطبيق العلاقة (1-8) نجد:

$$S_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \Rightarrow S_{100} = \frac{100\cdot(100+1)\cdot(2\cdot100+1)}{6} =$$

$$S_{100} = \frac{100\cdot101\cdot201}{6} = \frac{2030100}{6} = 338350$$

وهو المطلوب.

1-2-6- مجموع حدود متوالية مكعبات الأعداد الطبيعية:

إن حدود هذه المتوالية تأخذ الشكل التالي:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, ....., k^3, ....., n^3$$

وهذه المتوالية أيضاً ليست متوالية حسابية، ولكن يمكن إيجاد مجموع حدودها على الشكل التالي:

لنكتب: $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ..... + n^3$

لحساب هذا المجموع نستعين بالمتطابقة التالية:

$$k^4 - (k-1)^4 = k^4 - (k^4 - 4\cdot k^3 + 6\cdot k^2 - 4\cdot k + 1) = 4\cdot k^3 - 6\cdot k^2 + 4\cdot k - 1$$

لنعطِ في العلاقة الأخيرة المتحول k قيماً مختلفة من 1 حتى n فيكون:

عندما $k = 1$ $\Rightarrow 1^4 - 0^4 = 4\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 - 1$

عندما $k = 2$ $\Rightarrow 2^4 - 1^4 = 4\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 1$

عندما $k = 3$ $\Rightarrow 3^4 - 2^4 = 4\cdot 3^3 - 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 - 1$

.....

$$\text{عندما } k = n \Rightarrow n^4 - (n-1)^4 = 4\cdot n^3 - 6\cdot n^2 + 4\cdot n - 1$$

نجمع شاقولياً حدود كل طرف على حدة في المعادلات السابقة فنجد:

$$n^4 = 4\cdot\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3\right) - 6\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2\right) +$$
$$+ 4\cdot\left(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n\right) - n$$

نلاحظ أن ما داخل القوس الأول هو $\sigma_n$ وما داخل القوس الثاني هو $S_n$، وما داخل القوس الثالث هو $P_n$، وباستبدال كل منها بما يساويه نجد:

$$n^4 = 4\cdot\sigma_n - 6\cdot S_n + 4\cdot P_n - n$$
$$\Rightarrow n^4 = 4\cdot\sigma_n - 6\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} + 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - n$$

فيكون:

$$4\cdot\sigma_n = n^4 + n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1) - 2\cdot n\cdot(n+1) + n$$
$$4\cdot\sigma_n = n^4 + 2\cdot n^3 + 3\cdot n^2 + n - 2\cdot n^2 - 2\cdot n + n$$
$$4\cdot\sigma_n = n^4 + 2\cdot n^3 + n^2 = n^2\cdot\left(n^2 + 2\cdot n + 1\right)$$
$$\sigma_n = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (9-1)$$

وهي العلاقة التي تعطينا مجموع حدود متوالية مكعبات الأعداد الطبيعية.

**مثال (1-12):**

أوجد مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية التي تقع بين 1و 100.

**الحل:**

بتطبيق العلاقة (1-9) نجد:

$$\sigma_n = \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2 \Rightarrow \sigma_{100} = \left[\frac{100\cdot(100+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{100\cdot 101}{2}\right]^2$$

$$\sigma_{100} = \left(\frac{10100}{2}\right)^2 = (5050)^2 = 25502500$$

وهو المطلوب.

**ملاحظة 1:**

بمقارنة كلاً من العلاقتين (1−5) و (1−9) نجد:

$$\sigma_n = \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2 = (P_n)^2$$

أي إن مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية يساوي مربع مجموع الأعداد الطبيعية.

## 1−3− المتوالية الهندسية Geometrical Progression:

نقول عن مجموعة حدود من الشكل:

$$a_1, a_2, a_3, ....., a_k, ....., a_n$$

إنها تشكل متوالية هندسية، إذا كان حاصل قسمة كل حد (عدا الحد الأول) على الحد الذي يسبقه مباشرة يساوي مقداراً ثابتاً، أي إذا كانت نسبة كل حدين متتاليين تساوي مقداراً ثابتاً q يسمى أساس المتوالية الهندسية حيث ($q \neq 1$، و $q \neq 0$)، أو بشكل آخر: نقول عن مجموعة الحدود السابقة إنها تشكل متوالية هندسية، إذا كان كل حد (عدا الحد الأول) ينتج من الحد الذي يسبقه، بضرب الحد السابق بمقدار ثابت q أساس المتوالية الهندسية حيث ($q \neq 1$، و $q \neq 0$).

ويمكننا أن نعبر عن ما ذكر أعلاه على الشكل التالي:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \qquad (10-1)$$

أو بشكل آخر:

$$a_k = a_{k-1}\cdot\ q \qquad (11-1)$$

**مثال (1-13):**

أوجد نوع المتوالية التالية، ثم أوجد أساسها:

7, 14, 28, 56, 112,.....

**الحل:**

نلاحظ أن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس ثابتاً، مما يدل على أن المتوالية ليست حسابية، ولو أوجدنا نسبة كل حدين متتاليين نجد:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{14}{7}=2$$
$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{28}{14}=2$$
$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{56}{28}=2$$
$$\frac{a_5}{a_4}=\frac{112}{56}=2$$

نلاحظ أن نسبة أي حدين متتاليين ثابتة وتساوي 2،إذن المتوالية هي متوالية هندسية، وأساسها $q=2$.

أو بشكل آخر نجد أن:

$$a_2=a_1\cdot 2=7\cdot 2=14$$
$$a_3=a_2\cdot 2=14\cdot 2=28$$
$$a_4=a_3\cdot 2=28\cdot 2=56$$
$$a_5=a_4\cdot 2=56\cdot 2=112$$

أي إن كل حد ينتج عن الحد الذي يسبقه مباشرة بعد ضربه بالعدد (2)، أي إن المتوالية هي متوالية هندسية، وأساسها $q=2$.

**ملاحظة 2:**

ذكرنا أعلاه أن أساس المتوالية الهندسية $q\neq 1$ وذلك لأن الواحد هو عنصر حيادي بالنسبة لعملية الضرب.

كما ذكرنا أن أساس المتوالية الهندسية $q \neq 0$ وذلك لأن الصفر هو عنصر ماص بالنسبة لعملية الضرب.

1-3-1- أنواع المتوالية الهندسية:

يمكننا التمييز بين أربعة أنواع للمتوالية الهندسية، وذلك حسب أساس المتوالية الهندسية، وذلك على الشكل الآتي:

أ- إذا كان أساس المتوالية أكبر من الواحد $q > 1$ تكون المتوالية الهندسية متزايدة كالمتوالية التالية:

$$3, 9, 27, 81, 243, \ldots\ldots$$

حيث أن:

$$q = 3 \text{ أي إن } q > 1$$

ب- إذا كان أساس المتوالية $0 < q < 1$، تكون المتوالية الهندسية متناقصة، كالمتوالية التالية:

$$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حيث أن:

$$q = \frac{1}{3} \text{ أي إن } 0 < q < 1$$

جـ- أما إذا كان أساس المتوالية $-1 < q < 0$، فتكون المتوالية الهندسية متناوبة الإشارة ولكنها بالقيمة المطلقة متناقصة، كالمتوالية التالية:

$$-27, 9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

حيث أن:

$$q = -\frac{1}{3} \text{ أي إن } -1 < q < 0$$

وسميت المتوالية متناوبة الإشارة، لأن حدودها تتناوب بين السالب والموجب.

د- عندما يكون $q<-1$ تكون المتوالية الهندسية أيضاً متناوبة الإشارة، ولكنها بالقيمة المطلقة تكون متزايدة، كالمتوالية التالية:

$$1,-3,9,-27,81,-243,.....$$

حيث: $q=-3$ أي إن $q<-1$

1-3-2- الحد العام للمتوالية الهندسية:

نلاحظ من خلال تعريف المتوالية الهندسية المذكور أعلاه أننا نستطيع كتابة أي حد من حدود المتوالية الهندسية بدلالة الحد الأول، وأساس المتوالية، وترتيب الحد المطلوب، حيث نجد:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$.....$$
$$a_k = a_{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1}$$
$$.....$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

وبالتالي نجد أنه يمكن كتابة حدود المتوالية الهندسية على الشكل التالي:

$$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, ....., a_1 \cdot q^{k-1}, ....., a_1 \cdot q^{n-1}$$

يسمى الحد $a_k$ بالحد العام للمتوالية الهندسية، وهو يساوي حسب ما ورد أعلاه ما يلي:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \qquad (12-1)$$

كما يمكن حساب الحد الأخير في المتوالية الهندسية المنتهية على الشكل التالي:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad (13-1)$$

إن كل من العلاقتين السابقتين (1–12) و(1–13) تحتوي على أربعة متحولات إذا عرفنا منها ثلاثة متحولات يمكننا معرفة المتحول الرابع بعملية حسابية بسيطة (مع الانتباه إلى أننا نضطر أحياناً للاستعانة باللوغاريتم لإيجاد قيمة أساس المتوالية الهندسية أو ترتيب الحد المطلوب)

**مثال (1–14):**

متوالية هندسية حدها الأول $a_1 = 2$ وحدها الخامس $a_5 = 162$ أوجد أساس هذه المتوالية.

**الحل:**

بالاعتماد على العلاقة (1–12) نلاحظ أن:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \Rightarrow 162 = 2 \cdot q^{5-1} = 2 \cdot q^4$$

$$\Rightarrow 81 = q^4 \Rightarrow \log 81 = 4 \cdot \log q \Rightarrow$$

$$\log q = \frac{\log 81}{4} = \frac{1.908485}{4} = 0.477121$$

$$\Rightarrow q = 10^{\log q} = 10^{0,477121} = 3$$

أي إن أساس هذه المتوالية الهندسية يساوي $q = 3$ وهو المطلوب.

**ملاحظة 3:**

نلاحظ في المثال السابق أننا استخدمنا اللوغاريتم العشري، وكان بإمكاننا أيضاً–استخدام اللوغاريتم الطبيعي (النيبري).

**مثال (1–15):**

لدينا متوالية هندسية حدها الأول $a_1 = 4$، وأساسها $q = 3$ ، وحدها الأخير $a_n = 8748$، المطلوب: إيجاد عدد حدود هذه المتوالية.

**الحل:**

اعتماداً على العلاقة (1–13) نلاحظ:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 8748 = 4 \cdot 3^{n-1}$$
$$\Rightarrow 2187 = 3^{n-1} \Rightarrow \log 2187 = (n-1)\log 3 \Rightarrow$$
$$(n-1) = \frac{\log 2187}{\log 3} = \frac{3.339848}{0.477121} = 7$$
$$\Rightarrow n = 7+1 = 8$$

أي إن عدد حدود هذه المتوالية هو $n = 8$ حدود وهو المطلوب.

1-3-3- مجموع حدود المتوالية الهندسية:

لابد لإيجاد مجموع حدود المتوالية الهندسية من إيجاد علاقة رياضية تمكننا من الحصول على مجموع هذه الحدود بدون إيجاد الحدود ذاتها. وهذه العلاقة التي تمكننا من إيجاد مجموع حدود المتوالية الهندسية نحصل عليها على الشكل الآتي:

لنرمز لمجموع حدود المتوالية الهندسية بالرمز $G_n$، حيث المتوالية مؤلفة من n حد، فيكون:

$$G_n = a_1 + a_2 + a_3 + ..... + a_k + ..... + a_n$$

فإذا عوضنا عن كل حد بما يساويه من خلال الحد العام للمتوالية الهندسية تصبح العلاقة السابقة عن الشكل الآتي:

$$G_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ..... + a_1 \cdot q^{k-1} + ..... + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (\text{I})$$

نضرب طرفي المعادلة ( I ) بأساس المتوالية الهندسية q فنجد:

$$q \cdot G_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ..... + a_1 \cdot q^k + ..... + a_1 \cdot q^n \quad (II)$$

بطرح المعادلة ( I ) من المعادلة ( II ) نجد:

$$q \cdot G_n - G_n = a_1 q^n - a_1$$
$$G_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

وبالتالي نجد أن:

$$G_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (14-1)$$

وهو قانون مجموع حدود المتوالية الهندسية، بدلالة الحد الأول وأساس المتوالية، وعدد حدود المتوالية.

**ملاحظة 4:**

إن العلاقة (1−14) تحتوي على أربعة متحولات، فإذا عرف منها ثلاثة أمكننا حساب المتحول الرابع بعملية حسابية بسيطة، وقد نضطر إلى استخدام اللوغاريتم عند حساب عدد الحدود أو أساس المتوالية الهندسية.

**مثال (1− 16):**

المثال التقليدي الذي يمكن إيراده على حساب مجموع حدود المتوالية الهندسية هو التالي:

عندما قام مخترع لعبة الشطرنج باختراع هذه اللعبة، عرض عليه حاكم البلاد في ذلك الوقت أن يختار المكافأة التي يريد، فطلب المخترع أن يوضع له في المربع الأول من رقعة الشطرنج حبة قمح واحدة، ثم يضاعف العدد في المربع الثاني، ومن ثم يضاعف هذا العدد في المربع الثالث، وهكذا، بحيث يوضع ضعف العدد لكل مربع في المربع التالي له، ثم يأخذ المخترع مجموع حبات القمح الموجودة على رقعة الشطرنج، فعجز الحاكم عن الوفاء بهذه المكافأة. فما هو السبب؟

**الحل:**

إن عجز الحاكم عن الوفاء بوعده كان بسبب العدد الكبير لحبات القمح التي يجب أن توضع على رقعة الشطرنج، حيث إن هذا العدد كان عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $a_1 = 1$، وأساسها $q = 2$، وعدد

حدودها $n = 64$ (عدد المربعات في رقعة الشطرنج) فكان العدد المطلوب يساوي بالاعتماد على العلاقة (1−14):

$$G_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$G_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1} = 2^{64} - 1 \approx 1.8446744 \cdot 10^{19}$$

وهذا العدد الكبير جعل الحاكم عاجزاً عن الوفاء بما وعد به مخترع الشطرنج.

**مثال (1−17):**

متوالية هندسية حدّها الأول $a_1 = 3$، وأساسها $q = 2$ ، ومجموع حدودها $G_n = 189$، فما هو عدد حدود هذه المتوالية؟

**الحل:**

$$G_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow 189 = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow 63 = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow 64 = 2^n \Rightarrow \log 64 = n \cdot \log 2 \Rightarrow$$

$$n = \frac{\log 64}{\log 2} = \frac{1.8061799}{0.30102999} = 6$$

أي إن عدد حدود هذه المتوالية الهندسية يساوي n = 6 حدود.

**ملاحظة 5:**

إن عملية إيجاد أساس المتوالية بالاعتماد على العلاقة (1−14) معقدة قليلاً وتحتاج إلى حل معادلات من درجات أعلى من الثانية، ولن نتطرق لهذا الأمر في هذا الفصل.

**مثال (1− 18):**

أوجد قيمة المتحول x حتى تشكل الحدود الثلاثة التالية فيما بينها متوالية هندسية.

$$2\cdot x-5,\quad x-4,\quad 10-3\cdot x$$

**الحل:**

حتى تشكل الحدود السابقة متوالية هندسية يجب أن يكون:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$$

بمعنى:

$$\frac{x-4}{2\cdot x-5}=\frac{10-3\cdot x}{x-4}$$

أو بشكل آخر:

$$(x-4)\cdot(x-4)=(2\cdot x-5)\cdot(10-3\cdot x)$$

$$x^2-8\cdot x+16=-6\cdot x^2+35\cdot x-50$$

و بالتالي يكون:

$$7\cdot x^2-43\cdot x+66=0$$

إن المعادلة الأخيرة التي حصلنا عليها، هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x نقوم بحلها فنحصل على قيمتين لـ x ، هما $x=3$ أو $x=\frac{22}{7}$

وبالتالي يكون لدينا متواليتان حسب قيمة x هما:

الأولى: عندما $x=3$، والمتوالية هي $1,-1,1$ وفيها $q=-1$

الثانية: عندما $x=\frac{22}{7}$، والمتوالية هي $\frac{4}{7},\frac{-6}{7},\frac{9}{7}$ وفيها $q=\frac{-2}{3}$.

1- 3-4- مجموع حدود المتوالية الهندسية غير المنتهية:

عندما يكون عدد حدود المتوالية الهندسية كبيراً جداً (غير منته)، أي إذا كان $n=\infty$، فلحساب مجموعها نميز بين حالتين حسب قيمة q أساس المتوالية.

*-الحالة الأولى:*

إذا كان أساس المتوالية $q>1$ فإن مجموعها أيضاً ينتهي في هذه الحالة إلى $\infty$ أي $G_\infty \to \infty$ (لأن أي عدد أكبر من الواحد إذا رفع للأس $\infty$ فإنه يساوي $\infty$) وبالتالي فإن المجموع العام للمتوالية الهندسية يصبح غير منته $G_\infty \to \infty$.

*-الحالة الثانية:*

إذا كان أساس المتوالية $0<q<1$ فإن مجموعها يعطى بالعلاقة التالية استناداً إلى العلاقة (1-14):

$$G_n = a_1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q-1} \Rightarrow G_\infty = a_1 \cdot \frac{\lim_{n\to\infty} q^\infty - 1}{q-1}$$

و بما أن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ لأن $0<q<1 \Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} q^\infty = 0$ إذن:

$$G_\infty = a_1 \cdot \frac{0-1}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

أي إن مجموع حدود المتوالية الهندسية غير المنتهية في هذه الحالة يساوي:

$$G_\infty = \frac{a_1}{1-q} \qquad (15-1)$$

**مثال (1-19):**

أوجد مجموع حدود المتوالية الهندسية غير المنتهية التالية:

$$2,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32},\ \ldots\ldots\ldots$$

**الحل:**

نلاحظ أن حدها الأول $a_1 = 2$، وأساسها $q = \frac{1}{4}$ ، و بما أنها غير منتهية و أن $0<q<1$ نستخدم العلاقة (1-15)، فنجد أن مجموع حدود هذه المتوالية الهندسية يساوي:

$$G_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow G_\infty = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

## تمارين غير محلولة على الفصل الأول

1) اكتب الحدود السبعة الأولى للمتوالية الحسابية التي حدها الأول $a_1 = 4$، وأساسها $r = 5$، ثم اكتب حدها العام.

2) أوجد أساس المتوالية التالية، ثم اكتب حدها العام، وأوجد حدها العاشر.

$$17,\ 13,\ 9,\ 5,\ \ldots\ldots\ldots$$

ثم أوجد مجموع الحدود العشرين الأولى لهذه المتوالية.

3) بفرض أنه لدينا المتوالية التالية:

$$2,6,\ 10,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ 38$$

أوجد عدد حدود هذه المتوالية، ثم أوجد مجموعها.

4) أوجد نوع المتوالية التالية، ثم أوجد أساسها، وحدها العام، ومجموعها.

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots\ldots\ldots,1024$$

5) متوالية هندسية حدها الأول $a_1 = 3$، وأساسها $q = 3$ ، وحدها الأخير $a_n = 2187$، أوجد عدد حدودها ثم أوجد مجموعها.

6) متوالية هندسية حدها الأول $a_1 = 3$، وأساسها $q = 4$ ، ومجموع حدودها $G_n = 4095$، أوجد عدد حدودها.

7) أوجد مجموع حدود المتوالية غير المنتهية التالية:

$$3\ ,\ \ 1\ ,\ \ \frac{1}{3}\ ,\ \ \frac{1}{9}\ ,\ldots\ldots\ldots$$

8) أوجد مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1و 50 ، و مجموع مربعاتها و مجموع مكعباتها و مجموع الأعداد الفردية منها فقط، و كذلك مجموع الأعداد الزوجية منها فقط.

# الفصل الثاني

# نظام الفائدة البسيطة

## 2-1- حساب فائدة الإيداع وحصيلته (بفائدة بسيطة)

2-1-1- تعاريف أولية:

أ – المبلغ المودع: هو المبلغ الأصلي الذي يقوم الشخص بإيداعه في المصرف، أو عند أحد الناس مقابل فائدة محددة، ونرمز لهذا المبلغ بالرمز k.

ب – سعر الفائدة السنوي: وهو النسبة المئوية التي يستحقها المودع على المبلغ الأصلي k مقابل إيداعه لمدة سنة كاملة، ونرمز لسعر الفائدة السنوي بالرمز p، ويكون عادةً نسبة مئوية مثل 8%، أو 9%، أو غير ذلك.

جـ- مدة الإيداع: وهي الفترة الزمنية التي يودع بها المبلغ الأصلي، وتحسب بالسنوات، وإذا كانت المدة أقل من سنة، أو تشمل أجزاء أخرى من السنة، فيتم حسابها بالأيام، ثم تحويلها إلى سنوات بتقسيمها على 365 يوماً (أو على 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة)، علماً أن يوم الإيداع لا يدخل في حساب المدة، بينما يدخل يوم السحب في حساب مدة الإيداع. ويمكن الاستعانة بجدول الأرقام التراكمية لأيام السنة عند حساب مدة الإيداع، وتحسب من العلاقة: **مدة الإيداع = رقم يوم السحب – رقم يوم الإيداع.**

أما إذا كانت المدة مؤلفة من أشهر صحيحة فيتم تحويلها إلى سنوات بتقسيمها على 12 ، ونرمز للمدة الزمنية المحسوبة بالسنوات بالرمز n.

د- مقدار الفائدة الصحيحة: وهو المبلغ الإضافي الذي يستحقه المودع مقابل إيداع المبلغ الأصلي k لمدةٍ ما؛ وهو يحسب بنفس الوحدات النقدية للمبلغ الأصلي k، وعندها تحسب السنة 365 يوماً (أو 366 يوماً إذا كانت السنة كبيسة)، أي لحساب المدة بالسنوات نقسم عدد الأيام على 365 يوماً.

هـ- مقدار الفائدة التجارية: وهو المبلغ الإضافي الذي يستحقه المودع مقابل إيداع المبلغ الأصلي k لمدةٍ ما؛ وذلك عندما تحسب السنة 360 يوماً فقط.أي لحساب المدة بالسنوات يتم تقسيم عدد الأيام على 360 يوماً .

2-1-2- حساب مقدار الفائدة الصحيحة المستحقة لمبلغ واحد *k*:

إن مقدار الفائدة المستحقة لمبلغ ما يتأثر بعدة عوامل هي:

سعر الفائدة السنوية p، وحجم المبلغ الأصلي k، ومدة الإيداع n بالسنوات، وبما أننا نقوم بإجراء الحسابات على أساس نظام الفائدة البسيطة نجد أنه:

في نهاية السنة الأولى يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه k.p.1 ليرة سورية.

وفي نهاية السنة الثانية يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه k.p.2 ليرة سورية.

وفي نهاية السنة الثالثة يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه k.p.3 ليرة سورية.

.....

وفي نهاية السنة *n* يبلغ مقدار الفائدة المستحقة عليه k.p.n ليرة سورية.

فإذا رمزنا لمقدار الفائدة الصحيحة المستحقة عند إيداع مبلغ *k* بفائدة سنوية *p* لمدة *n* بالرمز *In*، فإننا نحصل على العلاقة التالية:

$$In = k \cdot p \cdot n \qquad (1-2)$$

وهي معادلة تتضمن أربعة متحولات؛ إذا عرفنا ثلاثة منها نستطيع حساب الرابع.

**مثال (2-1):**

احسب مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 5000 ليرة سورية بفائدة 8% ولمدة 3 سنوات.

**الحل:**

لدينا: k=5000، و p=0.08، و n=3 ، ولكن $In = ?$

وبذلك نجد:

$$In = 5000 \cdot 0.08 \cdot 3 = 1200 \quad L.S.$$

2-1-3- حساب مقدار الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ واحد:

إن حساب الفائدة التجارية يختلف عن حساب الفائدة الصحيحة بسبب طريقة حساب مدة الإيداع ، حيث إن التجار في السوق يعتبرون أن السنة مؤلفة من 360 يوماً فقط، وبذلك فإنهم عندما يحولون المدة المحسوبة بالأيام إلى سنوات يقسمون عدد الأيام على 360 يوماً فقط. فإذا رمزنا لعدد أيام مدة الإيداع بـ D، فإن مدة الإيداع بالسنوات تصبح مساوية لـ $nt = \frac{D}{360}$ وتسمى بالمدة التجارية ، وبذلك تأخذ العلاقة (2-1) الشكل التالي:

$$It = k \cdot p \cdot \frac{D}{360} = k \cdot p \cdot nt \qquad (2-2)$$

ولإيجاد العلاقة التي تربط بين المقدارين نقسم بعضهما على بعض فنجد أن:

$$\frac{It}{In} = \frac{k \cdot p \cdot \frac{D}{360}}{k \cdot p \cdot \frac{D}{365}}$$

$$\frac{It}{In} = \frac{365}{360}$$

$$\frac{It}{In} = \frac{73}{72} \qquad (3-2)$$

وهنا نلاحظ أن مقدار الفائدة التجارية $It$ أكبر من مقدار الفائدة الصحيحة $In$ لأنه يساوي $In$مضروباً بعدد أكبر من الواحد $\left(\frac{73}{72} > 1\right)$،

**ملاحظة 1:**

إذا كانت المدة محسوبة بالأشهر فإن الفائدة تكون تجارية ، لأن ذلك يعتبر الأشهر جميعها متساوية وكلاً منها يساوي 30 يوماً وبذلك تعتبر السنة مؤلفة من $30 \cdot 12 = 360$ يوماً .

**مثال (2-2):**

أوجد مقدار الفائدة الصحيحة ثم التجارية لمبلغ 15000 ليرة سورية أودع لمدة 260 يوماً بفائدة سنوية بسيطة قدرها 9%، ثم احسب نسبة كلٍ منهما إلى الآخر.

**الحل:**

لدينا k=15000، p=0,09،

ولدينا المدة الحقيقية $n=\frac{260}{365}$ ولكن $In=?$

ولدينا المدة التجارية $nt=\frac{260}{360}$ ولكن $It=?$

وبتعويض هذه المعطيات في العلاقتين (2−1) ثم في (2−2) فنجد أن:

$$In=15000(0.09)\frac{260}{365}=961.64\,L.S.$$

$$It=15000(0.09)\frac{260}{360}=975\,L.S.$$

ونجد أن النسبة بينهما تساوي:

$$\frac{It}{In}=\frac{975}{961.64}=1.01389$$

وهنا نلاحظ أن مقدار الفائدة التجارية المستحقة $It$ أكبر من مقدار الفائدة الصحيحة $In$، وهذا ما أشرنا إليه بشكل عام في الملاحظة السابقة.

2−1−4− حساب الحصيلة الصحيحة لإيداع مبلغ واحد k:

إن حصيلة مبلغ واحد k أودع لمدة n عاماً وبفائدة بسيطة سنوية p يساوي ذلك المبلغ k مضافاً إليه مقدار الفائدة المستحقة عليه In. وإذا رمزنا لحصيلة المبلغ k بعد n عاماً بالرمز Sn ، يكون لدينا:

$$Sn=k+In \qquad (4-2)$$

وبما أن $In=k\cdot p\cdot n$ نجد أن:

$$Sn=k+k\cdot p\cdot n$$

$$\Rightarrow Sn=k\,(1+p\cdot n) \qquad (5-2)$$

وهي علاقة تتضمن أربعة متحولات إذا عرفنا منها ثلاثة أمكننا حساب الرابع.

**مثال (2−3):**

أوجد حصيلة مبلغ 12000 ليرة سورية أودع لمدة 3 سنوات بفائدة بسيطة 8%.

**الحل:**

لدينا k=12000، p=0.08، n=3، ولكن Sn=?.

من (2-5) نجد أن حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$Sn = 12000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100} \cdot 3\right) = 14880\, L.S.$$

2-1-5- حساب حصيلة عدة مبالغ:

لنفترض أن أحدهم أودع عدة مبالغ $k_1$ و $k_2$ و $k_3$ و $k_4$ ، وذلك بأسعار فائدة سنوية مختلفة أو متساوية، ولتكن $p_1$ و $p_2$ و $p_3$ و $p_4$ ، ولمدد زمنية محسوبة بالسنوات، ولتكن $n_1$ و $n_2$ و $n_3$ و $n_4$، فما هي حصيلة هذه المبالغ في لحظة السحب؟

إن حصيلة هذه المبالغ تساوي مجموع حصائل المبالغ المختلفة، فإذا رمزنا للحصيلة الإجمالية بالرمز S، فإنه يكون لدينا:

$$S = Sn_1 + Sn_2 + Sn_3 + Sn_4 + .....$$

وهي مساوية من جهة أخرى لمجموع المبالغ مضافاً إليها إجمالي الفوائد المستحقة عليها، لأنه يمكننا كتابة S كما يلي:

$$S = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \cdots\cdots + In_1 + In_2 + In_3 + In_4 + \cdots\cdots \qquad (6-2)$$

**مثال (2-4):**

أودع أحمد مبلغ 5000 ليرة سورية بتاريخ 2002/2/15، بفائدة سنوية 7%.

ثم أودع مبلغ 3000 ليرة سورية بتاريخ 2002/4/25، بفائدة سنوية 8%.

ثم أودع مبلغ 4000 ليرة سورية بتاريخ 2002/11/9 بفائدة سنوية 9%.

فما هي حصيلة هذه المبالغ بتاريخ 2002/12/31؟

**الحل:**

نلاحظ أنه في البداية علينا حساب مدد الإيداع بالأيام ثم تحويلها إلى سنوات، فنجد من جدول الأرقام التراكمية لأيام السنة أن:

$$D_1 = 365 - 46 = 319 \Rightarrow n_1 = \frac{319}{365}$$

$$D_2 = 365 - 115 = 25 \Rightarrow n_2 = \frac{250}{365}$$

$$D_3 = 365 - 313 = 52 \Rightarrow n_3 = \frac{52}{365}$$

$$In_1 = k_1 \cdot p_1 \cdot n_1 = 5000 \cdot \frac{7}{100} \cdot \frac{319}{365} = 305.89\, L.S.$$

$$In_2 = k_2 \cdot p_2 \cdot n_2 = 3000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{250}{365} = 164.38\, L.S.$$

$$In_3 = k_3 \cdot p_3 \cdot n_3 = 4000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{52}{365} = 51.29\, L.S.$$

وبذلك نجد أن:

$$S = 5000 + 3000 + 4000 + 305.89 + 164.38 + 51.29 = 12521.56\, L.S.$$

## 2-2- حساب القيمة الحالية والخصم (بفائدة بسيطة)

### 2-2-1- مفاهيم عامة:

إن مفهوم القيمة الحالية يأتي من مفهوم القيمة الاسمية، وإن المفهومين معاً مرتبطان بعمليات الديون والقروض. فمثلاً، إذا استدان أحدهم مبلغ 1000 ليرة سورية من تاجر لفترة ما، فإن ذلك التاجر (الدائن) سيحرر على المدين سنداً بقيمة مالية أكبر من مبلغ الدين المذكور (1000 ليرة سورية)، وذلك لأن الدائن سيقوم بإضافة الفائدة المستحقة وحساب حصيلة ذلك الدين عند تاريخ الاستحقاق المتفق عليه، وبسعر الفائدة السائد أو المتفق عليه أيضاً. وإذا فرضنا أن مدة ذلك القرض 7 أشهر، وأن سعر الفائدة 9%، فإن حصيلة ذلك الدين بعد 7 أشهر تساوي:

$$S = 1000\left(1 + \frac{9}{100} \cdot \frac{7}{12}\right) = 1135\ L.S.$$

وهكذا نجد أن الدائن سيقوم بتحرير سند على المدين بقيمة 1135 ليرة سورية، وسيسلمه مبلغ 1000 ليرة سورية فقط، وسيثبت على ذلك السند تاريخ الاستحقاق بعد

7 أشهر من تاريخه. ثم يطلب من المدين والشهود التوقيع على السند المحرر؛ وبذلك يأخذ السند صفة قانونية تمكن الدائن من تحصيله عبر المؤسسات القانونية.

وهكذا نجد أن القيمة الحالية لذلك السند هي مبلغ الدين 1000 ليرة سورية، وأن القيمة الاسمية هي القيمة المسجلة عليه، وتبلغ 1135 ليرة سورية. ولكن القيمة الحالية لذلك السند لا تبقى ثابتة، بل تتغير بعد مرور أي فترة زمنية، فإذا أراد المدين تسوية هذا الدين وتسديده قبل 5 أشهر من تاريخ استحقاقه، فإن قيمته الحالية حينها ستساوي مبلغاً آخر يسمى القيمة الحالية في تاريخ التسوية أو الخصم أو القطع، لذلك سيطالب الدائن بخصم مبلغ معين من القيمة الاسمية المسجلة على السند.

وهكذا نجد أن مفهوم القيمة الحالية لأي مبلغ تأتي من مفهوم القيمة الاسمية المؤجلة الدفع لذلك المبلغ، وهما أمران مرتبطان بالديون وسنداتها التي تستحق الدفع في مواعيد معينة في المستقبل، ويراد تسويتها ودفعها قبل مواعيدها، وسنورد لاحقاً بعض التعاريف الضرورية المتعلقة بهذا الأمر.

* القيمة الاسمية للدين: هي القيمة المستحقة الدفع للدائن في تاريخ الاستحقاق والمثبتة على السند الخاص بذلك، مثل القيمة 1135 ليرة سورية.

* تاريخ الاستحقاق: وهو التاريخ المدون على السند أو الوثيقة المالية الذي يحدد اللحظة التي يجب أن يقوم المدين بتسديد القيمة الاسمية المثبتة للدائن.

* تاريخ الخصم أو القطع: هو التاريخ الذي يريد الدائن أو المدين تسوية الدين فيه، وهو تاريخ حساب القيمة الحالية ويكون سابقاً لتاريخ الاستحقاق.

* مدة الاستحقاق: وهي الفترة الزمنية الممتدة من تاريخ الخصم أو القطع حتى تاريخ الاستحقاق، وتقاس بالسنوات.

* القيمة الحالية للدين: هي القيمة المكافئة حالياً للدين المؤجل. أو هي المبلغ الذي إذا أودع الآن (أو في لحظة التسوية) في المصرف بفائدة بسيطة $p$ ، ولمدة تساوي مدة الاستحقاق لأصبحت حصيلته مساوية للقيمة الاسمية المدونة على السند.

2-2-2- العلاقات الأساسية بين القيمتين الاسمية والحالية والخصم:

نرمز للقيمة الاسمية للسند بالرمز S . وللقيمة الحالية له الآن بالرمز V.

ولمدة الاستحقاق المحولة إلى سنوات بالرمز n. ولسعر الفائدة البسيطة سنوياً بالرمز p.

* حساب القيمة الحالية الصحيحة:

لحساب القيمة الحالية V نعتمد على تعريف ومعنى القيمة الحالية فنجد أنها ترتبط مع القيمة الأسمية S بعلاقة مشابهة للحصيلة البسيطة (2-1) ، أي إن :

$$S = V\left(1 + n \cdot p\right) \qquad (7-2)$$

ومنها نجد أن القيمة الحالية لمبلغ S تساوي:

$$V = \frac{S}{\left(1 + n \cdot p\right)} \qquad (8-2)$$

وتسمى هذه القيمة بالقيمة الحالية الصحيحة.

* حساب مقدار الخصم الصحيح (الحطيطة الداخلية):

وهو فائدة القيمة الحالية، ويتم خصمه من القيمة الاسمية *S* عند تسوية الديون قبل مواعيد استحقاقها، وذلك بسبب الاستعجال في تسديدها، وهو يساوي:

مقدار الخصم الصحيح = القيمة الاسمية – القيمة الحالية الصحيحة

وإذا رمزنا لمقدار الخصم الصحيح بـ D نجد أن:

$$D = S - V \qquad (9-2)$$

واعتماداً على العلاقة (2-7) نجد أن:

$$D = V\left(1 + n \cdot p\right) - V$$

$$D = V \cdot n \cdot p \qquad (10-2)$$

أي إن : مقدار الخصم الصحيح = القيمة الحالية × مدة الاستحقاق × معدل الفائدة

= فائدة القيمة الحالية

* حساب معدل الخصم الصحيح:

هو النسبة الناتجة عن قسمة مقدار الخصم الصحيح السنوي على القيمة الاسمية S. حتى تستقيم الحسابات لابد من تحويل الخصم الصحيح المحسوب على مدة *n* سنة

إلى المبلغ الذي يعادله، والمنسوب إلى سنة كاملة، وهذا يقتضي تقسيم D على n. وإذا رمزنا لمعدل الخصم الصحيح السنوي بالرمز q فإن:

$$q = \frac{\frac{D}{n}}{S} = \frac{D}{n \cdot S} \qquad (11-2)$$

وهكذا نجد أن مقدار الخصم الصحيح D من جهة أخرى يساوي:

$$D = S \cdot n \cdot q \qquad (12-2)$$

ومن العلاقتين (2−9) و(2−10) نجد أن $q$ ترتبط مع $p$ بالعلاقة التالية:

$$D = V \cdot n \cdot p = S \cdot n \cdot q$$

$$q = \frac{V}{S} \cdot p = \frac{p}{1 + n \cdot p} \qquad (13-2)$$

وبما أن $V$ أصغر من $S$ ، فإن $q < p$؛ أي إن معدل الخصم الصحيح هو نسبة مئوية أقل من سعر الفائدة $p$، وهو يستخدم لحساب مقدار الخصم الصحيح مباشرةً، بضربه بالقيمة الاسمية $S$ وبمدة الاستحقاق $n$ حسب العلاقة (2−12) ، وذلك لأنه لا يمكننا تطبيق العلاقة (2−10) إلا بعد حساب القيمة الحالية .

* حساب مقدار الخصم التجاري (الحطيطة الخارجية):

معلوم أن التجار يستخدمون الأساليب كافةً لزيادة أرباحهم، فهم عدا عن أنهم يحسبون السنة 360 يوماً، فإنهم يحسبون مقدار الخصم عند تسوية الديون قبل مواعيدها بطريقة أخرى، حيث إنهم يعتبرون أن مقدار الخصم هو الفائدة المستحقة للقيمة الاسمية S ليحصلوا على مقدار أكبر للخصم، ثم يقطعونه من القيمة الاسمية عند تسوية الديون، لذلك يقومون بحسابه باستخدام معدل الفائدة السنوية p (ويسمونه المعدل التجاري للخصم P) وضربه بالقيمة الاسمية S وبالمدة n. فإذا رمزنا لمقدار الخصم التجاري، والذي يسمى أحياناً بالحطيطة الخارجية بالرمز Dt . نجد حسب التعريف أن:

$$Dt = S \cdot n \cdot p \qquad (14-2)$$

وبما أن $q > p$ فإن $D < Dt$ ؛ أي إن مقدار الخصم التجاري أكبر من الخصم الصحيح، لأنه يطبق معدل الفائدة البسيطة P على القيمة الاسمية S ، وليس على القيمة الحالية V كما في العلاقة (2-12) .

*حساب معدل الخصم التجاري:

لحساب هذا المعدل نستخدم مقدار الخصم التجاري المنسوب إلى سنة كاملة ونقسمها على القيمة الاسمية S فنجد أن :

$$qt = \frac{\frac{Dt}{n}}{S} = \frac{Dt}{n \cdot S} = \frac{S \cdot n \cdot p}{n \cdot S} = p \qquad (15-2)$$

أي إن معدل الخصم التجاري $q_t$ يساوي معدل الفائدة P ، ولكنه يطبق على القيمة الاسمية، وليس على القيمة الحالية، ولذلك فإن مقدار الخصم التجاري $Dt$ يكون أكبر من مقدار الخصم الصحيح D وهذا ما أشرنا إليه أكثر من مرة.

* حساب القيمة الحالية الصحيحة بدلالة q والتجارية بدلالة $P$ :

إن القيمة الحالية لأي مبلغ مؤجل تحسب من العلاقة:

القيمة الحالية = القيمة الاسمية – مقدار الخصم

وبما أنه لدينا نوعان من الخصم، فإنه سيكون لدينا نوعان من القيمة الحالية هما:

القيمة الحالية الصحيحة = القيمة الاسمية– مقدار الخصم الصحيح

$$V = S - D \qquad (15-2)$$

ومنها نجد أن:

$$V = S - S \cdot n \cdot q$$
$$V = S(1 - n \cdot q) \qquad (16-2)$$

القيمة الحالية التجارية = القيمة الاسمية– مقدار الخصم التجاري

$$Vt = S - Dt \qquad (17-2)$$

ومنها نجد أن:

$$Vt = S - S \cdot n \cdot p$$
$$Vt = S(1 - n \cdot p) \qquad (18-2)$$

**ملاحظة 2:**

عندما يكون لدينا عدة ديون أو كمبيالات فإننا نتعامل مع كل واحد بمفرده، ثم ندمج نتائج الحسابات ونستخلص النتائج المطلوبة.

**مثال (2-5):**

يريد أحد الأشخاص بيع سند لديه ، قيمته 10000 ليرة سورية، يستحق الدفع بعد 8 أشهر من الآن. فما هي القيمة الحالية لهذا السند؟؛ وما هو مقدار الخصم الصحيح ومعدله؟ وما هو مقدار الخصم التجاري؟ وما هي القيمة الحالية التجارية إذا كان سعر الفائدة البسيطة 9%؟

**الحل:**

لدينا القيمة الاسمية S=10000، $n=\frac{8}{12}$ ، p= 0.09

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الصحيحة V تحسب من العلاقة:

$$V=\frac{S}{(1+n\cdot p)}=\frac{10000}{1+\frac{8}{12}\cdot\frac{9}{100}}=9433.96 \quad L.S.$$

ويحسب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$D=S-V=10000-9433.96=566.04 \quad L.S.$$

ويمكننا حساب مقدار الخصم الصحيح من العلاقة:

$$D=V\cdot n\cdot p=9433.96\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{9}{100}=566.04 \quad L.S.$$

أما معدل الخصم الصحيح فيحسب من العلاقة:

$$q=\frac{V}{S}\cdot p=\frac{9433.96}{10000}\cdot\frac{9}{100}=0.0849056$$

أي إن معدل الخصم 8.49% وهو المعدل الذي يجب تطبيقه على القيمة الاسمية $S$ لنحصل على نفس مقدار الخصم الصحيح D، وبالتجريب نجد أن:

$$D=S\cdot n\cdot q=10000\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{8,49}{100}=566.4 \quad L.S.$$

أما مقدار الخصم التجاري فيحسب بضرب معدل الفائدة في S ومن العلاقة:

$$Dt = S \cdot n \cdot p = 10000 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{100} = 600 \quad L.S.$$

وهكذا يتضح لنا أن مقدار الخصم التجاري أكبر من الخصم الصحيح،

$$Dt - D = D \cdot n \cdot p = 566.04 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{100} = 33.96 \quad L.S.$$

أما القيمة الحالية التجارية لذلك السند فتحسب من العلاقة:

$$Vt = S - Dt = 10000 - 600 = 9400 \quad L.S.$$

وهنا نلاحظ أن القيمة الحالية الصحيحة V أكبر من القيمة الحالية التجارية Vt. ولذلك يجب على أصحاب السندات أن يكونوا على دراية كافية بالألاعيب التي تسود في الأسواق المالية، وأن يتخذوا القرار المناسب لهم عند تسوية أو بيع أي سند مالي.

## 2-3- تسوية الديون قصيرة الأجل (بفائدة بسيطة)

### 2-3-1- أسس التسوية:

إن الظروف الحياتية المختلفة قد تجبر المدين أن يطلب من الدائن أن يعيد النظر في الديون المستحقة له، وأن يعدل في تواريخ استحقاقاتها؛ ويتم ذلك حسب أحد الأشكال التالية:

أ . تسديد دين قبل موعده

ب . استبدال دين واحد بدين آخر جديد وبتاريخ استحقاق جديد.

ج .استبدال عدة ديون بدين واحد جديد وبتاريخ استحقاق جديد

د . تسديد جزء من الدين الأصلي وتحرير سند جديد بالمبلغ المتبقي.

ولكن إجراء مثل هذه العمليات يحتاج إلى مقارنة المبالغ القديمة مع المبالغ الجديدة واتخاذ القرار العادل الذي يضمن حقوق الطرفين ، وهنا نذكر بضرورة الالتزام بالقاعدة التي تسمى في العلوم المالية بالقاعدة الذهبية التالية :

**القاعدة الذهبية : لا يجوز جمع أو طرح المبالغ المالية إلا إذا كانت قيمها منسوبة إلى لحظة زمنية واحدة .**

وهذا يعني أنه لإجراء مقارنة أو جمع أو طرح مبالغ مختلفة ، علينا أن نحسب قيم هذه المبالغ عند لحظة زمنية معينة ، وإن أفضل تلك اللحظات هي لحظة التسوية أو لحظة الصفر(الآن) ، وعندها تسمى تلك القيم بالقيم الحالية لتلك المبالغ . وبعد ذلك نقوم بإجراء مطابقة بين القيم الحالية للمبالغ القديمة والقيم الحالية للمبالغ الجديدة وفق القاعدة العامة التالية :

**القاعدة العامة :**

**مجموع القيم الحالية للديون القديمة = مجموع القيم الحالية للديون الجديدة**

**(في لحظة التسوية) (في لحظة التسوية)**

ويمكن التعبير عنها رياضياً كما يلي :

$$V_1+V_2+\ldots = V \qquad (19-2)$$

وهذه القاعدة تضمن أن لا يتضرر أي طرف من أطراف التعاقد (الدائن والمدين) من عملية الاستبدال أو التسوية، وتتم إضافة الفوائد المستحقة عن كل دين يتم تأجيل موعد استحقاقه، و يتم إنقاص قيمة الدين الذي يسدد قبل موعده بمقدار الخصم المستحق عن ذلك التقديم.

وبتطبيق هذه القاعدة المعتمدة على القيم الحالية يمكننا إجراء الحسابات اللازمة جميعها لتسوية الديون المختلفة، ويتم حساب القيم الحالية إما على أساس القيم الحالية الصحيحة باستخدام معدل الفائدة البسيطة p، و إما على أساس القيم الحالية التجارية باستخدام معدل الخصم التجاري $q_k$ ، وهنا نذكّر بالعلاقات اللازمة لحساب القيم الحالية:

$$V = \frac{S}{1+n\cdot p} \quad \Leftrightarrow \quad V = S\cdot(1-n\cdot q) \qquad (20-2)$$

أما إذا كانت المعاملة بين الطرفين تجارية، فإن الطرفين يحسبان القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$Vt = S\cdot(1-n\cdot p) \qquad (21-2)$$

**مثال (2-6):**

لنفترض أن شركة تدين للمصرف بالمبالغ التالية:

20000 ل.س وتستحق بعد 3 أشهر منذ الآن.

40000 ل.س وتستحق بعد 8 أشهر منذ الآن.

وتريد الآن تسوية هذين الدينين بدين واحد يستحق بعد 10 أشهر.

فما هي قيمة الدين الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 15% سنوياً.

**الحل:**

انطلاقاً من القاعدة السابقة يجب أن تتحقق المعادلة التالية:

القيمة الحالية للدين الأول + القيمة الحالية للدين الثاني= القيمة الحالية للدين الجديد.

وبفرض أن القيمة الاسمية للدين الجديد هي X، نقوم بحساب القيم الحالية للطرفين على أساس القيم الحالية الصحيحة لكل من الديون السابقة فنجد من القاعدة أن:

$$V_1 + V_2 = V$$

$$\frac{20000}{1+\frac{3}{12}\cdot\frac{15}{100}} + \frac{40000}{1+\frac{8}{12}\cdot\frac{15}{100}} = \frac{X}{1+\frac{10}{12}\cdot\frac{15}{100}}$$

$$19277.11 + 36363.64 = \frac{X}{1.125}$$

$$X = 1.125 \cdot (19277.11 + 36363.64)$$

$$X = 62595.84 \quad L.S.$$

وهو القيمة الاسمية للدين الجديد الذي يستحق بعد 10 أشهر من الآن.

## تمارين غير محلولة على الفصل الثاني

**1)** أوجد مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 3600 ليرة سورية لمدة 8 أشهر بفائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

**2)** إذا كان مقدار الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ ما يساوي 250 ليرة سورية، فأوجد القيمة الأصلية لذلك المبلغ إذا علمت أن سعر الفائدة البسيطة 7% سنوياً، وأن مدة الإيداع كانت 6 أشهر.

**3)** أودع أحدهم مبلغ 30000 ليرة سورية بفائدة بسيطة 5% سنوياً. فاحسب المدة اللازمة لتصبح حصيلة هذا المبلغ 50000 ليرة سورية.

**4)** احسب إجمالي الفوائد الصحيحة المستحقة على المبالغ التالية:

مبلغ 2500 أودع لمدة 6 أشهر بفائدة بسيطة 6% سنوياً.

مبلغ 5000 أودع لمدة 3 أشهر بفائدة بسيطة 5% سنوياً.

مبلغ 1500 أودع لمدة 9 أشهر بفائدة بسيطة 7% سنوياً.

**5)** احسب إجمالي الفوائد التجارية على المبالغ الواردة في المثال السابق.

**6)** يدين أحدهم لآخر بالمبالغ التالية:

12000 ليرة سورية ويستحق بعد 150 يوماً من الآن.

16000 ليرة سورية ويستحق بعد 200 يوم من الآن.

20000 ليرة سورية ويستحق بعد 250 يوماً من الآن.

واتفق مع الدائن على أن يستبدلهم بدين جديد يستحق بعد 300 يوم من الآن.

والمطلوب: حساب القيمة الاسمية للسند الجديد إذا كان سعر الفائدة البسيطة 6% سنوياً.

**7)** يريد أحدهم خصم كمبيالة قيمتها 2000 ليرة سورية خصماً تجارياً. فاحسب قيمتها الحالية إذا علمت أنها تستحق بعد 150 يوماً، وأن معدل الفائدة البسيطة7%.

**8)** أوجد حصيلة 10 دفعات عادية سنوية مقدار كل منها 2000 ل.س أودعت بفائدة بسيطة قدرها 6% سنوياً.

**9)** احسب جملة الدفعات السابقة إذا كانت دفعات فورية.

**10)**احسب جملة الدفعات السابقة إذا كانت دفعات عادية شهرية، ثم فورية شهرية.

# الفصل الثالث

# نـظام الفائدة المركبة

إن نظام الفائدة المركبة هو أحد أنظمة إيداع الأموال والتعامل بها لمدد زمنية طويلة الأجل، ويعتمد هذا النظام على إضافة الفائدة المستحقة في مواعيد محددة إلى المبلغ الأصلي، لتحسب ضمن الرصيد، ولتأخذ فوائد جديدة معه.

## 3-1- حساب حصيلة إيداع المبالغ وفوائدها:

### 3-1-1- تعاريف عامة:

نظام الفائدة المركبة: لقد أشرنا سابقاً إلى أن نظام الفائدة المركبة يقتضي أن تضاف الفائدة المستحقة على المبلغ المودع إلى المبلغ الأصلي (أي تعلو عليه) في نهاية كل عام (أو في مواعيد محددة في نهاية كل عام، أو في منتصف كل عام أو في نهاية كل فصل) وتحسب ضمن الرصيد المودع لتأخذ معه فائدة جديدة. ويطبق هذا النظام في معظم المصارف وعلى العمليات المالية والإيداعات جميعها التي تزيد مدتها عن الفترة المحددة لإضافة الفائدة المركبة.

المبلغ المودع: وهو المبلغ الذي يتم إيداعه في بداية المدة، وسنرمز له بالرمز K.

سعر الفائدة السنوية: وهو عبارة عن نسبة مئوية محددة تحدد مسبقاً لحساب الفائدة السنوية عن المبلغ المودع مقابل إيداعه لمدة عام كامل، وسنرمز له بالرمز P.

مدة الإيداع: وهي الفترة الزمنية التي يبقى خلالها المبلغ K مودعاً في المصرف مقابل الحصول على فائدة، وهي تحسب بالسنوات، ونرمز لها بالرمز n.

الرصيد الجاري: هو الرصيد السابق + الفوائد المستحقة عليه.

حصيلة إيداع المبلغ: وهي الرصيد الأخير الناتج عن إضافة الفوائد المتتالية إلى المبلغ المودع مع الفوائد المستحقة عليها في تلك اللحظة، وسنرمز لها بالرمز $Gn$.

فترة العلاوة: وهي الفترة المحددة التي تحسب في نهايتها الفائدة المستحقة على المبلغ المودع، وتضاف إلى الرصيد السابق، وقد تكون فترة العلاوة سنة كاملة، أو نصف سنة، أو ربع سنة. وإذا قسمنا السنة على طول فترة العلاوة، نحصل على عدد المرات التي تضاف إليها الفائدة خلال العام، فمثلاً، إذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة، فإن عدد المرات التي تضاف فيها الفائدة خلال العام تساوي مرتين سنوياً .

3-1-2- حصيلة إيداع مبلغ واحد K:

إن حصيلة إيداع مبلغ K هي عبارة عن القيمة المالية التي يبلغها المبلغ المودع K بفائدة مركبة P بعد مرور n سنة على إيداعه.

ولإيجاد العلاقة التي تعطينا هذه الحصيلة، نقوم بحسابها سنةً فسنة. فنجد أن حصيلة المبلغ K بعد مرور سنة واحدة = المبلغ الأصلي + الفائدة المستحقة عليه. وإذا رمزنا لحصيلة المبلغ K بعد مرور سنة واحدة على إيداعه بالرمز $G_1$ نجد أن:

$$G_1 = K + K \cdot P = K \cdot (1+P)$$

وبما أننا نعالج الموضوع ضمن نظام الفائدة المركبة، فإن الفائدة المستحقة خلال العام الثاني ستحسب على الرصيد الجديد $G_1$، ولنفترض أن حصيلة الرصيد $G_1$ ستصبح في نهاية السنة الثانية $G_2$، فإننا نجد أن:

$$G_2 = G_1 + G_1 \cdot P = G_1 \cdot (1+P)$$

وبتعويض $G_1$ من العلاقة الأولى نحصل على حصيلة الإيداع في نهاية السنة الثانية $G_2$ كالتالي:

$$G_2 = K \cdot (1+p) \cdot (1+P) = K \cdot (1+P)^2$$

وخلال السنة الثالثة سنحسب الفائدة على الرصيد الجديد $G_2$ ، وإن الحصيلة في نهاية السنة الثالثة ستصبح $G_3$ وتساوي:

$$G_3 = G_2 + G_2 \cdot P = G_2 \cdot (1+P) = K \cdot (1+P)^3$$

وفي نهاية السنة الرابعة نحصل على الحصيلة $G_4$ والتي تساوي:

$$G_4 = G_3 + G_3 \cdot P = G_3 \cdot (1+P) = K \cdot (1+P)^4$$

.....

وفي نهاية السنة n نحصل على الحصيلة $G_n$ والتي تساوي:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-1} \cdot P = G_{n-1} \cdot (1+P) = K \cdot (1+P)^n$$

وبذلك نجد أن حصيلة إيداع المبلغ K بفائدة مركبة P ولمدة n سنة تساوي Gn، وتحسب من العلاقة التالية:

$$G_n = K \cdot (1+P)^n \qquad (1-3)$$

وتسهيلاً للعمليات الرياضية والحسابية سنرمز بـ $r$ للعدد (1+P)؛ أي نضع دائماً $r = 1 + P$. ونعوض ذلك في العلاقة (3-1) السابقة فنحصل على أن الحصيلة المطلوبة تساوي.

$$G_n = K \cdot r^n \qquad (2-3)$$

وهنا نلاحظ أن هذه العلاقة تتضمن أربعة متحولات هي: $G_n$، K، n و r أو (1+P). فإذا علمنا ثلاثاً منها، يمكننا حساب الرابع. ولكن إجراء مثل هذه الحسابات قد يكون أمراً صعباً أو مطولاً، لذلك يجب أن نستخدم الآلات الحاسبة التي تتضمن التوابع الرياضية الأساسية، أو نستخدم جداول خاصة معدة لذلك.

وعند الضرورة، يمكن أن نقوم بتبسيط العمليات الحسابية، وذلك بتحويل العلاقة (3-2) السابقة إلى شكل لوغاريتمي، حيث نقوم بأخذ لوغاريتم الطرفين، فنجد أن:

$$\log G_n = \log K + n \cdot \log r \qquad (3-3)$$

وبعد حساب $\log G_n$ نعود ونحسب $G_n$ باستخدام عكس اللوغاريتم $\text{int}\log$، وسنوضح ذلك من خلال المثال الآتي:

**مثال (3-1):**

ما هي حصيلة إيداع مبلغ 100000 ل.س. بفائدة مركبة 8% سنوياً و لمدة 10 سنوات؟

**الحل:**

لدينا K=100000 ، P=0.08 ، n=10 ، $G_n = ?$

وبالتعويض في العلاقة (3−1) أو (3−2) نجد أن:

$$G_n = k \cdot r^n$$

$$G_n = 100000 \cdot (1+0.08)^{10} = 215892.5$$

و كمثال آخر: احسب مدة الإيداع اللازمة لتصبح حصيلة ذلك المبلغ مساويةً لـ 215892.5 .

نطبق العلاقة (3−2) كما يلي:

$$G_n = k \cdot r^n$$

$$215892.5 = 100000 \cdot (1+0.08)^n$$

ولحساب عدد السنوات *n*، نلاحظ أنه يقع في الأس، وأن حسابه يعتبر صعباً دون استخدام اللوغاريتمات، لذلك نأخذ لوغاريتم الطرفين، فنجد أن:

$$\log(215892.5) = \log(100000) + n \cdot \log(1+0.08)$$

$$5.3342376 = 5 + n \cdot (0.033423755)$$

$$0.3342376 = 0.033423755 \cdot n$$

$$n = \frac{0.3342376}{0.033423755} = 10$$

### 3−1−3− حساب الفائدة المستحقة على المبلغ المودع K:

إن مقدار الفائدة المستحقة على المبلغ المودع K يساوي مقدار الزيادة التي حققتها عملية الإيداع، أي إنه يساوي مقدار الفرق بين الحصيلة $G_n$ والمبلغ الأصلي K.

فإذا رمزنا لمقدار الفائدة المستحقة خلال *n* عاماً بالرمز $I_n$ فنجد أن:

$$I_n = G_n - K \qquad (4-3)$$

ويمكن تعويض $G_n$ من العلاقة (3−2)، فنحصل على العلاقة:

$$I_n = K \cdot r^n - K = K \cdot (r^n - 1) \qquad (5-3)$$

وهي علاقة تتضمن أربعة متحولات إذا علمنا ثلاثاً منها أمكننا حساب الرابع.

**مثال (3-2):**

أوجد الفائدة المستحقة عن إيداع مبلغ 100000 ل.س لمدة 10 سنوات، وبفائدة مركبة 8% سنوياً.

**الحل:**

يمكننا حساب هذه الفائدة مباشرة من العلاقة (3-5) كما يلي:

$$I_n = 100000 \cdot \left[ (1.08)^{10} - 1 \right] = 100000 \cdot [2.158925 - 1]$$

$$I_n = 100000 \cdot [1.158925] = 115892.5 \quad L.S$$

**ملاحظة 1:**

إذا كانت الفائدة تحسب وتضاف m مرة في العام فإن حصيلة إيداع مبلغ K بعد مرور n عاماً على إيداعه وحساب فوائده m مرة في العام تحسب من العلاقة الآتية:

$$G_n = K \cdot \left( 1 + \frac{P}{m} \right)^{n \cdot m} \qquad (6-3)$$

حيث P هو السعر السنوي للفائدة المركبة، و m عدد مرات حسابها في العام.

**مثال (3-3):**

احسب حصيلة مبلغ 200000 ل.س ، أُودع لمدة 5 سنوات في مصرف يحسب الفائدة المركبة ويضيفها إلى الرصيد كل ثلاثة أشهر، وبسعر قدره 6% سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المحققة من ذلك الإيداع.

**الحل:**

لدينا $G_5 = ?$ , $n = 5$ , $P = 0,06$ , $m = 4$ , $K = 200000$

وبتطبيق العلاقة (3-6) مباشرة نجد أن:

$$G_5 = K \cdot \left(1+\frac{P}{m}\right)^{n\cdot m}$$

$$G_5 = 200000 \cdot \left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{5\cdot 4} = 200000 \cdot (1.346855)$$

$$G_5 = 269371 \quad L.S.$$

أما مقدار الفائدة المستحقة فيساوي:

$$I_5 = G_5 - K = 269371 - 200000$$

$$I_5 = 69371 \quad L.S$$

**ملاحظة 2:**

لقد لاحظنا أنه عندما تُحسب الفائدة وتضاف أكثر من مرة خلال العام فإن مقدار الفائدة يكون أكبر من مقدارها عندما تُحسب وتضاف مرة واحدة فقط خلال العام، لذلك يبرز لدينا سؤال هام هو: ما هو السعر الحقيقي السنوي للفائدة عندما تحسب وتضاف m مرة خلال العام؟

إن السعر الحقيقي للفائدة $P_m$ يحسب من العلاقة التالية:

$$P_m = \left(1+\frac{P}{m}\right)^{m} - 1 \qquad (7-3)$$

**مثال (3-4):**

أودع أحدهم 50000 ل.س لمدة 4 سنوات وبفائدة مركبة 8% سنوياً، والمطلوب حساب السعر الحقيقي للفائدة عندما تضاف مرة واحدة ثم مرتين، ثم أربع مرات في العام، ثم حساب حصيلة كل من المبالغ السابقة حسب السعر الحقيقي.

**الحل:**

لدينا: $P = 0.08$ ، وبذلك نجد أن:

أ – إذا كانت الفائدة تضاف مرة واحدة خلال العام فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_1 = \left(1+\frac{P}{1}\right)^{1} - 1 = P = 0.08$$

أي إن السعر الحقيقي في هذه الحالة يساوي السعر الاسمي نفسه = $P = 0.08$

وإن حصيلة ذلك المبلغ تساوي:

$$G_4 = K \cdot (1+P_1)^4 = 50000 \cdot (1+0.08)^4 = 68024.45 \quad L.S.$$

ب – إذا كانت الفائدة تضاف مرتين خلال العام $(m=2)$ فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_2 = \left(1+\frac{P}{2}\right)^2 - 1 = \left(1+\frac{0,08}{2}\right)^2 - 1 = 0.0816 = 8.16\%$$

أي إن سعر الفائدة الحقيقي أصبح 8.16% نتيجة إضافتها مرتين خلال العام. ولحساب حصيلة ذلك المبلغ حسب السعر الحقيقي نجد أن:

$$G_4 = K \cdot (1+P_2)^4 = 50000 \cdot (1+0.0816)^4 = 68428.45 \quad L.S.$$

جـ– إذا كانت الفائدة تضاف أربع مرات خلال العام $(m=4)$ فإن السعر الحقيقي لها يساوي:

$$P_4 = \left(1+\frac{P}{4}\right)^4 - 1 = \left(1+\frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = 0.0824 = 8.24\%$$

وإن حصيلة ذلك المبلغ حسب ذلك السعر الحقيقي تساوي:

$$G_4 = K \cdot (1+P_4)^4 = 50000 \cdot (1+0.0824)^4 = 68639.29 \quad L.S.$$

**نتيجة1:**

من خلال هذا المثال نستنتج أن السعر الحقيقي للفائدة يزداد كلما ازداد عدد مرات إضافة الفائدة خلال العام. أي كلما ازداد m.

3–1–4– مقارنة الحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة:

إن حصيلة إيداع مبلغ K ولمدة n عاماً وبفائدة بسيطة P سنوياً تعطى بواسطة العلاقة (3– 8) الآتية:

$$Sn = K \cdot (1+n \cdot P) \qquad (8-3)$$

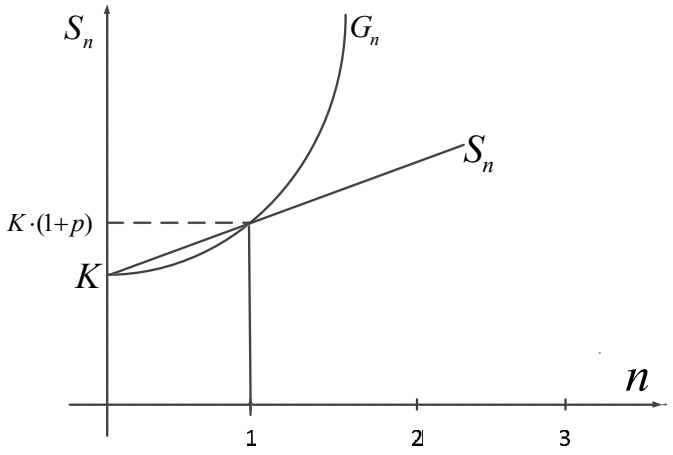
أما حصيلة إيداع المبلغ K نفسه بفائدة مركبة P ولمدة n سنة فتساوي Gn، وتحسب من العلاقة (3–9) التالية:

$$G_n = K \cdot (1+P)^n \qquad (9-3)$$

ولمقارنة هاتين الحصيلتين وحسب تزايد المدة n، نلاحظ أن الحصيلة البسيطة Sn هي عبارة عن معادلة مستقيم بدلالة n لأنه يمكننا كتابتها كما يلي:

$$S_n = K + (K \cdot P) \cdot n$$

هي ترسم المستقيم المبين في الشكل (3−1) الآتي:




الشكل (3−1) :التمثيل البياني للحصيلة البسيطة والحصيلة المركبة

أما الحصيلة المركبة $G_n$ فهي عبارة عن معادلة أسية بدلالة n، لأنها تكتب على الصيغة التالية:

$$G_n = K \cdot r^n \qquad (10-3)$$

وهي ترسم المنحني البياني المبين على الشكل (3−1) نفسه.

ومن المعادلتين $S_n$ و $G_n$ نلاحظ ما يلي:

عندما $n = 0$ فإن: $S_0 = G_0 = K$ والمنحنيان يمران من النقطة $(0, K)$

وعندما $n = 1$ فإن: $S_1 = G_1 = K \cdot (1+P)$ والمنحنيان يمران من النقطة $[1\ ,\ K \cdot (1+P)]$

عندما $0 < n < 1$ فإن: $S_n > G_n$؛ أي إن الحصيلة البسيطة أكبر من الحصيلة المركبة.

عندما $n > 1$ فإن: $S_n < G_n$ ؛ أي إن الحصيلة المركبة أكبر من الحصيلة البسيطة.

ونستنتج مما سبق أن نظام الفائدة البسيطة أفضل للمودع من نظام الفائدة المركبة إذا كانت المدة $n$ أصغر من سنة، ولذلك فهو يستخدم في الحسابات قصيرة الأجل (أقل من سنة).

أما إذا كانت $n > 1$ فإن نظام الفائدة المركبة يصبح أفضل للمودع من نظام الفائدة البسيطة، ولذلك فهو يستخدم في الحسابات طويلة الأجل (أكثر من سنة).

3-1-5- الحسابات الجارية حسب الفائدة المركبة:

إن تنظيم عمليات الحسابات الجارية في نظام الفائدة المركبة يدمج بين نظامي الفائدة البسيطة والمركبة، ويتم حساب الفوائد عند كل حركة للحساب، وكذلك عند كل موعد لحسابها وفق التالي:

- إذا كانت المدة بين حركتين متتاليتين للحساب أقل من الفترة المقررة لإضافة الفائدة، فإن مقدار الفائدة المستحقة يحسب وفق نظام الفائدة البسيطة، ولا يضاف إلى الرصيد إلا عند نهاية الفترة المقررة، أو عند إغلاق الحساب.
- إذا كانت المدة بين حركتين متتاليتين للحساب أكبر من الفترة المقررة لإضافة الفائدة، فإن مقدار الفائدة المستحقة يحسب وفق نظام الفائدة المركبة، ويضاف في نهاية الفترة الأخيرة، ويتم استكمال حساب مقدار الفائدة عن الأيام المتبقية حسب نظام الفائدة البسيطة، ولا تضاف إلى الرصيد إلا عند نهاية الفترة التالية، أو عند إغلاق الحساب.

ويمكن توضيح عمليات حركة الحساب الجاري لنظام فائدة مركبة يضيف الفائدة مرتين خلال السنة من خلال المثال التالي.

**مثال (3-5):**

أوجد حصيلة الحساب الجاري التالي في نهاية العام مع بيان حركات الإيداع والسحب والإضافة، علماً بأن الفائدة تضاف مرتين خلال العام، وأن سعرها 8% سنوياً (للحالتين البسيطة والمركبة).

| التاريخ | العمليات | | | الحسابات | | | نوع المعالجة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | إيداع | سحب | إضافة فائدة | الرصيد المعتمد | مدة الإيداع بالأيام | الفائدة المستحقة | |
| 2004/2/5 | 3000 | – | – | 3000 | 34 | 22.30 | بسيطة |
| 2004/3/10 | 5000 | – | – | 8000 | 15 | 26.23 | بسيطة |
| 2004/3/25 | – | 2000 | – | 6000 | 16 | 20.98 | بسيطة |
| 2004/4/10 | – | 3000 | – | 3000 | 21 | 13.77 | بسيطة |
| 2004/5/1 | 4000 | – | – | 7000 | 60 | 91.80 | بسيطة |
| مجموع الفوائد في 6/30 | – | – | – | – | – | 175.08 | – |
| الحصيلة في 6/30 | – | – | 175.08 | 7175.08 | 15 | 23.52 | مركبة |
| 2004/7/15 | 5000 | – | – | 12175.08 | 72 | 191.61 | بسيطة |
| 2004/9/25 | – | 3000 | – | 9175.08 | 61 | 122.33 | بسيطة |
| 2004/11/25 | 6000 | – | – | 15175.08 | 15 | 49.75 | بسيطة |
| 2004/12/10 | 4000 | – | – | 19175.08 | 21 | 88.02 | بسيطة |
| الفائدة 12/31 | – | – | – | – | – | 475.23 | |
| الحصيلة في 12/31 | – | – | 475.23 | 19650.3 | – | – | مركبة |

ولقد قمنا بإجراء الحسابات على الجدول السابق مباشرةً كما يلي:

1- نلاحظ أن سنة 2004 هي سنة كبيسة وتتألف من 366 يوماً.

2- حسبنا مدة إيداع المبلغ الأول 3000 من 2004/2/5 حتى 2004/3/10، فكانت 33+1=34 يوماً. لأن شباط هنا يتألف من29 يوماً .

3- حسبنا الفائدة المستحقة عليه فوجدناها $I = K \cdot P \cdot n = 22.30$.

4- حسبنا الرصيد في 3/10/ فأصبح 8000، ولم نضف إليه الفائدة السابقة لأن عملية الإيداع جرت خلال فترة الإضافة.

5- حسبنا الأرصدة الباقية والفوائد المستحقة عليها كما سبق.

6- في 6/30؛ أي في نهاية فترة الإضافة قمنا بحساب مجموع الفوائد المستحقة على الأرصدة السابقة جميعها وكان يساوي 175.08 ل.س.

7 . أضفنا مجموع الفوائد إلى الرصيد الأخير فحصلنا على 7175.08 ل.س. وهي الحصيلة في 2004/6/30، أو الرصيد الأول لنصف السنة الثاني.

8- تابعنا حساب النصف الثاني من السنة كالسابق، وحصلنا على مجموع الفوائد 475.23 ل.س.

9- أضفنا مجموع الفوائد إلى الرصيد الأخير فحصلنا على الحصيلة في 2004/12/31 وتساوي 19650.31 ل.س.

10- وهكذا يمكننا متابعة الحسابات بنفس الطريقة لعدة سنوات.

## 3-2- حساب القيمة الحالية والخصم :

### 3-2-1- مفاهيم عامة :

لا تختلف المفاهيم العامة المستخدمة في هذا الفصل كثيراً عن المفاهيم التي تعرضنا لها في الفصل السابق حول القيمة الحالية والخصم بفائدة بسيطة، وهي:

القيمة الاسمية: هي القيمة التي تسجل على السندات والكمبيالات، وهي عبارة عن القيمة المستحقة الدفع للدائن في تاريخ الاستحقاق .

تاريخ الاستحقاق: هو التاريخ المدون على السند أو الوثيقة المالية الذي يحدد اللحظة التي يلتزم المدين بحلولها بتسديد القيمة الاسمية المسجلة على السند .

تاريخ الخصم أو القطع: هو التاريخ الذي يريد الدائن أو المدين تسوية الدين فيه، أو هو التاريخ الذي يريد الدائن فيه أن يبيع السند في السوق، وهو تاريخ يكون سابقاً لتاريخ الاستحقاق على السند .

مدة الاستحقاق: وهي الفترة الزمنية المتبقية لتسديد السند وهي الفترة الممتدة من تاريخ التحرير أو الخصم أو القطع حتى تاريخ الاستحقاق، وتقاس بالسنوات .

القيمة الحالية للدين: هي القيمة المكافئة حالياً للدين المؤجل، أو هي المبلغ الذي إذا أودع الآن (أو في لحظة التسوية) في المصرف وبفائدة مركبة P ولمدة الاستحقاق n ، لأصبحت حصيلته تساوي القيمة الاسمية المسجلة على السند .

مقدار الخصم: وهو الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية أي إنه يساوي:

مقدار الخصم = القيمة الاسمية – القيمة الحالية

3-2-2- العلاقات الأساسية بين القيمتين الحالية والاسمية والخصم :

لنرمز للقيمة الاسمية للسند بالرمز S .

وللقيمة الحالية الصحيحة للسند بالرمز V .

وبناء على ذلك يمكننا حساب المؤشرات التالية:

حساب القيمة الحالية الصحيحة :

إن القيمة الحالية الصحيحة V هي عبارة عن المبلغ الذي إذا أودعناه الآن بفائدة مركبة P ولمدة الاستحقاق n، أصبحت قيمته أو حصيلته المركبة مساوية للقيمة الاسمية S، وانطلاقاً من هذا التعريف نجد أن V وS يرتبطان مع بعضهما حسب العلاقتين (2-11) و(2-12) اللتين تأخذان الشكل :

$$S = V \cdot (1+P)^n = V \cdot r^n \qquad (11-3)$$

ومنها نجد أن القيمة الحالة الصحيحة V تساوي:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = \frac{S}{r^n} \qquad (12-3)$$

ولتسهيل العمليات الرياضية نرمز بـ $h$ للمقدار $\frac{1}{1+P}$ ، أي نستخدم بشكل دائم التحويل الآتي:

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{r} \qquad (13-3)$$

فنجد أن القيمة الحالية الصحيحة تأخذ الشكل المختزل التالي:

$$V = S \cdot h^n \qquad (14-3)$$

حساب مقدار الخصم الصحيح (الحطيطة الداخلية):

وهو الفرق بين القيمة الاسمية و القيمة الحالية الصحيحة، أي إنه يساوي :

مقدار الخصم الصحيح = القيمة الاسمية – القيمة الحالية الصحيحة

وإذا رمزنا لمقدار الخصم عن n عاماً بالرمز $_n$ فإنه يكون لدينا:

$$D_n = S - V \qquad (15-3)$$

وبتعويض V من (3-14) نحصل على:

$$D_n = S - S \cdot h^n = S \cdot (1-h^n) \qquad (16-3)$$

كما يمكننا حساب مقدار الخصم بدلالة القيمة الحالية، وذلك بتعويض $S$ من العلاقة (3−11) كما يلي:

$$D_n = S - V = V \cdot r^n - V = V \cdot (r^n - 1) \qquad (17-3)$$

حساب معدل الخصم الصحيح:

بما أن الخصم يحسم من القيمة الاسمية، فإن معدل الخصم السنوي هو عبارة عن نتيجة قسمة مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة على القيمة الاسمية للسند S ، وبما أن مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة حسب العلاقة(3−16) يساوي:

$$D_1 = S \cdot (1-h)$$

وإذا رمزنا لمعدل الخصم الصحيح السنوي بالرمز q فإننا نجد أن ذلك المعدل يساوي:

$$q = \frac{D_1}{S} = \frac{S \cdot (1-h)}{S} = 1 - h \qquad (18-3)$$

علاقة معدل الخصم الصحيح q بسعر الفائدة P :

من العلاقة (3−18) يمكننا أن نستنتج العلاقة التي تربط معدل الخصم q بمعدل الفائدة p، حيث نجد أن:

$$q = 1 - h = 1 - \frac{1}{1+P} = \frac{1+P-1}{1+P} = \frac{P}{1+P}$$

أي إن:

$$q = \frac{P}{1+P} \qquad (19-3)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن $q < P$، لأنه ناتج عن قسمة $P$ على العدد $1+P$ الذي يزيد عن الواحد .ومنها يمكن أن نستنتج بالمقابل أن : $P = \frac{q}{1-q}$

حساب القيمة الحالية الصحيحة بدلالة معدل الخصم الصحيح $q$ :

لقد وجدنا في (3−18) أن $q = 1 - h$، وهذا يعطينا أن $h = 1 - q$

بتعويض ذلك في العلاقة (3−14) نحصل على أن :

$$V = S \cdot (1-q)^n \qquad (20-3)$$

مقدار الخصم التجاري (الحطيطة الخارجية) :

وجدنا أن مقدار الخصم الصحيح يحسب من إحدى العلاقتين (3−16) و (3−17) التاليتين:

$$D_n = S \cdot (1 - h^n) \qquad (21-3)$$
$$D_n = V \cdot (r^n - 1) \qquad (22-3)$$

وإذا وضعنا فيها n=1 فإننا نحصل على مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة فقط ويساوي:

$$D_1 = S \cdot (1 - h) = S \cdot q \qquad (23-3)$$

$$D_1 = V \cdot (r - 1) = V \cdot P \qquad (24-3)$$

وهذا يعني أنه يمكننا حساب مقدار الخصم الصحيح لسنة واحدة بإحدى الطريقتين التاليتين:

- إما أن نقوم بضرب القيمة الاسمية S بمعدل الخصم الصحيح q، حيث إن q تحسب من معدل الفائدة P بالعلاقة $q = \frac{P}{1+P}$ .
- وإما أن نقوم بضرب القيمة V بمعدل الفائدة P .

ولكن التجار في السوق لا يستخدمون أياً من هاتين الطريقتين، بل يتشاطرون ويقومون بحساب الخصم لسنة واحدة من جراء ضرب القيمة الاسمية S بمعدل الفائدة السائد P (أو بمعدل أكبر منه) فيحصلون على ما يسمى بالخصم التجاري والذي سنرمز له بـ Dt، وهو عندما يحسب عن سنة واحدة يساوي:

$$Dt = S \cdot P = S \cdot (r - 1) \qquad (25-3)$$

القيمة الحالية التجارية:

عندما يريدون حساب القيمة الحالية التجارية يقومون أيضاً بتحوير العلاقة (3−15) باستبدال معدل الخصم q بسعر الفائدة P ويحسبون القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$V_t = S \cdot (1 - P)^n \qquad (26-3)$$

وهكذا يقومون بحساب الخصم التجاري من العلاقة:

$$Dt = S - V_t \qquad (27-3)$$

**مثال (3−6):**

يريد أحد الأشخاص بيع سند قيمته الاسمية 20000 ليرة سورية، يستحق الدفع بعد ثلاث سنوات من الآن، فإذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً ، فأوجد ما يلي:

- القيمة الحالية الصحيحة لهذا السند .
- مقدار الخصم الصحيح ومعدله .
- مقدار الخصم التجاري ومعدله .
- القيمة الحالية التجارية .

**الحل :**

لدينا $S = 20000 \quad n = 3, \quad P = 0.07, \quad V = ?$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الصحيحة تساوي:

$$V = S \cdot h^n = 20000 \cdot \left(\frac{1}{1+0.07}\right)^3 = 16325.96 \quad L.S$$

أما مقدار الخصم الصحيح لمدة 3 سنوات فيساوي:

$$D = S - V = 20000 - 16325.96 = 3674.04 \quad L.S$$

أما معدل الخصم الصحيح فيساوي:

$$q = 1 - h = 1 - \frac{1}{1.07} = 0.0654 = 6.54\%$$

ولحساب القيمة الحالية التجارية نستخدم العلاقة (3−20) التالية:

$$V_t = S \cdot (1-P)^n$$
$$= 20000 \cdot (1-0.07)^3 =$$
$$V_t = 20000 \cdot (0.804357)$$
$$V_t = 16087.14$$

أما مقدار الخصم التجاري فهو يساوي:

$$D_t = S - V_t = 20000 - 16087.14 = 3912.86$$

وهنا نلاحظ أن القيمة الحالية الصحيحة $V$ أكبر من القيمة الحالية التجارية $_t$ .

## 3-3- تسوية الديون طويلة الأجل (بفائدة مركبة):

### 3-3-1- أسس التسوية :

لقد عالجنا سابقاً كيفية تسوية الديون قصيرة الأجل اعتماداً على نظام الفائدة البسيطة، ولكن معالجة تسوية الديون طويلة الأجل تتم اعتماداً على نظام الفائدة المركبة، و حتى لا يتضرر أي طرف من أطراف عملية التعاقد (الدائن أو المدين) من عملية التسوية، لابد من اتباع أساس سليم لمعالجة مختلف الحالات، وبحيث نضمن حقوق الطرفين، أي بحيث تتم إضافة الفوائد المستحقة عن كل دين يتم تأجيل تاريخ استحقاقه، ويتم إنقاص قيمة الدين الذي يسدد قبل موعده أو يتقدم تاريخ استحقاقه، بمقدار الخصم الصحيح المستحق عن ذلك التقديم .

والقاعدة العامة المتبعة في تسوية الديون قصيرة الأجل وطويلة الأجل والتي تحفظ حقوق الطرفين هي القاعدة التي تستند على القاعدة الذهبية التالية :

**القاعدة الذهبية : لا يجوز جمع أو طرح المبالغ المالية إلا إذا كانت قيمها منسوبة إلى لحظة زمنية واحدة .**

لذلك كان لابد من اختيار لحظة زمنية معينة وحساب قيم جميع الديون عند تلك اللحظة ، وإن أفضل لحظة هي لحظة التسوية ، ولهذا يتم تحديد تاريخ معين للتسوية ( واعتباره لحظة الصفر)، وحساب القيم الحالية لتلك الديون منسوبة إلى ذلك التاريخ ، ثم تطبيق المعادلة التالية والتي تسمى معادلة التوازن التالية:

**مجموع القيم الحالية للديون قبل التسوية = مجموع القيم الحالية للديون بعد التسوية (في لحظة التسوية)** أي $\sum V_1 = \sum V$ **(في لحظة التسوية)**

وبوضع القيم الحالية للديون قبل التسوية والقيم الحالية للديون بعد التسوية في هذه المعادلة، والمطابقة بين الطرفين، يمكننا حساب أي متحول مجهول في أحد الطرفين، وخاصة في الطرف الثاني .

ويتم حساب القيم الحالية لتلك الديون في الطرفين وفق إحدى الحالتين التاليتين:

- من حساب القيم الحالية الصحيحة حسب معدل الفائدة المركبة P .
- من حساب القيم الحالية التجارية باستخدام معدل الخصم التجاري $t = P$ .

وهنا نذكر بأهم العلاقات المستخدمة في حساب القيم الحالية الصحيحة والتجارية، وهي:

نحسب القيمة الحالية الصحيحة للطرفين من أحدى العلاقتين:

بدلالة معدل الفائدة P:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = S \cdot h^n \qquad (28-3)$$

بدلالة معدل الخصم الصحيح q:

$$V = S \cdot (1-q)^n \qquad (29-3)$$

أو نحسب القيمة الحالية التجارية من العلاقة:

$$V_t = S \cdot (1-P)^n \qquad (30-3)$$

3-3-2- حالات التسوية:

الحالة الأولى: حالة تسديد الدين قبل موعده:

وهنا يتم حساب القيمة الحالية لهذا الدين، ثم تسديد قيمته مباشرة: ونستخدم لذلك إحدى العلاقتين:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = S \cdot h^n \quad , \qquad V_t = S \cdot (1-P)^n$$

**مثال (3-7):**

اكتشف ورثة التاجر أحمد أن والدهم يدين لجاره بسند قيمته الاسمية 100000 ل.س، ويستحق بعد 3 سنوات من الآن، فاحسب المبلغ الذي يجب أن يدفعه الورثة للدائن من أجل تبرئة ذمة والدهم، حتى يتقاسموا باقي المال الموروث (حسب القاعدة: بعد وصية أو دين) علماً بأن سعر الفائدة المركبة P=0.05 .

**الحل:**

لدينا : $S = 100000 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad P = 0.05 \quad , \quad V = ?$

نلاحظ أن المبلغ الذي يجب أن يدفعه الورثة هو القيمة الحالية الصحيحة لذلك السند وتحسب من العلاقة:

$$V = \frac{S}{(1+P)^n} = \frac{100000}{(1+0.05)^3} = 86383.76 \quad L.S$$

أما إذا اتفق الطرفان على حساب القيمة الحالية التجارية فنحسبها من العلاقة:

$$V_t = S \cdot [1 - P]^n = 10000 \cdot [1 - (0.05)]^3 = 85733.5$$

وهي هنا لصالح الورثة .

الحالة الثانية: حالة استبدال دين واحد بآخر جديد:

لمعالجة هذه الحالة، نفترض أن قيمة الدين الجديد مجهولة، ونرمز لها بـ X، ونفترض أن مدة استحقاقه m معلومة، (أو بالمقابل نفترض أن قيمة الدين الجديد معلومة، وأن مدة استحقاقه m مجهولة) . سنوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

**مثال (3−8):**

يدين أحدهم للمصرف بسند قيمته 200000 ل.س، ويستحق الدفع بعد 5 سنوات، ويريد استبداله بسند جديد يستحق بعد 7 سنوات. احسب القيمة الاسمية للسند الجديد إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً .

**الحل:**

لدينا : $S = 200000 \quad , \quad n_1 = 5 \quad , \quad P = 0.08 \quad , \quad m = 7$

نفترض أن القيمة الاسمية المجهولة للدين الجديد هي X، فإن القاعدة العامة تعطينا المعادلة التالية: $V_1 = V$

وباستخدام العلاقة (3−28) للطرفين نحصل على أن:

$$\frac{200000}{(1+0.08)^5} = \frac{X}{(1+0.08)^7}$$

$$136116.64 = \frac{X}{(1+0.08)^7} \Rightarrow$$

$$X = 136116.64 \cdot (1+0.08)^7$$

$$X = 233280 \quad L.S.$$

الحالة الثالثة: تسوية عدة ديون بدين واحد:

لمعالجة هذه الحالة نطبق القاعدة نفسها، ونستعرضها من خلال المثال التالي:

**مثال (3−9):**

يريد حمودة تسوية الديون التي عليه للمصرف بدين واحد جديد، والديون هي:

40000 ل.س ويستحق بعد 3 سنوات .

50000 ل.س ويستحق بعد 6 سنوات .

70000 ل.س ويستحق بعد 8 سنوات .

فاحسب القيمة الاسمية للدين الجديد إذا علمت أنه تم الاتفاق مع المصرف على أن تكون مدة الدين الجديد 5 سنوات، وأن سعر الفائدة المركبة المعتمدة هو 6% سنوياً.

**الحل:**

لدينا: $S_1 = 40000$ , $S_2 = 50000$ , $S_3 = 70000$ , $P = 0.06$

$$n_1 = 3 \ , n_2 = 6 \ , \quad n_3 = 8 \ , m = 5$$

لتطبيق القاعدة العامة نفترض أن القيمة الاسمية للدين الجديد تساوي X، وبذلك نجد أن القاعدة العامة تأخذ الشكل التالي:

$$V_1 + V_2 + V_3 = V$$

وبتطبيق العلاقة (3−28) على الطرفين نجد أن :

$$\frac{40000}{(1+0.06)^3} + \frac{50000}{(1+0.06)^6} + \frac{70000}{(1+0.06)^8} = \frac{X}{(1+0.06)^5}$$

$$33584.77 + 352480.3 + 43918.87 = \frac{X}{1.33523}$$

$$112751.67 = \frac{X}{1.33523}$$

$$X = 112751.67 \cdot (1.33523) = 150887.67 \quad L.S.$$

## 3−4: حساب حصيلة الدفعات الدورية المتساوية (بفائدة مركبة):

### 3−4−1− تمهيد :

سنعالج في هذه الفقرة كيفية حساب حصيلة عدة دفعات دورية متساوية في نهاية مدة الإيداع. ونقصد بالدفعات الدورية الدفعات التي تودع بانتظام خلال فترات زمنية دورية (كل سنة أو نصف سنة أو فصل أو شهر)، في أحد المصارف وحسب نظام الفائدة المركبة، وهي قد تكون متساوية، فعندها تسمى الدفعات الدورية المتساوية، وقد تكون غير متساوية، وعندها تسمى الدفعات الدورية غير المتساوية .

وستقتصر دراستنا في هذا الفصل على الدفعات الدورية المتساوية لكونها تخضع إلى قوانين رياضية محددة.

**أنواع الدفعات الدورية المتساوية: يمكن أن نصنف الدفعات الدورية إلى نوعين هما:

- الدفعات العادية:

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي يتم دفعها بانتظام في نهاية كل دورة زمنية محددة للدفع( أي في نهاية كل شهر أو في كل فصل أو سنة)، اعتباراً من لحظة الاتفاق، وقد سميت دفعات عادية لأن الدفعة الأولى منها تدفع في نهاية الفترة الأولى التي تم الاتفاق عليها، أي بعد مرور فترة زمنية على الاتفاق، وتحسب حصيلة هذه الدفعات بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة .

- الدفعات الفورية:

وهي الدفعات الدورية المتساوية التي يتم دفعها بانتظام في بداية كل دورة زمنية محددة للدفع ( أي في بداية كل سنة أو فصل أو شهر)، اعتباراً من لحظة الاتفاق، وقد سميت دفعات فورية لأن الدفعة الأولى منها تدفع فوراً وفي بداية الفترة الأولى (أي في لحظة الاتفاق) ، وتحسب حصيلة هذه الدفعات بعد مرور دورة زمنية كاملة على إيداع الدفعة الأخيرة .

وقبل الدخول في الحسابات والاستنتاجات الرياضية، نرمز للمتحولات التي يمكن أن تدخل في حسابات هذه الدفعات بكل أنواعها بالرموز التالية :

1- قيمة الدفعة الدورية ونرمز لها كالعادة بـ k .

2- عدد الدفعات الدورية: ونرمز له بالرمز n ، وهو يساوي أيضاً مدة الإيداع إذا كان الإيداع سنوياً .

3- طول مدة الدورة: وهو يساوي وحدة زمنية يتفق عليها (سنة أو فصل أو شهر) ونرمز له بالرمز l .

4- المدة الكاملة للإيداع: وهي تساوي n فترة زمنية دورية، وتحسب بالسنوات .

5- سعر الفائدة المركبة: ونرمز له بالرمز P، وهو نسبة مئوية سنوية .

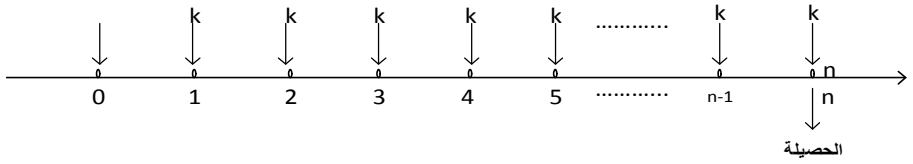
6- مدة التأجيل والسماح: ونرمز لها بالرمز t، وتحسب بالفترات الزمنية المعتمدة .

7- حصيلة الدفعات الدورية: ونرمز لها بالرمز $Q_n$ لأنها مرتبطة بعدد الدفعات n.

8- الفائدة المستحقة للدفعات الدورية: ونرمز له بالرمز $n$ لأنها مرتبطة بعدد الدفعات n أيضاً .

3-4-2- حساب حصيلة الدفعات العادية السنوية:

لحساب حصيلة هذه الدفعات ننطلق من تعريف الدفعات العادية التي تدفع في نهاية كل سنة، وتحسب حصيلتها بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة، ونقوم بتمثيل سير عمليات الدفع والحساب كما في الشكل الآتي:




الشكل (3-2) تمثيل الدفعات العادية

ومن الشكل نلاحظ أنه لحساب الحصيلة الكلية لهذه الدفعات يجب حساب حصيلة كل منها بشكل منفرد منسوبة إلى نهاية المدة ، وذلك اعتماداً على العلاقة المعروفة الآتية : $G_n = k.r^n$ فنجد أن:

حصيلة الدفعة الأولى التي أودعت في نهاية العام الأول، واستمر إيداعها حتى نهاية العام n، أي التي بلغت مدة إيداعها (n-1) عاماً تساوي : $k \cdot r^{n-1}$ .

حصيلة الدفعة الثانية التي أودعت في نهاية العام الثاني، واستمر إيداعها حتى نهاية العام $n$، أي التي بلغت مدة إيداعها (n-2) عاماً تساوي : $k \cdot r^{n-2}$ .

حصيلة الدفعة الثالثة التي استمرت لمدة (n-3) عاماً تساوي: $k \cdot r^{n-3}$ .

حصيلة الدفعة الرابعة التي استمرت لمدة (n-4) عاماً تساوي: $k \cdot r^{n-4}$ .

.....

حصيلة الدفعة قبل الأخيرة التي استمر إيداعها عاماً واحداً تساوي: $k \cdot r^1$ .

حصيلة الدفعة الأخيرة التي سحبت مباشرة بعد إيداعها تساوي نفسها: $k$ .

وهكذا نجد أن الحصيلة الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع حصائلها، أي إن:

$$Q_n = k \cdot r^{n-1} + k \cdot r^{n-2} + \cdots \ldots \ldots k \cdot r + k$$

ولتسهيل عملية التحليل نكتب الطرف الثاني بترتيب معاكس، فنحصل على أن :

$$Q_n = k + k \cdot r + k \cdot r^2 + \cdots \ldots k \cdot r^{n-2} + k \cdot r^{n-1}$$

لإيجاد صيغة مختصرة لهذه المعادلة، نلاحظ أن الطرف الثاني منها ما هو إلا عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية، حدها الأول $K$، وأساسها $r$، وعدد حدودها $n$ حداً، وحسب العلاقة $(1-14)$ نجد أن ذلك المجموع يساوي:

$$Q_n = k \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = k \cdot A_n \qquad (31-3)$$

حيث رمزنا بـ $A_n$ للكسر $\frac{r^n-1}{r-1}$ وتحسب قيمته مباشرة أو تؤخذ من الجداول الملحقة. وهذه العلاقة تعطينا حصيلة $n$ دفعة عادية قيمة كل منها k ، وهي تتضمن أربعة متحولات إذا علمنا ثلاثة منها أمكننا حساب الرابع .

ولحساب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات نطبق العلاقة:

$$I_n = Q_n - n \cdot k \qquad (32-3)$$

**مثال (3-10):**

قرر الوالدان أن يودعا في المصرف لصالح طفلهما الجديد، في نهاية كل عام مبلغ 1000 ل.س. فاحسب حصيلة تلك الدفعات عندما يصبح ذلك الطفل راشداً ويبلغ 18 عاماً، علماً بأن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً، ثم احسب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات .

**الحل:**

لدينا $k = 1000, \quad n = 18, \quad P = 0.08, \quad Q_n = ?$

وبما أن الدفعات السابقة هي دفعات سنوية متساوية وعادية لذلك نقوم بتطبيق العلاقة (3-31) فنحصل على أن حصيلتها تساوي :

$$Q_{18} = 1000 \cdot \frac{(1.08)^{18} - 1}{(1.08) - 1} = 37450 \qquad L.S.$$

ولحساب الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات، نطبق العلاقة (3-32) فنجد أن:

$$I_n = Q_n - n \cdot k = 37450 - 18 \cdot 1000 = 19450 \quad L.S.$$

**ملاحظة 3:**

إن حصيلة الدفعات الجزئية العادية التي تدفع بواقع $m$ مرة في العام تحسب من العلاقة:

$$Q_{n\cdot m} = k \cdot \frac{\left(r^{\frac{1}{m}}\right)^{n\cdot m} - 1}{\left(r^{\frac{1}{m}}\right) - 1} = k \cdot \frac{r^n - 1}{\left(r^{\frac{1}{m}}\right) - 1} \qquad (33-3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا حصيلة الدفعات الجزئية التي عددها n.m دفعة وتدفع خلال n عاماً.

**مثال (3-11):**

يقوم أحدهم بإيداع مبلغ 1000 ل.س في آخر كل شهر، فاحسب حصيلة هذه الدفعات في نهاية السنة الثالثة، علماً بأن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً.

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات عادية وشهرية ، لأنها تدفع في نهاية كل شهر، وأن عددها في السنة m=12 دفعة، وأن عددها خلال ثلاث سنوات يساوي n.m=36 دفعة، ونجد أن حصيلة هذه الدفعات بفائدة مركبة 7% سنوياً تساوي:

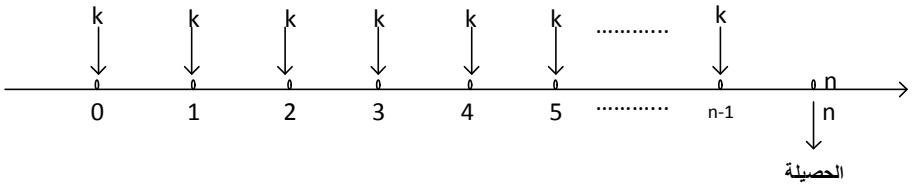
$$Q_{nm} = Q_{36} = 1000 \cdot \frac{r^3 - 1}{r^{\frac{1}{12}} - 1} = 1000 \cdot \frac{(1.07)^3 - 1}{(1.07)^{\frac{1}{12}} - 1}$$

$$Q_{36} = 1000 \cdot \frac{1.225043 - 1}{1.005654 - 1} = 1000 \cdot \frac{0.225043}{0.005654145} =$$

$$Q_{36} = 1000 \cdot (39.80142002) = 39801.42 \quad L.S.$$

3-4-3- حساب حصيلة الدفعات الفورية السنوية :

لحساب حصيلة الدفعات الفورية ننطلق من تعريف الدفعات الفورية التي تدفع في بداية كل عام، وتحسب حصيلتها بعد مرور عام على إيداع الدفعة الأخيرة، ولتوضيح سير عمليات الدفع والحساب نقوم بتمثيل ذلك على الشكل البياني التالي:




الشكل (3−3) : التمثيل البياني للدفعات الفورية

ومن الشكل البياني نلاحظ أن لحظة حساب حصيلة هذه الدفعات هي نهاية السنة الأخيرة n، أي بعد مرور سنة على موعد تسديد الدفعة الأخيرة، وهذا يعني أنه لحساب الحصيلة الكلية لهذه الدفعات، يجب حساب حصيلة كلٍ منها بشكل منفرد منسوبة إلى تلك اللحظة $n$ ، وذلك اعتماداً على العلاقة المعروفة: $G_n = k \cdot r^n$

وبذلك نجد أن حصيلة الدفعة الأولى التي يستمر إيداعها $n$ عاماً تساوي: $k \cdot r^n$

وحصيلة الدفعة الثانية التي يستمر إيداعها $n-1$ عاماً تساوي : $k \cdot r^{n-1}$

وحصيلة الدفعة الثانية التي يستمر إيداعها $n-2$ عاماً تساوي : $k \cdot r^{n-2}$

.....

وحصيلة الدفعة قبل الأخيرة التي يستمر إيداعها 2 سنة تساوي : $k \cdot r^2$

وحصيلة الدفعة الأخيرة التي يستمر إيداعها سنة واحدة تساوي : $k \cdot r$

وهكذا نجد أن الحصيلة الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع حصائلها، أي إنها تساوي:

$$Q'_n = k \cdot r^n + k \cdot r^{n-1} + k \cdot r^{n-2} + \cdots + k \cdot r^2 + k \cdot r$$

ولتسهيل المعالجة نقوم بكتابة المجموع الأيمن بترتيب معاكس، فنحصل على أن:

$$Q'_n = k \cdot r + k \cdot r^2 + k \cdot r^3 + \cdots + k \cdot r^{n-1} + k \cdot r^n$$

وهنا نلاحظ أن المجموع في الطرف الأيمن ما هو إلا عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $(k \cdot r)$ وأساسها r، وعدد حدودها n حداً، لذلك فإن العلاقة السابقة تساوي:

$$Q'_n = k \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = k \cdot r \cdot An \qquad (34-3)$$

وهي علاقة تضم أربعة متحولات، إذا علمنا ثلاثة منها أمكننا حساب الرابع .

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (3−31) نجد أن:

$$Q'_n = r \cdot Q_n \qquad (35-3)$$

ولحساب مقدار الفائدة المستحقة عن هذه الدفعات نطبق العلاقة البسيطة :

$$I'_n = Q'_n - n \cdot k \qquad (36-3)$$

**مثال (3−12):**

احسب حصيلة 10 دفعات كانت تدفع في بداية كل عام، إذا علمت أن مقدار كل منها 5000 ل.س. وبفائدة مركبة 8% سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة عن تلك الدفعات .

**الحل:**

لدينا $n = 15$ $k = 5000,$ $P = 0.08,$ $Q_n = ?,$

بما أن الدفعات تدفع في بداية كل عام فهي دفعات فورية لذلك نطبق العلاقة (3−34)

$$Q'_n = k \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 5000 \cdot (1.08) \cdot \frac{(1.08)^{10} - 1}{1.08 - 1}$$

$$Q'_n = 5000 \cdot (1.08) \cdot (14.48656) = 78227.44 \quad L.S.$$

أما مقدار الفائدة المستحقة فيساوي :

$$I'_n = Q'_n - n \cdot k = 7822.7 - 10 \cdot 5000 = 28227.44 \quad L.S.$$

**ملاحظة 4:**

إذا كانت الدفعات جزئية وفورية وتدفع بواقع $m$ دفعة في العام فإن حصيلتها تحسب من العلاقة :

$$Q'_{n \cdot m} = k \cdot r^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{r^n - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1} \qquad (37-3)$$

**مثال (3−13):**

قرر أحدهم أن يودع مبلغ 1000 ل.س في بداية كل شهر ولمدة 3 سنوات فاحسب حصيلة هذه الدفعات إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً .

**الحل:**

نلاحظ أن هذه الدفعات هي دفعات فورية جزئية (شهرية) وإن حصيلتها تحسب من العلاقة :

$$Q'_{n \cdot m} = k \cdot r^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{r^n - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1}$$

وبما أن لدينا $r = 1.08, \quad m = 12, \quad n = 3, \quad k = 1000$

نعوض فنجد أن:

$$Q'_{n\cdot m} = 1000 \cdot (1.07)^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{(1.07)^3 - 1}{(1.07)^{\frac{1}{12}} - 1} =$$

$$Q'_{n\cdot m} = 1000 \cdot (1.00565415) \cdot \frac{0.225043}{0.005654145} =$$

$$Q'_{n\cdot m} = 40022.46 \quad L.S.$$

## 3-5- حساب القيمة الحالية للدفعات الدورية (بفائدة مركبة):

سنقوم في هذه الفقرة بحساب القيمة الحالية للدفعات العادية و الفورية، وفق الترتيب التالي:

### 3-5-1- حساب القيمة الحالية للدفعات العادية السنوية:

نقصد بمصطلح الدفعات العادية السنوية الدفعات التي تودع في نهاية كل عام. وإن حساب القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات ، يقتضي أن نقوم بحساب القيمة الحالية لكل منها ثم نأخذ مجموعها.

ولحساب القيم الحالية لكل من هذه الدفعات نعود إلى العلاقة العامة لها ، وهي العلاقة الآتية:

$$V_n = \frac{K}{(1+P)^n} = K \cdot h^n \qquad (38-3)$$

حيث : $h = \frac{1}{P+1}$

وهكذا نجد أنه يمكننا أن نستخدم هذه العلاقة لحساب القيم الحالية لكل من الدفعات الدورية حسب مدة كل منها.

فالقيمة الحالية للدفعة الأولى التي أودعت في نهاية العام الأول تساوي : $V_1 = K \cdot h^1$

والقيمة الحالية للدفعة الثانية التي أودعت في نهاية العام الثاني تساوي : $V_2 = K \cdot h^2$

والقيمة الحالية للدفعة الثالثة التي أودعت في نهاية العام الثالث تساوي : $V_3 = K \cdot h^3$

.....

والقيمة الحالية للدفعة ما قبل الأخيرة التي أودعت في نهاية العام $(n-1)$:

$V_{n-1} = K \cdot h^{n-1}$.

والقيمة الحالية للدفعة الأخيرة التي أودعت في نهاية العام $n$ تساوي : $V_n = K \cdot h^n$.

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات تساوي مجموع قيمها الحالية ، أي إن:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + .....V_{n-1} + V_n \qquad (39-3)$$

أي إن:

$$V_n = K \cdot h + K \cdot h^2 + K \cdot h^3 + .....K \cdot h^{n-1} + k \cdot h^n$$

وبملاحظة أن المجموع في الطرف الثاني ما هو إلا مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $K \cdot h$، وأساسها h وعدد حدودها n حداً. فإن مجموع حدودها يساوي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{h^n - 1}{h - 1} \qquad (40-3)$$

وبما أن $h = \frac{1}{P+1} < 1$ فإنه يفضل كتابة العلاقة السابقة على الشكل التالي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{1 - h^n}{1 - h} \qquad (41-3)$$

وبما أن $(1-h)$ يساوي:

$$1 - h = 1 - \frac{1}{P+1} = \frac{P+1-1}{P+1} = P \cdot h$$

لذلك نكتب العلاقة (3-41) على الشكل التالي:

$$V_n = K \cdot h \cdot \frac{1 - h^n}{P \cdot h} = V_n = K \cdot \frac{1 - h^n}{P} \qquad (42-3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا القيمة الحالية الكلية لـ n دفعة عادية سنوية مقدار كل منها K بفائدة مركبة P سنوياً.

**مثال (3-14):**

يبيع أحد التجار السيارات نقداً بمبلغ 450000 ل.س، أو بالتقسيط، بشرط أن يتم دفع مبلغ 300000 ل.س نقداً وفوراً، ويتم دفع أقساط سنوية قدرها 40000 في نهاية كل عام ولمدة خمسة أعوام.

والمطلوب: حساب الثمن الحقيقي (القائم) للسيارة عند بيعها بالتقسيط إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً. ثم قارن ذلك الثمن مع الثمن النقدي المعروض. واستنتج ما تراه مناسباً.

**الحل:**

إن الثمن الحقيقي للسيارة = الدفعة النقدية + القيمة الحالية للأقساط.

ولحساب القيمة الحالية للأقساط نلاحظ أولاً أنها عبارة عن دفعات سنوية عادية . لذلك نطبق العلاقة (3-42) مباشرة فنجد أنه:

لدينا : $K = 40000$ , $P = 0.08$ , $n = 5$ ولدينا أيضاً:

$$h = \frac{1}{1+p} = \frac{1}{1+0.08} = 0.9259259$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة (3-42) نجد أن:

$$V_5 = 40000 \cdot \frac{1-(0.9259259)^5}{0.08}$$

$$V_5 = 40000 \cdot (3.99271) = 159708.40 \quad L.S.$$

وبذلك نجد أن الثمن الحقيقي للسيارة:

$$300000 + 159708.40 = 459708.40 \quad L.S.$$

وبمقارنة هذا الثمن مع الثمن النقدي نجد أنه يزيد عنه بمقدار:

$$459708.40 - 450000 = 9708.40 \ L.S.$$

وهذا يعني إن التاجر قد استفاد من عملية التقسيط، وحصل على مبلغ إضافي قدره 9708.40 ل.س وهو مقدار النصب بسبب التقسيط غير العادل، لذلك نطلب من الطلاب حساب قيمة القسط العادل.

**ملاحظة 5:**

إن القيمة الحالية لجملة من الدفعات الجزئية العادية، التي تدفع بواقع m دفعة في العام ولمدة n عاماً تحسب من العلاقة الآتية :

$$V_{n\cdot m} = K \cdot h^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-h^{n}}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (43-3)$$

وهي العلاقة التي تعطينا القيمة الحالية للدفعات العادية الجزئية بواقع $m$ دفعة متساوية خلال العام.

**مثال (3-15):**

اشترى أحدهم جهاز حاسوب بالتقسيط على أن يدفع ثمنه على شكل أقساط تدفع في نهاية كل شهر، وقيمة كل منها تساوي 2000 ل.س ، ولمدة ثلاث سنوات فاحسب الثمن الحقيقي لذلك الجهاز. إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

**الحل:**

لدينا $k=12$ , $P=0.08$ , $n=3$ , $K=2000$ , $V=?$.

لحساب الثمن الحقيقي لذلك الجهاز نطبق علاقة القيمة الحالية لتلك الدفعات العادية الجزئية:

وبما أن $P=0.08$، فإن :

$$h=\frac{1}{1+P}=\frac{1}{1+0.08}=0.9259259$$

وبالتعويض نحصل على أن:

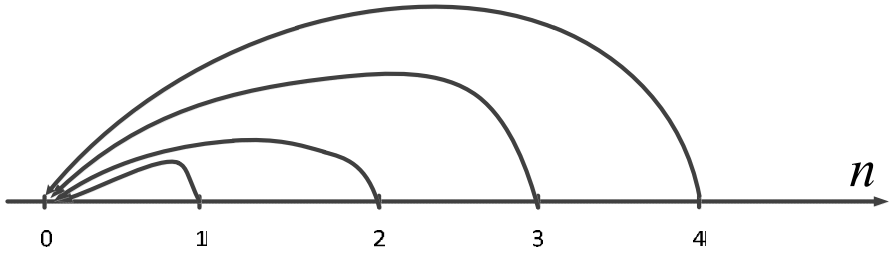
$$V_{n\cdot m} = 2000\cdot(0.9259259)^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1-(0.9259259)^{3}}{1-(0.9259259)^{\frac{1}{12}}}$$

$$V_{n\cdot m} = 2000\cdot(0.9259259)\cdot\frac{1-0.793832}{1-0.9936071}$$

$$V_{n\cdot m} = 64086.68 \qquad L.S.$$

3-5-2- القيمة الحالية للدفعات الفورية السنوية:

لحساب القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات الفورية نتبع الأسلوب نفسه الذي اتبعناه في حساب القيمة الحالية للدفعات العادية، ولكننا هنا يجب أن نلاحظ أن الدفعة الأولى تدفع في بداية العام الأول، والثانية في بداية العام الثاني، والثالثة في بداية العام الثالث.... والأخيرة في بداية العام الأخير، وإن عمليات الدفع تمثل كما في الشكل البياني التالي:




الشكل (3-4)

ومن الشكل نلاحظ أن القيمة الحالية للدفعة الأولى تساوي نفسها أي: $V'_1 = K$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الثانية التي مدتها عام واحد تساوي : $V'_2 = K.h^1$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الثالثة التي مدتها عامان تساوي: $V'_3 = K.h^2$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الرابعة التي مدتها ثلاثة أعوام تساوي: $V'_4 = K.h^3$.

.....

وأن القيمة الحالية للدفعة ما قبل الأخيرة تساوي : $V'_{n-1} = K \cdot h^{n-2}$.

وأن القيمة الحالية للدفعة الأخيرة التي تدفع في بداية العام الأخير تساوي :

$$V'_n = K \cdot h^{n-1}$$

وبذلك نجد أن القيمة الحالية الكلية لهذه الدفعات الفورية السنوية $V'$ تساوي:

$$V'_n = V'_1 + V'_2 + V'_3 + V'_4 + \ldots\ldots V'_{n-1} + V'_n$$

$$V'_n = K + K \cdot h + K \cdot h^2 + K \cdot h^3 + \cdots + K \cdot h^{n-2} + K \cdot h^{n-1}$$

وبما أن الطرف الثاني هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول K وأساسها h وعدد حدودها n حداً، فإننا نجد أن القيمة الحالية المطلوبة تساوي:

$$V'_n = K \cdot \frac{1-h^n}{1-h} \qquad (44-3)$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (3-41) نجد أن القيمة الحالية للدفعات الفورية $V'_n$ ترتبط مع القيمة الحالية للدفعات العادية بالعلاقة:

$$V'_n = \frac{V_n}{h} \qquad (45-3)$$

**ملاحظة 6:**

إذا كانت الدفعات جزئية وفورية وتدفع بواقع ***m*** دفعة في العام ولمدة ***n*** عاماً ، فإن قيمتها الحالية تحسب من العلاقة التالية:

$$V_{n\cdot m} = K \cdot \frac{1-h^n}{1-h^{\frac{1}{m}}} \qquad (46-3)$$

**مثال (3-16):**

يريد أحدهم شراء سيارة خاصة، فاتفق مع البائع على أن يسدد له قيمتها على خمسة أقساط سنوية تدفع في بداية كل عام، اعتباراً من تاريخ الشراء، قيمة كل منها 75000 ل.س. فاحسب الثمن الحقيقي (القائم ) لهذه السيارة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً.

**الحل:**

نلاحظ أن الدفعات هي دفعات فورية لأنها تدفع في بداية كل عام، وأن القيمة الحالية لهذه الدفعات هي نفسها ثمن شراء السيارة المذكورة، كما نلاحظ أن:

$n = 5$ , $Q = 75000$ و أن $P = 0.06$ و أن:

$$h = \frac{1}{1+P} = \frac{1}{1.06} = 0.943396$$

وبتطبيق العلاقة (3-39) نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات الفورية تساوي:

$$V'_n = Q \cdot \frac{1-h^5}{1-h} = 7500 \cdot \frac{1-(0.943396)^5}{1-0.943396}$$
$$V'_n = 334882.77 \quad L.S.$$

## 3-6- حسابات القروض طويلة الأجل وطرق تسديدها:

إن القروض طويلة الأجل هي القروض التي تكون مدتها أكثر من سنتين، وإن عملية تسديد هذه القروض تعتمد على دفع أقساط دورية سنوية أو فصلية أو شهرية، وتنطلق من أحد المبدأين المعادلين التاليين:

**المبدأ الأول: حصيلة الأقساط حتى نهاية المدة = حصيلة القرض،** عند انتهاء المدة. وهذا يجعل التعادل في نهاية المدة.

**المبدأ الثاني: القيمة الحالية للأقساط عند الإقراض= القيمة الأصلية للقرض،** وهذا يجعل التعادل في بداية المدة.

ولهذا فإنه يتوجب على المصرف أن يقوم بتحديد قيمة كل قسط من الأقساط الدورية وحسابها حسب أحد هذين المبدأين، علماً بأن هذه الأقساط يمكن أن تكون متساوية أو غير متساوية، كما عليه أن يقوم بتنظيم عملية دفعها وتحديد مواقيت تسديدها حتى يتم تسديد قيمة القرض كاملة مع جميع الفوائد المستحقة في نهاية الفترة المحددة[1].

### 3-6-1- إيجاد العلاقة العامة (للأقساط المتساوية):

لنفترض أن حجم القرض المقدم من المصرف هو $L$ ، وأن مدة القرض هي $n$ سنة، وأن سعر الفائدة المركبة هو $P$ سنوياً ، وأن معاملها $r = 1 + P$، وأن مقدار القسط السنوي المتساوي هو $R$، وأن القسط الأول يستحق الدفع بعد عام من تاريخ القرض، وهكذا تتوالى الأقساط حتى يتم تسديد القرض مع فوائده خلال $n$ عاماً.

لإيجاد العلاقة الرياضية التي تربط بين $S$ و$R$ و$n$ و$r$. نعتمد على المبدأ الثاني، وهنا نلاحظ أولاً أنه حتى يتم تسديد القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع القيم الحالية لجميع الأقساط السنوية مساوياً لقيمة القرض الأصلية $L$ .

[1] يتشرط أن يكون مقدار القسط السنوي R أكبر من إجمالي الفائدة السنوية المترتبة على قيمة القرض والتي تساوي S.P . أي يجب أن يكون $R > S \cdot P$.

وهكذا فإننا نفترض أن القيمة الحالية للقسط الأول تساوي $V_1$ فيكون: $V_1 = \frac{R}{r}$

وأن القيمة الحالية للقسط الثاني تساوي: $V_2 = \frac{R}{r^2}$

وأن القيمة الحالية للقسط الثالث تساوي: $V_3 = \frac{R}{r^3}$

.....

وبذلك تكون القيمة الحالية للقسط الأخير الذي يدفع بعد $n$ سنة تساوي: $V_n = \frac{R}{r^n}$

حتى يتم تسديد كامل قيمة القرض مع فوائده يجب أن يكون مجموع هذه القيمة الحالية مساوياً لقيمة القرض، أي يجب أن يكون:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ..... + V_n = L$$

$$R \cdot \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + .... + \frac{1}{r^n} \right) = L$$

وبملاحظة أن ما داخل القوس هو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{r}$ وأساسها $\frac{1}{r}$ أيضاً، وعدد حدودها n حداً، نجد أن:

$$L = R \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{r^{-n} - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r - 1}$$

وهكذا نجد أن العلاقة المطلوبة هي:

$$L = R \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (47-3)$$

ومنها يمكننا أن نحسب مقدار القسط السنوي المتساوي $R$ فنجد أن:

$$R = L \cdot \frac{r - 1}{1 - r^{-n}} \qquad (48-3)$$

ويسمى المقدار $\frac{r-1}{1-r^{-n}}$ بمعامل التسديد وتحسب قيمته مباشرة، أو تعطى بوساطة جداول خاصة ملحقة في آخر الكتاب ، أما إجمالي المبلغ الذي قام المقترض بتسديده فيساوي:

$$K_n = n \cdot R = n \cdot L \cdot \frac{(r-1)}{1-r^{-n}} \qquad (49-3)$$

وإجمالي الفائدة المترتبة على القرض $I_n$ يساوي:

$$I_n = K_n - L \qquad (50-3)$$

*العلاقة الخاصة للأقساط الجزئية المتساوية:

عندما يتم الاتفاق على تسديد القرض على شكل أقساط أو دفعات جزئية (فصلية وشهرية)، متساوية عددها m دفعة خلال كل عام ولمدة n عاماً، فإن العلاقة التي تعطينا مقدار القسط الجزئي $R'$ هي:

$$R' = L \cdot \frac{(r^{1/m}-1)}{1-r^{-n}} \qquad (51-3)$$

وعندها فإن إجمالي المبلغ المترتب على المقترض يساوي:

$$K'_n = n \cdot m \cdot R' = n \cdot m \cdot L \cdot \frac{(r^{\frac{1}{m}}-1)}{1-r^{-n}} \qquad (52-3)$$

وإن إجمالي الفائدة المترتبة على المقترض يساوي:

$$P'_n = K'_n - L \qquad (53-3)$$

**مثال (3-17):**

اقترض أحدهم مبلغ 40000 ل.س، من المصرف لمدة 15 عاماً، فما هو مقدار القسط السنوي الذي يضمن تسديد القرض مع فوائده ؟، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً . وما هو إجمالي المبلغ الذي سيدفعه المقترض للمصرف؟ وما هو مقدار الفائدة المترتبة على القرض؟

إذا أراد المقترض أن يكون القسط شهرياً، فما هو مقدار القسط الشهري وإجمالي ما سيدفعه وإجمالي مقدار الفائدة؟

**الحل:**

نحسب مقدار القسط السنوي من العلاقة (3-43) فنجد أن:

$$R = 40000 \cdot \frac{1.08-1}{1-(1.08)^{-15}} = 4673.18 \quad L.S.$$

ونحسب إجمالي ما سيدفعه المقترض من (3-44) فنجد أن:

$$K_n = 15 \cdot 4673.18 = 70097.70 \quad L.S.$$

وبذلك نجد أن إجمالي الفائدة المترتبة على القرض يساوي:

$$I_n = K_n - S = 70097.70 - 40000 = 30097.70 \quad L.S$$

أما إذا أراد المقترض أن يسدد قرضه على شكل دفعات شهرية، فإننا نحسب مقدار القسط الشهري من العلاقة (3-46)، فنجد أن:

$$R' = 40000 \cdot \frac{(1,08)^{\frac{1}{12}}-1}{1-(1.08)^{-15}} = 375.84 \quad L.S. \quad \text{شهرياً}$$

وإن إجمالي ما سيدفعه المقترض في هذه الحالة للمصرف يساوي:

$$K_n = 15 \cdot 12 \cdot 375.84 = 67651.2 \quad L.S.$$

وإن إجمالي الفائدة المترتبة على القرض تساوي:

$$I_n = 67651.2 - 40000 = 27651.2 \quad L.S.$$

وهنا نلاحظ أن الأقساط الشهرية تكون لصالح المقترض لأنها ستقلل من تكاليف القرض.

3-6-2- الطرائق المختلفة لتسديد القروض:

هناك عدة طرائق لتسديد القروض نذكر منها ما يلي:

الطريقة الأولى: طريقة الأقساط المتساوية: وتعتمد هذه الطريقة على تسديد أقساط سنوية متساوية تدفع في نهاية كل عام، أي إن هذه الطريقة تشترط أن تكون جميع هذه الأقساط متساوية، وتساوي مقدار القسط السنوي R المحسوب من العلاقة (3-48) الآتية:

$$R = L \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}}$$

وتشترط أيضاً أن يتضمن القسط الدوري على ما يلي:

1 . جزء مخصص لتغطية كامل الفائدة المستحقة على القرض أو على باقي القرض.

2 . جزء آخر مخصص لتسديد جزء من أصل القرض ويسمى بجزء الاستهلاك.

فإذا رمزنا لمقدار القرض بـ L، ولمقدار القسط الدوري المتساوي بـ R، ولمقدار جزء الاستهلاك من القرض المتضمن في القسط ذي الرقم *i* بالرمز $D_i$، فإننا نجد أن القسط الأول يتألف من عنصرين:

- الفائدة المترتبة على القرض خلال العام الأول، وتساوي $I_1 = L \cdot P$.
- الجزء المخصص للاستهلاك الأول من القرض ومقداره $D_1$.

ومنه نجد أن مقدار القسط الأول يساوي: $R = I_1 + D_1$ .

ومنه نحصل على أن الجزء المخصص للاستهلاك من القرض يساوي:

$$D_1 = R - I_1$$

وبعد تسديد هذه الدفعة يبقى من أصل القرض $(L - D_1)$. وإن الفائدة المستحقة عليه تساوي $I_2 = (L - \cdot D_1) \cdot P$. حيث *P* هو سعر الفائدة المركبة السنوي

وبعد مرور عام آخر (سنتين) على تاريخ القرض، فإن مقدار القسط الثاني سيشمل فائدة ما تبقى من القرض و جزءاً مستهلكاً جديداً نرمز له بـ $D_2$ فيكون:

$$R = I_2 + D_2$$

ويكون لدينا : $D_2 = R - I_2$

وهكذا يكون لدينا أيضاً : $D_3 = R - I_3$

وهكذا نجد أن القسط الأخير يساوي: $R = I_n + D_n$

ويكون : $D_n = R - I_n$

ولذلك نقوم بحساب القسط السنوي R أولاً، ثم نقوم بحساب الفوائد على المبالغ المتبقية من أصل القرض وحساب الاستهلاكات السنوية والمتراكمة، ويتم تنظيم هذه

العمليات عبر جدول خاص بذلك يسمى جدول استهلاك القرض. ويتضمن المدفوعات والاستهلاكات خلال أعوام هذا القرض. ويأخذ هذا الجدول الشكل التالي:

| العام (1) | الرصيد المتبقي من القرض في مطلع العام (2) | الفائدة المترتبة عليه في نهاية العام $I_i$ (3) | القسط السنوي (4) $R$ | الاستهلاك السنوي $D_i$ (5) | الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام (6) | الرصيد المتبقي من القرض من نهاية العام (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $L$ | $L.P$ | $R$ | $D_1$ | $D_1$ | $L-D_1$ |
| 2 | $L-D_1$ | $(L-D_1)\cdot P$ | $R$ | $D_2$ | $D_1+D_2$ | $L-(D_1+D_2)$ |
| 3 | $(L-D_1-D_2)$ | $(L-D_1-D_2)\cdot P$ | $R$ | $D_3$ | $D_1+D_2+D_3$ | $L-(D_1+D_2+D_3)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ..... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ..... |
| $n$ | $(L-D_1-D_2....-D_{n-1})$. | $(L-D_1-D_2....-D_{n-1}).P$ | $R$ | $D_n$ | $D_1+D_2+D_3+...+D_n$ | 0 |
| المجموع | | $I$ | $n.R$ | $L$ | – | |

ولحساب عناصر هذا الجدول نتبع أسلوب التتابع، فبعد أن نحدد مقدار القسط السنوي R من العلاقة(3–48) نقوم بحساب الفائدة الأولى المستحقة $I_1 = L \cdot P$ ثم نقوم بحساب الاستهلاك الأول $D_1$ من العلاقة.

$$D_1 = R - L \cdot P \qquad (54-3)$$

وذلك بطرح عنصر العمود (3) من عنصر العمود (4). ثم نقوم بحساب الاستهلاك المتراكم والرصيد المتبقي من القرض (L–D1)، ونضعهما في العمودين (6) و(7)، ولمتابعة العمل نضع الرصيد المتبقي $(L-D_1)$ في بداية السطر الثاني من العمود (2) ثم نحسب الفائدة المستحقة عليه، وبعدها نقوم بحساب $D_2$ انطلاقاً من عناصر العمودين (3) و(4) اعتماداً على العلاقة:

$$D_2 = R - I_2 \qquad (55-3)$$

وهكذا نتابع العمل حتى نصل إلى نهاية الجدول، وبعدها نتحقق من أن مجموع الاستهلاكات يساوي مقدار القرض L .

**ملاحظة 7:**

هناك طريقة أخرى لحساب عناصر الجدول السابق تعتمد على العلاقة التي تربط بين الاستهلاكات السنوية $D_i, D_{i+1}$ والتي يمكن استخراجها كما يلي :

بما أن الأقساط متساوية، إذن القسط $R_i$ يساوي $R_{i+1}$ وبذلك يكون:

$$\left.\begin{aligned} & R_1 = R_2 \\ & I_1 + D_1 = I_2 + D_2 \\ & L \cdot P + D_1 = (L - D_1) \cdot P + D_2 \\ & L \cdot P + D_1 = L \cdot P - D_1 \cdot P + D_2 \\ & D_1 = -D_1 P + D_2 \\ & D_2 = D_1 + D_1 P \\ & D_2 = D_1 \cdot (1+P) \\ & D_2 = D_1 \cdot r \end{aligned}\right\} \quad (56-3)$$

وهكذا نجد أن:

$$D_3 = D_2 \cdot r$$
$$D_4 = D_3 \cdot r$$

وبصورة عامة يكون لدينا:

$$D_{i+1} = D_i \cdot r \qquad (57-3)$$

وهكذا نجد أن الجزء المستهلك من القرض في نهاية العام $(i+1)$ يساوي الجزء المستهلك منه في نهاية العام (i) مضروباً بمعامل الفائدة $r$. وتستخدم العلاقة (3−57) لحساب عناصر العمود (5) من الجدول الاستهلاكي السابق، وذلك بعد حساب R ثم حساب $D_1$ من العلاقتين (3−54) و (3−55) على الترتيب. وعندما نقوم بحساب عناصر العمود (5) يمكننا بسرعة حساب عناصر بقية الأعمدة.

**مثال (3−18):**

اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س لمدة 5 سنوات وبفائدة مركبة 8% سنوياً على أن يقوم بتسديده بطريقة الأقساط المتساوية من أصل القرض والفوائد .

المطلوب : حساب قيمة القسط السنوي ومقادير الاستهلاكات السنوية، ثم إعداد جدول لاستهلاك هذا القرض .

**الحل:**

لدينا : $S = 100000$ , $n = 5$ , $P = 0.08$

لحساب القسط السنوي نطبق العلاقة (3−48) فنجد أن :

$$R = S \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}} = 100000 \cdot \frac{(1.08)-1}{1-(1.08)^{-5}} =$$

$$R = 25045.65 \quad L.S.$$

ولحساب مقادير الاستهلاكات السنوية من أصل القرض نحسب $D_1$ أولاً فنجد أن:

$$D_1 = R - I_1 = R - L \cdot P = 25045.65 - 100000 \cdot (0.08)$$

$$D_1 = 17045.65$$

ثم نحسب الاستهلاكات المتتالية من العلاقة (3−57) فنجد أن:

$$D_2 = D_1 \cdot R = 17045.65 \cdot (1.08) = 18409.30$$

$$D_3 = D_2 \cdot R = 18409.30(1.08) = 19882.05$$

ثم ننظم جدولاً لاستهلاك هذا القرض كما يلي:

| العام | المتبقي من القرض في بداية العام $i$ | الفائدة المستحقة على المتبقي | القسط السنوي $R$ | الاستهلاك السنوي $D_i$ | الاستهلاك المتراكم | المتبقي من أصل القرض |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100000 | 8000 | 25045.65 | 17045.65 | 17045.65 | 82954.35 |
| 2 | 82954.35 | 6636.35 | 25045.65 | 18409.30 | 35454.95 | 64545.05 |
| 3 | 65656.05 | 5163.60 | 25045.65 | 19882.05 | 55337 | 44663 |
| 4 | 44663 | 2573.04 | 25045.65 | 21472.61 | 76809.61 | 23190.30 |
| 5 | 23190.39 | 1855.22 | 25045.65 | 23190.42 | 100000 | 0 |
| المجموع | ----- | 25228.22 | 125228.22 | 100000.02 | ------ | ------ |

الطريقة الثانية: وهي طريقة الأقساط المتناقصة.

وفي هذه الطريقة يتم تقسيم القرض L إلى n جزءاً متساوياً وتساوي L/ n ، ثم يتم توزيع هذه الأجزاء على السنوات المتتالية (جزء لكل سنة) ، لتسديدها في نهاية كل عام مع الفائدة المترتبة على القرض (أو على الباقي من القرض)

وضمن هذه الشروط، فإن مقدار القسط الأول يساوي:

$$R_1 = L \cdot P + \frac{L}{n}$$

ومقدار القسط الثاني بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_2 = \left( L - \frac{L}{n} \right) \cdot P + \frac{L}{n}$$

ومقدار القسط الثالث بعد حذف ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_3 = \left( L - \frac{2 \cdot L}{n} \right) \cdot P + \frac{L}{n}$$

ومقدار القسط $n$ بعد حذف كل ما استهلك من القرض يساوي:

$$R_n = \left( L - \frac{(n-1) \cdot L}{n} \right) \cdot P + \frac{L}{n} \qquad (58-3)$$

وهنا نلاحظ أن هذه الأقساط غير متساوية، ولكن مقدار الاستهلاك السنوي من أصل القرض ثابت ويساوي $\frac{L}{n}$ ، وإن عدم تساوي الأقساط يعود إلى أن مقادير الفوائد تتناقص عاماً بعد عام.

ويمكن تنظيم هذه العمليات في جدول لاستهلاك القرض كما يلي:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| العام | الرصيد المتبقي من القرض في مطلع العام | الفائدة المترتبة في نهاية العام $I_i$ | الاستهلاك السنوي $R_i$ | الأقساط السنوية | مجموع ما استهلك من القرض في نهاية العام | الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام |
| 1 | $L$ | $L \cdot p$ | $\frac{L}{n}$ | $\frac{L}{n} + L \cdot p$ | $\frac{L}{n}$ | $L - \frac{L}{n}$ |
| 2 | $L - \frac{L}{n}$ | $\left(L - \frac{L}{n}\right) \cdot P$ | $\frac{L}{n}$ | $(4)+(3)$ | $\frac{2 \cdot L}{n}$ | $L - \frac{2 \cdot L}{n}$ |
| 3 | $L - \frac{2 \cdot L}{n}$ | $\left(L - 2 \cdot \frac{L}{n}\right) \cdot P$ | $\frac{L}{n}$ | $(4)+(3)$ | $\frac{3 \cdot L}{n}$ | $L - \frac{3 \cdot L}{n}$ |
| 4 | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

**مثال (3-19):**

اقترض أحدهم مبلغ (100000) ل.س من مصرف التسليف الشعبي ، على أن يتم تسديده على أقساط سنوية بطريقة الأقساط المتناقصة وخلال 5 سنوات، أي على أن يتضمن كل قسط كامل الفائدة المستحقة على القرض (أو باقي القرض)، إضافةً إلى مبلغ ثابت من أصل القرض، والمطلوب : حساب قيمة الجزء الثابت المخصص للاستهلاك السنوي من أصل القرض ثم حساب الأقساط السنوية المتناقصة وإعداد جدول لعمليات استهلاك هذا القرض علماً بأن سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

**الحل:**

إن الجزء الثابت = $\frac{100000}{5}$ = 20000 ل.س سنوياً ،

وإن القسط الأول يستحق بعد مرور عام على تاريخ القرض =الجزء الثابت + الفائدة على كامل القرض = 20000+100000* 0.08 = 28000 ل.س

وهكذا نجد أن كلاً من الأقساط التالية = الجزء الثابت + الفائدة على باقي القرض ،

واعتماداً على العلاقات السابقة نجد أن الجدول المطلوب هو كما يلي:

| العام | المتبقي من القرض في مطلع العام *i* | الفائدة المستحقة في نهاية العام *i* | الاستهلاك السنوي $D_i$ | الأقساط السنوية $R_i$ | الاستهلاك المتراكم من القرض في نهاية العام *i* | الرصيد المتبقي من القرض في نهاية العام |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100000 | 8000 | 20000 | 28000 | 20000 | 80000 |
| 2 | 80000 | 6400 | 20000 | 26400 | 40000 | 60000 |
| 3 | 60000 | 4800 | 20000 | 24800 | 60000 | 40000 |
| 4 | 40000 | 3200 | 20000 | 23200 | 80000 | 20000 |
| *5* | 20000 | 1600 | 20000 | 21600 | 100000 | 0 |
| المجموع | --- | 24000 | 100000 | 124000 | ---- | ---- |

الطريقة الثالثة: طريقة الأقساط المتزايدة:

وتعتمد هذه الطريقة على تجزئة القرض L إلى n جزءاً متساوياً مقدار كل منها L/n، ثم توزيعها على السنوات المتتالية (بواقع جزء لكل سنة) لتسديدها مع الفوائد المستحقة عليها في نهاية كل عام . وإذا استخدمنا الرموز السابقة نفسها نجد أن:

الجزء السنوي الثابت المخصص لاستهلاك القرض = L/n

إن إضافة الفائدة المستحقة عليه في نهاية العام تجعل القسط السنوي مساوياً لحصيلة ذلك الجزء الثابت ، وبذلك نجد أن القسط السنوي في العام ***i*** يساوي:

$$R_i = (L/n).r^i$$

أي إن قيمة القسط $R_i$ تساوي حصيلة الجزء L/n في نهاية العام i

وتتميز هذه الطريقة بأنها سهلة الحساب والفهم لذلك تستخدم كثيراً في العمليات التجارية وتسمى بطريقة ( الكمبيالات).

**مثال (3-20):**

اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س من مصرف التسليف بفائدة 8% بشرط أن يقوم بتسديده خلال 5 سنوات بطريقة الأقساط المتزايدة. والمطلوب : حساب قيمة الجزء الثابت ثم حساب القسط السنوي ومقادير الاستهلاكات السنوية، ثم إعداد جدول لاستهلاك هذا القرض .

**الحل:**

إن قيمة الجزء السنوي الثابت المخصص لاستهلاك القرض يساوي : L/n =20000

ثم نقوم بتنظيم الجدول التالي لعمليات تسديد هذا القرض كما يلي:

| 2 – 3 = 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| الفائدة المستحقة على الجزء الثابت $I_i$ | مقدار القسط السنوي $R_i = (L/n).r^i$ | قيمة الجزء الثابت L/n | العام |
| 1600 | 21600 | 20000 | 1 |
| 3328 | 23328 | 20000 | 2 |
| 5194.24 | 25194.24 | 20000 | 3 |
| 7209.56 | 27209.78 | 20000 | 4 |
| 9386.56 | 29386.56 | 20000 | 5 |
| 26718.58 | 126718.58 | 100000 | المجموع |

**ملاحظة 8:**

إن مقادير الفائدة لنفس القرض 100000 في الأمثلة السابقة كانت مختلفة، فهي في طريقة الأقساط المتناقصة تساوي (24000 ل.س) و أصغر منها في الأقساط المتزايدة (26718.58 ل.س)، وذلك لأنه في المتناقصة تبدأ بأقساط كبيرة وتنتهي بأقساط صغيرة (وهذا ما يخفف من عبء الفائدة المستحقة)، أما في المتزايدة فتبدأ بأقساط صغيرة وتنتهي بأقساط كبيرة (وهذا ما يزيد من عبء الفائدة المستحقة) ، أما طريقة الأقساط المتساوية فتأخذ موقعاً وسطاً ، حيث بلغت الفائدة فيها (25228.22 ل.س) ، وهذا يدل على فعالية هذه الطرق الرياضية في إقامة العدالة في كل الظروف.

## 3-7- حسابات الاستهلاك المنتظم:

نقصد بالاستهلاك المنتظم عملية سحب مبالغ متساوية وبشكلٍ دوري من مبلغ معين مودع في المصرف قيمته K.

وإن أفضل مثالٍ على الاستهلاك المنتظم هو رواتب المتقاعدين، التي تسحب من حصيلة إيداعاتهم في مؤسسة التأمينات. فعندما يتقاعد الموظف يكون قد دفع أقساطاً شهرية أو سنوية إلى مؤسسة التأمينات، وتكون حصيلة هذه الأقساط قد بلغت عند انتهاء الخدمة مبلغاً قدره K، وبعد مرور عام على التقاعد (أو بعد مرور شهر)، تبدأ

مؤسسة التأمينات بدفع رواتب سنوية (أو شهرية) إلى ذلك المتقاعد وذلك لمدة n عاماً (أو تدفع له راتباً ما بقي على قيد الحياة).

وبغض النظر عن الحالات الخاصة التي قد تدخل ضمن هذا البند، فإننا سنناقش الموضوع بشكله العام كما يلي:

لنفترض أن شخصاً ما أودع (أو تجمع لديه ) مبلغاً من المال في المصرف وقدره K، وذلك من أجل أن يستهلكه خلال n عاماً ، على شكل سحوبات سنوية متساوية قيمة كلٍ منها D، كما نفترض أن سعر الفائدة المركبة هو P سنوياً.

وأن المودع سيبدأ بسحب مبالغه بعد مرور عام على إيداع (أو تجميع) المبلغ K المذكور. ولإيجاد العلاقة التي تربط بين متحولات هذه المسالة نقوم بما يلي:

نفترض أن المبلغ قد أودع في بداية الزمن، وبذلك نجد أن حصيلة المبلغ المودع ستصبح بعد مرور عام على إيداعها(في نهاية العام الأول) مساوية لـ $K_1$ حيث إن:

$$K_1 = K \cdot r$$

وفي بداية العام الثاني يقوم المودع بسحب المبلغ الأول D من الحصيلة $K_1$ لسد حاجاته الشخصية، وبذلك يبقى في المصرف المبلغ $(K_1 - D)$.

وفي نهاية العام الثاني تصبح حصيلة المبلغ المتبقي من العام الماضي مساويةً لـ $K_2$ ، حيث إن:

$$K_2 = (K_1 - D) \cdot r = (K \cdot r - D) \cdot r = K \cdot r^2 - D \cdot r$$

وفي بداية العام الثالث يقوم المودع بسحب المبلغ الثاني من الحصيلة $K_2$ ليسد حاجاته الشخصية، وبذلك يبقى في المصرف المبلغ $(K_2 - D)$.

وفي نهاية العام الثالث تصبح حصيلة المبلغ المتبقي من العام الماضي مساويةً لـ $K_3$ ، حيث إن: $K_3 = (K_2 - D) \cdot r$

$$K_3 = (K_2 - D) \cdot r = (K \cdot r^2 - D \cdot r - D) \cdot r = K \cdot r^3 - D \cdot r^2 - D \cdot r$$

وهكذا يمكننا أن نجد أن المبلغ سيبلغ بعد نهاية السنة الرابعة $K_4$ ما يلي:

$$K_4 = K \cdot r^4 - D \cdot r^3 - D \cdot r^2 - D \cdot r$$

وإنه بعد مرور n سنة على الإيداع تصبح حصيلة الإيداع في المصرف مساويةً لـ $K_n$ حيث إن: $K_n = (K_{n-1} - D) \cdot r$

وهي تساوي أيضاً ما يلي :

$$K_n = K \cdot r^n - D \cdot r^{n-1} - D \cdot r^{n-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - D \cdot r^2 - D \cdot r$$

ولكن الدفعة الأخيرة ستسحب بعد n سنة أيضاً ، أي ستسحب في نهاية العام الأخير مباشرة. حتى يستهلك المودع كامل المبلغ الذي أودعه (مع فوائده) في نهاية المدة، يجب أن يكون ما بقي في المصرف بعد n سنة مطابقاً لمقدار الدفعة الأخيرة D أي يجب أن يكون:

$$K_n = D$$
$$K \cdot r^n - D \cdot r^{n-1} - D \cdot r^{n-2} - D \cdot r^{n-3} \ldots\ldots - D \cdot r^2 - D \cdot r = D$$

وبذلك نجد أن:

$$K \cdot r^n = D + D \cdot r + D \cdot r^2 + \ldots\ldots + D \cdot r^{n-2} - D \cdot r^{n-1}$$

وبما أن الطرف الأيمن وهو مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول D، وأساسها r، وعدد حدودها n، نجد أن:

$$K \cdot r^n = D \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$K = D \cdot \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1}$$

وبما أن $h = \frac{1}{r}$ فإن العلاقة السابقة تصبح كما يلي:

$$K = D \cdot \frac{1 - h^n}{r - 1} = D \cdot \frac{1 - h^n}{P} \qquad (59-3)$$

ولكننا نفضل استخدام الصيغة التالية:

$$K = D \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} \qquad (60-3)$$

وهي العلاقة التي تربط بين المبلغ المودع K ومقدار الدفعة السنوية D ومعامل الفائدة r وعدد السنوات n، وهي أربعة متحولات أو مجاهيل إذا علمنا ثلاثة منها يمكننا حساب الرابع.

وهنا نلاحظ أن العلاقة (3−59) تشبه تماماً العلاقة (3− 42) للقيمة الحالية للدفعات العادية ، لأن عملية الاستهلاك المنتظم هي عملية مشابهة للإيداع المنتظم العادي من حيث القيمة الحالية لكلٍ منهما.

**ملاحظة 9:**

إذا كانت الدفعات الاستهلاكية تسحب m مرةً في العام فإن العلاقة (13−60) تأخذ الشكل التالي:

$$K = D' \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r^{\frac{1}{m}} - 1} \qquad (61-3)$$

حيث إن $D'$ هي مقدار الدفعة الجزئية، وr هو معامل الفائدة السنوية، ويساوي $r = 1 + P$.

**مثال (3−21):**

ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه ليمول دفعات عادية سنوية قدرها 2000 ل.س. ولمدة عشر سنوات، علماً بأن سعر الفائدة المركبة $P = 0.05$ سنوياً.

**الحل:**

من العلاقة (3−60) نجد أن:

$$K = D \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} = 2000 \cdot \frac{1 - (1.05)^{-10}}{1.05 - 1} = 15443.47$$

**مثال (3−22):**

كان أحد الموظفين يسدد للتأمينات في بداية كل عام دفعة مقدارها 1000 ل.س. بفائدة $P = 0.06$ ولمدة عشرين عاماً. فما هي حصيلته بعد 5 سنوات على إيداع الدفعة الأخيرة؟ وما هو عدد الدفعات التي قيمة كل منها تساوي 3500 ل.س سنوياً.

والتي تسحب أولها بعد ست سنوات من تاريخ الدفعة الأخيرة وبحيث تستهلك المبلغ كامله في نهاية المدة.

**الحل:**

إن حصيلة المودع بعد مرور سنة واحدة على الدفعة الأخيرة تساوي حصيلة تلك الدفعات الفورية وتساوي:

$$K_{20} = D \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1000 \cdot (1.06) \cdot \frac{(1.06)^{20} - 1}{1.06 - 1} = 38992.73 \quad L.S.$$

حتى نحصل على حصيلة المودع بعد مرور 5 سنوات على الدفعة الأخيرة نقوم بحساب حصيلة المبلغ الأخير بعد مرور 4 سنوات أخرى حسب العلاقة المعروفة الآتية:

$$Q_{24} = K_{20} \cdot r^4 = 38992.73 \cdot (1.06)^4 = 49227.42 \quad L.S.$$

وبما أن عملية استهلاك المبلغ الأخير ستبدأ بعد مرور ست سنوات من تاريخ الدفعة الأخيرة أي بعد مرور عام آخر من تكوينه بوساطة سحب مبالغ متساوية فهي تعطى بالعلاقة (3-60) الآتية:

$$49227.42 = 3500 \cdot \frac{1 - (1.06)^{-n}}{1.06 - 1}$$

$$\frac{49227.42}{3500} = 1 - (1.06)^{-n}$$

$$0.843898 - 1 = -(1.06)^{-n}$$

$$0.15610 = (1.06)^{-n}$$

$$\log(0.15610) = -n \cdot \log(1.06)$$

$$-0.80659328 = -n \cdot (0.025305865)$$

$$n = \frac{-0.80659328}{-0.025305865}$$

$$n = 31.87376$$

دفعة أو سنة

وتسهيلاً للأمر، نعتبر أن عدد الدفعات n=32 دفعة، ونعتمد على أن يكون 31 دفعة منها مساوية لـ 3500 ل.س. أما الدفعة الثانية والثلاثون فنحسب قيمتها بحيث تستهلك المبلغ المتبقي كامله في المصرف، لذلك نقوم بحساب المبلغ الذي ستستهلكه الدفعات الـ31 الأولى، فنجد أنه يساوي:

$$K_{31} = 3500 \cdot \frac{1-(1.06)^{-31}}{1.06-1} = 48751.62 \quad L.S.$$

وبذلك يكون المبلغ المتبقي في المصرف بعد ذلك مساوياً لـ:

$$49227.42 - 48751.80 = 475.62 \quad L.S.$$

وأن حصيلة هذا المبلغ المتبقي من الرصيد الأصلي ستبلغ بعد 32 عاماً ما يلي:

$$(475.62) \cdot (1.06)^{32} = 3069.36 \quad L.S.$$

وهو مقدار السحبة الأخيرة الثانية والثلاثين التي تستهلك المبلغ المتجمع كاملاً.

**ملاحظة10:**

يلاحظ أن المودع كان قد دفع مبلغ 1000 ل.س. لمدة عشرين سنة، وهذا غطى صرفياته لمدة 32 سنة. وبمعدل 3500 ل.س سنوياً للسنوات الـ 31 الأولى و 3069.36 ل.س للسنة الأخيرة.

## 3-8- حسابات الاهتلاك:

من المعلوم أن الأصول الثابتة (وسائل الإنتاج، والأثاث ...إلخ) تتعرض إلى اهتلاك مستمر حتى تصل إلى مرحلة تصبح غير صالحة للاستعمال. ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي لهذه الأصول نقوم بتعريف المصطلحات التالية:

القيمة الأصلية: وهي ثمن تكلفة الأصول قبل الاستخدام مباشرةً، ونرمز لها بـ $K_0$ . ويفترض أنها ستستهلك خلال n عاماً ، وما يبقى منها يعتبر نفاية .

القيمة الدفترية: وهي القيمة الأصلية مطروحاً منها مجموع الاهتلاكات المتراكمة، ونرمز لها في العام $i$ بـ $K_i$ .

مدة الاستخدام: وهي المدة التي تبقى فيها الأصول صالحة للاستخدام، ونرمز لها بـ n سنة.

القيمة المتبقية: وهي قيمة الأصول كنفاية في آخر المدة، ونرمز لها بـ $K_n$.

القيمة المستهلكة: وهي تساوي الفرق بين القيمة الأصلية والقيمة المتبقية، ونرمز لها بـ $K_0 - K_n$.

قسط الاهتلاك: وهو المبلغ المخصص سنوياً للاهتلاك، ونرمز له بـ A.

ولحساب الاهتلاك تتبع إحدى الطرق الآتية:

3-8-1- الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك:

وتعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري بشكل ثابت، ففي كل عام يستهلك جزء ثابت من الأصول الثابتة، وبذلك يكون مقدار الاهتلاك السنوي مساوياً لمقدار ثابت $A$،يحسب من العلاقة الخطية التالية:

$$A = \frac{K_0 - K_n}{n} \qquad (62-3)$$

وأن مقدار الاهتلاك المتراكم في نهاية العام $i$ يساوي $S_i$ ويساوي:

$$S_i = i \cdot A$$

وأن القيمة الدفترية للأصول الثابتة بعد مرور $i$ عام على استعمالها تصبح مساوية لـ $K_i$ حيث إن:

$$K_i = K_0 - i \cdot A$$

3-8-2- الطريقة التناسبية( أو النسبية):

وتعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري على شكل نسبة ثابتة من القيمة المتبقية من الأصول الثابتة، وتسمى هذه النسبة بمعدل الاهتلاك ونرمز لها بـ $P$.

وهكذا نجد أن مقدار الاهتلاك في العام $i$ تساوي:

$$A_i = K_{i-1} \cdot P \qquad (63-3)$$

وأن القيمة الدفترية للأصول الثابتة في نهاية العام $i$ تساوي $K_i$ وتساوي:

$$K_i = K_{i-1} - A_i = K_{i-1} - K_{i-1} \cdot P \qquad (64-3)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن:

$$K_1 = K_0 \cdot (1-P)$$

وبطريقةٍ مشابهة نجد أن:

$$K_2 = K_1 \cdot (1-P) = K_0 \cdot (1-P)^2$$
$$K_3 = K_2 \cdot (1-P) = K_0 \cdot (1-P)^3$$
.....

وبالتالي نحصل على أن القيمة المتبقية من الأصول تساوي:

$$K_n = K_0 \cdot (1-P)^n \qquad (65-3)$$

وبذلك نجد أن معدل الاهتلاك يحسب من العلاقة التالية:

$$1-P = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$
$$P = 1-\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \qquad (66-3)$$

ويمكننا التعبير عن مقدار الاهتلاك في العام *i* بدلالة P و $K_0$ ، فنجد أنه:

$$A_i = K_{i-1} \cdot P = K_0 \cdot (1-P)^{i-1} \cdot P \qquad (67-3)$$

وأن إجمالي الاهتلاك المتراكم في الأصول الثابتة في نهاية العام *i* يساوي $S_i$ ويساوي $S_i = \sum A_i$ ، ويساوي:

$$S_i = K_0 - K_i = K_0 - K_0 \cdot (1-P)^i$$
$$S_i = K_0 \cdot \left[1-(1-p)^i\right] \qquad (68-3)$$

**ملاحظة11:**

يمكن استخدام الطريقتين معاً (الخطية والتناسبية) في حساب الاهتلاك السنوي للأصول الثابتة، ففي التطبيقات العملية تستخدم الطريقة التناسبية في حساب الاهتلاك في بداية المدة، حيث تكون نسبة الاهتلاك كبيرة، ثم تستخدم الطريقة الخطية في

حساب الاهتلاك في الفترة الأخيرة حيث يعتبر مقدار الاهتلاك ثابتاً، وهذا ما يساعد على تصفية تلك الأصول كلياً في نهاية المدة.

**مثال (3-22):**

تقدر مدة اهتلاك أحد أنواع الأصول الثابتة بعشر سنوات، ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي تستخدم الطريقة التناسبية خلال خمس السنوات الأولى، وبمعدل اهتلاك قدره 25%. وتستخدم الطريقة الخطية لحساب الاهتلاك خلال خمس السنوات المتبقية. والمطلوب حساب مقدار الاهتلاك السنوي خلال السنوات العشرة المذكورة.

**الحل:**

لحساب الاهتلاك السنوي نعد الجدول التالي، ونفترض أن قيمة هذه الأصول تساوي100 ل.س.

| العام في المرحلة الأولى | مقدار الاهتلاك في نهاية العام حسب الطريقة التناسبية $A_i = K_{i-1} \cdot P$ | القيمة الدفترية المتبقية في نهاية العام $i$ $K_i = K_{i-1} - A_i$ | إجمالي الاهتلاك المتراكم في نهاية العام $S_i = K_0 - K_i = \sum A_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $A_1 = (100) \cdot \frac{25}{100} = 25$ | $K_1 = 100 - 25 = 75$ | $S_1 = 100 - 75 = 25$ |
| 2 | $A_2 = (75) \cdot \frac{25}{100} = 18.75$ | $K_2 = 75 - 18.75 = 56.25$ | $S_2 = 43.75$ |
| 3 | $A_3 = (56.25) \frac{25}{100} = 14.06$ | $K_3 = 56.25 - 14.06 = 42.19$ | $S_3 = 57.81$ |
| 4 | $A_4 = (42.19) \frac{25}{100} = 10.55$ | $K_4 = 4319 - 10.55 = 31.64$ | $S_4 = 68.36$ |
| 5 | $A_5 = (31.64) \frac{25}{100} = 7.91$ | $K_5 = 31.64 - 7.91 = 23.73$ | $S_5 = 76.27$ |
| العام في المرحلة الثانية | مقدار الاهتلاك في نهاية العام حسب الطريقة الخطية $A = \frac{K_5 - K_n}{n}$ | $K_i = K_5 - i \cdot A$ | $S_i = i \cdot A = \Sigma A_i$ |
| 1 | $A = \frac{23.73 - 0}{5} = 4.746$ | $K_6 = 23.73 - 4.746 = 18.984$ | $S_6 = 81.016$ |
| 2 | $A = 4.746$ | $K_7 = 18.984 - 4.746 = 14.238$ | $S_7 = 85.762$ |
| 3 | $A = 4.746$ | $K_8 = 14.238 - 4.740 = 9.492$ | $S_8 = 90.508$ |
| 4 | $A = 4.746$ | $K_9 = 9.492 - 4.746 = 4.7462$ | $S_9 = 95.254$ |
| 5 | $A = 4.746$ | $K_{10} = 4.746 - 4.746 = 0$ | $S_{10} = 100$ |

3-8-3- طريقة الأقساط الاستثمارية المتساوية:

وتعتمد هذه الطريقة على حساب أقساط الاهتلاك منذ البداية وفق الطريقة الخطية السابقة من العلاقة:

$$A = \frac{K_o - K_n}{n}$$

ثم القيام باستثمار هذه الأقساط في أحد المصارف وتسديدها على شكل دفعات عادية سنوية، وذلك لتأمين المبلغ اللازم لاستبدال تلك الأصول بعد $n$ عاماً .

ولكن حساب المبلغ $A$ يمكن أن يتم بطريقةٍ أخرى، وذلك انطلاقاً من مبدأ تعادل الطرفين، والذي يقتضي أن تتحقق المعادلة الآتية:

حصيلة أقساط الاهتلاك = القيمة المستهلكة من الأصول في نهاية المدة.

وبما أن حصيلة أقساط الاهتلاك كدفعات عادية تعطى بالعلاقة:

$$Q_n = A \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

وأن القيمة المستهلكة من الأصول في نهاية المدة تساوي: $(K_o - K_n)$، فإننا نحصل على المعادلة التالية:

$$A \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = K_0 - K_n \qquad (69-3)$$

وبذلك نجد أن مقدار قسط الاهتلاك السنوي يساوي:

$$A = (K_0 - K_n) \cdot \frac{r - 1}{r^n - 1} \qquad (70-3)$$

**مثال (3-23):**

اشترى أحدهم آلة تصوير قيمتها 20000 ل.س. وقدر عمرها الإنتاجي بـ 5 سنوات فقط، كما قدرت قيمتها كنفاية في آخر المدة بـ 2000 ل.س. والمطلوب حساب قسط الاهتلاك حسب طريقة الأقساط الاستثمارية المتساوية، ثم إعداد جدول خاص باستهلاك هذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 7% سنوياً.

**الحل:**

لدينا: $K_0 = 20000$ , $n = 5$ , $K_5 = 2000$ , $P = 0{,}07$ .

وهكذا نجد أن: $A = (20000 - 2000) \cdot \dfrac{(1.07) - 1}{(1.07)^5 - 1} = 3130.03$

وبناءً على ذلك نعد جدول الاستهلاك التالي:

| العام | قسط الاهتلاك في نهاية العام | فوائد الاستثمار في بداية العام $I_i$ بمعدل 7% | القيمة المخصصة للاهتلاك $D_i$ | المجموع التراكمي الاستهلاكي | القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3130.03 | - | 3130.03 | 1310.32 | 16869.97 |
| 2 | 3130.03 | 219.12 | 3349.13 | 6479.45 | 13520.84 |
| 3 | 3130.03 | 453.54 | 3583.57 | 10063.02 | 9937.27 |
| 4 | 3130.03 | 704.39 | 3834.42 | 13897.44 | 6102.85 |
| 5 | 3130.03 | 972.80 | 4102.83 | 18000.00 | 2000.00 |
| المجموع | 15650.15 | 2349.85 | | | |

ولتوضيح كيفية حساب عناصر هذا الجدول نورد الخطوات التالية:

1- نضع قسط الاهتلاك في العمود 2.

2- نقوم بحساب القيمة المخصصة للاهتلاك فنجد أن : $D_1 = 3130.03$ ،

ثم نحسب $D_2$ من العلاقة:

$$D_2 = D_1 \cdot r = 3130.03 \cdot (1.07) = 3349.3 \ \ L.S.$$

ثم نحسب $D_3$ من العلاقة:

$$D_3 = D_2 \cdot r = 3349.3 \cdot (1{,}07) = 3583.57 \ \ L.S.$$

وهكذا نتابع حساب $D_4$ و $D_5$ ونضع النتائج في الجدول.

3- نحسب فوائد الاستثمار من العلاقة: $I_i = D_i - A$ ونضعها في الجدول.

4- نحسب المجموع التراكمي المخصص للاهتلاك ،وذلك بإضافة كل قيمة إلى التي تليها حتى الأخير.

5- نحسب القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة، وذلك بطرح المجموع التراكمي للاهتلاك من القيمة الأصلية 20000 ، فنحصل على العمود الأخير.

## 3-9- حسابات التكلفة الرأسمالية:

تعرّف التكلفة الرأسمالية لمشروع ما أو لآلة معينة بأنها مجموع القيمة الأصلية لذلك المشروع + القيمة الحالية لنفقات الصيانة والإصلاح أو الاستبدال جميعها، التي ستصرف عليه خلال فترة عمره الاقتصادي. علماً بأن عمليات الصيانة والإصلاح أو الاستبدال تجري دورياً وكل عدة سنوات وفي نهاية كل دورة. وسنعالجها بالترتيب عل النحو التالي :

### 3-9-1- التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والإصلاح:

لنرمز للتكلفة الرأسمالية بالرمز $KC$، وللقيمة الأصلية بالرمز S، ولمقدار الدفعة الدورية للصيانة أو الإصلاح بالرمز Q، ولطول الفترة الزمنية بين كل إصلاح وآخر بالرمز $\ell$، وللقيمة الحالية لدفعات الصيانة أو الإصلاح بالرمز V، فإننا نجد أن هذه المتحولات مرتبطة حسب التعريف بالعلاقة الآتية:

$$KC = S + V \qquad (70-3)$$

وبما أن دفعات الصيانة أو الإصلاح هي دفعات عادية ودائمة، ولكنها تتميز بأن كلاً منها يدفع في نهاية الدورة التي مدتها $\ell$ سنة فإننا نجد أن:

القيمة الحالية للدفعة الأولى التي ستدفع في نهاية الدورة الأولى؛ أي التي ستدفع بعد مرور $\ell$ عام تساوي : $V_1 = Q \cdot h^{\ell}$

أما القيمة الحالية للدفعة الثانية التي ستدفع في نهاية الدورة الثانية؛ أي التي ستدفع بعد مرور $2\ell$ عاماً تساوي : $V_2 = Q \cdot h^{2\ell}$

وكذلك نجد أن القيمة الحالية للدفعة الثالثة تساوي : $V_3 = Q \cdot h^{3\ell}$

.....

وهكذا يستمر الأمر إلى ما لا نهاية تقريباً.

وبذلك نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات تساوي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + .....$$
$$V = Q \cdot h^{\ell} + Q \cdot h^{2\ell} + Q \cdot h^{3\ell} + Q \cdot h^{4\ell} + .....$$

وهنا نلاحظ أن الطرف الثاني هو مجموع حدود متوالية هندسية لا نهائية، حدها الأول $Q \cdot h^{\ell}$، وأساسها $h^{\ell}$، وعدد حدودها لا نهائي، وبذلك يكون مجموع حدودها مساوياً لـ:

$$V = Q \cdot h^{\ell} \cdot \frac{1}{1-h^{\ell}} \qquad (h<1)$$

$$V = Q \cdot \frac{h^{\ell}}{1-h^{\ell}} \qquad (71-3)$$

ويمكننا معالجة هذه العلاقة للحصول على قيمة $V$ بدلالة $P$ فنجد أن:

$$V = Q \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+P}\right)^{\ell}}{1-\left(\frac{1}{1+P}\right)^{\ell}} = Q \cdot \frac{\frac{1}{(1+P)^{\ell}}}{\frac{(1+P)^{\ell}-1}{(1+P)^{\ell}}}$$

وبالاختصار على $(1+P)^{\ell}$ نحصل على:

$$V = Q \cdot \frac{1}{(1+P)^{\ell}-1} = Q \cdot \frac{1}{r^{\ell}-1} \qquad (72-3)$$

وبتعويض ذلك في العلاقة (3-70) نحصل على أن التكلفة الرأسمالية لأي مشروع أو جهاز أو آلة تحسب من العلاقة الآتية:

$$KC = S + Q \cdot \frac{1}{r^{\ell}-1} \qquad (73-3)$$

**مثال (3-24):**

قررت إدارة الجامعة إنشاء مدرج لطلابها، فكلفت الدائرة الهندسية بإعداد الدراسة الفنية وتقدير تكاليف الإنشاء والصيانة، فكانت تكاليف الإنشاء 3000000 ل.س. وكانت تكاليف الصيانة 100000 ل.س ، وذلك بشرط أن تُجرى كل ثلاث سنوات، والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لهذا المدرج باعتبار أن عمره الاقتصادي كبير جداً، وأن سعر الفائدة المركبة هو 8% سنوياً.

**الحل:**

لدينا $S = 3000000$ , $\ell = 3$ , $P = 0.08$

وبذلك نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة تحسب من العلاقة (3−73) الآتية:

$$KC = S + Q \cdot \frac{1}{r^{\ell} - 1}$$

$$KC = 3000000 + 100000 \cdot \frac{1}{(1.06)^{3} - 1}$$

$$KC = 3523516.36 \quad L.S.$$

3−9−2− التكلفة الرأسمالية والاستبدال:

لنفترض الآن أن عمليات الإنتاج أو الخدمة في المنشأة تقتضي أن نقوم باستبدال الآلات أو الأجهزة الموجودة كل $\ell$ عام، وهذا يعني أنه علينا أن ندفع في نهاية كل فترة مؤلفة من $\ell$ عام مبلغاً جديداً يساوي القيمة الأصلية S لتلك الأجهزة (بفرض أن السعار ثابتة)، وبفرض أنه يمكننا تصريف أو تسويق الأجهزة القديمة (كنفاية أو خردة) بمبلغ معلوم وليكن $S_0$. فإننا نجد أن قيمة كل من الدفعات الدورية لاستبدال تلك الأجهزة تصبح مساوية لما يلي : $Q = (S - S_0)$

ومن العلاقة (3−73) نجد أن القيمة الحالية لهذه الدفعات العادية تساوي:

$$V = Q \cdot \frac{1}{r^{\ell} - 1} = \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} \qquad (75-3)$$

وهكذا نحصل على أن التكلفة الرأسمالية لمثل هذه المشاريع تساوي القيمة الأصلية *S+* القيمة الحالية للدفعات الدورية التي قيمة كل منها $(S - S_0)$، أي إن:

$$KC = S + V$$

$$KC = S + (S - S_0) \cdot \frac{1}{r^{\ell} - 1}$$

$$KC = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} \qquad (76-3)$$

**حالة خاصة:**

وكحالة خاصة لعملية الاستبدال يمكننا النظر في الحالة التي تكون فيها قيمة النفاية معدومة أو مهملة، أي الحالة التي تكون فيها $S_0 = 0$. فعندها تأخذ العلاقة (3-73) الشكل التالي:

$$KC = S + \frac{S}{r^{\ell} - 1} = S \cdot \left[1 + \frac{1}{r^{\ell} - 1}\right]$$

$$KC = S \cdot \frac{r^{\ell}}{r^{\ell} - 1} \qquad (77-3)$$

**مثال (3-25):**

يريد أحدهم أن يشتري جهازاً للتحليل. فوجد أمامه العرضين الآتيين:

العرض الأول: ثمن الجهاز 25000 ل.س ويقتضي استبداله كل 5 سنوات.

العرض الثاني: ثمن الجهاز 30000 ل.س ويقتضي استبداله كل 6 سنوات.

والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لكل من هذين الجهازين، علماً بأن قيمة الجهاز الأول كنفاية 3000 ل.س ، وقيمة الجهاز الثاني كنفاية 5000 ل.س ، وأن سعر الفائدة المركبة 9% سنوياً. ثم قارن بين العرضين وحدد أيهما الأفضل.

**الحل:**

لدينا بالنسبة للعرض الأول:

$$S_0 = 3000 \quad , \quad P = 0.09 \quad , \quad \ell = 5 \quad , \qquad S = 250000$$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة للجهاز الأول تساوي:

$$KC_1 = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} = 25000 + \frac{25000 - 3000}{(1.09)^5 - 1}$$

$$KC_1 = 65844.82 \quad L.S.$$

ولدينا بالنسبة للعرض الثاني أن:

$$S_0 = 5000, \qquad P = 0.09, \qquad \ell = 6, \quad S = 30000$$

وهكذا نجد أن التكلفة الرأسمالية المطلوبة للجهاز الثاني تساوي:

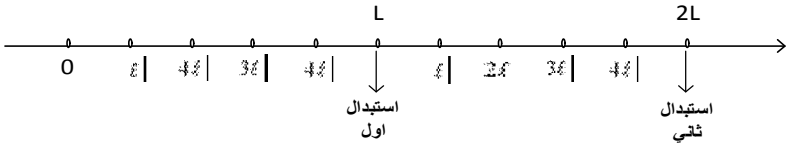
$$KC_2 = S + \frac{(S - S_0)}{r^{\ell} - 1} = 30000 + \frac{30000 - 5000}{(1.09)^6 - 1}$$

$$KC_2 = 66922.16 \quad L.S.$$

وبالمقارنة نجد أن العرض الأول أفضل من العرض الثاني من الناحية الاقتصادية.

3-9-3 – التكلفة الرأسمالية مع الصيانة والاستبدال:

لمعالجة هذه الحالة نفترض أن عمر الآلة أو المنشأة المستثمرة L عاماً، وأنها تحتاج خلال عمرها إلى صيانة دورية كل $l$ عام، وأن عمليات الصيانة تجري عليها خلال عمرها الاقتصادي m مرة. وهذا يعني أن العمر L هو من مضاعفات دورة الصيانة $l$، وأن $L = m \cdot l$ ولتوضيح ذلك نرسم الشكل البياني التالي:




الشكل ( 3-5)

ومن خلال هذا الشكل نلاحظ أن عمليات الصيانة تجري بعد $\ell$ عام من مباشرة العمل، ثم بعد $2l$، ثم بعد $3l$... حتى يتم استبدالها في نهاية العام L. وهنا يجب أن نلاحظ أن عملية الصيانة الأخيرة في نهاية كل دورة عمرية لا تنجز، لأنه يتم استبدال الآلة بآلة جديدة في نهاية تلك الدورة.

وإذا رمزنا:

- للقيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً دون انقطاع حتى الاستبدال بالرمز $V_1$.
- وللقيمة الحالية لتكاليف الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية بالرمز $V_2$.
- وللقيمة الحالية لتكاليف الاستبدال في نهاية كل دورة عمرية للآلة بالرمز $V_3$.
- وللقيمة الأصلية اللازمة لشراء هذه الآلة (ونعتبرها ثابتةً عند كل استبدال) بالرمز $S$.

فعندها نجد أن التكلفة الرأسمالية للآلة المستثمرة تساوي:

$$KC = S + (V_1 - V_2) + V_3 \qquad (78-3)$$

ولقد قمنا بطرح $V_2$ من $V_1$ حتى نحصل على القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المنجزة فعلياً حيث إن الصيانة الأخيرة لم تنجز بسبب الاستبدال.

وبفرض أن قيمة تكاليف الصيانة في كل مرة تساوي Q، نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً من العلاقة (3-72) وهي تساوي:

$$V_1 = \frac{Q}{r^{\ell} - 1} \qquad (79-3)$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف عمليات الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية والتي طول كل منها L عاماً، من العلاقة (3-72) نفسها، وهي تساوي:

$$V_2 = \frac{Q}{r^{L} - 1} \qquad (80-3)$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية لتكاليف الاستبدال مع وجود نفاية $S_0$ من العلاقة (3-72) فنجد أن:

$$V_3 = \frac{(S - S_0)}{r^{L} - 1}$$

وبذلك نجد أن التكلفة الرأسمالية للآلة أو المنشأة المستثمرة والمعرفة بالعلاقة (3-73) تأخذ الشكل التالي:

$$KC = S + \frac{Q}{r^{\ell} - 1} - \frac{Q}{r^{L} - 1} + \frac{(S - S_0)}{r^{L} - 1} \qquad (81-3)$$

وهي تضم عدة حدود هي:

$S$ الثمن الأصلي للآلة عند الشراء، أو في بداية الاستثمار (ونعتبره ثابتاً عند كل استبدال).

$\frac{Q}{r^{\ell} - 1}$ القيمة الحالية لتكاليف الصيانة المستمرة فرضاً دون انقطاع حتى الاستبدال.

$\frac{Q}{r^{L} - 1}$ القيمة الحالية لتكاليف الصيانة التي لم تنجز في نهاية كل دورة عمرية.

$\frac{(S-S_0)}{r^L-1}$ القيمة الحالية لدفعات الاستبدال مع وجود نفاية في نهاية كل دورة عمرية.

**ملاحظة 12:**

إذا كانت قيمة النفاية $S_0 = 0$ فإن العلاقة السابقة (3-80) تبقى نفسها، ولكنها تأخذ شكلاً آخر هو:

$$KC = S + \frac{S}{r^L-1} + \frac{Q}{r^\ell-1} - \frac{Q}{r^L-1}$$

$$KC = S \cdot \left[1 + \frac{1}{r^L-1}\right] + Q \cdot \left[\frac{1}{r^\ell-1} - \frac{1}{r^L-1}\right]$$

$$KC = S + \left[\frac{r^L}{r^L-1}\right] + Q \cdot \left[\frac{r^L - r^l}{\left(r^\ell-1\right)\cdot\left(r^L-1\right)}\right] \qquad (82-3)$$

**مثال (3-26):**

لنأخذ آلة النسخ المعروضة في المثال 3 السابق، ولنفترض أن ثمن الآلة عند الشراء $S = 40000$ ل.س ، وأنها تحتاج إلى صيانة كل عام بقيمة 2000 ل.س سنوياً، وأنه يجب استبدالها كل سبع سنوات. وأن قيمتها في نهاية كل مدة عمرية كنفاية معدومة أو مهملة، فاحسب التكلفة الرأسمالية لاستثمار هذه الآلة إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة 8 % سنوياً.

ثم احسب صافي ربح استثمار هذه الآلة، إذا علمت أنها قادرة على إنجاز 500000 نسخة خلال عمرها الاقتصادي، وأن صاحب المكتبة يأخذ مقابل كل نسخة 0.90 ل. س. وأن تكلفة الورق والحبر تساوي 0.40 ل.س. لكل نسخة، وأنه يودع صافي ربحه منها في المصرف في نهاية كل عام . ثم احسب القيمة الإجمالية لإجمالي العوائد.

**الحل:**

لحساب التكلفة الرأسمالية نلاحظ أنه لدينا:

$$KC = ? \ , \ P = 0.08 \ , \ Q = 20000 \ , \ L = 7 \ , \ S_0 = 0 \ , \ S = 40000$$

وبتطبيق العلاقة (14-14) أو (14-15) نجد أن:

$$KC = 40000 + \frac{2000}{(1+0.08)^{1}-1} - \frac{2000}{(1+0.08)^{7}-1} + \frac{(4000-0)}{(1+0.08)^{7}-1}$$
$$KC = 40000 + 25000 - 2801.81 + 56036.20$$
$$KC = 118235.00 \ \ L.S.$$

ولحساب صافي الربح نلاحظ أن الآلة قادرة على إنجاز 500000 نسخة خلال سبع سنوات، وهي بذلك قادرة على إنجاز حوالي: $\frac{500000}{7} = 71428.57$ نسخة خلال العام. وبذلك نجد أن صافي ربح المستثمر خلال العام الواحد يساوي:

$$NP = (0.90 - 0.40) \cdot 71428.57 = 35714.28 \quad L.S.$$

وبما أن هذه الأرباح الصافية تدفع في نهاية كل عام، فهي عبارة عن دفعات عادية، وبذلك نجد أن قيمتها الحالية تساوي:

$$V_7 = Q \cdot \frac{1-h^n}{P} = 35714.28 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1.08}\right)^7}{0.08} =$$
$$V_7 = 35714.28 \cdot 5.026370061 = 185941.76 \quad L.S.$$

وبمقارنة هذه القيمة الحالية مع التكلفة الرأسمالية نجد أن القيمة الحالية لإجمالي العوائد الصافية من هذه الآلة يساوي:

$$185941.76 - 118235.00 = 67706.76 \quad L.S.$$

## تمارين غير محلولة على الفصل الثالث

**1)** أودع شخص مبلغ 7000 ل.س. بفائدة مركبة 6% سنوياً، فاحسب حصيلة هذا المبلغ بعد 5 سنوات، ومقدار الفائدة المستحقة.

**2)** أودع أحدهم المبالغ التالية:

12000 ل.س لمدة 3 سنوات بفائدة 6% سنوياً

8000 ل.س لمدة 5 سنوات بفائدة 5% سنوياً

7000 ل.س لمدة 6 سنوات بفائدة 5% سنوياً

فاحسب حصيلة كل من هذه المبالغ، والفائدة المستحقة عليها. ثم احسب الحصيلة الكلية لها .

**3)** يودع شخص في صندوق التوفير مبلغ 10000 ل.س. في نهاية كل عام. أوجد رصيد ذلك الشخص في نهاية السنة الخامسة، واحسب مقدار الفائدة المستحقة له، إذا علمت أن سعر الفائدة المركبة هو 8% سنوياً.

**4)** كان أحد الأشخاص يودع في آخر كل سنة مبلغ 5100 ل.س. وفي نهاية السنة الرابعة وجد أنه حصل على فوائد مركبة قدرها 3600 ل.س. والمطلوب:

1. حساب حصيلة تلك الدفعات.
2. حساب معدل الفائدة السنوي.

**5)** اقترض أحدهم مبلغ 400000 ل.س. لمدة 5 سنوات وبفائدة سنوية 7%، احسب القسط الشهري لتسديد ذلك القرض حسب الطريقة الأولى (ثم نظم جدولاً لتسديد ذلك القرض).

**6)** اقترض أحدهم مبلغ 100000 ل.س. من المصرف التجاري بفائدة سنوية 5%، وتعهد بسدادها خلال أربع سنوات، على شكل أقساط سنوية حسب طريقة الأقساط المتناقصة، والمطلوب تنظيم جدول لتسديد ذلك القرض.

**7)** قام أحدهم بشراء مستودع لاستثماره في العمل التجاري بقيمة 1500000 ل.س ، ويحتاج إلى صيانة وترميم كل 3 سنوات، بتكلفة 60000 ل.س ، احسب التكلفة الرأسمالية لهذا المستودع إذا كان سعر الفائدة المركبة 8% سنوياً.

**8)** يريد أحدهم شراء سيارة لاستثمارها في النقل الداخلي، فإذا علمت أن ثمنها الحالي 800000 ل.س ، وإن تكاليف صيانتها تقدر بـ 5000 ل.س كل عام، وأن تكاليف تجديد التأمين وتسجيلها تساوي 65000 ل.س ، والمطلوب: حساب التكلفة الرأسمالية لهذه السيارة بفرض أن عمرها كبير جداً، وأن سعر الفائدة المركبة 6% سنوياً؟

**9)** يريد أحدهم أن يقوم بمشروع استثماري لصناعة الأجبان، فاشترى آلات حديثة بقيمة 4000000 ل.س، وإذا علمت أن هذه الآلات تحتاج إلى صيانة عامة كل سنتين بقيمة 200000 ل.س، وأنه سيقوم باستبدالها كل عشر سنوات، وتقدر قيمتها كنفاية بـ 300000 ل.س، فما هي التكلفة الرأسمالية لهذه الآلات إذا كان سعر الفائدة المركبة 7% سنوياً.

**10)** أراد أحدهم أن يفرش منزله بالسجاد، فاشترى 200 م2 منه بسعر المتر 600 ل.س، فإذا كان العمر الاقتصادي للسجاد 15 سنة، فاحسب قيمة الاهتلاك السنوي في الحالات التالية:

1. حسب الطريقة التناسبية، علماً بأن نسبة الاهتلاك 15%، ثم احسب المتبقي من القيمة الأساسية والتي تستخدم كنفاية.
2. حسب الطريقة الخطية.
3. حسب الطريقتين معاً: 6 سنوات للطريقة التناسبية، ثم 4 سنوات للطريقة الخطية.
4. حسب طريقة الأقساط الاستثمارية.

# الفصل الرابع

# الأسهم والسندات والأسواق المالية

## 4-1- الأسهم:

### 4-1-1 - تعاريف عامة:

تقوم الشركات المساهمة عند إحداثها، أو عند توسعها بإصدار أسهم جديدة يكون لها القيمة نفسها، ولها الحقوق نفسها، وعليها الواجبات نفسها، ثم طرحها للاكتتاب العام لشرائها من قبل المواطنين.

تعريف السهم: هو وثيقة مالية ذات قيمة اسمية موحدة تمثل حصة من رأسمال الشركة المساهمة تكون مخصصة للاكتتاب العام، والأسهم هي أوراق قابلة للتداول بين المواطنين وغير قابلة للتجزئة، وتستحق حصة متناسبة من الأرباح المحققة أو الموزعة سنوياً، وتتحمل حصة متناسبة من الخسائر الناجمة عن عمل أو نشاط تلك الشركة، ولا يوجد تاريخ معين لتسديد قيمتها لأصحابها.

وتصنف الأسهم المالية إلى نوعين أساسيين:

الأسهم العادية: وهي الأكثر شيوعاً وانتشاراً، وهي التي تمثل حصة من رأس المال، ويتمتع صاحبها بجملة من الحقوق ويلتزم بجملة من الواجبات، ولا تتمتع هذه الأسهم بأية أفضلية عند تسديد الأرباح، أو عند تصفية الشركة، ولا يتم توزيع الأرباح السنوية على حامليها إلا بقرار من إدارة الشركة تحدد فيه نسبة التوزيع على كل سهم.

الأسهم الممتازة: وهي أسهم تتميز بأن لها أفضلية على الأسهم العادية، وذلك بتخصيصها بحد معين من الأرباح المحققة، ومنح أصحابها حق الاستلام قبل أصحاب الأسهم العادية، مهما كانت حصة السهم العادي، كما تعطى هذه الأسهم حقوق الأولوية في التسديد عند تصفية أعمال الشركة المساهمة وأملاكها، ولكن لا يحق لأصحابها الاشتراك في إدارة الشركة، ولا استعادة ثمنها من الشركة في تاريخ معيّن.

وهكذا نجد أن الأسهم الممتازة تجمع بين صفات السهم العادي، وبعض صفات السند (كما سنرى لاحقاً)؛ فهي جزء من الملكية ورأس المال، ولا تستحق الدفع بتاريخ معين، ولكنها تضمن تأمين ربح ثابت لحاملها، وتجنبه مخاطر الخسارة، وتعطيه حق الأولوية في الاستلام والتسديد عند التصفية، كما يمكن تحويلها إلى أسهم عادية عند الاتفاق على ذلك.

القيمة الاسمية للسهم: وهي القيمة المالية المسجلة على وثيقة السهم، وتشترط الدولة أن يكون لها حد أدنى محدود، ولكنه يختلف من دولة لأخرى.

القيمة الدفترية للسهم: وهي قيمة السهم الحسابية بعد مرور فترة من الزمن على بداية العمل في الشركة، وتحسب من المعادلة التالية:

$$\text{القيمة الدفترية للسهم} = \frac{\text{قيمة حقوق الملكية للشركة في لحظة ما}}{\text{عدد الأسهم}} \qquad (1-4)$$

ولكن حقوق الملكية تساوي:

$$\text{قيمة حقوق الملكية للشركة} = \text{قيمة الموجودات} - \text{قيمة المطاليب} \qquad (2-4)$$

وذلك لأنه . كما أشرنا سابقاً، الأسهم الممتازة تتمتع بحق الأفضلية في التسديد عند أية تصفية لحسابات الشركة.

أما إذا لم يكن عند الشركة أسهم ممتازة فإن القيمة الدفترية للسهم تساوي:

$$\text{القيمة الدفترية للسهم} = \frac{\text{قيمة الموجودات} - \text{قيمة المطاليب}}{\text{عدد الأسهم}} = \frac{\text{حقوق الملكية}}{\text{عدد الأسهم}} \qquad (3-4)$$

وبما أن حقوق الملكية تشمل ما يلي:

رأس المال المدفوع + الاحتياطات + الأرباح المحجوزة – المطاليب

فإن القيمة الدفترية للسهم تزداد بتقدم نجاح عمل الشركة، لأن احتياطياتها وأرباحها المحجوزة تكون مرتفعة، وبالمقابل نجد أن القيمة الدفترية للسهم تنقص كلما تراجع نشاط الشركة، لذلك فإن نجاح الشركة وتطورها ينعكس بصورة إيجابية على القيمة الدفترية للسهم.

وأخيراً نشير إلى أن القيمة الدفترية للسهم في بداية عمل الشركة تساوي القيمة الاسمية له، لأن قيمة المطاليب تكون معدومة.

القيمة السوقية (الفعلية): وتمثل ثمن السهم في الأسواق المالية، حيث يتم تداوله بين المواطنين، أو غيرهم، وتختلف القيمة السوقية عن القيمتين الاسمية والدفترية لأنها تتأثر بعدة عوامل أهمها :

القيمة الدفترية: وتتعلق بوضع الشركة ومركزها المالي.

ظروف الطلب والعرض على الأسهم في الأسواق المالية.

الظروف الاقتصادية المتعلقة بالتضخم والانكماش.

توقعات المحللين الماليين لمستقبل أوضاع الشركة.

نسب الأرباح التي توزعها الشركة في نهاية كل عام.

لذلك فإن القيمة السوقية تتذبذب صعوداً وهبوطاً بحسب تغير تلك العوامل وتطورها.

معدل العائد الفعلي للسهم: ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\text{قيمة الربح الذي حققه السهم}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \cdot 100 \qquad (4-4)$$

علماً بأن قيمة الربح الذي يحققه السهم يختلف من سنة لأخرى، ويتم حسابه كنسبة مئوية من القيمة الاسمية، ويمكن حساب معدل العائد الفعلي للسهم مباشرةً من العلاقة التالية:

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \cdot 100 \qquad (4-5)$$

**مثال (4-1):**

أصدرت إحدى الشركات المساهمة أسهماً عادية قيمة كل منها 500 ل.س، وبعد مرور عام على نشاطها أصبحت قيمة أسهمها في السوق تساوي 650 ل.س. وعند حساب الأرباح قررت أن توزع ربحاً عن كل سهم بنسبة 25% من القيمة الاسمية.

والمطلوب حساب قيمة الربح لكل سهم، ثم حساب معدل العائد الفعلي للسهم:

**الحل:**

إن قيمة الربح للسهم = $500 \cdot \frac{25}{100} = 125$ ل.س.

وإن معدل العائد الفعلي للسهم = $100 \cdot \frac{125}{650} = 0.1923 = 19.23\%$ ل.س.

القيمة التصفوية للسهم: وهي القيمة التي يمكن أن يحصل عليها المساهم مقابل كل سهم في حالة تصفية أعمال الشركة وسداد الالتزامات التي عليها (المطاليب + الأسهم الممتازة)، وغالباً ما تكون عمليات التصفية مضرة بمصالح أصحاب الأسهم العادية لأن الشركة تكون مضطرة لتسديد الديون جميعها، ودفع قيمة الأسهم الممتازة جميعها قبل أن تقوم بإجراءات الحسابات التصفوية الخاصة بالأسهم العادية.

وتحسب هذه القيمة من العلاقة التالية:

$$\text{القيمة التصفوية للسهم} = \frac{\text{قيمة الموجودات في السوق} - \text{قيمة الالتزامات}}{\text{عدد الأسهم}} \qquad (4-5)$$

علماً بأن قيمة الالتزامات = قيمة المطاليب + قيمة الأسهم الممتازة.

قيمة السهم حسب العائد:

عندما يقدم المستثمر على شراء أحد الأسهم فإنه يفكر في كيفية تحقيق معدل عائد فعلي من ذلك السهم معادل لمعدل استثمار معين، فإذا كان ذلك المعدل معلوماً، فإن ذلك المستثمر يبدي استعداداً لدفع قيمة معينة لذلك السهم، والتي تعطيه عائداً معادلاً للعائد الذي يطمح إلى تحقيقه مقابل استثمار أمواله في شراء هذه الأسهم أو غيرها، وقياساً على العلاقة السابقة يمكنه أن يقوم بحساب قيمة السهم حسب ذلك العائد من العلاقة التالية:

$$\text{قيمة السهم حسب العائد المطلوب} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{معدل العائد الذي يطلبه المستثمر}} \cdot 100 \qquad (4-6)$$

**مثال (4-2):**

لنفترض أن القيمة الاسمية للسهم الذي أصدرته إحدى الشركات تساوي 1000 ل.س. وأن القيمة السوقية له تساوي 1250 ل.س. وأنها توزع أرباحاً بنسبة 20% من

القيمة الاسمية. فاحسب أولاً معدل العائد الفعلي، ثم احسب القيمة حسب العائد المطلوب من قبل أحد المستثمرين والمحدد بـ 18%.

**الحل:**

نحسب أولاً معدل العائد الفعلي، فنجد أنه يساوي:

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \cdot 100$$

$$\text{معدل العائد الفعلي للسهم} = \frac{\frac{20}{100} \cdot 1000}{1250} \cdot 100 = 0.16 = (\%16)$$

وبما أن المستثمر يطمح إلى تحقيق معدل عائد قدره 18%، فإن قيمة السهم حسب العائد تساوي:

$$\text{قيمة السهم حسب العائد المطلوب} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة التوزيع}}{\text{معدل العائد الذي يطلبه المستثمر}} \cdot 100$$

$$= \frac{\frac{20}{100} \cdot 1000}{0.18} = 1111.11$$

أي إن هذا المستثمر يمكن أن يدفع فقط 1111.11 ل.س. ثمناً للسهم المطروح في السوق والذي يباع بـ 1250 ل.س، لأنه يرغب في أن يحقق معدلاً للعائد قدره 18%.

<u>معدل تكلفة الأسهم العادية:</u>

وهو عبارة عن النسبة المئوية من صافي القيمة السوقية التي تتحملها الشركة وتسددها كأرباح لأصحاب تلك الأسهم.

وبما أن صافي القيمة السوقية = القيمة السوقية – مصاريف العمولة والتوثيق. وأن الأرباح التي تتحملها الشركة = قيمة الأرباح المتوقعة سنوياً + مقدار النمو السنوي لتلك الأرباح. فإننا نجد أن معدل تكلفة السهم يمكن أن يحسب من العلاقة التالية:

$$\text{معدل تكلفة السهم} = \text{معدل الربح المتوقع} + \text{معدل نمو الأرباح السنوي} \quad (4-7)$$

ولكن:

$$\text{معدل الربح المتوقع} = \frac{\text{قيمة الربح المتوقع للسهم}}{\text{القيمة السوقية – قيمة المصاريف}} \qquad (4-8)$$

وهكذا نجد أن:

$$\text{معدل تكلفة السهم} = \frac{\text{قيمة الربح المتوقع للسهم}}{\text{القيمة السوقية – قيمة المصاريف}} + \text{معدل نمو الأرباح السنوي} \qquad (4-9)$$

**مثال (4-3):**

أصدرت شركة الألبان أسهماً قيمتها الاسمية 300 ل.س، ولكن هذه الأسهم تباع في السوق بسعر 275 ل.س، ويسدد عنها مصاريف عمولة 5 ل.س عن كل سهم. فإذا كانت قيمة الأرباح المستحقة عن كل سهم تقدر بـ 25 ل.س سنوياً، وكانت هذه الأرباح تنمو بمعدل 8% سنوياً، فالمطلوب حساب معدل تكلفة السهم.

**الحل:**

من العلاقة السابقة نجد أن:

$$\text{معدل تكلفة السهم} = \frac{\text{قيمة الربح المتوقع للسهم}}{\text{القيمة السوقية – قيمة المصاريف}} + \text{معدل نمو الأرباح السنوي}$$

$$17.259 = 0.08 + \frac{25}{5 - 275}$$

أي إن معدل تكلفة كل سهم يبلغ حوالي 17.259% من صافي القيمة السوقية.

$$= 0.09259 + 0.08 = 0.17259 = (\%17.259)$$

**مثال (4-4):**

تباع أسهم إحدى الشركات بقيمتها الاسمية نفسها والتي تساوي 400 ل.س، ويوزع على كل منها 35 ل.س ربحاً سنوياً. فإذا كانت أرباح هذه الشركة تنمو بمعدل 7% سنوياً، وكانت مصاريف بيع كل سهم تبلغ 8 ل.س. فالمطلوب:

- حساب معدل تكلفة السهم.
- حساب سعره السوقي في نهاية السنة الأولى.

- حساب سعره السوقي في نهاية السنة الثانية.
- حساب سعره السوقي في نهاية السنة الخامسة.

**الحل:**

لحساب معدل تكلفة السهم نطبق العلاقة الآتية:

$$\text{معدل تكلفة السهم} = \frac{\text{قيمة الربح المتوقع سنوياً}}{\text{القيمة السوقية – مصاريف عمولة}} + \text{معدل نمو الأرباح السنوي}$$

$$= 0.07 + \frac{35}{8-400} =$$

$$= 0.07 + 0.0892857 = 0.15929 = \%15.929$$

لحساب السعر السوقي للسهم في نهاية السنة الأولى نستخدم العلاقة الآتية:

$$\text{معدل الربح المتوقع} = \frac{\text{قيمة الربح السنوي المتوقع}}{\text{القيمة السوقية – مصاريف عمولة}}$$

ومنها نجد أن:

$$\text{القيمة السوقية – مصاريف عمولة} = \frac{\text{مقدار الربح المتوقع}}{\text{معدل الربح المتوقع}}$$

$$\text{القيمة السوقية} = \frac{\text{مقدار الربح المتوقع}}{\text{معدل الربح المتوقع}} + \text{مصاريف عمولة}$$

وبالتعويض نجد أن:

$$\text{معدل الربح المتوقع} = \frac{35}{8-400} = 0.08929 = \%8.929$$

وأن مقدار الربح المتوقع في نهاية السنة الأولى = $35 \times (0.07+1) = 37.45$ ل.س.

$$\text{السعر السوقي في نهاية السنة الأولى} = \frac{\text{الربح المتوقع في نهاية السنة الأولى}}{\text{معدل الربح المتوقع}} + \text{مصاريف عمولة}$$

$$= 8 + \frac{37.45}{0.08929} = 427.42 \text{ ل.س.}$$

وكذلك نجد أن مقدار الربح المتوقع في نهاية السنة الثانية

$$35 \times (0.07+1)^2 = 40.07 \text{ ل.س.}$$

والسعر السوقي في نهاية السنة الثانية $= 8 + \frac{40.07}{0.08929} = 456.76$ ل.س.

وكذلك نجد أن مقدار الربح المتوقع في نهاية السنة الخامسة:

$$= 35 \times (0.07+1)^5 = 49.06$$ ل.س.

والسعر السوقي في نهاية السنة الخامسة $= 8 + \frac{49.09}{0.08929} = 557.77$ ل.س.

عائد السهم العادي:

يمكن أن نحسب عائد السهم العادي بعدة مقاييس هي:

1 . نصيب السهم العادي من الأرباح المحققة: ويحسب من العلاقة الآتية:

$$\text{نصيب السهم من الأرباح المحققة} = \frac{\text{صافي الربح الخاص بالمساهمين العاديين}}{\text{عدد الأسهم العادية}} \quad (4-10)$$

ويعتبر هذا العائد من أهم المقاييس التي يأخذها المستثمرون بعين الاعتبار عندما يفكرون في الاستثمار بشراء أحد الأسهم.

**مثال (4-5):**

إذا كان صافي الربح في إحدى الشركات يساوي 500000 ل.س، وكان عدد الأسهم المباعة يساوي 2000 سهم عادي، و500 سهم ممتاز.

فالمطلوب حساب نصيب السهم العادي:

**الحل:**

نقوم أولاً بحساب نصيب الأسهم الممتازة، فنجد أن:

مجموع عدد الأسهم = 2000+ 500= 2500 سهم.

حصة الأسهم الممتازة من الربح = $\frac{500}{2500} \cdot 500000 = 100000$ ل.س.

حصة الأسهم العادية من الربح = $\frac{2000}{2500} \cdot 500000 = 400000$ ل.س.

نصيب السهم العادي = $\frac{400000}{2000} = 200$ ل.س.

2. نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة:

لقد أشرنا سابقاً أن إدارة الشركة قد تقرر عدم توزيع كامل الأرباح المحققة، كأن تقرر الاحتفاظ بجزء منها لاستخدامها في استثمارات جديدة، وتقوم بتوزيع الجزء الباقي على المساهمين. وعندها نقوم بحساب نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة باستخدام العلاقة الآتية:

$$\text{نصيب السهم من الأرباح الموزعة} = \frac{\text{الأرباح المخصصة للتوزيع على المساهمين العاديين}}{\text{عدد الأسهم العادية}} \quad (4-11)$$

ويمكن احتساب نصيب السهم من الأرباح الموزعة بضرب القيمة الاسمية للسهم بنسبة التوزيع المقررة، أي إن:

نصيب السهم من الأرباح الموزعة = القيمة الاسمية × نسبة التوزيع.

**مثال (4-6):**

إذا كان صافي ربح إحدى الشركات يساوي 500000 ل.س ، وكان عدد أسهمها العادية 2000 سهم، وعدد أسهمها الممتازة 500 سهم، وعند توزيع هذه الأرباح قررت إدارة الشركة تسديد الأرباح الخاصة بالأسهم الممتازة كاملة، والاحتفاظ بـ 35% من أرباح الأسهم العادية لاستخدامها في استثمارات جديدة، فالمطلوب: حساب نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة،

**الحل:**

إن إجمالي عدد الأسهم = 500+2000=2500 ل.س.

إن حصة الأسهم الممتازة = $500000.\frac{500}{2500} = 100000$ ل.س.

إن حصة الأسهم العادية = $500000.\frac{2000}{2500} = 400000$ ل.س.

إن الحصة التي ستخصص للاستثمار الجديد = $400000.\frac{35}{100} = 140000$ ل.س.

إن الحصة المتبقية المخصصة للتوزيع = 400000−140000=260000 ل.س.

وبذلك نجد أن نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة = $\frac{26000}{2000} = 130$ ل.س.

الريع الجاري للسهم العادي:

ويعرف بأنه نسبة نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة على القيمة السوقية للسهم؛ أي إنه يساوي:

$$\text{معدل الريع الجاري للسهم العادي} = \frac{\text{نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة}}{\text{القيمة السوقية للسهم}} \cdot 100 \quad (4-12)$$

ويتضح من هذه العلاقة أن معدل الريع الجاري للسهم العادي يتناسب عكساً مع القيمة السوقية له. فإذا ازدادت القيمة السوقية نقص ذلك الريع، وإذا نقصت القيمة السوقية ازداد ذلك الريع (بفرض أن النصيب ثابت).

وإن معدل الريع الجاري للسهم يعبر عن مردودية الليرة الواحدة من القيمة السوقية، أو عن مردودية كل مائة ليرة سورية (إذا كان مضروباً بـ 100).

**مثال (4-7):**

إذا كان نصيب السهم العادي من الأرباح الموزعة 180 ل.س ، وكانت القيمة السوقية للسهم تساوي 2000 ل.س، فالمطلوب حساب معدل الريع الجاري للسهم العادي.

**الحل:**

$$\text{الريع الجاري للسهم الجاري} = \frac{180}{2000} \cdot 100 = 0.09 = \%9$$

أي إن كل مائة ليرة سورية من القيمة السوقية تؤمن ريعاً من الأرباح الموزعة قدره 9 ليرات سورية.

معدل الريع طيلة فترة الاقتناء:

ويحسب هذا الريع خلال وطيلة فترة الاقتناء منذ شراء السهم لأول مرة حتى لحظة بيعه في السوق. ويحسب من العلاقة الآتية:

$$\text{معدل الريع طيلة فترة الاقتناء} = \frac{\text{(سعر بيع السهم – سعر شراء السهم) +}\ \text{مجموع الأرباح المقبوضة خلال الفترة}}{\text{سعر شراء السهم}} \cdot 100 \quad (4-13)$$

**مثال (4-8):**

اشترى أحدهم عدة أسهم من أسهم شركة الرخام بسعر 4500 ل.س للسهم، وخلال سنتين من اقتنائه لها كانت الشركة توزع أرباحاً سنوية بنسبة 8% من القيمة الاسمية للأسهم. وبعد ذلك قام ببيعها بسعر 5000 ل.س للسهم. احسب الريع طيلة فترة الاقتناء إذا علمت أن القيمة الاسمية للسهم تساوي 4000 ل.س .

**الحل:**

نلاحظ أن سعر المبيع = 5000 ل.س.

وأن سعر الشراء = 4500 ل.س.

وأن مجموع الأرباح المقبوضة خلال الفترة عن كل سهم = $4000 \cdot \frac{8}{100} \cdot 2 = 160$ ل.س.

وبذلك نجد أن معدل الريع طيلة الفترة =

$$= 100 \cdot \frac{160 + (5000 - 4500)}{4500} = \%14.667$$ ل.س.

## 4-2- السندات الاستثمارية:

تستخدم السندات في عمليات تمويل المشاريع الاستثمارية الجديدة وما في حكمها أو في دعم المنشآت الاقتصادية المختلفة عندما تتعرض إلى مخاطر معينة.

ويعرف السند الاستثماري: بأنه وثيقة تنص على دين محدود المدة ويستحق فائدة دورية معينة، ويتعهد فيه الطرف الذي يصدره لمن يحمله بدفع قيمته (الاسمية أو الاستهلاكية) عند موعد استحقاقه، كما يلتزم بدفع الفوائد الدورية المترتبة عليه في فترات محدودة.

**أنواع السندات:**

يمكن تصنيف السندات في نوعين أساسيين:

**السندات التجارية (الكمبيالات):** وهي السندات التي يكتتبها الناس بعضهم على بعض لتثبيت حقوق الدائن والمدين وواجباتهما. وهذه السندات يكون لها قيمة اسمية تتضمن

مباشرة الفوائد المستحقة على الدين، ويكتب عليها تاريخ الاستحقاق، ولا تستحق فوائد دورية عن المبلغ المقترض.

**السندات الاستثمارية:** وهي السندات التي تصدرها الحكومات أو المؤسسات أو الشركات أو المنظمات الإقليمية أو الدولية. بهدف تمويل مشروعاتها الجديدة أو تغطية عجوزاتها المتراكمة أو دعم أوضاعها المتردية.

ويكون لهذه السندات قيمة اسمية ومدة محدودة، وتستحق فائدة دورية بنسبة محددة وفي فترات زمنية معينة.

وتتميز هذه السندات عن الأسهم بأنها تستحق الدفع بتاريخ معين، وتضمن لصاحبها دخلاً دورياً ثابتاً (الفائدة الدورية)، ويتمتع أصحابها بحقوق الأفضلية عند تصفية أعمال الشركة، وليس من الضروري أن يكون للسندات قيمة موحدة كالأسهم.

وسنقتصر في هذه الفقرة على دراسة السندات الاستثمارية التي تصدرها الشركات الصناعية أو الزراعية أو التجارية أو الخدمية لأغراض زيادة رأس مالها أو التوسع في أعمالها أو دعم أوضاعها ، وتقسم السندات الاستثمارية إلى الأصناف التالية:

1- السندات القابلة للتحويل إلى أسهم عادية: وهي سندات تتعهد الشركة المصدرة بتحويلها إلى أسهم عادية خلال زمنية معينة. لذلك تكون أسعار الفائدة على هذه السندات أقل من أسعار فائدة السندات العادية.

2- السندات القابلة للاستدعاء: وهي السندات التي تحتفظ الشركة المصدرة لها بحق استدعائها ورد قيمتها لأصحابها قبل مواعيد استحقاقها. وفي هذه الحالة تكون الشركة ملزمة بدفع قيمة عنها تفوق القيم الاسمية للسندات كتعويض عن عملية الاستدعاء.

3- السندات القابلة للاستهلاك: وهي السندات التي تلتزم الشركة برد قيمتها حسب جدول زمني معين قبل مواعيد استحقاقها. وحسب نسب محدودة سنوياً. تقوم بشرائها من السوق حسب تسلسل الإصدار أو حسب رغبة المستثمر، ويتم تحديد حجم الاستهلاك السنوي من هذه السندات بقرار من الإدارة ، ويمكن تنفيذ ذلك بوساطة القرعة. وتكون أسعار الفائدة لهذه السندات أقل من أسعارها للسندات العادية، وذلك لأن المستثمر يتمتع بحماية أكبر لكون الشركة تستهلك السندات بصورة منتظمة.

4- السندات المضمونة بأصل: وهي السندات التي تكون مضمونة برهن أحد أصول أو ممتلكات الشركة، أو بضمان سندات أخرى أو أسهم عائدة إلى مشروع آخر، أو بضمان شركات أخرى. وهذه السندات تشبه السندات العادية ولكنها مكفولة بأصول ثابتة ومحددة.

5- سندات الدخل: وهي السندات التي يكون لها جدول غير دوري لتسديد الفوائد، ولا تدفع فوائدها إلا إذا حققت الشركة أرباحاً قبل تاريخ استحقاق الفوائد.

ميزات السندات وعيوبها:

يتميز الاستثمار باقتناء السندات الاستثمارية بالخصائص التالية:

1. يدعم موقف الشركة مالياً، ويزيد من مقدرتها على سداد الالتزامات واسترجاع السندات السابقة.
2. يضمن للمستثمر ربحاً ثابتاً يتمثل في مقدار الفائدة الدورية.
3. ينشط حركة الأموال في الأسواق المالية.
4. يضمن للمستثمر حق الأفضلية عند تصفية أعمال الشركة.

ومن عيوبها ما يلي:

1. يتعرض المستثمر للخسارة إذا اقتنى سنداً يفوق سعره سعر الاستدعاء.
2. يتعرض المستثمر لفقدان جزء من سنداته بدون رغبته إذا تم الاستدعاء بالقرعة.

قيم السندات:

يمكننا أن نميز عدة مفاهيم لقيمة السند هي:

1. القيمة الاسمية: وهي القيمة التي تكون مدونة على السند والتي تلتزم الشركة المصدرة للسند بتسديدها لحامله في موعد الاستحقاق.
2. القيمة الاستهلاكية: وهي القيمة التي يمكن الاتفاق مع الشركة على تسديدها لحامل السند في موعد استحقاقه. وهي قد تكون أكبر أو أقل من القيمة الاسمية أو تساويها.

وهنا نشير إلى أن السند يمكن أن يتضمن بندين خاصين بالقيمتين الاسمية والاستهلاكية، لأن القيمة الاسمية تستخدم لحساب الفوائد الدورية بضربها بسعر الفائدة

الدورية P. أما القيمة الاستهلاكية فقد تكون محدودة كمياً أو تحسب كنسبة مئوية من القيمة الاسمية أيضاً.

3. القيمة السوقية (الفعلية): وهي ثمن شراء السند في سوق الأوراق المالية، وإن هذه القيمة تختلف عن القيمتين الاسمية والاستهلاكية، وتتأثر بعدة عوامل:
   - القيمة الاستهلاكية للسند.
   - ظروف الطلب والعرض على تلك السندات.
   - الحالة الاقتصادية للشركة المصدرة والتوقعات المستقبلية.
   - معدل الفائدة الذي تخصصه الشركة لحساب الفوائد الدورية.
   - معدل الفائدة الذي يطمح المستثمر إلى أن يحققه من استثمار أمواله.

وبذلك نجد أن المستثمر يقوم بحساب القيمة السوقية لهذه السندات انطلاقاً من معدل الفائدة الذي يطمح إلى أن يحققه من الاستثمار فيها، وذلك من خلال المعادلة التالية:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | القيمة السوقية في لحظة ما | = | القيمة الحالية للقيمة الاستهلاكية | + | القيمة الحالية للفوائد المستحقة للسند والمنتظر تحصيلها حتى تاريخ الاستحقاق |
| (4-14) | | | | | |

وهنا لابد من أن نشير إلى أن المستثمر يقوم بحساب القيم الحالية للقيمة الاستهلاكية وللفوائد المستحقة مستخدماً معدل الفائدة الذي يطمح إلى أن يحققه في استثمار أمواله، ولا يعتمد في ذلك على معدل الفائدة المعتمد في الشركة لحساب الأرباح أو غيرها.

ولتوضيح الفروقات بين هذه القيم المختلفة، وربطها بزمان حسابها نقوم بتمثيلها على الشكل البياني التالي:




الشكل (4-1)

حتى نستطيع إجراء الحسابات اللازمة لهذه السندات نقوم بترميز المتحولات الداخلة في تعاريفها وفق الآتي:

$S$ . القيمة الاسمية للسند.

$K$ . القيمة الاستهلاكية للسند.

$CP$ . نصيب السند من المصاريف المتعلقة بعمولة التوزيع والتسويق.

$SN$ . صافي القيمة الاستهلاكية للسند، وهي تساوي $SN=S-CP$

$I$ . مقدار الفائدة الدورية (كوبون الفائدة).

$P$ . معدل الفائدة المركبة السنوي المعتمد في الشركة.

$q$ . معدل الفائدة المركبة السنوي الذي يطمح المستثمر لتحقيقه.

$n$ . عدد السنوات المتبقية حتى موعد الاستحقاق.

$V_1$ . القيمة الحالية للقيمة الاستهلاكية $K$.

$V_2$ . القيمة الحالية للفوائد المستحقة حتى تاريخ الاستحقاق.

$M$ . القيمة السوقية (ثمن الشراء الفعلي).

$MN$ . صافي القيمة السوقية (ثمن الشراء – المصاريف المختلفة).

حتى نصوغ العلاقة (4-14) بشكل رياضي نجد أن القيمة السوقية للسند $M$ تساوي:

$$M = V_1 + V_2 \qquad (15-4)$$

وبما أن القيمة الحالية للقيمة الاستهلاكية $V_1$ هي عبارة عن القيمة الحالية لمبلغ $K$ مؤجل الدفع لمدة $n$ عام بفائدة مركبة يحدد سعرها المستثمر، ويضعه مساوياً لـ $q$ فإن قيمته الحالية تساوي:

$$V_1 = \frac{K}{(1+q)^n} = K \cdot h^n \qquad (16-4)$$

حيث إن: $h = \frac{1}{1+q}$

ولحساب القيمة الحالية للفوائد المستحقة والمنتظر تحصيلها خلال مدة الاستهلاك بفائدة يحدد سعرها المستثمر وبمقدار $q$، نلاحظ أنها عبارة عن القيمة الحالية لدفعات عادية قدرها $I$ وعددها $n$ دفعة، وأن قيمتها الحالية تحسب من العلاقة الآتية:

$$V_2 = I \cdot \frac{1-h^n}{1-h} \qquad (17-4)$$

حيث إن I هو مقدار الفائدة الدورية ويساوي $I = S \cdot P$. وبذلك نجد أن القيمة السوقية تأخذ الشكل التالي:

$$M = K \cdot h^n + I \cdot \frac{1-h^n}{1-h} \qquad (18-4)$$

**ملاحظة1:**

إذا كانت الفائدة تحسب وتضاف m مرة خلال العام، فإن العلاقة السابقة تعدل باستبدال كل $P$ بـ $P' = \frac{P}{m}$، وكل $q$ بـ $q' = \frac{q}{m}$، وكل $I$ بـ $I' = S \cdot P'$ وكل $n$ بـ $n' = n \cdot m$ وكل $h$ بـ $h' = \frac{1}{1+q'}$.

وبذلك تأخذ العلاقة (18-4) التي تعطينا القيمة الاستهلاكية $M'$ الشكل التالي:

$$M' = K \cdot h'^{n'} + I' \cdot \frac{1-h'^{n'}}{1-h'} \qquad (19-4)$$

**مثال (4-9):**

احسب القيمة السوقية لسند يستحق بعد 5 سنوات من الآن وقيمته الاسمية 300 ل.س، وتحسب الفائدة عليه بمعدل 8% سنوياً، وقيمته الاستهلاكية 350 ل.س. والمستثمر الذي يريد شراءه يرغب في تحقيق معدل 10% في استثمار أمواله. ثم احسب قيمته السوقية الجديدة إذا أصبحت الفائدة تحسب مرتين في العام.

**الحل:**

نلاحظ أن: $S = 300$، وأن $P = 0.008$، وبذلك نجد أن قيمة الفائدة الدورية تساوي:

$$I = S \cdot P = 300 \cdot (0.08) = 24 \qquad L.S.$$

كما نلاحظ أن $K = 350$ وأن المعدل الذي يرغبه المستثمر $q = 0.10$، وبذلك نجد أن:

$$h = \frac{1}{1+0.10} = \frac{1}{1.10} = 0.909091$$

ومن العلاقة (4-18) نجد أن القيمة السوقية تساوي:

$$M = 350 \cdot (0.909091)^5 + 24 \cdot \frac{1-(0.909091)^5}{1-0.909091}$$
$$M = 217.3225 + 100.0768 = 317.40 \qquad L.S.$$

وهي أقل من القيمة الاستهلاكية 350 ل.س.

ولحساب القيمة السوقية الجديدة لهذا السند عندما تحسب الفائدة مرتين في العام. نطبق العلاقة (4-19)، لذلك نقوم بحساب ما يلي:

$$P' = \frac{P}{m} = \frac{0.02}{2} = 0.04 \qquad , \qquad q' = \frac{q}{m} = \frac{0.10}{2} = 0.05$$
$$I' = S \cdot P' = 300 \cdot (0.04) = 12 \qquad L.S.$$
$$n' = n \cdot m = 5 \cdot 2 = 10$$
$$h' = \frac{1}{1+q'} = \frac{1}{1+0.05} = 0.952381$$

وبتعويض ذلك في العلاقة (4-18) نجد أن القيمة السوقية الجديدة لذلك السهم تساوي:

$$M' = 350 \cdot (0.952381)^{10} + 12 \cdot \frac{1-(0.952381)^{10}}{1+0.952381}$$
$$M = 214.8697 + 97.29388 = 312.16 \qquad L.S.$$

وهذا يعني أن القيمة السوقية للسند قد تناقصت بسبب نظام إضافة الفائدة مرتين في العام، ونلاحظ أن قيمتها أقل من القيمة الاستهلاكية 350 ل.س.

**ملاحظة 2:**

إن القيمة السوقية، أو ثمن الشراء للسند قد تكون أصغر من القيمة الاستهلاكية، أو أكبر منها.

فإذا كانت القيمة السوقية M أصغر من القيمة الاستهلاكية K، فعندها نقول: إنه تم شراء السند بخصم من القيمة الاستهلاكية، وإن مقدار الخصم يساوي (K-M)، ويحدث ذلك عندما يكون معدل الفائدة الذي يطلبه المستثمر q أكبر من معدل الفائدة المعتمد في الشركة لحساب الفوائد.

أما إذا كانت القيمة السوقية M أكبر من القيمة الاستهلاكية $K$، فعندها نقول: إنه تم شراء السند بعلاوة على القيمة الاستهلاكية، قدرها (M-K)، ويحدث ذلك عندما يكون معدل الفائدة الذي يطلبه المستثمر q أصغر من معدل الفائدة المعتمد في الشركة لحساب الفوائد.

**تكلفة السندات:**

لحساب تكلفة السندات التي تصدرها الشركة نأخذ بعين الاعتبار المصاريف جميعها التي تتكبدها الشركة من جراء ذلك، وتشمل هذه المصاريف ما يلي:

- المتوسط السنوي للفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الفعلية.
- الفائدة المستحقة على السند سنوياً، وتحسب بنسبة مئوية من القيمة الاسمية، ويطلق على هذه الفوائد اسم (كوبونات السند).
- تكاليف الإصدار وتشمل: تكاليف الدراسات والموافقات ونفقات الطباعة والإعلان ...إلخ.
- الرسوم المرتبطة بعمليات الرهن والضمان.
- العمولات التي تدفعها الشركة للشركات الأخرى لقاء التوزيع والتسويق.

- الضريبة المفروضة على حركة السندات، أو دخولها (إن وجدت).
- أية نفقات أخرى مترتبة على تلك السندات.

ويمكن حساب التكلفة السنوية المتوسطة للسند الواحد والتي سنرمز لها بالرمز $CP$ من العلاقة التالية:

$$CP = S \cdot P + \frac{K - S}{N} + \frac{C}{N} + C_1 \qquad (20-4)$$

حيث إن:

$S$ . هي القيمة الاسمية للسند.

$P$ . سعر الفائدة السنوية المعتمدة في الشركة.

$K$ . القيمة الاستهلاكية للسند في تاريخ الاستحقاق.

$C$ . إجمالي التكاليف المختلفة الناجمة عن إصدار السندات.

$C_1$ . عمولة توزيع وتسويق السند.

$N$ . عدد السنوات التي تم إصدارها.

$SN$ . صافي القيمة الاسمية

كما يمكننا حساب معدل تكلفة التمويل بوساطة هذه السندات من العلاقة:

$$AV = \frac{CP}{\frac{S+SN}{2}} \cdot 100 \qquad (21-4)$$

**مثال (4-10):**

أصدرت إحدى الشركات 3000 سند، القيمة الاسمية لكلٍ منها 500 ل.س لمدة 10 سنوات، وتعهدت بتسديد قيمة استهلاكية عن كل منها في موعد الاستحقاق 600 ل.س. وأن تدفع فوائدها الدورية بمعدل 7% سنوياً، وبلغت مصاريف إصدار هذه السندات 25000 ل.س. والمطلوب حساب التكلفة السنوية المتوسطة لكل من هذه السندات، ثم حساب معدل تكلفة التمويل لهذه السندات، إذا علمت أن الشركة تدفع لشركات التسويق عمولة توزيع قدرها 15 ل.س، عن كل سند، ثم احسب القيمة

التسويقية لهذه السندات بعد سنتين على إصدارها، إذا علمت أن المستثمر يطمح إلى أن يحقق معدل استثمار لأمواله يساوي 9% سنوياً.

**الحل:**

لحساب التكلفة السنوية نطبق المعادلة (4-20) فنجد أن:

$$CP = 500 \cdot \frac{7}{100} + \frac{600-500}{3000} + \frac{25000}{3000} + 15$$
$$CP = 35 + 0.03333 + 8.3333 + 15 = 58.36667 \quad L.S.$$

أي إن كل سند يكلف حوالي 58.3667 ل.س. لإصداره.

لحساب معدل تكلفة التمويل للسند الواحد نطبق العلاقة (4-20) فنجد أنه يلزمنا حساب صافي القيمة الاسمية $SN$ حيث نجد أن:

$$SN = S - CP = 500 - 58.3667 = 441.6333$$

وبذلك نجد أن معدل التمويل يساوي:

$$AV = \frac{CP}{\frac{S+SN}{2}} \cdot 100 = \frac{58.3667}{\frac{500+441.633}{2}} \cdot 100 = 12.397\%$$

أي إن كل سهم يكلف حوالي 12.397% من قيمته المتوسطة $\left(\frac{S+SN}{2}\right)$.

لحساب القيمة التسويقية بعد سنتين من إصدارها (ويبقى 8 سنوات لاستحقاقها ضمن رغبات المستثمر)، نطبق العلاقة (4-13)، لذلك نقوم بحساب القيمة الحالية للقيم الاستهلاكية للسند للمدة المتبقية $(n=8)$، وباستخدام معدل الفائدة المطلوب تحقيقه 9%. وبتطبيق العلاقة الآتية:

$$V_1 = \frac{K}{r^n} = \frac{600}{(1.09)^8} = 301.12 \quad L.S.$$

ثم نقوم بحساب القيمة الحالية للفوائد المستحقة، والمنتظر تحصيلها جميعاً، وذلك بتطبيق علاقة القيمة الحالية لدفعات عادية قيمة كلٍ منها تساوي:

$$D = S \cdot P = 500 \cdot \frac{7}{100} = 35 \quad L.S$$

وبذلك نجد أن قيمتها الحالية حسب المدة المتبقية وباستخدام معدل الفائدة المطلوب تحقيقه من قبل المستثمر 9% تساوي:

$$V_2 = D \cdot \frac{1-h^n}{1-h} = 35 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1.09}\right)^8}{1-\frac{1}{1.09}} = 35 \cdot \frac{0.4981337}{0.0825688}$$

$$V_2 = 211.15 \qquad L.S.$$

وبذلك نجد أن القيمة السوقية لكل سهم من هذه الأسهم بعد سنتين من إصدارها وحسب معدل الفائدة الذي وضعه المستثمر الشاري تساوي:

$$M = V_1 + V_2 = 301.12 + 211.15 = 512.37 \qquad L.S.$$

حالات عمليات الشراء:

بما أن عمليات شراء السهم يمكن أن تحدث في أي وقت من أوقات السنة، فهي تتأثر كثيراً بموعد توزيع الفائدة الدورية، فإذا كانت قبل توزيع الفائدة مباشرةً فإن تلك الفائدة تصبح من حق المشتري، أما إذا كانت بعد موعد توزيع الفائدة مباشرةً فإن الفائدة تكون قد حسبت، وتكون من حق البائع، ولا يستفيد المشتري من السند حتى حلول الموعد القادم لتوزيع الفائدة. ولكن إذا كانت عملية الشراء تقع بين موعدين متتاليين لتوزيع الفائدة، فإن القيمة السوقية تساوي ثمن شراء السند بعد الموعد الأول مباشرةً + الفوائد المستحقة على ذلك الثمن حتى لحظة الشراء. ومن أجل توضيح كيفية معالجة هذه الحالات نقدم مثالاً عددياً على كلٍ منها.

**مثال (4-11):**

يريد أحدهم بيع سند قيمته الاسمية 50000 ل.س وقيمته الاستهلاكية 60000 ل.س. ويستحق الدفع بعد 5 سنوات من الآن، وتسدد عليه فوائد بمعدل 5% من القيمة الاسمية سنوياً. ولكن هذه الفوائد تحسب وتدفع كل ستة أشهر. والمطلوب أوجد القيمة السوقية لهذا السند إذا علمت أن المستثمر المشتري يطمح إلى أن يحقق معدل فائدة مركبة قدره 3% عن كل نصف عام، وذلك في الحالات التالية:

1. إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد توزيع الفائدة مباشرةً (بعد صرف الكوبون مباشرةً).

2. إذا كانت عملية الشراء ستتم قبل توزيع الفائدة مباشرةً (قبل صرف الكوبون مباشرةً).
3. إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد مرور أربعة أشهر على توزيع الفائدة.

**الحل:**

1. إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد توزيع الفائدة مباشرةً، فعندها نقوم بحساب الفائدة الدورية المستحقة كل ستة أشهر من العلاقة:

$$I' = S \cdot P' = S \cdot \frac{P}{2} = 50000 \cdot \frac{0.05}{2} = 1250 \quad L.S.$$

وبما أن القيمة الاستهلاكية $K$=60000، وعدد مرات حساب الفائدة m=2، فإن:

$$n' = 2 \cdot 5 = 10$$
$$P' = \frac{P}{2} = 0.025$$
$$q' = 0.03$$
$$h' = \frac{1}{1+q'} = \frac{1}{1.03} = 0.970874$$

وبذلك نجد أن القيمة السوقية الجديدة لهذا السند تساوي:

$$M_1' = 60000 \cdot (0.970874)^{10} + 1250 \cdot \frac{1-(0.970874)^{10}}{1-0.970874} =$$
$$M_1' = 244645.635 + 10982.65 = 55628.29 \quad L.S.$$

2. إذا كانت عملية الشراء ستتم قبل توزيع الفائدة مباشرةً.

فإن ذلك يعني أن تلك الفائدة تصبح من حق المشتري، وعليه في هذه الحالة أن يجعل ثمن الشراء متضمناً لتلك الفائدة، وبذلك نجد أن:

ثمن الشراء قبل التوزيع مباشرةً = القيمة السوقية بعد التوزيع مباشرةً + قيمة الفائدة الدورية.

$$M_2' = 55628.29 + 1250 = 56878.29 \quad L.S.$$

وهو القيمة السوقية للسند في هذه الحالة.

3. إذا كانت عملية الشراء ستتم بعد مرور أربعة أشهر على توزيع الفائدة.

لحساب القيمة السوقية في هذه الحالة نحسب القيمة السوقية بعد توزيع الفائدة مباشرةً، والتي وجدنا أنها تساوي:

$$M_1' = 55628.29 \quad L.S.$$

ثم نقوم بحساب الفوائد المستحقة على هذا المبلغ لمدة أربعة أشهر من كل نصف عام:

$$I' = M_1' \cdot q' \cdot \frac{4}{6} = 55628.29 \cdot (0.03) \cdot \frac{4}{6} =$$
$$I' = 1112.57 \qquad L.S.$$

وبإضافة قيمة هذه الفوائد إلى القيمة السوقية السابقة نحصل على القيمة السوقية بعد مرور أربعة أشهر، وهي تساوي:

$$M = M_1' + I' = 55628.29 + 1112.57$$
$$M = 56740.86 \quad L.S.$$

**ملاحظة 3:**

كان يمكن حساب القيمة السوقية للحالة الثالثة بحساب حصيلة القيمة السوقية بعد توزيع الفائدة مباشرةً $M_1'$ لمدة أربعة اشهر وحسب نظام الفائدة البسيطة كما يلي:

$$M = M_1' \cdot (1 + n \cdot q) = 55628.29 \cdot \left(1 + \frac{4}{6} \cdot (0.03)\right) = 56740.86 \qquad L.S.$$

كما يمكن استخدام نظام الفائدة المركبة كما يلي:

$$M = M_1' \cdot (1+q)^n = 55628.29 \cdot (0.03)^{\frac{4}{6}} = 56735.3786 \qquad L.S.$$

ومن هنا يتضح أن نظام الفائدة البسيطة في مثل هذه الحالات القصيرة أفضل للبائع.

## 4-3- الأسواق المالية:

### 4-3-1- تعريف الأسواق المالية :

إن أسواق الأوراق المالية هي أمكنة لتداول الأوراق المالية بكل أنواعها، وينظم عملها قانون تصدره الدولة، وتراقب حسن تطبيقه الحكومة، وخاصة الجهات المالية فيها .

تصنف أسواق الأوراق المالية إلى نوعين رئيسين هما:

أسواق منظمة: وهي الأسواق التي تتداول فيها الأوراق المالية بين المتعاملين بطريقة منظمة وعلنية .

أسواق غير منظمة: وهي الأسواق التي تتداول فيها الأوراق المالية عن طريق بيوت السمسرة أو المصارف الخاصة، وما شابه بذلك .

وهناك نوع آخر من هذه الأسواق، وهي الأسواق الاحتكارية، وهي التي تحتكر التداول في بعض الأوراق كوزارة المالية والمصرف المركزي .

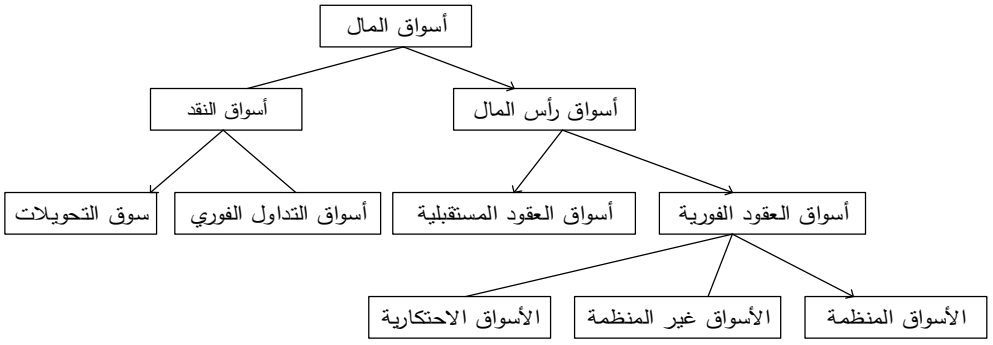
كما يمكن تصنيف أسواق الأوراق المالية إلى نوعين آخرين هما:

- أسواق العقود الفورية (الحاضرة) .
- أسواق العقود المستقبلية (المؤجلة) .

وبصورة عامة يمكن تصنيف أسواق المال إلى نوعين أساسيين هما:

- أسواق رأس المال .
- أسواق النقد .

ويمكننا تمثيل مكونات أسواق المال بأنواعها وأصنافها وتحديد العلاقات فيما بينها من خلال الشكل التالي :




الشكل رقم (4-1)

4-3-2- الأوراق المالية المتداولة في الأسواق:

إن أهمها هي :

1- الأوراق الحكومية القابلة للتداول: وهي التي تصدر عن المصرف المركزي وفروعه المختلفة، وهي تتميز عن الأوراق غير القابلة للتداول بأن عائدها لا

يضاف على معدل الفائدة المحدد، بل يتضمن الأرباح الرأسمالية التي يمكن تداولها في السوق .

2- أسهم الشركات العامة والخاصة : وتكون قيمتها السوقية أكبر من القيمة الاسمية.

3- السندات الاستثمارية قصيرة أو طويلة الأجل : وتكون قيمتها أقل من الاسمية التي سيحصل عليها في تاريخ الاستحقاق.

4- شهادات الإيداع القابلة للتداول: وهي شهادات غير شخصية المصارف التجارية.

5- الكمبيالة المصرفية: وهي تعهد خطي من المقترض بإعادة تسديد المبلغ في المصرف المذكور .

6- الأوراق التجارية: وهي أوراق مضمونة بأحد أصول المنشأة أو بضمان المصارف لها.

7- قروض اتفاقيات إعادة الشراء: وهي قروض رهن لتأمين مبلغ ما، ثم إعادته مع الفوائد خلال فترة قصيرة.

8- أذونات الخزانة: وهي سندات تصدرها الخزينة العامة أو وزارة المالية لفترات قصيرة.

9- شهادات المديونية: وهي سندات مختلفة الآجال تصدرها وزارة المالية .

4-3-3- كيفية شراء الأورق المالية وتسديد قيمة الصفقات :

يتم سداد قيمة الصفقات بعدة أساليب أهمها:

1- أسلوب السداد النقدي الكامل: وفيه يقوم المتعامل بسداد قيمة مشترياته نقداً أو يستلم قيمة مبيعاته نقداً وعلى النحو المتعارف به في المعاملات التجارية البسيطة.

2- أسلوب السداد النقدي الجزئي: وفيه يقوم المتعامل بسداد جزء من مشترياته نقداً من صندوقه الخاص. ويسدد الباقي بوساطة قروض يسحبها من السوق بضمان الأوراق المالية المشتراة، والتي تبقى رهناً لدى المقرض .

وتسمى نسبة المدفوعات النقدية إلى القيمة السوقية بنسبة الهامش المبدئي وتساوي:

$$\text{نسبة الهامش المبدئي} = \frac{\text{قيمة المدفوعات النقدية}}{\text{القيمة السوقية للأسهم}} = \frac{\text{القيمة السوقية} - \text{قيمة القرض}}{\text{القيمة السوقية}}$$

3- أسلوب البيع على المكشوف: وفيه يقوم المتعامل ببيع أسهم أو سندات لا يملكها أو لم يشترها بعد، ثم يقبض قيمتها وينتظر مدة حتى تنخفض أسعار تلك الأسهم فيقوم بشرائها وتسليمها إلى المشتري الأول، وبالتالي يحقق المتعامل ربحاً من فروقات الأسعار .

ويستخدم المضاربون هذا الأسلوب عندما يتوقعون انخفاض أسعار أسهم بعض الشركات، ويقومون بذلك لتحقيق أرباح سريعة أو لتغطية بعض المدفوعات أو للتهرب من الضريبة أو لاغتنام فرص الربح من الفروقات السائدة بين الأسواق المالية. وبالتالي يحقق المتعامل ربحاً من فروقات الأسعار، ولكن هذا الأمر قد ينعكس سلباً عليهم عندما ترتفع الأسعار وتحين لحظة التسليم .

**مثال (4-12):**

لنفترض أن المتعامل اتفق مع السمسار على أن يشتري له بأسلوب الجزئي 500 سهم بسعر 200 ل.س للسهم الواحد، وعلى أن تكون نسبة المبدئي للسداد الجزئي 60% من القيمة الاسمية عند الشراء، وعلى أن تنفيذ الصفقة خلال أسبوع من تاريخ التعاقد عليها، فاحسب قيمة القرض الذي يحتاجه المتعامل .

**الحل:**

نلاحظ أن القيمة الاسمية للأسهم = 500. 200 = 100000 ل.س

وإن قيمة المدفوعات النقدية الأولية $= 100000 \cdot \frac{60}{100} = 60000$ ل.س

وإن قيمة القرض الذي يحتاجه المشتري= 100000- 60000 = 40000 ل.س

ويمكن حساب قيمة القرض من العلاقة $= \frac{100000 - ض}{1000} = 0.60$

وبحل هذه المعادلة نجد أن ص= 40000 ل.س، ولنفترض الآن القيمة السوقية للسهم قد ارتفعت خلال ذلك الأسبوع إلى 250 ل.س، فعندها تصبح القيمة السوقية لإجمالي الأسهم 500× 250= 125000 ل.س .

وبذلك يكون المتعامل قد حقق ربحاً قدره 125000 – 100000= 25000

وهذا يعني أن نسبة الهامش المبدئي (بفرض ثبات قيمة القرض)

$$\text{نسبة الهامش الجديد} = \frac{40000 - 125000}{125000} = 0.68 = \%68$$

وكأن قيمة المدفوعات النقدية ارتفعت إلى = 125000 – 40000= 85000 ل.س

فهو يمكنه الاستفادة من تسديد المدفوعات النقدية وتخفيض قيمتها، أو إلى شراء المزيد من الأسهم الممولة جزئياً، أو في خدمة القرض وتسديد جزء منه .

4-3-4- مؤشرات قياس حالة السوق:

إن المستثمرين والمضاربين في الأوراق المالية يحتاجون إلى معرفة حالة السوق بشكل مستمر، وإن حالة السوق تقاس بحجم مبيعات الأسهم وأسعارها التي يتم التداول فيها . لذلك تمت صياغة عدة مؤشرات لقياس حالة السوق في كل دولة أو اتحاد اقتصادي من خلال مستوى أسعار أسهم الشركات الكبرى، التي تتواجد في ذلك السوق. وظهر نوعان من المؤشرات هما:

- مؤشرات تقيس حالة السوق بشكل عام (كمؤشر جونز لمتوسط الصناعة).
- مؤشرات تقيس حالة السوق بالنسبة لصناعة معينة (ستاندر).

ويقوم تصميم المؤشر على تركيب عينة من أسهم المنشآت الكبرى التي تتداول أسهمها في أسواق الأوراق المالية المنظمة أو غير المنظمة أو في كليهما .

وتعد مؤشرات أسعار الأوراق المالية أداة فعالة لقياس حالة السوق ، ووسيلة نافعة للتنبؤ بما ستكون عليه الحالة الاقتصادية العامة للدولة. وهي تقدم خدمات جليلة للمستثمرين وغيرهم من المتعاملين في سوق الأوراق المالية، حيث إنها تعطيهم فكرة سريعة عن الأمور التالية:

1- معرفة اتجاه التغيرات التي تطرأ على أسعار أسهم محفظة الأوراق التي يملكها المستثمر من دون الحاجة إلى متابعة أداء كل ورقة على حدة .

2- الحكم على أداء المديرين المحترفين القائمين على إدارة محفظة الأوراق المالية لمؤسسات المتخصصة في الاستثمار . وذلك من خلال مقارنة معدل عائد السوق الذي يعكسه المؤشر مع معدل عائد محفظة مؤلفة من عينة عشوائية

من الأسهم المتداولة في السوق. مع الأخذ بعين الاعتبار التباين بين مخاطر المحفظة ومخاطر السوق .

3- التنبؤ بحالة السوق في المستقبل، وهذا الأمر يساعد المستثمرين في اتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب، وتقوم عملية التنبؤ على إجراء تحليل السلسلة الزمنية لقيم مؤشرات السوق، لاكتشاف نموذج واتجاه التغيرات التي تحدث في السوق، ثم استخدام ذلك النموذج للتنبؤ بالتطورات المستقبلية في السوق .

4- تقدير مخاطر المحفظة المالية: وذلك من خلال حساب معامل الانحدار في العلاقة التي تربط بين معدل العائد على الاستثمار في المحفظة العشوائية و معدل العائد على محفظة السوق. والذي يقاس بدوره بمعدل العائد المحسوب لأحد المؤشرات التي تقيس حالة السوق بصفة عامة. ويطلق على تلك العلاقة بالخط المميز .

4-3-5- كيفية بناء مؤشرات قياس حالة السوق :

يوجد عدد كبير من المؤشرات الدولية والمحلية لقياس أحوال الأسواق المالية. وهي تختلف عن بعضها بعض من حيث التعريف والتصميم والقيم والمعاني والمكان والزمان. ولكن رغم تلك الاختلافات فإنها جميعاً تقوم على ثلاثة أسس هي:

1- اختيار عينة ملائمة من الأوراق المالية: لإدخالها في المعادلة التي تستخدم لحساب قيمة المؤشر. حتى تكون الأوراق المالية ملائمة يجب أن يكون حجمها كبيراً وانتشارها واسعاً ومصدر أسعارها موثوقاً .

2- تحديد الأوزان النسبية لأسهم العينة: وهي الأوزان المعتمدة في حساب قيمة المؤشر، وهي عبارة عن جملة من النسب المئوية المتكاملة تضرب بها الأسعار وتدخل في المعادلة المستخدمة من حساب قيمة المؤشر. وهناك ثلاثة أنواع من هذه الأوزان وهي:

- الأوزان المتساوية: وفي هذه الحالة يتم تثقيل الأسعار بأوزان متساوية محددة

- الأوزان النسبية: وهي تحسب من نسبة سعر السهم على مجموع أسعار الأسهم الفردية التي يقوم عليها المؤشر. ولكن هذا النوع لا يأخذ بعين الاعتبار عدد الأسهم الصادرة عن المنشآت المختلفة .
- الأوزان السوقية :وهي تحسب من القيمة السوقية الكلية لعدد الأسهم العادية لكل منشأة ممثلة في العينة الملائمة المختارة لحساب مؤشر حالة السوق .

3- تحديد طريقة تركيب قيمة المؤشر وحسابها: إن أبسط طريقة مستخدمة في تركيب قيمة مؤشر وحسابها حالة السوق، هي طريقة المتوسط الحسابي البسيط أو المتوسط الحسابي المثقل. وتليها طريقة المتوسط الهندسي البسيط أو المتوسط الهندسي المثقل .

كما تستخدم طريقة الأرقام القياسية للمقارنة بين حالة السوق في سنة معينة مع حالته في سنة الأساس .

ولصياغة المعادلات التي تستخدم في تركيب قيم مؤشرات الأسواق المالية وحسابها نفترض أن العينة الملائمة المختارة لذلك مؤلفة من أسهم $n$ منشأة اقتصادية كبيرة .

وأن أسعار أسهم هذه المنشآت في لحظة معينة هي:

$$P_1, P_2, P_3, \dots\dots, P_i, \dots\dots., P_n$$

وعندها نجد أن المتوسط الحسابي البسيط لهذه الأسعار يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\overline{P}_4 = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n}{n} = \frac{\sum^n P_i}{n} \qquad (22-4)$$

وإذا رمزنا للأوزان النسبية المحسوبة على أساس نسبة سعر السهم إلى مجموع أسعار أسهم المنشآت الداخلة في العينة الملائمة بالرموز:

$$W_1, W_2, W_3, \dots\dots, W_n$$

فإن المتوسط الحسابي المثقل بهذه الأوزان يحسب من العلاقة :

$$\overline{P}_{AW} = \frac{W_1 \cdot P_1 + W_2 \cdot P_2 + W_3 \cdot P_3 + \cdots + W_n \cdot P_n}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

$$\overline{P}_{AW} = \frac{\sum W_i \cdot P_i}{\sum W_i} \qquad (23-4)$$

حيث إن كل $W_i$ تحسب من العلاقة :

$$W_i = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \qquad (24-4)$$

وإذا رمزنا للأوزان المحسوبة حسب القيمة السوقية الكلية لعدد الأسهم العادية للمنشآت الممثلة في العينة الملائمة بالرموز .

$$V_1, V_2, V_3, \dots\dots, V_i, \dots\dots., V_n$$

فإن المتوسط الحسابي المثقل بهذه الأوزان يحسب من العلاقة:

$$\bar{P}_{AV} = \frac{V_1 \cdot P_1 + V_2 \cdot P_2 + V_3 \cdot P_3 + \cdots + V_n \cdot P_n}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

$$\bar{P}_{AV} = \frac{\sum V_i \cdot P_i}{\sum V_i} \qquad (25-4)$$

حيث إن كل $V_i$ تحسب نم جداء عدد الأسهم $N_i$ بأسعارها $P_i$ بحسب العلاقة :

$$V_i = N_i \cdot P_i$$

حيث إن $N_i$ عدد أسهم المنشاة $i$ .

وبطريقة مشابهة نجد أن المتوسط الهندسي البسيط للأسعار يعطى بالعلاقة:

$$\bar{P}_G = \sqrt[n]{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots . + P_n} \qquad (26-4)$$

أما المتوسط المثقل بالأوزان $W_i$ فيحسب من العلاقة :

$$\bar{P}_{GW} = \sum^{W} \sqrt[i]{P_1^{W_1} \cdot P_2^{W_2} \cdot P_3^{W_3} \cdot \dots . \cdot P_n^{W_n}} \qquad (27-4)$$

ولكن المتوسط المثقل بالأوزان $V_i$ فيحسب من العلاقة :

$$\bar{P}_{GV} = \sum^{V} \sqrt[i]{P_1^{V_1} \cdot P_2^{V_2} \cdot P_3^{V_3} \cdot \dots \cdot P_n^{V_n}} \qquad (28-4)$$

أما طريقة الأرقام القياسية فتستخدم لمقارنة متوسط الأسعار $\bar{P}_t$ في سنة معينة، مع متوسطها في سنة الأساس $\bar{P}_0$ (والتي نعتبرها 100) وتستخدم العلاقة الآتية :

$$I = \frac{\bar{P}_t}{P_0} \cdot 100 = \frac{\sum(\bar{P}_t)_i}{(\bar{P}_0)_i} \cdot 100\% \qquad (29-4)$$

وأخيراً يجب حساب متوسط العائد على المؤشر من العلاقة:

$$R = \frac{\bar{P}_t - \bar{P}_0}{P_0} \cdot 100\% \qquad (30-4)$$

ثم يقوم المستثمر باتخاذ القرار المناسب لشراء الأوراق المالية الملائمة .

**مثال (4–13)** : على حالة حساب قيمة المؤشر بدون تثقيل :

لنفترض اختصاراً أن العينة الملائمة المستخدمة في حساب مؤشر حالة أحد الأسواق مؤلفة من ثلاث منشآت هي $A$ و$B$ و$C$. ولنفترض أن أسعار أسهمها كانت كما في الجدول الآتي، والمطلوب حساب قيمة المؤشر باستخدام المتوسطين الحسابي والهندسي، وحساب الرقم القياسي لهما ومتوسط العائد عن كل سهم .

| أسهم المنشأة | السعر في نهاية السنة الأولى = سنة الأساس | السعر في نهاية السنة الثانية | السعر في نهاية السنة الثالثة |
|---|---|---|---|
| $A$ | 60 | 70 | 90 |
| $B$ | 50 | 60 | 80 |
| $C$ | 40 | 50 | 70 |
| القيمة المطلقة للمؤشر = المجموع | 150 | 180 | 240 |
| المتوسط الحسابي للسعر | 50 | 60 | 80 |
| المتوسط الهندسي للسعر | 49.32 | 59.44 | 79.58 |
| الرقم القياسي للمؤشر | $\frac{150}{150}\cdot 100 = 100\%$ | $\frac{180}{150}\cdot 100 = 120\%$ | $\frac{240}{150}\cdot 100 = 160\%$ |
| متوسط العائد على المؤشر | --- | $\frac{180-150}{150}\cdot 100 = 20\%$ | $\frac{240-150}{150}\cdot 100 = 60\%$ |
| متوسط العائد على السهم | --- | 10 | 30 |

ومن هذا الجدول نلاحظ أن القيمة المطلقة للمؤشر (كمجموع للأسعار) قد ازدادت من 150 في سنة الأساس إلى 180 في نهاية العام الثاني، ثم 240 في نهاية العام الثالث. وازداد المتوسط الحسابي لسعر السهم من 50 إلى 60 ثم إلى 80 على التوالي. وازداد المتوسط الهندسي لسعر السهم من 49.32 إلى 59.44 ثم إلى 79.58 أما الرقم القياسي للمؤشر فقد تغير من 100% إلى 120% ثم إلى 160%. وكذلك ازداد متوسط العائد على المؤشر بنسبة 20% في السنة الثانية، وبنسبة 60% في السنة الثالثة .

وأخيراً، نجد أن متوسط العائد الذي حققه المستثمر بلغ 10 في السنة الثانية و30 في السنة الثالثة .

**مثال (4-14):** على حالة التثقيل بالأوزان السعرية النسبية :

لقد عالجنا في المثال السابق كيفية حساب مؤشرات حالة السوق بدون استخدام تثقيلات الأسعار الداخلة في العينة الملائمة، وبما أنه لا يجوز أن نساوي بين سهمين مختلفين في السعر، فإننا نعيد حل المثال (4-13) السابق بوضع تثقيلات لأسعار الأسهم مؤلفة من الأوزان النسبية المحسوبة على أساس نسبة سعر كل سهم إلى مجموع أسعار الأسهم الداخلة في العينة، فنجد أن هذه التثقيلات في السنة الأولى تساوي:

$$W_1 = \frac{P_1}{\sum^n P_i} = \frac{60}{150} = \frac{6}{15}$$

$$W_2 = \frac{P_2}{\sum^n P_i} = \frac{50}{150} = \frac{5}{15}$$

$$W_3 = \frac{P_3}{\sum^n P_i} = \frac{40}{150} = \frac{4}{15}$$

| أسهم المنشأة | السعر في نهاية السنة الأولى = سنة الأساس | $W_i$ | السعر في نهاية السنة الثانية | $W_i$ | السعر في نهاية السنة الثالثة | $W_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 60 | $\frac{6}{15}$ | 70 | $\frac{7}{18}$ | 90 | $\frac{9}{24}$ |
| *B* | 50 | $\frac{50}{15}$ | 60 | $\frac{6}{18}$ | 80 | $\frac{8}{24}$ |
| *C* | 40 | $\frac{40}{15}$ | 50 | $\frac{5}{18}$ | 70 | $\frac{7}{24}$ |
| القيمة المطلقة للمؤشر = المجموع | 150 | 1 | 180 | 1 | 240 | 1 |
| المتوسط الحسابي المثقل للسعر | 51.333 | -- | 61.111 | -- | 80 | |
| المتوسط الهندسي المثقل للسعر | 50.68 | -- | 60.56 | -- | 79.58 | |

| أسهم المنشأة | السعر في نهاية السنة الأولى = سنة الأساس | $W_i$ | السعر في نهاية السنة الثانية | $W_i$ | السعر في نهاية السنة الثالثة | $W_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الرقم القياسي للمؤشر | -- | -- | %119 | -- | $\frac{240}{150}\cdot 100 = 160\%$ | |
| متوسط العائد على المؤشر | --- | | $\frac{61.111-51.333}{51.333}\cdot 100 = 19\%$ | | $\frac{61.111-51.333}{51.333}\cdot 100 = 57.5\%$ | |
| متوسط العائد على السهم | --- | | 10.222 | | 29.5 | |

ومن الجدول السابق نلاحظ أن مؤشرات حالة السوق اختلفت عمّا كانت عليه في المثال السابق البسيط، وذلك بسبب تثقيل الأسعار بالأوزان السعرية النسبية $W_i$ (قارن بين الجدولين واستخلص النتائج اللازمة) .

**مثال (4-15)** :على حالة التثقيل بالقيمة السوقية لأسهم المنشآت الداخلة في العينة الملائمة :

لنفترض الآن أن أسعار الأسهم الصادرة عن تلك المنشآت وأعدادها خلال ثلاث سنوات كانت كما يلي:

| أسهم المنشأة | عدد الأسهم الصادرة $N$ | قيم الأسهم في نهاية السنة الأولى | القيمة السوقية في نهاية السنة الأولى | قيم الأسهم في نهاية السنة الثانية | القيمة السوقية في نهاية السنة الثانية | قيم الأسهم في نهاية السنة الثالثة | القيمة السوقية في نهاية السنة الثالثة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3000 | 60 | 180000 | 70 | 210000 | 90 | 270000 |
| $B$ | 2000 | 50 | 100000 | 60 | 120000 | 80 | 160000 |
| $C$ | 1000 | 40 | 40000 | 50 | 50000 | 70 | 70000 |
| المجموع | 6000 | - | 320000 | - | 380000 | - | 500000 |
| المتوسط الحسابي لسعر السهم | - | - | 53.333 | - | 63.333 | - | 83.333 |
| المتوسط الهندسي لسعر السهم | - | - | 52.77 | - | 62.87 | - | 82.99 |
| الرقم القياسي للمؤشر | - | - | 100 | - | 118.8 | - | 156.3 |

| أسهم المنشأة | عدد الأسهم الصادرة $N$ | قيم الأسهم في نهاية السنة الأولى | القيمة السوقية في نهاية السنة الأولى | قيم الأسهم في نهاية السنة الثانية | القيمة السوقية في نهاية السنة الثانية | قيم الأسهم في نهاية السنة الثالثة | القيمة السوقية في نهاية السنة الثالثة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| متوسط العائد على المؤشر | – | – | – | – | %18.8 | – | %56.3 |
| متوسط العائد على السهم | – | – | – | – | 10 | – | 30 |

ومن هذا الجدول نجد أن قيمة المتوسط الحسابي تختلف عن قيمته في الحالات السابقة، وهي تزداد من 53.333 إلى 63.333 ثم إلى 83.333، ويحقق المستثمر عائداً نسبته 18.8% في السنة الثانية، و56.3 في السنة الثالثة. وأن متوسط العائد على السهم يبلغ 10 ل.س في السنة الثانية، و30 ل.س في السنة الثالثة .

**ملاحظة 4:**

قد لا يبقى عدد الأسهم الصادرة $N_i$ ثابتاً خلال السنة، لأن بعض المنشآت تقوم بمحاولة لاشتقاق أسهم لها من الأسهم الأصلية، وذلك بتجزئة السهم إلى عدة أسهم من أجل تسهيل تسويقها في السوق، ونتيجة لذلك الاشتقاق تتغير قيمة مؤشرات قياس السوق إلا إذا تم تعديلها .

## 4-4- أهم المؤشرات العالمية في الأسواق المالية:

يوجد في الأسواق المالية المنتشرة أو العاملة في مختلف دول العالم عدة مؤشرات لقياس حالة تلك الأسواق، ولكن أهم هذه المؤشرات التي تعرضهم نشرات الأخبار والتي تنشرها الصحف العادية والمتخصصة هي:

1: مؤشر داو جونز *(DAW JONCS)* :

هو من أقدم المؤشرات وأكثرها شيوعاً في أسواق الولايات المتحدة، ولقد تم تصميمه في عام 1884 من قبل صاحبة (تشارلز دو *Charles Dow* ) وكان هذا المؤشر يضم عينة مكونة من تسعة أسهم لتسع شركات صناعية ، ثم تمّ تطويره ليضم 30 سهماً لثلاثين شركة صناعية متميزة بالعراقة والضخامة وبعدد المساهمين وبارتفاع قيمتها السوقية، لذلك يطلق على هذا المؤشر اسم مؤشر الشركات الصناعية .

في البداية كان هذا المؤشر معرّفاً ومصمماً على أساس المتوسط الحسابي البسيط الذي يحسب من مجموع أسعار الأسهم على عددها والمعرف بالعلاقة:

$$\bar{P} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n}{n} = \frac{\sum P_i}{n} \qquad (31-4)$$

ولكن عيوب هذا التعريف دفعت المختصين إلى تطويره وحساب قيمة مؤشر (داو جونز) من العلاقة (4-3) التي تثقل أسعار الأسهم بالأوزان النسبية $W$ لتلك الأسعار وتحسب من العلاقة:

$$\bar{P} = \frac{W_1 \cdot P_1 + W_2 \cdot P_2 + W_3 \cdot P_3 + \cdots + W_n \cdot P_n}{\sum W_i} \qquad (32-4)$$

حيث إن الأوزان $W_i$ تحسب من العلاقة :

$$W_i = \frac{P_i}{\sum P_i} \qquad (33-4)$$

ومما يؤخذ على مؤشر (داو جونز) السابق إنه يتأثر بحدوث اشتقاق لأسهم إحدى الشركات داخل العينة ويتأثر بعدد الأسهم الجديدة التي تصدرها إحدى الشركات مقابل التوزيعات الربحية، لأن هذه الأمور تؤثر على القيمة السوقية للسهم وتؤدي إلى تغيير قيمة المؤشر من دون حدوث أي تغيير في حالة السوق المالية. ولتوضيح هذه المشكلة نفترض أن العينة المستخدمة في حساب المؤشر تتألف من ثلاثة أسهم أسعارها هي 100 و200 و300 ل.س. وهذا ما يعادل قيمة مطلقة لها تساوي 600 ل.س وبذلك تصبح قيمة المؤشر

$$\bar{P}_1 = \frac{600}{3} = 200 \qquad L.S.$$

ولنفترض الآن أن الشركة الثالثة قامت باشتقاق أسهمها واستبدلت كل سهم قديم بثلاثة أسهم جديدة بسعر جديد 100 ل.س لكل سهم .

ونتيجة لذلك يصبح مجموع الأسعار الجديدة للمؤشر مساوياً لـ 400 ل.س وإن القيمة المتوسطة للمؤشر تصبح مساوية لـ:

$$\bar{P}_2 = \frac{400}{3} = 133.33 \qquad L.S$$

إن هذا الانخفاض في قيمة المؤشر لا يعزى إلى حالة السوق- لأنه لا توجد أية معلومات عن ذلك- بل تعزى إلى الاشتقاق الذي حدث في أسهم الشركة الثالثة .

ولمعاجلة هذا الخلل والمحافظة على قيمة المؤشر قبل الاشتقاق وبعده، تم استخدام المطابقة أو المعادلة الآتية:

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2 \quad \text{بعد الاشتقاق} \quad \text{قبل الاشتقاق} \qquad (34-4)$$

حتى نقوم بتحقيق هذه المعادلة نحولها إلى شكلها الأصلي فنجد أنها تقتضي أن يكون:

$$\frac{\sum^{n} P_1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i'}{D} \qquad (35-4)$$

حيث إن $P'$ هي الأسعار الجديدة للأسهم بعد الاشتقاق، و$D$ عدد صحيح يسمى المقسوم عليه المستخدم لتعديل قيمة المؤشر وإعادتها كما كانت عليه قبل الاشتقاق، وليس عدد الأسهم أو الشركات الداخلة في العينة.

ولحساب $D$ نطبق المعادلة (4-36) على مثالنا المدروس، فنجد أن:

$$\frac{600}{3} = \frac{400}{D}$$

ومنها نجد أن $D = 2$ وبالتالي فإن قيمة المؤشر الجديد يجب أن تحسب من العلاقة الآتية:

$$P_i = \frac{\sum P_i}{D} = \frac{400}{D} = 200 \quad L.S. \qquad (36-4)$$

وهي القيمة السابقة نفسها للمؤشر، وهذا يعني أن قيمة المؤشر لم تتأثر بسبب الاشتقاق ويمكن استخدام معادلة أخرى لاستخراج المقسوم عليه $D$ كما يلي:

نلاحظ أنه يمكننا كتابة المعادلة (4-35) كما يلي:

$$\bar{P}_1 = \frac{\sum P_i'}{D} \qquad (37-4)$$

ومنها نجد أنه يمكننا حساب $D$ من العلاقة :

$$D = \frac{\sum P_i'}{\bar{P}_1} \qquad (38-4)$$

حيث إن $\sum P_i'$ هو مجموع أسعار الأسهم بعد الاشتقاق أما $\bar{P}_1$ فهو قيمة المؤشر بعد الاشتقاق. وبناءً على ذلك يتم حساب قيمة مؤشر السوق بعد الاشتقاق من العلاقة :

$$\bar{P} = \frac{\sum P_i'}{D} \qquad (39-4)$$

حيث إن $D$ هي قيمة العدد المقسوم عليه وليست عدد الأسهم أو الشركات التي تدخل في العينة الملائمة، وعادة ما يتم نشر قيمة هذا المقسوم عليه في جدول الإعلانات في سوق الأوراق المالية.

وبتطبيق هذه الأفكار على مثالنا المدروس، نجد أن قيمة العدد المقسوم عليه $P$ بعد الاشتقاق تحسب من العلاقة:

$$D = \frac{\sum P_i'}{\bar{P}_1} = \frac{400}{200} = 2$$

وبذلك نجد أن قيمة مؤشر السوق بعد الاشتقاق يجب أن تحسب من العلاقة:

$$\bar{P}_1 = \frac{\sum P_i'}{D} = \frac{400}{2} = 200$$

والآن لنفترض أن أسعار تلك الأسهم بعد الاشتقاق في نهاية اليوم قد أقفلت على الأسعار 120، 220، 140 ل.س . للأسهم المذكورة، وهذا يعني أن قيمتها المطلقة (مجموع الأسعار) قد بلغت 480 ل.س . وأن قيمة مؤشر حالة السوق تحسب من العلاقة:

$$\bar{P} = \frac{\sum P_i'}{D} = \frac{480}{2} = 240 \quad \text{نقطة}$$

وهذا يعني أن حالة السوق تحسنت من 200 نقطة إلى 240 نقطة بسبب الزيادة التي طرأت على أسعار الأسهم بعد الاشتقاق .

**ملاحظة 5:**

نلاحظ أن قيمة مؤشر (داو جونز) لحالة السوق ليست المتوسط الحسابي لأسعار الأسهم الداخلة في العينة، بل هي حصيلة قسمة مجموع الأسعار على العدد المقسوم عليه $D$ وعادة ما يتم نشر قيمة ذلك العدد في جدول الإعلانات في السوق .

وأخيراً، واعتماداً على كل ما سبق يفضل العديد من الباحثين أن يتم حساب مؤشر (داو جونز) من أحدى الصيغ التالية:

1- الصيغة التي تعتمد على الأوزان النسبية للأسعار، حيث نجد أن:

$$\bar{P} = \frac{\sum W_i \cdot P_i'}{D} \qquad (40-4)$$

2- الصيغة التي تعتمد على أوزان القيمة السوقية:

$$\bar{P} = \frac{\sum v_i \cdot P_i'}{D} \qquad (41-4)$$

3- الصيغة التي تعتمد على المتوسط الهندسي البسيط، وهي:

$$\bar{P} = \sqrt[D]{P_1' \cdot P_2' \cdot P_3'} \qquad (42-4)$$

حيث يتم حساب دليل الجذر D بطريقة أخرى من العلاقة:

$$D = \frac{\sum ln\, P_i'}{ln\, \overline{P}_i} \qquad (43-4)$$

ولقد أظهرت التجارب أن نتائج الحسابات لهذه الصيغ المختلفة متقاربة على المدى الطويل، أما خلال الفترات القصيرة فإنها تظهر تبايناً واضحاً في قيمة المؤشر، علماً بأن طريقة حساب المؤشر لا تتعرض للتعديل عند إصدار أسهم لتغطية التوزيعات المقررة للأرباح إلا إذا كانت قيمة تلك الأسهم تزيد عن 10% من مجموع الأسهم الصادرة عن المنشأة .

وأخيراً نشير إلى أن الكثير من الانتقادات توجه إلى مؤشر (داو جونز) لأنه خاص بالشركات الصناعية، ولأنه يعتمد على عينة صغيرة من المنشآت الصناعية، ولأن طريقة حسابه تعتمد على المتوسط الحسابي للأسعار، وعلى العدد المقسوم عليه D لمعالجة حالة الاشتقاق، ولكن رغم ذلك يبقى هذا المؤشر أكثر المؤشرات شهرة وأكثرها استخداماً في الأسواق المالية .

2: مؤشر ستاندر آند بور *(S & P)* :

يعتمد هذا المؤشر على عينة كبيرة مؤلفة من 500 سهم تمثل 400 منشأة صناعية، و40 منشأة خدمية (كهربا والماء)، و20 منشأة للنقل، و40 منشأة تعمل في المجال المالي، وكلها منشآت كبيرة الحجم وواسعة الانتشار، وأسهمها متداولة غالباً في الأسواق غير المنظمة. ولقد اشتق من هذا المؤشر أربعة مؤشرات فرعية هي مؤشر *S&P* للصناعة (400 سهم)، مؤشر الخدمات العامة (40 سهماً)، ومؤشر النقل (20 سهماً)، ومؤشر المنشآت المالية (40 سهماً) .

وعلى عكس مؤشر (داو جونز) لا يعتبر مؤشر (ستاندر آند بور) متوسطاً حسابياً، أو هندسياً، بل هو رقم قياسي منسوب إلى الفترة الأساسية (1941-1943)

والتي أعطيت فيها قيمة جزافية لذلك المؤشر مساوية لـ 10 نقاط . ويقوم هذا المؤشر على مدخل التثقيل بوساطة القيمة السوقية لأسهم المنشآت الداخلة في العينة الملائمة، ويتم حسابه من العلاقة الآتية:

$$I = \frac{\sum^{900} N_i \cdot P_i}{\sum N_i^{\times} \cdot P_i^{\times}} \cdot 10 = \frac{\sum^{900} V_i}{\sum V_i^{\times}} \cdot 10 \qquad (44-4)$$

حيث إن $N_i$ عدد الأسهم الصادرة عن المنشاة $i$ وحيث إن $P_i$ سعر الإقفال لسهمها في اليوم أو العام المدروس، وحيث $N_i^{\times}$ و $P_i^{\times}$ هما عدد الأسهم وسعر الإقفال في اليوم أو العام السابق، أما العدد 10 فهو القيمة الجزافية أو التقديرية التي أعطيت لذلك المؤشر في فترة الأساس (1941−1943). ومن مزايا هذا المؤشر أنه واسع الطيف ولا تتأثر قيمته باشتقاق الأسهم ولا بزيادة عددها لتغطية التوزيعات الربحية، وذلك لأن الاشتقاق الذي يؤدي إلى زيادة عدد الأسهم يخفض من سعرها بحيث يبقى الجداء $N_i \cdot P_i$ ثابتاً في لحظة معينة .

**مثال(4−16):**

لنفترض أن مؤشر (ستاندر آند بور) يتكون فقط من أسهم ثلاث منشآت وكان عدد الأسهم الصادرة عن كل منها وأسعارها في نهايتي العامين2005 و2006 كما يلي:

| المنشأة أو السهم | $P_i^{\times}$ سعر السهم في 2005/12/31 | $N_i^{\times}$ عدد الأسهم في 2005/12/31 | $P_i$ سعر السهم في 2006/12/31 | $N_i$ عدد الأسهم في 2006/12/31 |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 30 | 2000 | 35 | 2000 |
| $B$ | 40 | 4000 | 30 | 6000* |
| $C$ | 60 | 3000 | 60 | 3200** |

*حدثت زيادة على عدد أسهم المنشأة $B$ باشتقاق أسهمها وحصول المستثمر على 3 أسهم مقابل كل سهمين .

**حدثت زيادة في عدد أسهم المنشأة $C$ بنسبة تقل عن 10% من عددها الأصلي (200 سهم) .

وهكذا نجد أن قيمة المؤشر في نهاية عام 2006 بالنسبة للعام السابق تحسب من العلاقة:

$$I = \frac{\sum N_i \cdot P_i}{\sum N_i^{\times} \cdot P_i^{\times}} \cdot 10 = \frac{35 \cdot 2000 + 30 \cdot 6000 + 60 \cdot 3200}{30 \cdot 2000 + 40 \cdot 4000 + 60 \cdot 3000} \cdot 10$$

$$I = \frac{442000}{400000} \cdot 10 = 11.05 \quad \text{نقطة}$$

**ملاحظة 6:**

ومع كل المزايا التي يتمتع بها مؤشر (ستاندرد أند بور) فهو لا يخلو من العيوب، إذ إنه يتحيز لصالح المنشآت ذات القيمة السوقية الكبيرة، أي إنه يتحيز إلى المنشآت الكبيرة (بعدد أسهمها) وذات الأسعار العالية .

ولتوضيح ذلك نفترض أن سعر السهم للمنشأة $A$ فقط قد ازداد بنسبة 30% وأصبح في نهاية عام 2006 مساوياً لـ 36 ل.س، فإننا نجد أن قيمة ذلك المؤشر تصبح مساوية :

$$I = \frac{36 \cdot 2000 + 40 \cdot 4000 + 60 \cdot 3000}{30 \cdot 2000 + 40 \cdot 4000 + 60 \cdot 3000} \cdot 10 = \frac{412000}{400000} \cdot 10 = 10.3 \quad \text{نقطة}$$

ولنفترض الآن من جهة أخرى أن سعر السهم للمنشأة $B$ فقط (دون $A$) قد ازداد بنسبة 20% أيضاً، فأصبح سعره 48 ل.س في نهاية عام 2006 .

وبذلك نجد أن قيمة المؤشر ستصبح مساوية لـ:

$$I = \frac{30 \cdot 2000 + 48 \cdot 4000 + 60 \cdot 3000}{30 \cdot 2000 + 40 \cdot 4000 + 60 \cdot 3000} \cdot 10 = \frac{43200}{400000} \cdot 10 = 10.8 \quad \text{نقطة}$$

ومن هذا المثال نلاحظ أنه رغم إننا قمنا بزيادة افتراضية وموحدة قدرها 20% لكل من سعري السهمين التابعين للمنشأتين A وB وحسبنا قيمة المؤشر على حدة، فإن التغيير الذي حصل في سعر السهم التابع للمنشأة B ذات الحجم الكبير (4000 سهم) ترك أثراً كبيراً على قيمة المؤشر، حيث جعلها تساوي 10.8 نقطة بدلاً من 10.3 في حالة المنشأة A.

3: مؤشر نازداك *(NASDAQ)* :

هو مأخوذ من العبارة التالية: *(National Association Securities DeulersAutomayed Quotations System)* وهو أحد أهم مؤشرات الأسواق المالية الأمريكية، ولقد أحدث عام 1971، وأصبح الآن يضم أسهم 3200 شركة تعمل في مجال الإلكترونيات والاتصالات والتأمين في أنحاء العالم جميعها، وتعتمد على معدلاته معظم الصفقات التجارية في العالم، ويحظى بأكبر حصة منها في أسواق العالم، حيث تبلغ حصته 7/2 من التبادل التجاري في أسواق العالم، وتعرف قيمة هذا

المؤشر بطريقة الرقم القياسي التي أشرنا إليها عند حساب المؤشر *S&P 500* المستقل بالقيم .

وتوجد ثلاثة مستويات لإشهار قيم هذا المؤشر، هي:

- المستوى الأول: ويظهر فيه أعلى وأدنى قيمة لأسعار الأسهم خلال اليوم.
- المستوى الثاني: وتظهر فيه مؤشرات الأسعار لصناع السوق مع المعلومات الضرورية للبائع والشاري .
- المستوى الثالث: تظهر فيه الأسعار الخاصة لصناع السوق ووظيفتهم لمساعدتهم على تنفيذ الأمر .

وهناك صيغة أخرى لهذا المؤشر هي *Nasdaq-100* وهي عبارة عن الرقم القياسي لأكبر 100 شركة محلية ودولية، وقد عدلت طريقة حسابه بتثقيل أسعار الأسهم برؤوس أموال الشركات .

4: مؤشر نيكاي 225 *(NIKIE 225)* :

وهو رقم قياسي لسوق الأسهم في طوكيو، وهو المعدل الأكثر استخداماً في الأسواق الآسيوية، ويعمل به في أسواق أمريكا وأوروبا والصين ويشكل حوالي 70% من التبادل التجاري في سوق طوكيو. ولقد تم حسابه وتصميمه بوساطة صحيفة *(Nikon+ Keizai)*، ومنها تم اشتقاق اسم المؤشر *(Nik+ Kie)* .

وعند حساب قيمة هذا المؤشر تعطى أثقالاً متساوية لكل (50 ين) من السهم أو الحصة بعد تحديد العدد المقسوم عليه، ولا تعطى أية ترجيحات للشركات الصناعية، وإن قيمه وميله وحركاته وأرباحه تعبر عن فعالية مختلف الأسهم في السوق .

وتتم إعادة النظر في صياغة هذا المؤشر ومراجعة المقسوم عليه *D* وتعديله في شهر أيلول من كل سنة لتتلاءم مع تغيرات أسعار قيم الأسهم، أو في أي وقت تكون معدلات الأسهم غير كفؤة (مثل حالات الإفلاس)، ولكن يراعى عند إجراء أي استبدال للأسهم أن تتم مراجعة المقسوم عليه بحيث يضمن انتقالاً سلساً لمؤشر الأسهم.

5: مؤشر كاك 40 ( CAC 40) :

هو يتألف من 40 ورقة مالية للشركات الأكثر أهمية في بورصة باريس، ومعظم هذه الشركات هي شركات متعددة الجنسيات عاملة خارج فرنسا، وأخذ اسمه من العبارة الفرنسية أو الإنكليزية *(CotationAssisteeenContine'e = Continuous Assisted Quotation)* وهو رقم قياسي مثقل برؤوس أموال 40 شركة هامة من أصل أعلى 100 شركة في بورصة باريس .

6: مؤشرات أخرى:

في انجلترا: مؤشر *FT-30* : وهو يضم 30 ورقة مالية للشركات الأكثر أهمية في بورصة لندن .

مؤشر *FTSE-100*: وهو يضم 100 ورقة مالية تمثل حوالي 70% من التبادل التجاري في بورصة لندن، ويعتبر هذا المؤشر الأكثر شهرة في إنجلترا .

في ألمانيا: مؤشر *DAX*: وهو يضم 30 ورقة مالية ويشكل حوالي 70% من التبادل التجاري في ألمانيا .

## تمارين غير محلولة على الفصل الرابع

1) لدى أحدهم سهم عادي قيمته الاسمية 2000 ل.س. وقيمته السوقية 4000 ل.س. ويتوقع أن توزع الشركة أرباحاً لكل سهم بمعدل 25%، وإذا كانت مصاريف البيع تشكل 8%، وكانت الأرباح تنمو بمعدل 12% سنوياً، فالمطلوب إيجاد تكلفة التمويل لهذا السهم.
2) أصدرت إحدى الشركات 15000 سنداً لمدة خمس سنوات، القيمة الاسمية لكل منها 100 ل.س. وبمعدل فائدة مركبة 9%. فإذا كان البنك يأخذ عمولة توزيع 3%، ومصاريف الإصدار بلغت 24500 ل.س. ومصاريف رهن الأصول 1800 ل.س، فالمطلوب حساب تكلفة التحويل علماً بأن القيمة الاستهلاكية لهذه السندات تساوي قيمتها الاسمية.

# الفصل الخامس
# التوابع لمتحولَين و لعدة متحولات

لقد تعرف الطالب سابقاً على التوابع لمتحول واحد، ولكن في الواقع نادراً ما نجد هذه التوابع. فأغلب التوابع يكون فيها أكثر من متحول تحدد تغيرات التابع، فعندما نتحدث عن تابع الإنتاج نجد أنه قد لا يوجد توابع أو منتجات يدخل في تركيبها عنصر واحد. كذلك كثيراً ما نتحدث عن تابعي العرض والطلب ونقول إنهما تابعان لسعر السلعة، ولكن في الحقيقة نجد أن الطلب أو العرض من سلعة معينة يتعلق بعوامل عديدة منها سعر السلعة، سعر السلعة أو السلع البديلة والمنافسة، أسعار المواد الأولية أو مستوى الرواتب والأجور،...الخ. لذلك سوف نتحدث عن التوابع لمتحولَين بشكل مفصل و من ثم نعمم الدراسة على التوابع لعدة متحولات.

## 5-1- تعريف التابع لمتحولَين:

إذا كان لدينا متحولان $x, y$ مستقلان وكان التابع $Z$ مرتبطاً بهما بشكل أو بآخر، حيث مقابل كل ثنائية $(x, y)$ يوجد قيمة وحيدة للتابع $Z$، فإننا نقول في هذه الحالة إن التابع $Z$ تابع لكل من المتحولين $x, y$، ونكتب ذلك على الشكل التالي:

$$Z = f(x, y) \qquad (1-5)$$

**مثال (5-1):**

التابع التالي: $Z = f(x, y) = 2x^2 + 3y + 4$

هو تابع للمتحولَين $x, y$ حيث مقابل كل ثنائية $(x, y)$ يوجد قيمة وحيدة للتابع $Z$، فعندما $x = 3$ و $y = 2$ نجد:

$$Z = f(x, y) = f(3,2) = 2(3)^2 + 3(2) + 4 == 18 + 6 + 4 = 28$$

أي إن قيمة $Z$ المقابلة للثنائية $(x,y)=(3,2)$ تساوي 28 وهذه القيمة وحيدة، لذلك نسمي هذا التابع – التابع وحيد القيمة.

أحياناً يكون مقابل كل ثنائية $(x,y)$ يوجد قيمتان لـ $Z$ لذلك نسمي التابع في هذه الحالة بالتابع ثنائي القيمة أما في الحالة التي يكون فيها لـ $Z$ أكثر من قيمتين فنسميه متعدد القيم.

**مثال (5-2):**

التابع التالي هو تابع ثنائي القيمة:

$$Z^2=f(x,y)=x\cdot y \Rightarrow Z=f(x,y)=\mp\sqrt{x\cdot y}$$

لأن مقابل كل ثنائية $(x,y)$ يوجد قيمتين لـ $Z$، فعندما $(x,y)=(4,9)$ نجد أن:

$$Z=\mp\sqrt{4\cdot 9}=\mp\sqrt{36}=\mp 6$$

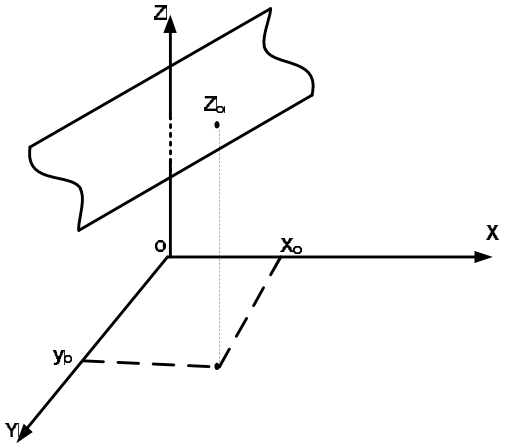
## 5-2- مجموعة (منطقة) تعريف التابع لمتحولَين:

ذكرنا أعلاه أن العلاقة $Z=f(x,y)$ تربط بين المتحولَين $x, y$ من جهة والتابع $Z$ من جهة أخرى. وبما أن كلاً من المتحولَين $x, y$ هو متحول مستقل، فهما يمثلان على محورين مختلفين وبالتالي فإن للتابع $Z$ منطقة تعريف تتمثل بمجموعة القيم المؤلفة من الثنائيات $(x,y)$ التي تجعل التابع $Z$ معيناً.

استناداً لما ذكر لاحظ أن مجموعة (منطقة) تعريف التابع لمتحولَين هي عبارة عن منطقة محددة من المستوي $xoy$ أما قيم التابع $Z$ فتمثل على محور مستقل $OZ$، وهي عبارة عن سطح معين في فراغ ذي ثلاثة أبعاد نرمز له بـ $R^3$ وهذا السطح يختلف من تابع لآخر حسب شكل العلاقة التي تربط بين المتحولَين $x$ , $y$ والتابع $Z$. فإذا كانت العلاقة بين التابع $Z$ و المتحولَين $y$ , $x$ علاقة خطية أي من الشكل:

$$Z = f(x, y) = ax + by + c \qquad (2-5)$$

فإن منطقة تعريف هذا التابع تشمل المستوي $xoy$ (أو جزءاً منه) أما قيم التابع $Z$ فتكون على شكل سطح مستوٍ ( موازٍ أو غير موازٍ للمستوي $xoy$ ) و معرف على كامل المستوي $xoy$ (أو على جزء منه) والذي نعرض أحد أشكاله في الشكل رقم (5−1) التالي:




الشكل رقم (5−1) التابع الخطي لمتحولَين

أما إذا كانت العلاقة بين التابع $Z$ و المتحولَين $x$ , $y$ غير خطية فإن قيم هذا التابع $Z$ تأخذ شكل سطح غير مستوٍ فوق منطقة تعريف هذا التابع فقط، فإن كان التابع من الشكل:

$$Z = f(x, y) = \mp\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

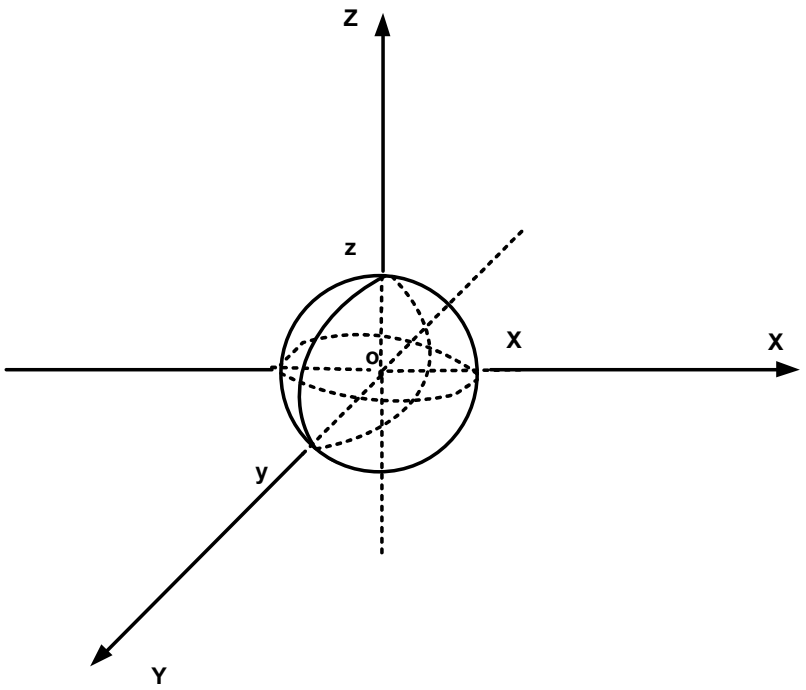
إن منطقة تعريف هذا التابع هي مجوعة قيم الثنائيات $(x, y)$ التي تجعل المقدار الموجود تحت إشارة الجذر غير سالب، أي:

$$16 - x^2 - y^2 \geq 0$$

*أو*

$$x^2 + y^2 \leq 16$$

وهذا يعني أن منطقة تعريف التابع هي كامل الدائرة التي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها يساوي $\sqrt{16}=4$ (باعتبار أن المتراجحة الأخيرة تعبر عن الدائرة)، أما قيم التابع $Z$ فتقع على سطح الكرة التي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها أيضاً يساوي 4، ونوضحها في الشكل رقم (5-2) التالي:




الشكل رقم (5-2) تابع غير خطي لمتحولَين (شكل كرة)

## 5-3- النهايات والاستمرار:

### 5-3-1- النهايات:

نقول عن النقطة $Z_0$ إنها نهاية للتابع $Z=f(x,y)$ عندما تنتهي الثنائية $(x,y)$ إلى $(x_0,y_0)$، إذا كان مقابل كل سلسلة من الثنائيات $(x_n,y_n)$ التي تنتهي إلى جوار $(x_0,y_0)$ وتختلف عنها، يوجد سلسلة من

القيم للتابع $Z_n = f\left(x_n, y_n\right)$ . حيث هذه السلسلة تنتهي إلى القيمة $Z_0$ عندما $n \to \infty$ ونعبر عن ذلك رياضياً على الشكل التالي:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x, y\right) = Z_0 \qquad (3-8)$$

**مثال (5-3):**

أوجد نهاية التابع التالي عندما $x \to 9$ ، $y \to 8$

$$Z = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

**الحل:**

$$\lim_{(x,y)\to(9,8)} x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2 = 6$$

5-3-2- الاستمرار:

نقول عن التابع $Z = f\left(x, y\right)$ إنه مستمر في النقطة $(x_0, y_0)$إذا كان معرفاً فيها وكان له نهاية وحيدة عند هذه النقطة، و إنه مستمر في منطقة تعريفه إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط منطقة تعريفه. و نقول عنه إنه غير مستمر (منقطع) إذا كان هناك نقطة على الأقل في منطقة تعريفه غير مستمر فيها.

**مثال (5-4):**

ادرس استمرار التابع التالي في النقاط الآتية: $(1,1),(0,0),(-1,1)$:

$$Z = f\left(x, y\right) = \frac{3x^2 + 5y}{x + y^2}$$

**الحل:**

-عند النقطة $(1,1)$ نجد:

$$f\ (1,1)=\frac{3(1)^2+5\cdot 1}{1+(1)^2}=\frac{3+5}{1+1}=4$$

أي إنه معرف في هذه النقطة وله قيمة فهو مستمر فيها.

-عند النقطة$(0,0)$ نجد:

$$f\ (0,0)=\frac{3(0)^2+5\cdot 0}{0+(0)^2}=\frac{0}{0}=\text{عدم تعيين}$$

أي إنه غير معرف في هذه النقطة.

-عند النقطة (1، 1-) نجد:

$$f\ (-1,1)=\frac{3(-1)^2+5\cdot 1}{-1+(1)^2}=\frac{3+5}{-1+1}=\frac{8}{0}=\text{عدم تعيين}$$

أي إن هذا التابع أيضاً غير معرف في هذه النقطة.

**ملاحظة 1:**

إن كل ما درسه الطالب سابقاً حول النهايات والاستمرار في التوابع لمتحول واحد ينطبق على التوابع لمتحولَين.

## 5-4- المشتقات الجزئية:

### 5-4-1-المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

استناداً لتعريف المشتق، واستناداً إلى تعريف التابع لمتحولَين، نقول إنه إذا ثبّتنا أحد المتحولات وجعلنا الآخر متغيراً، فيصبح التابع عندها تابعاً للمتحول (المتغير) الثاني فقط، وبناءً عليه يمكن إيجاد مشتق هذا التابع بالنسبة لهذا المتحول فقط. ففي التابع $Z=f\ (x,y)$ ،إذا اعتبرنا المتحول y ثابتاً وx فقط متحولاً، فإننا نستطيع حساب مشتق هذا التابع بالنسبة للمتحولx وفق التالي:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\ (x+\Delta x,y)-f\ (x,y)}{\Delta x} \qquad (4-5)$$

حيث نسمي هذا المشتق – المشتق الجزئي من المرتبة الأولى للتابع Z بالنسبة للمتحول x ونرمز له بأحد الرموز التالية $\frac{\partial Z}{\partial x}$ ,$f'_x$ ,$Z'_x$

الأمر نفسه ينسحب على المتحول y حيث نجد المشتق الجزئي من المرتبة الأولى للتابع Z بالنسبة للمتحول y:

$$Z'_y = f'_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (5-5)$$

**مثال (5-5):**

أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع Z بالنسبة لكلا متحوليه:

$$Z = f(x, y) = 3x^2 y + 5y - 2xy$$

**الحل:**

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 6xy - 2y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 3x^2 + 5 - 2x$$

5-4-2- المشتقات الجزئية للتوابع الضمنية:

بناءً على مشتق التابع لمتحولَين حيث كنا نثبت أحد المتحولات ونشتق التابع بالنسبة للمتحول الآخر، فإننا هنا سوف نستخدم كيفية إيجاد مشتق التابع الضمني لمتحول واحد، وكذلك المشتق الجزئي للتابع لمتحولَين لإيجاد المشتق الجزئي من المرتبة الأولى للتابع الضمني الذي يتبع متحولين.

يكتب التابع الضمني لمتحولَين على الشكل التالي:

$$F(x, y, Z) = 0 \qquad (6-5)$$

فإذا كان هذا التابع قابلاً للاشتقاق في مجال تعريفه بالنسبة لكل من المتحولَين x , y فإننا نعرف المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة لكل متحول من متحولاته من المرتبة الأولى على الشكل التالي:

مشتق التابع بالنسبة للمتحول x:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial Z}} \qquad (7-5)$$

مشتق التابع بالنسبة للمتحول y:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial Z}} \qquad (8-5)$$

حيث $\frac{\partial F}{\partial Z}\neq 0$

**مثال (5-6):**

أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع الضمني التالي بالنسبة لكل من المتحولَين x , y:

$$F\left(x,y,Z\right)=3x^{2}+5xy+6y^{2}-Zx+Z^{2}=0$$

**الحل:**

باستخدام العلاقتين (5-7) و(5-8) نجد:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial Z}}=\frac{-\left(6x+5y-Z\right)}{-x+2Z}=\frac{-6x-5y+Z}{-x+2Z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial Z}}=\frac{-\left(5x+12y\right)}{-x+2Z}=\frac{-5x-12y}{-x+2Z}$$

5-4-3- المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

إذا كان التابع $Z=f(x,y)$ قابلاً للاشتقاق في مجال تعريفه بالنسبة للمتحولَين x , y فإن المشتقات الجزئية التي نحصل عليها تكون أيضاً عبارة عن توابع لكل من x , y ويمكن أن تكون قابلة للاشتقاق الجزئي مرة أخرى بالنسبة للمتحولَين x , y وذلك على الشكل التالي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=f''_{xx}=Z''_{xx} \qquad (9-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}=Z''_{yx} \qquad (10-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}=Z''_{xy} \qquad (11-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=f''_{yy}=Z''_{yy} \qquad (12-5)$$

وهنا نلاحظ أن $f''_{yx}=f''_{xy}$

أي إن عملية الاشتقاق المتتالية تبديلية.

**ملاحظة 2:**

يمكن إيجاد المشتقات الجزئية من مراتب أعلى بالطريقة نفسها.

**مثال (5-7):**

أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لمعطيات المثال (5-5).

**الحل:**

وجدنا سابقاً أن:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=6xy-2y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=3x^2+5-2x$$

باستخدام العلاقات (5-9)، (5-10)، (5-11)، (5-12) نجد:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x} = 6x - 2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = 6x - 2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$$

نلاحظ هنا أن: $\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x} = 6x - 2$

5-4-4- المشتقات الجزئية للتوابع المركبة:

قياساً على التوابع المركبة لمتحول واحد، يمكن أن نعرف التابع المركب لمتحولَين على الشكل التالي:

بفرض أن التابع Z هو تابع لمتحولَين v, u وفق العلاقة :

$$Z = f(u, v)$$

فإذا كان كل من المتحولَين v, u تابعاً أيضاً لمتحولَين هما y ,x وفق العلاقتين التاليتين: $u = g(x, y)$ , $v = h(x, y)$

فيمكننا أن نعرف المشتقات الجزئية للتابع Z بالنسبة للمتحولَين y ,x على الشكل التالي:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (13-5)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (14-5)$$

**مثال (5-8):**

بفرض لدينا التابع $Z = f(u, v) = 3u^2 + 5u \cdot v + 2v^2$

فإذا كان:

$$u = g(x, y) = 3x^2 + 5xy$$
$$v = h(x, y) = 2x + 7y^2$$

فأوجد المشتقات الجزئية للتابع Z بالنسبة للمتحولَين x, y.

**الحل:**

باستخدام العلاقتين (5-13) و(5-14):

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = (6u + 5v)(6x + 5y) + (5u + 6v^2)(2)$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} = (6u + 5v)(5x) + (5u + 6v^2)(14y)$$

يمكن استبدال كل من u, v في العلاقتين السابقتين بما يساويهما بدلالة x, y للوصول إلى الصيغة النهائية للمشتقات بدلالة x , y فقط.

## 5-5- التفاضل الكلي للتابع لمتحولَين:

### 5-5-1- التفاضل الكلي من المرتبة الأولى:

إذا كان لدينا تابع لمتحولَين من الشكل $Z = f(x, y)$ فإذا ثبتنا المتحول y وجعلنا المتحول x فقط متغيراً فإننا يمكن أن نعرف تفاضل التابع Z بالنسبة للمتحول x وفق ما يلي:

$$d_x Z = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot dx \qquad (15-5)$$

وإذا ثبتنا المتحول x وجعلنا y فقط متغيراً فإننا يمكن أن نعرف تفاضل التابع Z بالنسبة للمتحول y وفق ما يلي:

$$d_y Z = \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot dy \qquad (16-5)$$

فإذا جعلنا كلاً من x, y متغيرين وبدمج العلاقتين(5-15) و (5-16) مع بعضهما نحصل على التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع Z وفق ما يلي:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot dy \qquad (17-5)$$

**مثال (5-9):**

أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع التالي:

$$Z = 5x^2y + y^2$$

**الحل:**

نوجد أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 10xy$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 5x^2 + 2y$$

وبالتالي التفاضل الكلي من المرتبة الأولى:

$$dZ = (10xy)dx + (5x^2 + 2y)dy$$

$$= 10xydx + 5x^2dy + 2ydy$$

5-5-2- التفاضل الكلي من المرتبة الثانية:

إذا كان التابع $Z = f(x, y)$ قابلاً للاشتقاق بالنسبة لكلا متحوليه أكثر من مرة.

فيكون التفاضل الكلي من المرتبة الأولى المعرف بالعلاقة (5-17) عبارة عن تابع لكلا المتحولَين x, y أيضاً، وبالتالي يمكن أن نوجد تفاضل هذا التفاضل أي $d(dZ)$ وفق ما ورد سابقاً فنحصل على ما يسمى التفاضل الكلي من المرتبة الثانية للتابع Z وفق التالي:

$$d^2Z = d(dZ) = \frac{\partial(dZ)}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial(dZ)}{\partial y}\cdot dy \qquad (18-5)$$

وباستبدال $dZ$ بما يساويها وفق العلاقة (5-17) نجد:

$$d^2Z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial Z}{\partial y}\cdot dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot dx + \frac{dZ}{dy}\cdot dy\right)dy$$

$$= \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\cdot dydx + \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\cdot dy^2$$

وباعتبار أن الحدين الثاني والثالث متساويان وفق ما ورد سابقاً عند حساب المشتقات الجزئية نجد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية يساوي:

$$d^2Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\cdot dx\,dy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\cdot dy^2 \qquad (19-8)$$

**مثال (5-10):**

أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لمعطيات المثال رقم (5-9).

**الحل:**

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 10y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = 10x$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2$$

وبالتالي التفاضل الكلي من المرتبة الثانية وفق العلاقة (5-19):

$$d^2Z = (10y)dx^2 + 2(10x)dx\,dy + 2dy^2$$

$$d^2Z = 10y\,dx^2 + 20x\,dx\,dy + 2dy^2$$

**ملاحظة 3:**

يمكن إيجاد التفاضل الكلي من مراتب أعلى بالطريقة نفسها.

## 5-6- النقاط الحرجة للتابع ذي المتحولَين:

تعرّف النقاط الحرجة للتابع $Z=f(x,y)$ بأنها مجموعة النقاط التي تنتمي لمجموعة (لمنطقة) تعريف التابع والتي تقابل قيماً عظمى أو صغرى أو شاذة لهذا التابع، ويمكن إيجاد هذه النقاط في حالتين:

- النقاط الحرجة الحرة أو الموضعية والتي يكون فيها كل من المتحولَين x, y غير مقيد بأي شرط أو قيد.

- النقاط الحرجة المقيدة والتي يكون فيها كل من المتحولَين x, y مقيدين بشرط أو قيد يقيد تحولاتهما، وقد يكون هناك أكثر من قيد واحد.

5-6-1- النقاط الحرجة الحرة أو الموضعية:

إن دراسة النقاط الحرجة الحرة للتابع $Z=f(x,y)$ عملية شبيهة بعملية إيجاد النهايات القصوى لتابع لمتحول واحد، وهنا نقول: إنه حتى يكون التابع $Z=f(x,y)$ في نقطة حرجة حرة (موضعية) يجب أن تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لهذا التابع عند هذه النقطة معدومة. بمعنى آخر، إذا كانت النقطة $(x_0,y_0)$ هي نقطة حرجة حرة للتابع Z فيجب أن يكون:

$$f'_x(x_0,y_0)=0$$
$$f'_y(x_0,y_0)=0$$

ولتحديد نوع هذه النقطة فيما إذا كانت تقابل قيمة عظمى أو صغرى أو شاذة للتابع Z فإننا نعتمد على قيمة $d^2Z$ التفاضل الكلي من المرتبة الثانية. وذلك على الشكل التالي:

إذا كان $d^2Z>0$ تكون النقطة عبارة عن نهاية صغرى.

إذا كان $d^2Z<0$ تكون النقطة عبارة عن نهاية عظمى.

إذا كان $d^2Z=0$ تكون النقطة عبارة عن نقطة شاذة.

ذكرنا سابقاً إن التفاضل الكلي من المرتبة الثانية للتابع Z يكتب على الشكل التالي:

$$d^2Z=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy^2$$

وبفرض أننا استخدمنا الرموز التالية في العلاقة الأخيرة:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=A\quad ،\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=B\quad ،\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}=C$$

تصبح علاقة التفاضل الكلي من المرتبة الثانية من الشكل:

$$d^2Z = A\,dx^2 + 2C\,dx\,dy + B\,dy^2$$

إذا أضفنا وطرحنا لهذه العبارة المقدار $\frac{C^2}{A}\cdot dy^2$ فتصبح على الشكل التالي:

$$d^2Z = A\,dx^2 + 2C\,dx\,dy + \frac{C^2}{A}\cdot dy^2 + B\,dy^2 - \frac{C^2}{A}\cdot dy^2$$

وبإصلاح العلاقة الأخيرة نجد:

$$d^2Z = A\left(dx^2 + \frac{2C}{A}dxdy + \frac{C^2}{A^2}dy^2\right) + \left(B - \frac{C^2}{A}\right)dy^2$$

$$\Rightarrow d^2Z = A\left(dx + \frac{C}{A}dy\right)^2 + \frac{AB - C^2}{A}dy^2$$

بما أن $dx \neq 0$ وكذلك $dy \neq 0$ فإن التفاضل الكلي $d^2Z$ يكون سالباً وتكون النقطة تشكل نهاية عظمى للتابع عندما:

$$A < 0 \;,\; AB - C^2 > 0 \qquad (20-5)$$

ويكون $d^2Z$ موجباً وتكون النقطة تشكل نهاية صغرى للتابع عندما:

$$A > 0 \;,\; AB - C^2 > 0 \qquad (21-5)$$

وتكون النقطة شاذة في غير هاتين الحالتين.

إذا رمزنا لقيم العبارتين (5-20) و (5-21) على شكل معينات نسميها معينات هيسيان على الشكل التالي:

$$H_1 = \left|\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right| \;,\; H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}$$

فإننا نستطيع أن نحدد نوع النقطة التي تشكل نقطة حرجة حرة (موضعية) للتابع على الشكل التالي:

- تكون النقطة عظمى عندما يكون $H_1 < 0 \;,\; H_2 > 0$.
- تكون النقطة صغرى عندما يكون $H_1 > 0 \;,\; H_2 > 0$.

- وتكون النقطة شاذة في غير ذلك.

**ملاحظة 4:**

قد يكون للتابع أكثر من نقطة حرجة حرة حسب القيم التي تعدم المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع. وفي هذه الحالة نوجد كل النقاط ونحدد نوع كل منها على حدة.

**مثال (5-11):**

أوجد النقاط الحرجة الحرة للتابع التالي وحدد نوعها:

$$Z = f(x,y) = 2x^3 + xy + x^2 + y^2 + 2$$

**الحل:**

نوجد أولاً $Z'_x$ و $Z'_y$ ونجعلهما مساويين للصفر فنجد أن:

$$Z'_x = 6x^2 + y + 2x = 0 \qquad (22-5)$$

$$Z'_y = x + 2y = 0 \qquad (23-5)$$

بحل المعادلتين (5-22) و(5-23) حلاً مشتركاً نجد أن لهما حلّين مختلفين:

الأول عندما $x = 0$ , $y = 0$ أي النقطة $(0,0)$.

الثاني عندما $x = -\frac{1}{4}$ , $y = \frac{1}{8}$ أي النقطة $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

لتحديد نوع كل نقطة نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ثم نوجد قيم المعينات $H_1$ , $H_2$ عند كل نقطة.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 12x + 2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2$$

من أجل النقطة الأولى $(0,0)$ نلاحظ:

$$H_1 = \left|\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right| = |12x+2|_{(0,0)} = 2 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x+2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{(0,0)} = 3 > 0$$

نلاحظ أن $H_1 > 0$ , $H_2 > 0$ وهذا يعني أن النقطة $(0,0)$هي نقطة حرجة حرة تشكل نهاية صغرى للتابع $Z$.

من أجل النقطة $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$ نلاحظ:

$$H_1 = \left|\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right| = |12x+2|_{\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)} = -1 < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x+2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)} = -3 < 0$$

نلاحظ أن $H_1 < 0$ , $H_2 < 0$ وهذا يعني أن النقطة $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$هي نقطة حرجة حرة تمثل نقطة شاذة للتابع $Z$.

5-6-2- النقاط الحرجة المقيدة (الشرطية):

يمكن إيجاد النقاط الحرجة للتابع $Z=f(x,y)$ ولكن مع وجود شرط أو أكثر يقيد تحولات المتحولَين x , y ( لا يجوز أن يكون عدد القيود أو الشروط أكثر من عدد المتحولات).

لإيجاد النقاط الحرجة للتابع عند وجود شرط أو أكثر نستخدم طريقة ضارب لاغرانج (Lagrange) وسنميز بين حالة وجود قيد واحد أو قيدين:

5-6-2-1- النقاط الحرجة في حال وجود قيد واحد:

إذا كان لدينا تابع لمتحولَين من الشكل $Z=f(x,y)$ ونريد إيجاد النقاط الحرجة لهذا التابع ولكن بوجود القيد التالي الذي يقيد تحولات x , y وهو من الشكل $g(x,y)=C$، نستخدم طريقة لاغرانج ونلخصها على الشكل التالي:

1- نجعل القيد على شكل قيمة تساوي الصفر أي $[g(x,y)-C=0]$ ونضربها بمعامل نسميه ضارب لاغرانج ونرمز له بـ $\lambda$، ثم نضيف المقدار الأخير إلى التابع Z فنحصل على تابع جديد نسميه تابع لاغرانج وهو في هذه الحالة سيتبع ثلاثة متحولات هي $x,y,\lambda$ ويأخذ الشكل التالي:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[g(x,y)-C] \qquad (26-5)$$

2- نوجد المشتقات الجزئية للتابع L بالنسبة لمتحولاته $x$ , $y$ , $\lambda$ ونجعلها مساوية للصفر فنحصل على ثلاث معادلات هي من الشكل:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=g(x,y)-C=0\end{aligned}\right\} \qquad (27-5)$$

3- نحل جملة المعادلات (5-27) حلاً مشتركاً فنحصل على النقطة الحرجة (وقد يكون هناك أكثر من نقطة) مثل النقطة $(x_0,y_0,\lambda_0)$ التي تحقق الشرط $g(x,y)=C$ وتقابل النقطة $(x_0,y_0)$ التي تمثل النقطة الحرجة المقيدة للتابع .

4- لمعرفة نوعية كل نقطة من النقاط الحرجة فيما إذا كانت تمثل نهاية عظمى أو صغرى أو شاذة للتابع Z نشكل ما يسمى معين هيسيان الموسع الذي يأخذ الشكل التالي:

$$J=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

فإذا كان $J>0$ عند النقطة $(x_0,y_0)$ فإن هذه النقطة تكون مقابلة للنهاية العظمى للتابع $Z$.

وإذا كان $J<0$ عند النقطة $(x_0,y_0)$ فإن هذه النقطة تكون مقابلة للنهاية الصغرى للتابع $Z$.

وإذا كان $J=0$ عند النقطة $(x_0,y_0)$ فإن هذه النقطة شاذة.

**مثال (5-12):**

أوجد النقاط الحرجة الحرة للتابع التالي وحدد نوعها:

$$Z=f(x,y)=x^3+y^2$$

بوجود القيد التالي: $g(x,y)=x+y=4$

ثم حدد نوع هذه النقاط الحرجة، وأوجد قيمة التابع عند كل نقطة من النقاط الحرجة المقيدة.

**الحل:**

باتباع الخطوات المذكورة أعلاه في الفقرة (5-6-2-1) نجد:

$$L(x,y,\lambda)=x^3+y^2+\lambda(x+y-4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}&=3x^2+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}&=2y+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=x+y-4=0 \end{aligned}\right\} \qquad (28-5)$$

بحل مجموعة المعادلات (5−28) حلاً مشتركاً نجد أن هناك حلين لهذه المعادلات هما $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{-16}{3}\right)$ أي:

$$\lambda_1=\frac{-16}{3},\qquad y_1=\frac{8}{3},\qquad x_1=\frac{4}{3}$$

والحل الآخر: $(-2,6,-12)$ أي: $x_2=-2\qquad y_2=6,\qquad \lambda_2=-12,$ .

أي إن هناك نقطتين حرجتين لتابع $Z$ تحققان الشرط $g(x,y)=x+y=4$ وهاتان النقطتان هما: النقطة الأولى: $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$، والنقطة الثانية: $(-2,6)$ .

ولمعرفة نوعية هاتين النقطتين، نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L والمشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع g، وبالنسبة لكلا المتحولين $x,y$، ثم نوجد معين هيسيان الموسع عند كل نقطة من النقاط المذكورة أعلاه وذلك وفق التالي:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=6x \qquad \frac{\partial g}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}=0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2$$

$$J=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$J_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6x & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-10<0$$

أي إن النقطة $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$ هي نقطة حرجة مقيدة للتابع $Z$ وتمثل نهاية صغرى للتابع المذكور لأن: $J_1 < 0$.

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6x & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{(-2,6)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

أي إن النقطة $(-2,6)$ هي نقطة حرجة مقيدة للتابع $Z$ وتمثل نهاية عظمى للتابع المذكور لأن: $J_2 > 0$، وبالتالي نقول إن للتابع نهايتين إحداهما صغرى والأخرى عظمى.

نعوض قيم $x, y$ عند كل نقطة في التابع $Z$ للحصول على قيمة التابع عند هذه النقطة فنجد:

عند النقطة الأولى: $Z_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{27} + \frac{64}{9} = \frac{256}{27}$

عند النقطة الثانية: $Z_2 = (-2)^3 + (6)^2 = -8 + 36 = 28$

5-6-2-2- النقاط الحرجة في حال وجود قيدين:

إن هذه الحالة لا تختلف عن حالة وجود قيد واحد فقط، وفي هذه الحالة يكون القيدان على الشكل التالي:

$$g_1(x, y) = C_1$$
$$g_2(x, y) = C_2$$

وبالتالي نشكل تابع لاغرانج الذي يتضمن القيدين السابقين بعد تحويلهما إلى معادلات صفرية مضروبة على التوالي بمعاملات لاغرانج على الشكل التالي:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y) + \lambda_1 [g_1(x, y) - C_1] + \lambda_2 [g_2(x, y) - C_2]$$

نوجد المشتقات الجزئية للتابع L بالنسبة لمتحولاته الأربعة $x\ ,\ y\ ,\ \lambda_1\ ,\ \lambda_2$، ونجعل هذه المشتقات مساوية للصفر فنحصل على جملة المعادلات الأربع التالية:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{dg_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=g_1(x\ ,y\ )-C_1=0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=g_2(x\ ,y\ )-C_2=0
\end{aligned}\right\} \qquad (29-5)$$

نحل جملة المعادلات الأربع (5–29) حلاً مشتركاً فنحصل على النقطة أو النقاط الحرجة للتابع Z والتي تحقق القيدين المذكورين أعلاه، ولمعرفة نوعية كل نقطة نعوض هذه النقطة في معين هيسيان الموسع التالي:

$$J=\begin{vmatrix}
0 & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\
0 & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\\
\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}\\
\frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}
\end{vmatrix} \qquad (30-5)$$

فإذا كان $J>0$ تكون النقطة مقابلة لقيمة عظمى للتابع Z.

وإذا كان $J<0$ تكون النقطة مقابلة لقيمة صغرى للتابع Z.

وإذا كان $J=0$ تكون النقطة شاذة.

**مثال (5–13):**

أوجد النقاط الحرجة الحرة للتابع التالي وحدد نوعها:

$$Z=f(x,y)=2x^2-3y^2+xy+x-10$$

بوجود القيدين التاليين: $g_1(x,y)=x+y=5$ ، $g_2(x,y)=x=2y$

**الحل:**

نشكل تابع لاغرانج:

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=2x^2-3y^2+xy+x-10+\lambda_1(x+y-5)+\lambda_2(x-2y)$$

نوجد المشتقات الجزئية:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x}=4x+y+1+\lambda_1+\lambda_2=0\\
&\frac{\partial L}{\partial y}=-6y+x+\lambda_1-2\lambda_2=0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=x+y-5=0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x-2y=0
\end{aligned}\right\} \qquad (31-5)$$

بحل جملة المعادلات (31-5) نحصل على حل وحيد وهو:

$$\lambda_2=\frac{-68}{9},\quad \lambda_1=\frac{-76}{9},\quad y=\frac{5}{3},\quad x=\frac{10}{3}$$

وهذا الحل يجعل التابع $Z$ في نقطة حرجة مقيدة وهي تحقق القيدين المذكورين وقيمة التابع عندها تساوي $Z=\frac{115}{9}$ .

لمعرفة نوعية هذه النقطة نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L، ومن المرتبة الأولى للقيدين $g_1, g_2$ ثم نشكل معين هيسيان الموسع:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=4 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}=1 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}=-2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-6$$

$$J=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -6\end{vmatrix}_{\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)}=9>0$$

نلاحظ أن $J > 0$ عند النقطة الحرجة وهذا يعني أن هذه النقطة تشكل نهاية عظمى للتابع $Z$.

**5-7- التوابع لعدة متحولات**

هي تعميم للتوابع لمتحولين

5-7-1- تعريف التوابع لعدة متحولات:

إذا كان لدين عدة متحولات مستقلة $x_1,x_2,x_3,.....,x_n$ و كان التابع **Z** مرتبطاً بها بشكل أو بآخر، و إنه مقابل كل جملة $(x_1,x_2,x_3,.....,x_n)$ يوجد قيمة وحيدة للتابع **Z**، فإننا نقول في هذه الحالة إن التابع **Z** تابع لكل من $(x_1,x_2,x_3,.....,x_n)$، و نكتب ذلك على الشكل التالي:

$$Z = f(x_1,x_2,x_3,.....,x_n) \qquad (32-5)$$

و حول مجموعة تعريف التابع يمكننا ذكر نفس ما ذكر حول مجموعة تعريف التابع لمتحولين.

5-7-2- النهايات و الاستمرار:

كذلك يمكننا أن نكرر ما ذكر حول النهايات و الاستمرار، حيث يمكن أن نكتب:

$$\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_{01},x_{02},...,x_{0n})} f(x_1,x_2,x_3,.....,x_n) = z_0 \qquad (33-5)$$

كما يمكن أن نقول إن التابع مستمر في النقطة $(x_{01},x_{02},...,x_{0n})$ إذا كان معرفاً فيها وله نهاية وحيدة عندها، و كذلك نقول عن هذا التابع إنه مستمر في منطقة تعريفه إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط منطقة تعريفه، و بالتالي نقول عن التابع إنه غير مستمر (منقطع) إذا كان هناك نقطة على الأقل في منطقة تعريفه غير مستمر فيها.

5-7-3- المشتقات الجزئية:

استناداً لتعريف المشتق، واستناداً إلى تعريف التابع لعدة متحولات، نقول إذا ثبّتنا المتحولات جميعها و جعلنا أحدها فقط متغيراً، فيصبح التابع عندها تابعاً فقط للمتحول المتغير (الذي لم يثبت) و بناءً عليه يمكن إيجاد مشتق هذا التابع بالنسبة لهذا المتحول فقط، وهذا يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f\left(x_1+\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\Delta x_1} \qquad (34-5)$$

حيث نسمي هذا المشتق ـ المشتق الجزئي من المرتبة الأولى للتابع **Z** بالنسبة للمتحول $x_1$ و نرمز له بأحد الرموز التالية: $Z'_{x_1}, f'_{x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_1}$

الأمر نفسه ينسحب على المتحولات الأخرى، كما يمكن بالطريقة نفسها إيجاد المشتقات الجزئية من مراتب أعلى كما ورد في التوابع لمتحولين، و كذلك التفاضل الكلي.

5-7-4- النقاط الحرجة للتوابع لعدة متحولات:

5-7-4-1- النقاط الحرجة الحرة (الموضعية):

لا تختلف أيضاً هذه العملية عن التوابع لمتحولين، وهنا يجب أن يكون:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0 \ , \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = 0 \quad , \ldots, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_n} = 0 \qquad (35-5)$$

و لمعرفة نوع كل نقطة حرجة حرة، نشكل معينات هيسيان المتدرجة على الشكل التالي:

$$H_1=\left|\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^{\,2}}\right| \qquad ,H_2=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2^{\,2}} \end{vmatrix}$$

$$H_3=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_3^{\,2}} \end{vmatrix}, \quad H_4,...,H_n \qquad (36-5)$$

فإذا كانت قيم هذه المعينات متناوبة الإشارة على الشكل التالي:

$$H_1<0, \quad H_2>0, \quad H_3<0, \quad H_4>0,.....$$

تكون النقطة الحرجة الحرة مقابلة لقيمة عظمى للتابع **Z** .

و إذا كانت قيم هذه المعينات كلها موجبة:

$$H_1>0, \quad H_2>0, \quad H_3>0, \quad H_4>0,.....$$

تكون النقطة الحرجة الحرة مقابلة لقيمة صغرى للتابع **Z**، و في غير ذلك تكون النقطة شاذة.

5-7-4-2- النقاط الحرجة المقيدة:

إذا كان التابع مقيداً بقيد واحد نشكل تابع لاغرانج الذي يأخذ الشكل التالي:

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\lambda\left[g(x_1,x_2,...,x_n)-C\right] \quad (37-5)$$

و هنا كذلك يجب أن يكون:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0\\
&\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (38-5)$$

و لمعرفة نوع كل نقطة حرجة مقيدة، نشكل معينات هيسيان الموسعة و المتدرجة على الشكل التالي:

$$J_2=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2}\\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^{\,2}} \end{vmatrix}, J_3=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3}\\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_3}\\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^{\,2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_3}\\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^{\,2}} \end{vmatrix}, J_4\ldots \qquad (39-5)$$

فإذا كانت قيم $J$ متناوبة الإشارة و تبدأ بأول معين موجب $J_2>0$ تكون النقطة عظمى، أما إذا كانت كل المعينات سالبة تكون النقطة صغرى، و في غير ذلك تكون النقطة شاذة.

**ملاحظة 5:**

لا يختلف الأمر عندما يكون التابع مقيداً بأكثر من قيد واحد حيث نتبع الخطوات ذاتها.

## 5-8- تجانس التوابع:

نقول عن التابع $Z=f\left(x_1,x_2,x_3,\ldots..,x_n\right)$ إنه متجانس من الدرجة **k** إذا كان يحقق العلاقة التالية:

$$f\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots..,\lambda x_n\right)Z=\lambda^k f\left(x_1,x_2,\ldots..,x_n\right)=\lambda^k Z \qquad (40-5)$$

بمعنى إذا كان التابع متجانساً من الدرجة **k** فإنه إذا ضربنا كل متحول بـ $\lambda$ سيتضاعف التابع بمقدار $\lambda^k$ مرة.

**نظرية أولر:** (و نقبلها بدون برهان)

تنص النظرية على أنه إذا كان التابع $Z=f\left(x_1,x_2,x_3,.....,x_n\right)$ متجانساً من الدرجة **k** فإنه يتمتع بالخاصية التالية:

$$x_1\cdot f'_{x_1}+x_2\cdot f'_{x_2}+....+x_n\cdot f'_{x_n}=k\cdot f\left(x_1,x_2,.....,x_n\right)=k\cdot Z \quad (41-5)$$

**مثال (5-14):**

أوجد درجة تجانس التابع التالي إذا كان متجانساً، ثم تأكد من تحقق نظرية أولر:

$$Z=f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sqrt[3]{x_1\cdot x_2\cdot x_3}$$

**الحل:**

$$f\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3\right)=\sqrt[3]{\lambda x_1\cdot\lambda x_2\cdot\lambda x_3}=$$

$$=\sqrt[3]{\lambda^3\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\lambda^1\cdot\sqrt[3]{x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\lambda^1\cdot Z$$

أي إن التابع متجانس من الدرجة الأولى.

للتأكد من نظرية أولر، لنكتب التابع بالشكل التالي لسهولة الاشتقاق:

$$Z=x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}\cdot x_3^{\frac{1}{3}}$$

و بتطبيق العلاقة (5-41) نجد:

$$x_1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x_1^{-\frac{2}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}\cdot x_3^{\frac{1}{3}}\right)+x_2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{-\frac{2}{3}}\cdot x_3^{\frac{1}{3}}\right)+x_3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}\cdot x_3^{-\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}\cdot x_3^{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}\cdot x_3^{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}\cdot x_3^{\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=1\cdot\left(x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}\cdot x_3^{\frac{1}{3}}\right)=1\cdot f\left(x_1,x_1,x_1\right)$$

و هو المطلوب، حيث وجدنا أعلاه أن درجة تجانس التابع هي الواحد.

## تمارين غير محلولة على الفصل الخامس

**1)** أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية للتوابع التالية:

$A)\quad Z = 8xy + x^2 + y^2$

$B)\quad Z = \dfrac{x - y}{x + y}$

$C)\quad Z = \left(3x^2 \cdot y\right)^2$

$D)\quad Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

**2)** أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الأولى والثانية للتوابع التالية:

$A)\quad Z = 3x + 4y + xy + x^2$

$B)\quad Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$C)\quad Z = \dfrac{x + y}{x - y}$

**3)** أوجد نهاية التوابع التالية:

$A)\quad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} \left(7x + 5x^2 + 2y + y^2\right)$

$B)\quad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \left(3x^2 \cdot y\right)^2$

**4)** ادرس استمرار التابع التالي عند النقاط $(3,0),(2,2)$

$$Z = f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**5)** أوجد النقاط الحرجة الحرة (الموضعية) للتابع التالي ثم حدد نوعها، وأوجد قيمة التابع عندها:

$$Z = f(x,y) = 2x \cdot y + y^2 - 3x^2 + 8x^2 - 1$$

**6)** أوجد النقاط الحرجة المقيدة للتابع التالي، ثم حدد نوعها وأوجد قيمة التابع عندها.

$$Z = f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + 5x$$

بوجود القيد التالي: $g(x,y)=x-2y=1$

**7)** أوجد النقاط الحرجة المقيدة للتابع التالي، ثم حدد نوعها وأوجد قيمة التابع عندها.

$$Z=f(x,y)=2x+x\cdot y$$

بوجود القيدين التاليين:

$$g_1(x,y)=2x+y=30$$
$$g_2(x,y)=x-y=-6$$

**8)** أوجد درجة تجانس التابع التالي إذا كان متجانساً، ثم تأكد من نظرية أولر

$$Z=f(x_1,x_2,x_{31})=5(x_1^3\cdot x_2^3\cdot x_3^3)$$

# الفصل السادس
# بعض التوابع الاقتصادية الهامة

بعد دراسة الطالب في الفصل الخامس للتوابع لمتحولين و لعدة متحولات، و كتطبيق عليها، و نظراً لطبيعة دراسة الطالب في كلية الاقتصاد سنحاول في هذا الفصل تعريف الطالب بالشكل الرياضي لبعض التوابع الاقتصادية الهامة التي يمكن أن يدرسها في بعض المقررات الأخرى، كتوابع الإنتاج، تابع التكاليف و توابع المنفعة وسلوك المستهلك و كذلك توابع العرض و الطلب .

## 6-1- توابع الإنتاج:

### 6-1-1- تعريف توابع الإنتاج:

تعرف توابع الإنتاج بأنها علاقات رياضية تربط بين ناتج النشاط الاقتصادي وبين العوامل التي ساهمت في إنتاج هذا الناتج الاقتصادي ويحسب على مستوى المنشأة، أو القطاع، أو الدولة.

وبناءً عليه، فإن ناتج النشاط الاقتصادي هو التابع بينما المتحولات هي مدخلات النظام أو العوامل التي تساهم في الإنتاج.

بناءً على ذلك، فإن توابع الإنتاج عادةً ما تكون على شكل توابع لعدة متحولات ولكننا سوف ندرسها على شكل توابع لمتحولَين فقط للتعريف بها، وما التوابع لعدة متحولات إلا تعميم لتوابع الإنتاج لمتحولَين. وهي من الشكل:

$$Z = f(x, y)$$

حيث: $x, y$ : عوامل الإنتاج.

Z: الناتج من النشاط الاقتصادي.

ويمكن لهذه التوابع أن تأخذ أشكالاً عديدة أهمها: التابع الخطي وتابع كوب- دوغلاس.

6-1-2- مؤشرات تحليل توابع الإنتاج:

هناك مؤشرات عديدة تستخدم في تحليل توابع الإنتاج نورد أهمها بشكل مختصر وفق التالي:

6-1-2-1- الإنتاجية الوسطى لعنصر إنتاج معين:

هي ناتج قسمة التابع Z على المتحول الذي يعبر عن عنصر إنتاج معين، وهي تعبر عن متوسط إنتاجية الوحدة الواحدة من عنصر الإنتاج المعني في واحدة الزمن، ونرمز لها بـP.

-الإنتاجية الوسطى لعنصر الإنتاج x تساوي:

$$P_x = \frac{Z}{x} = \frac{f(x,y)}{x} \qquad (1-6)$$

-الإنتاجية الوسطى لعنصر الإنتاج y تساوي:

$$P_y = \frac{Z}{y} = \frac{f(x,y)}{y} \qquad (2-6)$$

6-1-2-2- الإنتاجية الحدية لعنصر إنتاج معين:

وهي تعبر عن مقدار زيادة الإنتاج (زيادة التابع) المقابلة لزيادة عنصر الإنتاج المعني بمقدار وحدة واحدة. ورياضياً ما هي إلا المشتق الجزئي لتابع الإنتاج بالنسبة للمتحول المعني، وتقاس بواحدات قياس مركبة وتحسب على الشكل التالي، حيث نرمز لها بـ $\ell$.

-الإنتاجية الحدية لعنصر الإنتاج x:

$$\ell_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = Z'_x = f'_x \qquad (3-6)$$

-الإنتاجية الحدية لعنصر الإنتاج y:

$$\ell_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = Z'_y = f'_y \qquad (4-6)$$

وهنا يمكن أن نذكر أن الإنتاجية الحدية تكون متزايدة إذا كان مشتقها موجباً $\ell'_y > 0$ أي $(f'' > 0)$, وتكون متناقصة إذا كان مشتقها سالباً $\ell'_y < 0$ أي $(f'' < 0)$ وتكون في أعظم قيمة لها عندما يكون مشتقها معدوماً $\ell'_y = 0$ أي $(f'' = 0)$.

أما إذا كانت الإنتاجية الحدية معدومة في نقطة معينة بالنسبة لكلا المتحولَين y, x ، عندها يكون تابع الإنتاج في نهايته العظمى أي في أعظم قيمة له (راجع بحث التوابع لمتحولين و لعدة متحولات).

6-1-2-3- مرونة تابع الإنتاج:

عند الحديث عن مرونة تابع الإنتاج، يمكن أن نميز بين المرونة الجزئية والمرونة الكلية:

1- المرونة الجزئية لتابع الإنتاج $Z$ بالنسبة لأحد متحولاته: هي عبارة عن نهاية التزايد النسبي للتابع على التزايد النسبي للمتحول عندما ينتهي تزايد المتحول إلى الصفر، ونرمز لها بـ $E_x$ , $E_y$.

وبالتالي فهي تحسب على الشكل التالي:

$$E_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta Z}{Z}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} \qquad (5-6)$$

أو بشكل آخر نلاحظ من خلال هذه العلاقة أن المرونة الجزئية تساوي:

$$E_x = \ell_x \cdot \frac{1}{P_x} \qquad (6-6)$$

و بالشكل نفسه نجد:

$$E_y = \ell_y \cdot \frac{1}{P_y} \qquad (7-6)$$

أي إن المرونة الجزئية تساوي حاصل جداء الإنتاجية الحدية بمقلوب الإنتاجية الوسطى.

ليس للمرونة واحدات قياس لأنها مقياس نسبي وهي تقيس النسبة المئوية لزيادة تابع الإنتاج عندما يزداد المتحول (عنصر الإنتاج) بنسبة 1%.

2- المرونة الكلية لتابع الإنتاج Z هي مجموع المرونات الجزئية لهذا التابع بالنسبة لكلا متحوليه ويرمز لها بـ E، أي إن:

$$E = E_x + E_y \qquad (8-6)$$

وبالتالي فالمرونة الكلية تقاس بالنسبة المئوية لزيادة تابع الإنتاج Z عندما يزداد كل من عنصري الإنتاج y, x بنسبة 1% مجتمعين.

6-1-2-4- تناسبية المتحولات (معدل الإحلال):

إذا كان ممكناً التبديل بين عنصري الإنتاج (أو بين عناصر الإنتاج في حال التابع لمتحولات عدة) عند مستوىً معين من الإنتاج، فبأي نسبة يمكن إجراء هذا التبديل؟

إن النسبة بين المتحولين يجب أن تكون سالبة، لأننا نفترض أن مستوى حجم الإنتاج ثابت و بالتالي فإن زيادة أحد عناصر الإنتاج يجب أن يقابلها تناقص العنصر الآخر، و يكون التفاضل الكلي مساوياً الصفر، و بناءً على ما ذكر في الفصل الخامس حول التفاضل الكلي من المرتبة الأولى يمكن أن نكتب التالي:

$$\left.\begin{aligned} dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy = 0 \quad &\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x}dx = -\frac{\partial Z}{\partial y}dy \\ \Rightarrow \quad h_{xy} = \frac{dx}{dy} &= \frac{-\dfrac{\partial Z}{\partial y}}{\dfrac{\partial Z}{\partial x}} \end{aligned}\right\} \qquad (9-6)$$

وهي النسبة التي يمكن أن نبدل فيها بين المتحول X و المتحول Y دون أن يؤثر ذلك على حجم الإنتاج. ولكن إلى أي مدى يمكن أن نبدل بين

المتحولين[1]، من أجل ذلك نوجد ما يسمى بمرونة الإحلال بين المتحولين، وهي تحسب من خلال العلاقة التالية:

$$W_{xy} = \frac{h_{xy}}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{h'_{\frac{x}{y}}} \qquad (10-6)$$

و كما هو معروف فإن المرونة ليس لها واحدات قياس لأنها مؤشر نسبي، و هذه المرونة قد تكون تابعة لعوامل الإنتاج و قد تكون ثابتة وغير مرتبطة بعوامل الإنتاج، و لذلك يمكن أن نميز بين توابع الإنتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة و توابع الإنتاج ذات مرونة الإحلال المتغيرة (و سنترك الحديث عن هذه التوابع لمقررات أخرى).

6-1-2-5- النقاط الحرجة لتابع الإنتاج:

لا تختلف دراسة النقاط الحرجة لتابع الإنتاج عن دراسة النقاط الحرجة للتوابع ذات المتحولَين سواءً كانت حرة أم مقيدة، وهنا نذكر أن تابع الإنتاج وكذلك متحولاته (أي ناتج النشاط الاقتصادي وكذلك عوامل الإنتاج لا يمكن أن تكون سالبة)، كما أن تابع الإنتاج غالباً يجب أن يكون له نقطة حرجة تشكل نهاية عظمى للتابع، وبالتالي نوجد النهاية العظمى للتابع سواء بدون قيود أم مع وجود قيود، و التي غالباً تكون على شكل تكاليف بحيث تكون محددة سابقاً ولا يمكن تجاوزها. كما يمكن أحياناً أن تكون العملية معاكسة بحيث نوجد النهاية الصغرى لتابع التكاليف والمقيد بشرط أن لا تقل كمية الإنتاج عن مقدار معين.

[1] يمكن أن نذكر هنا أن عملية التبديل بين عناصر الإنتاج لها حدود معينة و لا يمكن أن تكون تامة، أي لا يمكن احلال عنصر إنتاج معين مكان عنصر إنتاج آخر بالكامل و بخاصة احلال عنصر رأس المال مكان عنصر العمل.

6-1-3- أهم أشكال توابع الإنتاج:

يوجد عدة أشكال لتوابع الإنتاج ذات المتحولَين (أو أكثر) سنذكر أهمها:

6-1-3-1- تابع الإنتاج الخطي:

إذا كان هذا التابع يتبع لمتحولَين فقط فهو يأخذ الشكل التالي، حيث العلاقة بين تابع الإنتاج و متحولاته (عناصر الإنتاج) هي علاقة خطية كما يلي:

$$Z = f(x, y) = a + bx + cy \qquad (11-6)$$

وفي هذا التابع نلاحظ أن المؤشرات الخاصة به تساوي:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{Z}{x} \\ P_y &= \frac{Z}{y} \\ \ell_x &= b \\ \ell_y &= c \\ E_x &= \frac{\ell_x}{P_x} \\ E_y &= \frac{\ell_y}{P_y} \\ E &= E_x + E_y \end{aligned}\right\} \qquad (12-6)$$

6-1-3-2- تابع الإنتاج كوب- دوغلاس:

هذا التابع اقترحه العالمان كوب و دوغلاس اللذان اعتبرا أن الإنتاج يتبع لعاملين فقط هما قوة العمل L ورأس المال K، وبالتالي يصبح التابع من الشكل:

$$Z = a\, L^b\, K^c \qquad (13-6)$$

وفي تابع الإنتاج هذا نلاحظ أن مؤشراته التحليلية تساوي:

$$
\begin{aligned}
P_L &= \frac{Z}{L} = a \cdot L^{b-1} \cdot K^{c} \\
P_k &= \frac{Z}{K} = a \cdot L^{b} \cdot K^{c-1} \\
\ell_L &= \frac{\partial Z}{\partial L} = a \cdot b \cdot L^{b-1} \cdot K^{c} \\
\ell_k &= \frac{\partial Z}{\partial K} = a \cdot c \cdot L^{b} \cdot K^{c-1} \\
E_L &= \frac{\ell_L}{P_L} = \frac{a \cdot b \cdot L^{b-1} \cdot K^{c}}{a \cdot L^{b-1} \cdot K^{c}} = b \\
E_k &= \frac{\ell_k}{P_k} = \frac{a \cdot c \cdot L^{b} \cdot K^{c-1}}{a \cdot L^{b} \cdot K^{c-1}} = c \\
E &= E_L + E_k = b + c
\end{aligned}
\qquad (14-6)
$$

**مثال (6-1):**

بفرض أنه لدينا تابع الإنتاج التالي:

$$Z = f(x, y) = 3 + 5x + 2y$$

والمطلوب: 1- ادرس مؤشرات تحليل هذا التابع عندما $x = 5$ , $y = 7$.

2- أوجد النقاط الحرجة الحرة لهذا التابع.

**الحل:**

1- المؤشرات التحليلية:

- الإنتاجية الوسطى عند النقطة (5,7):

$$P_x = \frac{Z}{x} = \frac{3 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$P_y = \frac{Z}{y} = \frac{3 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

والتفسير أن كل وحدة واحدة من عنصر الإنتاج x تساهم في إنتاج 8.4 وحدة من المنتجات، وكل وحدة واحدة من عنصر الإنتاج y تساهم في إنتاج 6 وحدات من المنتجات، وكل ذلك عند هذا المستوى من الإنتاج.

- الإنتاجية الحدية:

$$\ell_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = 5$$

$$\ell_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = 2$$

والتفسير أن استخدام وحدة إضافية واحدة في عنصر الإنتاج x ستساهم بزيادة الإنتاج بمقدار 5 وحدات كما أن زيادة الاستخدام من عنصر الإنتاج y بمقدار وحدة واحدة ستزيد الإنتاج بمقدار وحدتين عند هذا المستوى من الإنتاج.

- المرونة:

$$E_x = \frac{\ell_x}{P_x} = \frac{5}{8.4} = 0.59$$

$$E_y = \frac{\ell_y}{P_y} = \frac{2}{6} = 0.33$$

$$E = E_x + E_y = 0.59 + 0.33 = 0.92$$

أي إن زيادة الاستهلاك من عنصر الإنتاج x بمقدار 1% سيزيد الإنتاج بمقدار 0.59% وزيادة الاستهلاك من عنصر الإنتاج y بمقدار 1% سيزيد الإنتاج بمقدار 0.33%. كما أن زيادة الاستهلاك من كل من y, x بمقدار 1% سيزيد الإنتاج بمقدار 0.92%.

- معدل الإحلال:

من العلاقة (6-9) نجد أنه عندما يكون حجم الإنتاج ثابتاً فإن:

$$h_{xy} = \frac{-\frac{\partial Z}{\partial y}}{\frac{\partial Z}{\partial x}} = \frac{-c}{b} = \frac{-2}{5} = -0.4$$

أي إن كل زيادة في عنصر الإنتاج X بمقدار وحدة واحدة يقابلها نقصان في عنصر الإنتاج Y بمقدار 0.4 وحدة، و العكس بالعكس دون أن

يتغير حجم الإنتاج. أما مرونة الإحلال فيمكن حسابها من العلاقة (6-10) على الشكل التالي:

$$W_{xy} = \frac{h_{xy}}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{h'_{\frac{x}{y}}}$$

و بما أن $h_{xy} = -0.4$ و هي عدد ثابت فإن $h'_{xy} = 0$ مما يعني أن مرونة الإحلال غير معينة و هي كذلك لكل توابع الإنتاج من الشكل الخطي.

2- النقاط الحرجة:

نلاحظ أن $\frac{\partial Z}{\partial x} = 5 \neq 0$ وكذلك $\frac{\partial Z}{\partial y} = 2 \neq 0$ أي إن المشتقات الجزئية لهذا التابع لا تنعدم وبالتالي لا يوجد نقاط حرجة لهذا التابع وكذلك لجميع توابع الإنتاج الخطية من شكله.

**مثال (6-2):**

ليكن لدينا تابع الإنتاج من نوع كوب- دوغلاس التالي:

$$Z = f\left(L, K\right) = 5 \cdot L^{0.5} \cdot K^{0.4}$$

والمطلوب: 1- دراسة مؤشرات تحليل هذا التابع عندما $L = 25$ , $K = 32$.

2- إيجاد النقاط الحرجة الحرة لهذا التابع.

**الحل:**

1- المؤشرات التحليلية:

- الإنتاجية الوسطى:

$$P_L = \frac{Z}{L} = \frac{5 \cdot 25^{0.5} \cdot 32^{0.4}}{25} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{25} = 4$$

$$P_k = \frac{Z}{K} = \frac{5 \cdot 25^{0.5} \cdot 32^{0.4}}{32} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{32} = 3.125$$

والتفسير: عند هذا المستوى من الإنتاج فإن كل وحدة واحدة من عنصر العمل L تساهم بإنتاج 4 وحدات من المنتجات وكل وحدة واحدة من عنصر رأس المال K تساهم بإنتاج 3.125 وحدة من المنتجات.

- الإنتاجية الحدية:

$$\ell_L = \frac{\partial Z}{\partial L} = 5 \cdot 0.5 \cdot L^{-0.5} \cdot K^{0.4} = 5 \cdot 0.5 \cdot 25^{-0.5} \cdot 32^{0.4} = 2$$

$$\ell_k = \frac{\partial Z}{\partial K} = 5 \cdot 0.4 \cdot L^{0.5} \cdot K^{-0.6} = 5 \cdot 0.4 \cdot 25^{0.5} \cdot 32^{-0.6} = 1.25$$

والتفسير: عند هذا المستوى من الإنتاج إذا زدنا الاستهلاك من عنصر الإنتاج (العمل) L بمقدار وحدة واحدة سيزيد الإنتاج بمقدار 2 وحدة وإذا زدنا الاستهلاك من عنصر الإنتاج (رأس المال) K بمقدار وحدة واحدة سيزداد الإنتاج بمقدار 1.25 وحدة.

- المرونة:

$$E_L = \frac{\ell_L}{P_L} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$E_K = \frac{\ell_K}{P_K} = \frac{1.25}{3.125} = 0.4$$

$$E = E_L + E_K = 0.5 + 0.4 = 0.9$$

التفسير: عند هذا المستوى من الإنتاج فإن زيادة الاستهلاك من L بمقدار 1% سيزيد الإنتاج بمقدار 0.5%، وكذلك زيادة الاستهلاك من K بمقدار 1% سيزيد الإنتاج بمقدار 0.4%، ولكن زيادة الاستهلاك بمقدار 1% من كل من L و K معاً سيؤدي إلى زيادة الإنتاج بمقدار 0.9%.

- معدل الإحلال:

من العلاقة (6–9) نجد:

$$h_{LK} = \frac{-\frac{\partial Z}{\partial K}}{\frac{\partial Z}{\partial L}} = \frac{-a \cdot c \cdot L^{b} \cdot K^{c-1}}{a \cdot b \cdot L^{b-1} \cdot K^{c}} = \frac{-c \cdot L}{b \cdot K} = \frac{-c}{b} \cdot \frac{L}{K}$$

$$\Rightarrow h_{LK} = \frac{-0.4 \cdot 25}{0.5 \cdot 32} = -0.625$$

أي إن كل زيادة في عنصر الإنتاج L بمقدار وحدة واحدة يقابلها نقصان في عنصر الإنتاج K بمقدار 0.625 وحدة ، و العكس بالعكس دون أن يتغير حجم الإنتاج. أما مرونة الإحلال فيمكن حسابها من العلاقة (6-10) على الشكل التالي:

$$W_{LK} = \frac{h_{LK}}{\frac{L}{K}} \cdot \frac{1}{h'_{\frac{x}{y}}} = \frac{\frac{-c}{b} \cdot \frac{L}{K}}{\frac{L}{K}} \cdot \frac{1}{\frac{-c}{b}} = 1$$

أي إن مرونة الإحلال تساوي الواحد، و هي كذلك لكل توابع الإنتاج من شكل كوب – دوغلاس.

2-النقاط الحرجة الحرة:

نلاحظ أنه لإيجاد النقاط الحرجة الحرة لهذا التابع يجب أن تكون المشتقات الجزئية لهذا التابع معدومة أي:

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = 5 \cdot 0.5 \cdot L^{-0.5} \cdot K^{0.6} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = 5 \cdot 0.4 \cdot L^{0.5} \cdot K^{-0.6} = 0$$

هذه المشتقات لا تنعدم إلا عندما L= 0 أو K= 0 وإذا انعدمت عوامل الإنتاج ينعدم الإنتاج لذلك يمكن أن نقول: إنه لا توجد نقاط حرجة حرة لهذا التابع وكذلك لكل توابع الإنتاج من شكل كوب – دوغلاس.

**مثال (6-3):**

بفرض أنه لدينا تابع الإنتاج من نوع كوب-دوغلاس التالي:

$$Z = f(L,K) = 3 \cdot L^{0.5} \cdot K^{0.4}$$

والمطلوب: إيجاد النقاط الحرجة لهذا التابع بوجود القيد التالي:

$$g(L,K) = 5L + 10K = 5000$$

أي إن المطلوب هو إيجاد أعظم إنتاج ممكن بشرط أن لا تتجاوز التكاليف 5000، حيث سعر وحدة العمل 5 وحدات نقدية و سعر وحدة رأس المال 10 وحدات نقدية.

**الحل:**

قياساً على ما ذكرنا في الفصل الخامس، نشكل تابع لاغرانج:

$$L(L,k,\lambda) = 3 \cdot L^{0.5} \cdot K^{0.4} + \lambda(5L + 10K - 5000)$$

نوجد المشتقات الجزئية لهذا التابع و نعدمها:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial L} &= 3 \cdot 0.5 \cdot L^{-0.5} \cdot K^{0.4} + 5\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial K} &= 3 \cdot 0.4 \cdot L^{0.5} \cdot K^{-0.6} + 10\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 5L + 10K - 5000 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}6)$$

بحل جملة المعادلات (6-13) حلاً مشتركاً نجد:

$$L = 555.56, \qquad K = 222.22, \qquad \lambda = 0.11$$

أي إن هذا التابع يقع في نقطة حرجة مقيدة عندما $L = 555.56$ و $K = 222.22$ ولمعرفة نوعية هذه النقطة نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لتابع القيد g والمشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L فنجد:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial L^2} = 3 \cdot 0.5 \cdot (-0.5) \cdot L^{-1.5} \cdot K^{0.4}$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial K^2} = 3 \cdot 0.4 \cdot (-0.6) \cdot L^{0.5} \cdot K^{-1.6}$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial L \partial K} = 3 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot L^{-0.5} \cdot K^{-0.6}$$
$$\frac{\partial g}{\partial L} = 5$$
$$\frac{\partial g}{\partial K} = 10$$

قبل أن نوجد معين هيسيان الموسع نوجد قيم هذه المشتقات عندما $L = 555.56$ ، $k = 222.22$ فنجد:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial L^2} = 3 \cdot 0.5 \cdot (-0.5) \cdot (555.56)^{-1.5} \cdot (222.22)^{0.4} = -0.000497$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial K^2} = 3 \cdot 0.4 \cdot (-0.6) \cdot (555.56)^{0.5} \cdot (222.22)^{-1.6} = -0.00298$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial L \partial K} = 3 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot (555.56)^{-0.5} \cdot (222.22)^{-0.6} = 0.000995$$

نشكل الآن معين هيسيان الموسع فنجد:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial L} & \frac{\partial g}{\partial K} \\ \frac{\partial g}{\partial L} & \frac{\partial^2 L}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial L \partial K} \\ \frac{\partial g}{\partial L} & \frac{\partial^2 L}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & -0.000497 & 0.000995 \\ 10 & 0.000995 & -0.00298 \end{vmatrix} = 0.2237$$

$$J = 0.2237 > 0$$

بما أن $J > 0$ فهذا يعني أن النقطة الحرجة تشكل نهاية عظمى للتابع، أي إن الإنتاج يبلغ حده الأعظم عندما يكون $L = 555.56$ و $K = 222.22$ ، ولمعرفة كمية هذا الإنتاج نعوض هذه القيم في تابع الإنتاج فنجد:

$$Z = 3 \cdot L^{0.5} \cdot K^{0.4} = 3 \cdot (555.56)^{0.5} \cdot (222.22)^{0.4} = 614$$

أي إن أعظم كمية للإنتاج هي 614 وحدة.

## 6-2- تابع التكاليف:

### 6-2-1- تعريف تابع التكاليف:

بعد دراسة توابع الإنتاج لابد من التعرف على تكاليف الإنتاج، التي من المعروف أنها تتبع لحجم الإنتاج، أي إنه يمكننا أن نعرف تابع التكاليف بأنه العلاقة التي تربط بين حجم الإنتاج من جهة و تكاليف هذا الإنتاج من جهة أخرى. و بذلك يمكن أن يأخذ تابع التكاليف الشكل التالي، حيث كنا قد رمزنا لتابع الإنتاج بـ $Z$ :

$$C = c(Z) \qquad (16-6)$$

### 6-2-2- شكل تابع التكاليف و محدداته:

عند الحديث عن الشكل الرياضي لتابع التكاليف، لا بد أن نورد بعض الملاحظات الخاصة بهذا التابع:

1. هناك جزء من التكاليف تتحمله المنشأة، قبل أن تبدأ الإنتاج أو حين توقفها عن الإنتاج لسبب من الأسباب، و هذا الجزء يسمى عادة التكاليف الثابتة و هو ما يمكن أن نعبر عنه بحد ثابت في تابع التكاليف سنرمز له بالعدد الموجب $e > 0$.
2. إن تابع التكاليف هو تابع موجب دوماً و هو متزايد مع تزايد الإنتاج، الأمر الذي يجعل مشتقه الأول (التكاليف الحدية) موجباً أيضاً.
3. بما أن المشتق الأول موجب (أي لا يمكن أن ينعدم) فهذا يعني أن تابع التكاليف ليس له نهاية حدية.

بناءً عليه يمكن أن نقترح الشكل الرياضي لتابع التكاليف على شكل معادلة من الدرجة الثالثة كما يلي:

$$C = c(Z) = a z^3 + b z^2 + c z + e \qquad (17-6)$$

كما ذكرنا أعلاه فإن التكاليف الحدية لهذا التابع (المشتق الأول) موجبة دوماً، و بما أن النظرية الاقتصادية تقتضي تخفيض التكاليف الحدية إلى الحد الأدنى، أي جعل تابع التكاليف الحدية في نهايته الصغرى، لندرس هذا الأمر و نوجد محددات تابع التكاليف على الشكل التالي:

التكاليف الحدية:

$$C'(Z) = \frac{\partial C}{\partial z} = 3a z^2 + 2b z + d \qquad (18-6)$$

حتى تكون التكاليف الحدية في نهايتها الصغرى، يجب أن يكون مشتقها الأول (أي المشتق الثاني لتابع التكاليف) مساوياً الصفر

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial (C'(Z))}{\partial z} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = 6a z + 2b = 0 \\ &\Rightarrow 6a z = -2b \quad \Rightarrow z = \frac{-b}{3a} \end{aligned}\right\} \qquad (19-6)$$

أي إن التكاليف الحدية تكون في حدها الأدنى عندما يكون حجم الإنتاج مساوياً $z = \frac{-b}{3a}$ ، و عندها أيضاً يجب أن يكون المشتق الثاني لتابع التكاليف الحدية (أي المشتق الثالث لتابع التكاليف) موجباً، أي:

$$\frac{\partial^2 (C'(Z))}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} = 6a > 0 \quad \Rightarrow a > 0 \qquad (20-6)$$

و بما أن حجم الإنتاج يجب أن يكون موجباً عندما تكون التكاليف الحدية في حدها الأدنى، و استناداً إلى النتيجة (6-18) يكون:

$$z = \frac{-b}{3a} > 0 \quad \Rightarrow b < 0 \qquad (21-6)$$

و بناءً عليه و لتحديد إشارة الثابت d في تابع التكاليف، نحسب قيمة التكاليف الحدية (في قيمتها الصغرى) والتي يجب أن تكون موجبة حسب ما

ذكرنا أعلاه، ونعوض فيها قيمة z من العلاقة (6-19) و ذلك على الشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial z}=3a\cdot\left(\frac{-b}{3a}\right)^2+2b\cdot\left(\frac{-b}{3a}\right)+d>0 \\ &\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{(-b)^2}{3a}-\frac{2b^2}{3a}+d>0 \\ &\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{-b^2}{3a}+d>0 \;\Rightarrow\; \frac{3ad-b^2}{3a}>0 \end{aligned}\right\} \quad (22-6)$$

وبناءً على العلاقات (6-18) و (6-19) فإن العلاقة (6-20) لا تتحقق إلا عندما يكون:

$$\left.\begin{aligned} &a>0 \\ &3\cdot a\cdot d>b^2 \end{aligned}\right\} \quad (23-6)$$

**مثال (6-4):**

ليكن لدينا تابع التكاليف التالي:

$$C=c(Z)=3z^3-27z^2+90z+75$$

لنوجد حجم الإنتاج الذي يجعل التكاليف الحدية في حدها الأدنى، ثم لنتأكد أن هذه التكاليف هي الأدنى، و نوجد قيمة هذه التكاليف الحدية و الكلية.

**الحل:**

من العلاقة (6-19) نلاحظ أن حجم الإنتاج الذي يجعل التكاليف الحدية في حدها الأدنى هي:

$$z=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-27)}{3\cdot 3}=3$$

للتأكد أن هذه التكاليف الحدية هي الأدنى، لنوجد المشتق الثاني لتابع التكاليف الحدية (المشتق الثالث لتابع التكاليف) من العلاقة (6-18)، فنجد:

$$\frac{\partial^2 (C'(Z))}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} = 6a = 6 \cdot 3 = 18 > 0$$

أي إن التكاليف الحدية في حدها الأدنى، و عندها تكون التكاليف على الشكل التالي:

التكاليف الكلية:

$$C = 3(3)^3 - 27(3)^2 + 90(3) + 75 = 183$$

التكاليف الحدية:

$$C'_z = 9(z)^2 - 54(z) + 90 = 9(3)^2 - 54(3) + 90 = 9$$

6-2-3- النقاط الحرجة لتابع التكاليف:

في الواقع الاقتصادي غالباً ما يسعى صاحب القرار إلى تخفيض التكاليف إلى حدها الأدنى، بمعنى آخر يحاول الوصول رياضياً إلى النهاية الصغرى لتابع التكاليف، و لكن دون أن يخفض إنتاجه، و بكلمات أخرى يحول أن ينتج حجماً معيناً من المنتجات بأقل التكاليف الممكنة.

في هذه الحالة سوف نوجد النهاية الصغرى لتابع التكاليف التالي:

$$C = c(Z) = a z^3 + b z^2 + c z + e \qquad (24-6)$$

بوجود القيد التالي الذي يحدد حجم الإنتاج بمقدار معين على الشكل التالي:

$$Z = f(x_1, x_2, ...., x_n) = Z_0 \qquad (25-6)$$

حيث: $x_1, x_2, ...., x_n$ عوامل الإنتاج.

و القضية هنا لا تختلف عما درسناه في الفصل الخامس عند إيجاد النهايات الحدية لتابع معين بوجود قيد مفروض على متحولات هذا التابع (باستخدام طريقة ضارب لاغرانج).

## 6-3- تابع المنفعة و سلوك المستهلك:

لقد درسنا في الفقرتين السابقتين تابعي الإنتاج و التكاليف و كان ذلك من جهة المنتج، و لكن هذا المنتج لابد أن يجد مستهلكاً لمنتجاته يحقق منها منفعة معينة من وجهة نظره، لذلك سندرس تابع المنفعة من وجهة نظر المستهلك و سلوكه تجاه ذلك.

### 6-3-1- تعريف تابع المنفعة:

يمكن تعريف تابع المنفعة بأنه العلاقة الرياضية التي تربط بين عدد الوحدات السلعية المستهلكة من قبل مستهلك معين و العائد (أو المردود) الذي يحصل عليه هذا المستهلك جراء استهلاكه لهذه السلع. و يمكن أن يأخذ الشكل التالي:

$$U = u(x_1, x_2, x_3, ...., x_n) \qquad (26-6)$$

حيث: $x_1, x_2, x_3, ...., x_n$ السلع المستهلكة.

إن تابع المنفعة بالنسبة للمستهلك هو تابع ترتيبي، بمعنى أن على المستهلك أن يحدد تشكيلة السلع المختلفة و كمياتها التي تحقق له أعلى درجة منفعة ممكنة. و بما أن تحديد مقدار منفعة كل تركيب استهلاكي بالنسبة للمستهلك هو أمر غير ممكن، فإنه يلجأ إلى ترتيب هذه التراكيب الاستهلاكية ترتيباً تفضيلياً، بحيث يمكن إن يقول بأن تركيب سلعي معين أفضل لديه من تركيب سلعي آخر، ... و هكذا.

بناءً عليه يمكن أن نقول إن تابع المنفعة يأخذ أشكالاً عدة حسب الكميات المستهلكة من السلع (متحولات التابع)، مع تحديد شكل معين لهذه المتحولات، و عند حل هذه التركيبات المختلفة لكل مستهلك نحصل على قيم مختلفة لهذه الأشكال، التي تعبر عن قيمة تابع المنفعة U و هذه القيمة لا

تعبر عن مقدار المنفعة و إنما تعبر عن مستوى المنفعة أو درجتها التي لا يمكن الاستفادة منها إذا لم تقارن بقيمة أخرى.

استناداً لما ذكر يمكننا أن نذكر إن تابع المنفعة هو عبارة عن تابع مستمر و متزايد بمعدل متناقص و هو قابل للاشتقاق. و من خصائص هذا التابع أيضاً أنه ليس وحيداً، و ذلك لأن قياس المنفعة ترتيبي كما ذكرنا أعلاه و بالتالي فإن أي تابع يمكن أن يسمح بترتيب التراكيب الاستهلاكية للمستهلك بذات الترتيب يعتبر تابعاً للمنفعة، فإذا كان لدينا تابعان رياضيان مختلفان ولكن كلاهما توصلا إلى ترتيب تراكيب استهلاكية عدة بالترتيب ذاته فكلاهما يعتبر تابعاً للمنفعة و لا يختلفان بعضهما عن بعض[1].

6-3-2- مؤشرات تحليل تابع المنفعة:

كما كان يوجد مؤشرات تحليلية للتوابع المذكورة سابقاً، هناك أيضاً مؤشرات تحليلية لتابع المنفعة، و لا تختلف دراستها عما ورد سابقاً، و لذلك نوردها باختصار فيما يلي:

6-3-2-1- المنفعة الحدية:

هي عبارة عن الزيادة في المنفعة التي يحصل عليها المستهلك نتيجة زيادة استهلاكه من سلعة معنية بمقدار وحدة واحدة، و تحسب عن طريق المشتق الجزئي من الدرجة الأولى بالنسبة لكل سلعة من السلع (لكل متحول من المتحولات)، أي:

$$U'_{x_1}=\frac{\partial U}{\partial x_1},\quad U'_{x_2}=\frac{\partial U}{\partial x_2},\quad .....,\quad U'_{x_n}=\frac{\partial U}{\partial x_n} \qquad (27-6)$$

[1] هنا يمكن أن نذكر بفكرة منحنيات السواء التي درسها الطالب في السنة الأولى في مقرر مبادئ الاقتصاد.

## 6-3-2-2- مرونة تابع المنفعة:

المرونة الجزئية هي عبارة عن النسبة المئوية للزيادة في المنفعة التي يحصل عليها المستهلك نتيجة زيادة استهلاكه من سلعة معينة بمقدار 1%، و بالتالي هي عبارة عن نهاية التزايد النسبي لتابع المنفعة منسوباً إلى التزايد النسبي للمتحول المعبر عن السلعة المفروضة و ذلك عندما يكون تزايد المتحول متناهياً في الصغر (ينتهي للصفر)، أي:

$$E_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\frac{\Delta U}{U}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{U} \qquad (28-6)$$

حيـــــث $i = 1,2,3,.....,n$

أما المرونة الكلية فهي مجموع المرونات الجزئية، و تعني النسبة المئوية للزيادة في منفعة المستهلك، عندما يزيد استهلاكه من كل السلع التي تدخل في تركيبته السلعية بمقدار 1%.

$$E = E_{X_1} + E_{X_2} + E_{X_3} + ..... + E_{X_n} \qquad (29-6)$$

## 6-3-2-3- معدل الإحلال بين السلع:

بفرض أن هناك مجموعة من التركيبات السلعية التي لها من المنفعة القيمة الترتيبية نفسها (بمعنى كلها تعطي القيمة ذاتها لتابع المنفعة، أي إنها تقع على منحنى سواء واحد)، فإذا كان ممكناً تبديل استهلاك سلعتين عند هذا المستوى من المنفعة، فبأي نسبة يمكن إجراء هذا التبديل؟

إن النسبة بين المتحولين (السلعتين) يجب أن تكون سالبة، لأن المنفعة ثابتة و بالتالي فإن زيادة الاستهلاك من إحدى السلع يجب أن يقابلها تناقص في استهلاك سلعة أخرى (مع فرض عدم تغير تابع المنفعة من استهلاك السلع الأخرى)، حتى يكون التفاضل الكلي لتابع المنفعة مساوياً الصفر، و بناءً

على ما ذكر في الفصل الخامس حول التفاضل الكلي من المرتبة الأولى يمكن أن نكتب التالي:

$$\left.\begin{aligned} dU = \frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U}{\partial x_j}dx_j = 0 \quad &\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i = -\frac{\partial U}{\partial x_j}dx_j \\ \Rightarrow \quad h_{x_i x_j} = \frac{dx_i}{dx_j} &= \frac{-\frac{\partial U}{\partial x_j}}{\frac{\partial U}{\partial x_i}} \end{aligned}\right\} \quad (30-6)$$

وهي النسبة التي يمكن أن نبدل فيها بين السلعة $x_i$ و السلعة $x_j$ دون أن يؤثر ذلك على مقدار منفعة المستهلك.

6-3-2-4- النقاط الحرجة لتابع المنفعة:

إن دراسة النقاط الحرجة لتابع المنفعة لا تختلف عن أي تابع آخر و سواء كانت هذه النقاط حرة أم مقيدة، و لكن يمكن أن نذكر هنا بأننا نوجد النهاية العظمى لتابع المنفعة لأننا نرغب دائماً بتعظيم المنفعة و بشكل خاص عندما يكون الدخل محدوداً (أي بوجود قيد محدودية الموارد أو الدخل)، و هي بذلك بعكس تابع التكاليف الذي نسعى دائماً لتخفيضه كما ذكرنا سابقاً.

**مثال (6-5):**

ليكن لدينا تابع المنفعة التالي لأحد المستهلكين:

$$U = u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^{\frac{3}{2}}$$

ونريد إيجاد التركيبة السلعية المثلى التي تجعل منفعة المستهلك أعظم ما يمكن، في ظل القيد التالي الذي يحدد أسعار السلع و مقدار دخل هذا المستهلك:

$$w(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 = 20000$$

ثم لنوجد معدل الإحلال بين السلعتين $x_1, x_2$

**الحل:**

نشكل تابع لاغرانج:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 \cdot x_2^{\frac{3}{2}} + \lambda(6x_1 + 8x_2 - 20000)$$

نوجد المشتقات الجزئية لتابع لاغرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2^{\frac{3}{2}} + 6\lambda = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{3}{2} x_1 x_2^{\frac{1}{2}} + 8\lambda = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 6x_1 + 8x_2 - 20000 = 0 \qquad \text{(III)}$$

بحل المعادلات الثلاث السابقة حلاً مشتركاً نجد:

$$x_1 = 1333.33 \qquad x_2 = 1500 \qquad \lambda = 9682.45$$

أي إن هذا الشخص سيحصل على أكبر منفعة عندما يستهلك 1333.33 وحدة من السلعة الأولى $x_1$ و 1500 وحدة من السلعة الثانية $x_2$، و للتأكد أنه سيحصل على أكبر منفعة عند هذا الاستهلاك نوجد قيمة معين هيسيان عند هذا الاستهلاك (حسب ما ورد في الفصل الخامس):

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & \frac{3}{2} x_2^{\frac{1}{2}} \\ 8 & \frac{3}{2} x_2^{\frac{1}{2}} & \frac{3}{4} x_1 x_2^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}_{(1333.33, 1500)}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 58 \\ 8 & 58 & 25.82 \end{vmatrix} = 4638.48 > 0$$

بما أن قيمة معين هيسيان موجبة يعني ذلك أن المنفعة التي يحصل عليها المستهلك عظمى.

أما معدل الإحلال بين السلعتين فنحسبه باستخدام العلاقة (6-30):

$$h_{x_1x_2} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial x_2}}{\frac{\partial U}{\partial x_1}} = \frac{-\frac{3}{2}x_1 x_2^{\frac{1}{2}}}{x_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{3}{2}x_1}{x_2} = \frac{-\frac{3}{2}(1333.33)}{1500} = -1.33$$

أي عندما يزيد استهلاكه من السلعة الأولى بمقدار وحدة واحدة، يجب أن يخفض استهلاكه من السلعة الثانية بمقدار 1.33 وحدة.

## 6-4- توابع العرض و الطلب.

لقد ذكرنا أعلاه التوابع الخاصة بسلوك المنتج الفرد أو المستهلك الفرد دون النظر إلى صلتهم أو علاقتهم بالمنتجين أو المستهلكين الآخرين، لذلك سنحاول فيما يلي دراسة العلاقة بينهم من خلال توابع العرض و الطلب على السلع في السوق.

### 6-4-1- توابع الطلب و العرض في قطاع إنتاجي معين.

بفرض لدينا قطاع إنتاجي معين نرمز له بـ $i$ حيث يتكون هذا القطاع من عدد من المنشآت الإنتاجية التي عددها $q_i$ منشأة، و بفرض أن جميع منشآت هذا القطاع تنتج منتجاً واحداً نرمز له أيضاً بـ $i$ ، و بفرض أن $k$ إحدى المنشآت الإنتاجية في هذا القطاع، حيث: $k = 1,2,...,q_i$ ، فيكون تابع الإنتاج في هذه المنشأة من الشكل التالي:

$$Z_{ki} = f_{ki}(x_{ki_1}, x_{ki_2}, x_{ki_3}, ...., x_{ki_n}) \quad (6-31)$$

حيث: $x_{k\,i\,l}$ تشير إلى كمية عنصر الإنتاج $l$ المستخدم في المنشأة $i$ حيث : $l=1,2,...,n$، بمعنى آخر تشير $x_{k\,i\,l}$ إلى كمية الطلب الذي يبديه المنتجون في المنشأة $i$ على عنصر الإنتاج $l$، بينما تشير $Z_{k\,i}$ إلى حجم إنتاج المنشأة $i$ أي كمية العرض من منتجات هذه المنشأة.

للسهولة سنعتبر أن منتجات القطاع $i$ تباع كلها بسعر واحد هو $P_i$ بغض النظر عن المنشأة التي تم فيها إنتاج السلعة $i$، بناءً على ما ذكر أعلاه يمكن أن نشكل تابع الربح في المنشأة $k$ من هذا القطاع على الشكل التالي:

$$R_{k\,i}=P_i\cdot f_{k\,i}(x_{k\,i_1},x_{k\,i_2},....,x_{k\,i_n})-\sum_{l=1}^{n}P_l^*\cdot x_{ki\,l} \quad (32-6)$$

حيث: $P_l^*$ تشير إلى سعر الوحدة الواحدة من عنصر الإنتاج $l$.

حتى يكون تابع الربح المعرف بالعلاقة (32-6) للمنشأة $k$ في أكبر قيمة له، وهو ما تسعى المنشآت جميعها إليه، يجب أن تكون المشتقات الجزئية له بالنسبة لجميع متحولاته $x_{ki\,l}$ مساويةً للصفر، أي:

$$\frac{\partial R_{ki}}{\partial x_{ki\,l}}=P_i\cdot\frac{\partial f_{k\,i}}{\partial x_{ki\,l}}-P_l^*=0 \qquad (33-6)$$

تشير هذه العلاقة أن المنتجين في المنشأة $k$ سيظهرون طلباً على عنصر الإنتاج $l$ ما دامت النسبة بين $P_l^*$ سعر الوحدة الواحدة من عنصر الإنتاج و $P_i$ سعر الوحدة الواحدة من المنتجات، أي ما دامت هذه النسبة أقل أو تساوي المنفعة الحدية لعنصر الإنتاج المعني في هذه المنشأة. و جدير بالذكر هنا أن بعض عناصر الإنتاج هي عبارة عن سلع تم إنتاجها في المنشأة نفسها أو في منشآت أخرى كالسلع الوسيطة أو الآلات أو المعدات (انظر

فصل جداول المدخلات و المخرجات)، في هذه الحالة فإن العلاقة (6-33) تشير إلى أن الإنتاجية الحية لتلك السلع يجب أن تساوي الواحد.

من جهة أخرى تتضمن العلاقة (6-33) $n$ معادلة بـ $n$ مجهول هي $x_{ki\,l}$ حيث: $l = 1,2,...,n$ ، و بحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً نحصل على علاقات من الشكل:

$$x_{ki\,l} = \psi_{ki\,l}(P_1^*, P_2^*, ....., P_n^*, P_i) \qquad (6-34)$$
$$(l = 1,2,....,n): \quad \text{حيـــــث}$$

نسمي التابع $x_{ki\,l}$ – تابع الطالب على عنصر الإنتاج $l$ في المنشأة $k$ في القطاع $i$.

إذا جمعنا الطلبات على عنصر الإنتاج $l$ في المنشآت الإنتاجية التابعة للقطاع $i$ نحصل تابع الطلب على عنصر الإنتاج المذكور في القطاع $i$ الذي يأخذ الشكل التالي:

$$x_{il} = \sum_{k=1}^{q_i} x_{ki\,l} = \sum_{k=1}^{q_i} \psi_{ki\,l}(P_1^*, P_2^*, ....., P_n^*, P_i) \qquad (6-35)$$

يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل التالي:

$$x_{il} = \psi_{il}(P_1^*, P_2^*, ....., P_n^*, P_i) \qquad (6-36)$$

حيث اعتبرنا أن:

$$\sum_{k=1}^{q_i} \psi_{ki\,l} = \psi_{il}$$

فإذا عوضنا عن $x_{ki\,l}$ في العلاقة (6-31) بما يساويها من العلاقة (6-34) نحصل على العلاقة التالية:

$$Z_{ki} = \varphi_{ki}(P_1^*, P_2^*, ....., P_n^*, P_i) \qquad (6-37)$$

تمثل العلاقة الأخيرة تابع العرض لمنتجات المنشأة $k$ في القطاع $i$، و هنا نلاحظ أن كمية ما يعرض في السوق من منتجات المنشأة $k$ يتبع لسعر الوحدة الواحدة من هذا المنتج و يتبع كذلك لأسعار عناصر الإنتاج.

و يكون العرض الإجمالي لمنتجات القطاع (أو المنتج) $i$، على الشكل التالي:

$$Z_i = \sum_{k=1}^{q_i} Z_{ki} = \varphi_{ki}(P_1^*, P_2^*, ....., P_n^*, P_i) \qquad (38-6)$$

أو بشكل مختصر:

$$Z_i = \varphi_i(P_1^*, P_2^*, ....., P_n^*, P_i) \qquad (39-6)$$

حيث اعتبرنا أن:

$$\sum_{k=1}^{q_i} \varphi_{ki} = \varphi_i$$

6-4-2- توابع الطلب و العرض لدى مستهلك معين.

بفرض لدينا $m$ شخص في المجتمع و لكل منهم تابع منفعته الخاص به، متحولاته هي عبارة عن كميات السلع الاستهلاكية التي يمكنه الحصول عليها و التي عددها $N$ سلعة، فيكون $U_j$ تابع المنفعة للشخص $j$ حيث $j = 1,2,3,....,m$ من الشكل التالي:

$$U_j = u_j(Z_{ij}) = u_j(Z_{1j}, Z_{2j}, Z_{3j}, ....., Z_{Nj}) \qquad (40-6)$$

حيث رمزنا بـ $Z_{ij}$ لكمية ما يستهلكه الشخص $j$ من السلعة $i$، بمعنى آخر كمية الطلب الذي يبديه الشخص $j$ على السلعة $i$ .

أما القيد الذي يقيد مشتريات المستهلك فهو الدخل المحدود الذي نعبر عنه بالشكل التالي:

$$W_j = \sum_{i=1}^{N} P_i \cdot Z_{ij} \qquad (41-6)$$

و كما هو معروف فإنّ المستهلك يحاول تعظيم تابع منفعته الوارد في العلاقة (6−40) دون تجاوز الدخل المحدود الوارد في العلاقة (6−41)، و بناءً على ما ورد في الفصل الخامس، نقوم بتشكيل تابع لاغرانج و إيجاد المشتقات الجزئية و جعلها مساوية للصفر، فنحصل على العلاقات التالية:

$$\frac{\partial U_j}{\partial Z_{ij}} - \lambda \cdot P_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ....., N) \qquad (42-6)$$

إن عدد المعادلات التي نحصل عليها من العلاقة (6−42) هو $N + 1$ معادلة تتضمن $N + 1$ متحولاً هي $Z_{ij}$ ( $i = 1, 2, ....., N$ ) بالإضافة لضارب لاغرانج $\lambda$ ، و بحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً نحصل على المعادلات التالية:

$$Z_{ij} = \varphi_{ij}(P_1, P_2, ....., P_N, W_j), \quad (i = 1, 2, ...., N) \quad (43-6)$$

حيث نسمي التابع $Z_{ij}$ تابع الطلب على السلعة $i$ من قبل المستهلك $j$ .

لنفرض الآن أن المستهلك يبيع بعض عناصر الإنتاج مقابل حصوله على الدخل (علماً أن أكثر سلعة يمكن أن يبيعها المستهلك هي العمل بأشكاله المختلفة)، فإذا رمزنا بـ $Z^*_{jl}$ لكمية ما يعرضه الشخص $j$ من عنصر الإنتاج $l$ ، عندها يمكننا أن نكتب:

$$W_j = \sum_{l=1}^{n} P_l^* Z^*_{jl} \qquad (44-6)$$

مع الإشارة إلى أن $Z^*_{jl} = 0$ من أجل عدد كبير من عناصر الإنتاج $l$ حيث إن المستهلك يمكنه أن يبيع نوعاً واحداً أو نوعين على الأكثر من عناصر الإنتاج (العمل). وإذا بدلنا $W_j$ في العلاقة (6−43) بما يساويها من العلاقة (6−44) نجد:

$$Z_{ij} = \psi_{ij}(P_1, P_2, ....., P_N, \sum_{l=1}^{n} P_l^* \cdot Z^*_{jl}) \qquad (45-6)$$

و إذا جمعنا الطلب الذي يبديه المستهلكون جميعهم على السلعة $i$، نحصل على الطلب الكلي $Z_i$ على هذه السلعة و الذي يكتب بالشكل التالي:

$$Z_i = \sum_{j=1}^{m} Z_{ij} = \varphi_i(P_1^*, P_2^*, ...., P_n^*, P_1, P_2, ....., P_N) \quad (46-6)$$

**مثال (6-6):**

بفرض لدينا قطاعان إنتاجيان فقط كل منهما ينتج نوعاً واحداً من المنتجات باستخدام عنصرين فقط من عناصر الإنتاج، و قد كانت توابع الإنتاج في هذين القطاعين على الشكل التالي:

$$Z_1 = x_{11}^{\frac{1}{2}} \cdot x_{21}^{\frac{1}{3}}$$

$$Z_2 = x_{12}^{\frac{1}{3}} \cdot x_{22}^{\frac{1}{2}}$$

حيث رمزنا بـ $x_{ij}$ لكمية ما يستهلك من عنصر الإنتاج $i$ في القطاع $j$ كما سنرمز بـ $p_1, p_2$ لأسعار المنتجات و كذلك بـ $p_1^*, p_2^*$ لأسعار عناصر الإنتاج. فيكون تابع الربح في القطاع الأول على الشكل التالي:

$$R_1 = p_1 \cdot (x_{11}^{\frac{1}{2}} \cdot x_{21}^{\frac{1}{3}}) - p_1^* \cdot x_{11} - p_2^* \cdot x_{21}$$

بإيجاد المشتقات الجزئية لهذا التابع و جعل هذه المشتقات مساويةً الصفر نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_{11}} = \frac{1}{2} \cdot p_1 \cdot (x_{11}^{-\frac{1}{2}} \cdot x_{21}^{\frac{1}{3}}) - p_1^* = 0$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_{21}} = \frac{1}{3} \cdot p_1 \cdot (x_{11}^{\frac{1}{2}} \cdot x_{21}^{-\frac{2}{3}}) - p_2^* = 0$$

و بحل المعادلتين السابقتين نحصل على تابعي الطلب على عنصري الإنتاج في القطاع الأول من الشكل التالي:

$$x_{11} = \frac{p_1^6}{144 \cdot \left(p_1^*\right)^4 \cdot \left(p_2^*\right)^2}$$

$$x_{21} = \frac{p_1^6}{216 \cdot \left(p_1^*\right)^3 \cdot \left(p_2^*\right)^3}$$

و بذلك يكون تابع العرض من منتجات القطاع الأول من الشكل:

$$Z_1 = \frac{p_1^5}{72 \cdot \left(p_1^*\right)^3 \cdot \left(p_2^*\right)^2}$$

و بصورة مشابهة نحصل على توابع الطلب و العرض في القطاع الثاني :

$$x_{12} = \frac{p_2^6}{216 \cdot \left(p_1^*\right)^3 \cdot \left(p_2^*\right)^3}$$

$$x_{22} = \frac{p_2^6}{144 \cdot \left(p_1^*\right)^2 \cdot \left(p_2^*\right)^4}$$

$$Z_2 = \frac{p_2^5}{72 \cdot \left(p_1^*\right)^2 \cdot \left(p_2^*\right)^3}$$

## تمارين غير محلولة على الفصل السادس

**1)** ادرس مؤشرات تحليل تابع الإنتاج التالي، ثم أوجد النقاط الحرجة الحرة له، إذا علمت أن $x = 6$ $y = 8$ .

$$Z = f(x, y) = 5 + 4 \cdot x + 6 \cdot y$$

**2)** ادرس مؤشرات تحليل تابع الإنتاج التالي:

$$Z = f(L, K) = 3 \cdot L^{0.4} \cdot K^{0.3}$$

عندما $L = 18$ $K = 22$ ثم أوجد النقاط الحرجة لهذا التابع إذا علمت أن:

$$g(L, K) = 8 \cdot L + 6 \cdot K = 1000$$

**3)** ليكن لدينا تابع التكاليف التالي:

$$C = c(Z) = z^3 - 9 \cdot z^2 + 30 \cdot z + 25$$

والمطلوب:

1. هل يحقق هذا التابع القيود الواجب فرضها على معاملات التابع من الدرجة الثالثة لكي يمثل تابع تكاليف.
2. أوجد حجم الإنتاج الذي يجعل التكاليف الحدية في حدها الأدنى، ثم تأكد أن هذه التكاليف هي الأدنى، و أوجد قيمة هذه التكاليف الحدية و الكلية.

**4)** ليكن لدينا تابع المنفعة التالي لأحد المستهلكين:

$$U = u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_1x_2$$

و المطلوب :

1. أوجد التركيبة السلعية المثلى التي تجعل منفعة المستهلك أعظم ما يمكن، في ظل القيد التالي الذي يحدد أسعار السلع و مقدار دخل هذا المستهلك:

$$w(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2 = 20100$$

2. أوجد معل الإحلال بين السلعتين $x_1, x_2$

# الفصل السابع

# نماذج المدخلات و المخرجات

# ( نموذج ليونيتيف )

تعد دراسة العلاقات التشابكية بين قطاعات الاقتصاد الوطني قديمة العهد، حيث وضع العالم (كيناي 1708) جدولاً أسماه الجدول الاقتصادي عرض فيه علاقات التبادل بين القطاعات الاقتصادية المنتجة و غير المنتجة، كما قسّم (كارل ماركس 1872) الاقتصاد إلى قطاعين ـ قطاع منتج لسلع الاستثمار و قطاع منتج لسلع الاستهلاك، كذلك وضع ( والرس 1877) نموذجاً للتوازن بين القطاعات تمثل بمجموعة معادلات تعبر عن الطلب و العرض على مختلف السلع المنتجة و عناصر الإنتاج.

و لكن مع الأسف هذه النماذج جميعها بقيت دون تطبيق عملي إلى أن وضع العالم الاقتصادي (ليونيتيف 1931) نموذجاً سمي باسمه ـ نموذج ليونيتيف للتشابك القطاعي، أو نموذج تحليل المدخلات و المخرجات.

## 7-1- نموذج ليونيتيف:

يعد جدول المدخلات و المخرجات أو ما يسمى نموذج ليونيتيف للتشابك القطاعي أداةً هامةً لتحليل علاقات الترابط بين قطاعات الاقتصاد الوطني وتخطيطها، حيث يبين تدفقات حركة السلع بين هذه القطاعات خلال فترة زمنية معينة (غالباً ما تكون سنة).

### 7-1-1- فروض نموذج ليونيتيف:

تم بناء نموذج ليونيتيف للتشابك القطاعي بالاعتماد على مجموعة من الافتراضات نلخصها بالتالي:

1) إن كل قطاع اقتصادي ينتج سلعة واحدة فقط، بمعنى عدد القطاعات الاقتصادية يساوي عدد السلع المتداولة في الاقتصاد ،و سنرمز للسلع

(القطاعات) بالرمز $i$ حيث: $i = 1,2,3,...,n$ وقد اعتبرنا عدد القطاعات هو $n$ قطاع.

2) إن أسعار منتجات كل قطاع تبقى ثابتة خلال فترة الدراسة.

3) كذلك تبقى نسب ما يحتاجه كل قطاع من منتجات القطاعات الأخرى لإنتاج وحدة واحدة من منتجاته ثابتة خلال فترة الدراسة.

إن الافتراضين الأخيرين يعنيان أننا ندرس العلاقة بين القطاعات في الوضع السكوني.

## 7-1-2- بناء نموذج ليونيتيف:

من خلال الافتراضات السابقة فإننا نفهم العملية الإنتاجية في كل قطاع على أنها عملية تحويل لبعض أو لكل أنواع المنتجات ( المنتجة في القطاعات الأخرى) بنسب معينة إلى كمية من المنتجات التي ينتجها هذا القطاع.

نرمز لكمية المنتجات المنتجة في القطاع $i$ و المستخدمة لإنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاع $j$ بـ $a_{ij}$ و نسميها المعاملات الفنية للإنتاج، و نعتبرها ثابتة.

كما نرمز لكمية الإنتاج الإجمالي في سنة معينة في القطاع $i$ بالرمز $X_i$، حيث يقسم هذا الإنتاج إلى قسمين:

- الأول و يسمى الإنتاج الوسيط و يمثل ما يستخدم من إنتاج هذا القطاع في العمليات الإنتاجية على شكل سلع و خدمات وسيطة لدى جميع القطاعات الإنتاجية (بما فيها القطاع نفسه)، وكمية هذا الجزء تحسب على الشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \qquad (1-7)$$

- أما القسم الثاني من إنتاج القطاع $i$ فيسمى الإنتاج النهائي الذي يذهب لتغطية الطلب النهائي على منتجات هذا القطاع (يتمثل الطلب النهائي

بالاستهلاك الخاص و الحكومي و الفرق بين الصادرات و الواردات و كذلك زيادة المخزون)، و يحسب على الشكل التالي:

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j = Y_i \quad : \quad (i = 1,2,....,n) \qquad (2-7)$$

حيث أن: $Y_i$ هي مقدار الطلب النهائي على منتجات القطاع $i$.

نسمي جملة المعادلات (2-7) السابقة ـ معادلات توازن الإنتاج. و هي تشكل الأساس أو الهيكل العام لنموذج ليونيتيف للتشابك القطاعي، أو جدول التشابك القطاعي.

بما أننا ندرس النموذج المبسط (السكوني) للاقتصاد، فإن أسس توزيع كميات الطلب النهائي $Y_i$ تبقى غير معروفة، و بالتالي فهي محددة من خارج النموذج، و بالتالي سيكون علينا من خلال نموذج ليونيتيف تقدير حجم الإنتاج الإجمالي في كل قطاع $X_i$ ، اللازم لمواجهة الطلب النهائي على منتجات هذا القطاع $Y_i$.

و لتوضيح العلاقة بين القطاعات يمكن أن نشكل الجدول التالي الذي يسمى جدول التشابك القطاعي أو جدول المدخلات و المخرجات بدلالة الكميات، حيث تسمى منتجات كل قطاع بالمخرجات بينما تسمى مستلزمات الإنتاج بالمدخلات، و لذلك نستخدم الرموز التالية:

$X_i$ مجموع كميات منتجات (مخرجات) القطاع $i$.

$q_{ij}$ مقدار منتجات الاستهلاك الوسيط في القطاع $i$ المستخدمة في القطاع $j$.

$q_i$ مقدار منتجات القطاع $i$ التي تذهب للاستهلاك النهائي (الخاص و الحكومي).

و بذلك يكون جدول المدخلات و المخرجات بدلالة الكميات على الشكل التالي:

الجدول (7–1): جدول التشابك القطاعي بدلالة الكميات

| | قطاعات الاقتصاد الوطني $j$ / $i$ | اجمالي انتاج القطاع | المخرجات: منتجات الاستهلاك الوسيط 1 | 2 | 3 | ..... | $n$ | منتجات الاستهلاك النهائي | مجموع مخرجات القطاع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المدخلات | 1 | $X_1$ | $q_{11}$ | $q_{12}$ | $q_{13}$ | ..... | $q_{1n}$ | $q_1$ | $\sum_{j=1}^{n} q_{1j} + q_1$ |
| | 2 | $X_2$ | $q_{21}$ | $q_{22}$ | $q_{23}$ | ..... | $q_{2n}$ | $q_2$ | $\sum_{j=1}^{n} q_{2j} + q_2$ |
| | 3 | $X_3$ | $q_{31}$ | $q_{32}$ | $q_{33}$ | ..... | $q_{3n}$ | $q_3$ | $\sum_{j=1}^{n} q_{3j} + q_3$ |
| | ..... ..... | ..... ..... | ... ... | ... ... | ... ... | ..... ..... | ... ... | ..... ..... | ..... ..... |
| | $i$ | $X_i$ | $q_{i1}$ | $q_{i2}$ | $q_{i3}$ | ..... | $q_{in}$ | $q_i$ | $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} + q_i$ |
| | ..... ..... | ..... ..... | ... ... | ... ... | ... ... | ..... ..... | ... ... | ..... ..... | ..... ..... |
| | $n$ | $X_n$ | $q_{n1}$ | $q_{n2}$ | $q_{n3}$ | ..... | $q_{nn}$ | $q_n$ | $\sum_{j=1}^{n} q_{nj} + q_n$ |

نلاحظ في الجدول السابق (7–1) عدم إمكانية جمع عناصر الأعمدة لأنها تكون مقاسة بواحدات قياس مختلفة نظراً لاختلاف منتجات كل قطاع عن الآخر، بينما استطعنا جمع عناصر الأسطر لأنها مقاسة بنفس واحدات القياس.

كما يمكن استخدام قيم المنتجات و كذلك قيم مستلزمات الإنتاج بدلاً من الكميات و بالتالي الحصول على جدول التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد، و لذلك نستخدم الرموز التالية:

$W_i$ مجموع قيم منتجات (مخرجات) القطاع $i$.

$y_{ij}$ قيمة منتجات الاستهلاك الوسيط في القطاع $i$ المستخدمة في القطاع $j$.

$y_i$ قيمة منتجات القطاع $i$ التي تذهب للاستهلاك النهائي (الخاص و الحكومي).

$u_j$ قيمة مستلزمات إنتاج (مدخلات) القطاع $j$ .

و بذلك يكون جدول المدخلات و المخرجات بدلالة قيم المواد على الشكل:

الجدول (7-2): جدول التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد

| | قطاعات الاقتصاد الوطني $j$ / $i$ | اجمالي انتاج القطاع | المخرجات: منتجات الاستهلاك الوسيط 1 | 2 | 3 | ..... | $n$ | منتجات الاستهلاك النهائي | مجموع مخرجات القطاع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المدخلات | 1 | $W_1$ | $y_{11}$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | ..... | $y_{1n}$ | $y_1$ | $\sum_{j=1}^{n} y_{1j} + y_1$ |
| | 2 | $W_2$ | $y_{21}$ | $y_{22}$ | $y_{23}$ | ..... | $y_{2n}$ | $y_2$ | $\sum_{j=1}^{n} y_{2j} + y_2$ |
| | 3 | $W_3$ | $y_{31}$ | $y_{32}$ | $y_{33}$ | ..... | $y_{3n}$ | $y_3$ | $\sum_{j=1}^{n} y_{3j} + y_3$ |
| | ..... ..... | ..... ..... | ..... ... | ..... ... | ..... ... | ..... ..... | ... | ..... ..... | ..... ..... |
| | $i$ | $W_i$ | $y_{i1}$ | $y_{i2}$ | $y_{i3}$ | ..... | $y_{in}$ | $y_i$ | $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} + y_i$ |
| | ..... ..... | ..... ..... | ..... ... | ..... ... | ..... ... | ..... ..... | ... | ..... ..... | ..... ..... |
| | $n$ | $W_n$ | $y_{n1}$ | $y_{n2}$ | $y_{n3}$ | ..... | $y_{nn}$ | $y_n$ | $\sum_{j=1}^{n} y_{nj} + y_n$ |
| | مجموع مدخلات القطاع $j$ | $\sum_{i=1}^{n} W_i$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | .... | $u_n$ | $y$ | $\sum_{j=1}^{n} u_j + y$ |

نلاحظ في الجدول السابق (7-2) إمكانية جمع عناصر الأعمدة و كذلك إمكانية جمع عناصر الأسطر لأنها مقاسة كلها بواحدات القياس نفسها (الوحدات النقدية)، مما يعطينا إمكانية مهمة جداً لعمليات التحليل الاقتصادي.

من جهة أخرى إذا أخذنا الأسعار في الاقتصاد الوطني بعين الاعتبار، يمكننا استناداً إلى جملة المعادلات (7-2) حساب القيم المالية المقابلة لتلك الكميات، و يمكننا أن نكتب جملة المعادلات التالية:

$$P_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot P_i = V_j \quad : \quad (j = 1,2,....,n) \qquad (3-7)$$

حيث:

$P_j$ سعر الوحدة الواحدة من منتجات القطاع $j$.

$a_{ij} \cdot P_i$ قيمة السلع و الخدمات التي تنتج في القطاع $i$ و يستهلكها القطاع $j$ لإنتاج وحدة واحدة من منتجاته.

$V_j$ القيمة المضافة الإجمالية في الوحدة الواحدة من منتجات القطاع $j$.

إذا ضربنا جملة المعادلات (7-2) بالأسعار $P_i$ و أخذنا المجموع للقطاعات $i$ كافة حيث $(i = 1,2,....,n)$ ، و كذلك إذا ضربنا جملة المعادلات (7-3) بالكميات $X_j$ و أخذنا المجموع للقطاعات $j$ كافة حيث $(j = 1,2,....,n)$ نحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot Y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j \cdot X_j \qquad (4-7)$$

إن العلاقة (7-4) الأخيرة مهمة جداً في التحليل الاقتصادي من أجل تحقيق التوازن في الاقتصاد الوطني، و هي تعني أن مجموع قيم المنتجات النهائية لقطاعات الاقتصاد الوطني كافة، يساوي مجموع القيمة المضافة لمنتجات قطاعات هذا الاقتصاد جميعها.

و باستخدام المصفوفات يمكننا كتابة العلاقتين (7-2) و (7-3) على الشكل التالي:

$$X - AX = Y \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{I} - A)X = Y \qquad (5\text{-}7)$$

$$P - PA = V \quad \Rightarrow \quad P(\mathrm{I} - A) = V \qquad (6\text{-}7)$$

حيث:

$A = \left[a_{ij}\right]_{(n,n)}$ مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج بين القطاعات.

$X = \left[X_i\right]_{(n,1)}$ مصفوفة الإنتاج في القطاعات المختلفة (شعاع عمود).

$Y = \left[Y_i\right]_{(n,1)}$ مصفوفة الطلب النهائي على منتجات مختلف القطاعات (شعاع عمود).

$I$ مصفوفة الوحدة و هي من المرتبة $n$.

$P = \left[P_j\right]_{(1,n)}$ مصفوفة الأسعار (شعاع سطر).

$V = \left[V_j\right]_{(1,n)}$ مصفوفة القيمة المضافة الإجمالية في وحدات منتجات القطاعات المختلفة.

و بناءً عليه يمكن كتابة المعادلات المصفوفية الأخيرة على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}7)$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}7)$$

إذا كان للمعادلة (7-7) حلٌ غير سالب $(X \geq 0)$ من أجل مصفوفة (شعاع) نصف موجب $(Y \geq 0)$ للطلب النهائي، فإننا نقول إن النظام الاقتصادي يعد نظاماً منتجاً[1]. بالمقابل إذا كان للمعادلة (7-8) حلاً غير سالب $(P \geq 0)$ من أجل أي مصفوفة (شعاع) نصف موجب $(V \geq 0)$ للقيمة المضافة، فإننا نقول إن النظام الاقتصادي يعد نظاماً رابحاً.

استناداً لما ذكر أعلاه إذا كان النظام الاقتصادي رابحاً و علمنا قيمة شعاع الطلب النهائي $(Y \geq 0)$ فإن العلاقة (7-7) تمكننا من إيجاد قيمة شعاع الإنتاج $X$، بمعنى آخر تمكننا من تحديد مستويات الإنتاج في مختلف قطاعات الاقتصاد الوطني التي تساهم في سد حاجة الطلب النهائي في القطاعات جميعها.

بشكل مشابه إذا كان النظام الاقتصادي رابحاً و علمنا قيمة شعاع القيمة المضافة فإن العلاقة (7-8) تمكننا من معرفة شعاع الأسعار المقابل لهذه المنتجات.

**مثال (7-1):**

بفرض أنه لدينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.9 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.3 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \\ 570 \end{bmatrix}$$

[1] نقول عن الشعاع $X$ أنه شعاع غير سالب إذا كانت جميع مركباته غير سالبة $X_i \geq 0$ من أجل جميع قيم $i$.

و نقول عن الشعاع $X$ أنه شعاع نصف موجب إذا كانت مركباته غير سالبة $X_i \geq 0$ من أجل جميع قيم $i$، و كان $X_i > 0$ من أجل قيمة واحدة على الأقل لـ $i$.

كما نقول عن الشعاع $X$ أنه شعاع موجب إذا كانت مركباته موجبة $X_i > 0$ من أجل جميع قيم $i$.

نلاحظ هنا أن الشعاع $X = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$ هو حل للمعادلة (7-7) و كذلك الشعاع $P = [5 \quad 2 \quad 1]$ هو حل للمعادلة (7-8).

كما يمكن التأكد أنه من أجل المصفوفة $A$ السابقة، فإن أي شعاع نصف موجب للطلب النهائي $Y$ يعطينا شعاع نصف موجب للإنتاج.

و للتأكد من ذلك لنأخذ الشعاع $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$ و نكتب المعادلة المصفوفية (7-7) على شكل جملة معادلات عددية من الشكل التالي:

$$0.6X_1 = Y_1$$
$$-0.8X_1 + 0.8X_2 = Y_2$$
$$-0.9X_1 - 0.3X_2 + 0.8X_3 = Y_3$$

كما يمكن كتابة هذه المعادلات على الشكل التالي:

$$X_1 = \frac{1}{0.6} Y_1$$
$$X_2 = \frac{1}{0.8}[0.8X_1 + Y_2]$$
$$X_3 = \frac{1}{0.8}[0.9X_1 + 0.3X_2 + Y_3]$$

من خلال المعادلات الثلاث الأخيرة نلاحظ أنه إذا كان $Y_1 > 0$ يكون على الأقل $X_1 > 0$، و إذا كان $Y_2 > 0$ فإنه يكون على الأقل $X_1, X_2 > 0$، و كذلك إذا كان $Y_3 > 0$ فإنه يكون كل من $X_1, X_2, X_3 > 0$ ، و هنا نلاحظ أنه لا يمكن لأي مركبة من مركبات الشعاع $X$ أن تكون سالبة. هذا يعني أن النظام الاقتصادي المذكور هو نظام منتج، كما يمكن بالطريقة نفسها أن نتأكد أنه نظام رابح.

بفرض الآن أنه تم تغيير أحد عناصر المصفوفة $A$ و هو العنصر $a_{13}$ لتصبح على الشكل التالي مع بقاء المعطيات الأخرى دون تغيير:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.9 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

عندها سنلاحظ أن الشعاع $X$ قد أصبح سالباً من الشكل:

$$X^* = \begin{bmatrix} -2900 \\ -2778 \\ -3600 \end{bmatrix}$$

كما نلاحظ أن الشعاع $P$ قد أصبح سالباً أيضاً: $P^* = [-20 \quad -2.69 \quad -11.5]$ أي إنه نتيجة تغيير أحد عناصر المصفوفة $A$ فقد أصبح النظام الاقتصادي غير منتج و كذلك غير رابح.

**ملاحظة 1:**

عندما يكون النظام الاقتصادي منتجاً يكون رابحاً أيضاً و العكس أيضاً صحيح، و عندما يكون غير منتج يكون غير رابح أيضاً و العكس أيضاً صحيح.

## 7-2- خواص مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج $A$.

بفرض أننا نقدر منتجات القطاعات كافة بالوحدات النقدية (حتى نستطيع جمع أسطر المصفوفة $A$ لأن عناصر الأسطر في هذه المصفوفة هي عبارة عن ما يستهلكه كل قطاع من منتجات القطاعات الأخرى المختلفة)، ففي هذه الحالة، إذا كانت عناصر هذه المصفوفة معلومة فإن الشعاع $V$ يتعين بشكل وحيد. و هنا سيكون لدينا ما يلي:

$(j = 1,2,....,n)$ : $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ تمثل قيمة السلع الوسيطة التي يستهلكها القطاع $j$ لإنتاج ما قيمته وحدة نقدية واحدة من منتجاته.

$V_j = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad : (j = 1,2,....,n)$ تمثل القيمة المضافة الإجمالية مقدرة بالوحدات النقدية لما قيمته وحدة نقدية واحدة من منتجات القطاع $j$ .

وفي هذه الحالة تكون كل عناصر شعاع الأسعار $P$ مساويةً الواحد الصحيح.

وبما أنه في الحالة العامة تكون عناصر المصفوفة $A$ غير سالبة أي $a_{ij} > 0$ فإن مجموع عناصر كل عمود في هذه المصفوفة سيكون أصغر من الواحد (لأن هذا المجموع يمثل ما يستهلك في جميع القطاعات من منتجات قطاع معين و هذا الاستهلاك لا يمكن أن يتجاوز قيمة إنتاج هذا القطاع)، من جهة أخرى،فإنه في الحالة العامة تكون القيمة المضافة $V$ موجبة، لذلك يمكن أن نكتب:

$$V_j = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0 \quad : (j = 1,2,....,n) \qquad (9-7)$$

أي إن:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad : (j = 1,2,....,n) \qquad (10-7)$$

و إذا علمنا أن كل قطاع لابد أن يستهلك كسلع وسيطة منتجات قطاع واحد على الأقل، أمكننا أن نكتب المتراجحة التالية:

$$0 < \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad : (j = 1,2,....,n) \qquad (11-7)$$

## 7-3- المعاملات الكلية للإنتاج.

بالعودة إلى المعادلة المصفوفية (7-7) سابقة الذكر:

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

و استناداً إلى الخواص الرياضية للمصفوفات، يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad (12-7)$$

أو بشكل مختصر:

$$X = [\mathrm{I} - A]^{-1} \cdot Y \quad \Leftrightarrow X = B \cdot Y \qquad (13-7)$$

حيث رمزنا بـ $B$ لمقلوب المصفوفة $[\mathrm{I} - A]$ و نسميها مصفوفة المعاملات الفنية الكلية للإنتاج.

من المعادلة (7−13) يمكننا أن نستنتج أن إنتاج أي قطاع $X_i$ يتألف من مجموعة أجزاء توضحهم المعادلة التالية:

$$X_i = b_{i1} \cdot Y_1 + b_{i2} \cdot Y_2 + \ldots . b_{in} \cdot Y_n \quad : (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14-7)$$

إن المعادلة الأخيرة تبين أن إنتاج كل قطاع من قطاعات الاقتصاد الوطني يرتبط بالإنتاج المخصص للاستهلاك النهائي (الطلب النهائي) في كل قطاعات هذا الاقتصاد الوطني، بموجب عناصر المصفوفة $B$ لذلك سميت هذه المصفوفة – مصفوفة المعاملات الكلية للإنتاج.

بناءً على خواص المصفوفة $A$ مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج، نلاحظ أيضاً أن المصفوفة $B$ لا تحتوي قيماً سالبة، أي إن $b_{ij} \geq 0$ . أما التفسير الاقتصادي لهذه المعاملات فتعني: $b_{ij}$ كمية منتجات القطاع $i$ اللازمة للحصول على وحدة واحدة من الطلب النهائي على منتجات القطاع $j$. و إذا كنا نقيس المنتجات بالوحدات النقدية لسهولة الحسابات و المقارنة، فإننا نفسر $b_{ij}$ بأنها قيمة منتجات القطاع $i$ اللازمة للحصول على ما قيمته وحدة نقدية واحدة من الطلب النهائي على منتجات القطاع $j$.

يمكن تفسير معنى المعاملات $b_{ij}$ بصورة أخرى، حيث إنه باشتقاق العلاقة (7−14) اشتقاقاً جزئياً بالنسبة لـ $Y_j$ نحصل على ما يلي:

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_j} = b_{ij} \qquad (15-7)$$

و حسب تعريف المشتق، فإن $b_{ij}$ تعني التزايد الذي يطرأ على كمية (قيمة) منتجات القطاع $i$ عندما يتزايد الطلب النهائي على كمية (قيمة) منتجات القطاع $j$ بمقدار وحدة واحدة.

**مثال (7-2):**

بفرض أنه لدينا ثلاثة قطاعات إنتاجية في الاقتصاد الوطني هي : الصناعة و الزراعة و البناء، و كانت مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج $A$ بين هذه القطاعات على الشكل التالي:

| | | صناعة | زراعة | بناء |
|---|---|---|---|---|
| صناعة | $A =$ | 0.2 | 0.4 | 0.3 |
| زراعة | | 0.5 | 0.3 | 0.1 |
| بناء | | 0.2 | 0.1 | 0.6 |

و بفرض أنه كان شعاع الطلب النهائي على منتجات هذه القطاعات الثلاثة على الشكل التالي:

| | | |
|---|---|---|
| صناعة | $Y =$ | 500 |
| زراعة | | 700 |
| بناء | | 400 |

و المطلوب: تقدير حجم الإنتاج الإجمالي في كل قطاع (الشعاع $X$) و اللازم لتغطية الطلب النهائي على منتجات كل قطاع (الشعاع $Y$).

**الحل:**

نلاحظ من خلال المعطيات الواردة أعلاه أن:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathrm{I} - A] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.3 \\ -0.5 & 0.7 & -0.1 \\ -0.2 & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

و بالتالي نجد:

$$B = \left[\mathrm{I} - A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 3.80 & 2.68 & 3.52 \\ 3.10 & 3.66 & 3.24 \\ 2.68 & 2.25 & 5.07 \end{bmatrix}$$

و بناءً على العلاقة (7−13) نجد:

$$X = B \cdot Y = \begin{bmatrix} 3.80 & 2.68 & 3.52 \\ 3.10 & 3.66 & 3.24 \\ 2.68 & 2.25 & 5.07 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 700 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5184 \\ 5408 \\ 4943 \end{bmatrix}$$

و بفرض الآن أنه قد تغير الطلب النهائي على منتجات قطاع الزراعة ليصبح 900 بدلاً من 700، لنوجد قيم الإنتاج الإجمالي في كل القطاعات نتيجة هذا التغيير.

أيضاً بتطبيق العلاقة (7−13) نجد:

$$X = B \cdot Y = \begin{bmatrix} 3.80 & 2.68 & 3.52 \\ 3.10 & 3.66 & 3.24 \\ 2.68 & 2.25 & 5.07 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 900 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5720 \\ 6140 \\ 5393 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن زيادة الطلب النهائي على منتجات قطاع الزراعة بمقدار 200 وحدة قد أدت إلى زيادة الإنتاج الإجمالي في القطاعات جميعها على الشكل التالي: (الصناعة – 536 وحدة، الزراعة – 732 وحدة، البناء – 450 وحدة).

## 7−4− تقدير قيم المعاملات الفنية للإنتاج في سنة قادمة:

لقد ذكرنا أعلاه أنه يستفاد من نموذج التشابك القطاعي (نموذج ليونيتيف) في تقدير حجم (قيمة) الإنتاج $X$ اللازم من منتجات كل قطاع لسد حاجة الطلب النهائي في القطاعات الأخرى $Y$ على منتجات هذا القطاع، و هذه المعرفة تنتج من خلال علاقة التشابك التي توضحها عناصر المصفوفة $A$، أي إنها تتوضح من خلال المعاملات الفنية للإنتاج $a_{ij}$ و التي تكون عادة معلومة و ثابتة في الفترة القصيرة.

لكن المعاملات الفنية للإنتاج $a_{ij}$ تتغير مع الزمن في الفترات الطويلة، ولكن هذا التغير يكون طفيفاً و يحدث بشكل بطيء، لذلك إذا علمنا قيم هذه المعاملات في سنة معينة، فيمكن اعتمادها (مع هاش صغير جداً من الخطأ يمكن التغاضي عنه) في سنة لاحقة، على أن لا تكون الفترة الزمنية الفاصلة بين السنتين طويلة. أما عندما تكون الفترة الفاصلة بين السنتين طويلة نسبياً لابد أن تتغير قيم هذه المعاملات و بالتالي لا يمكن اعتماد المعاملات القديمة في السنة اللاحقة و لابد من تقدير هذه المعاملات من جديد في حال عدم معرفتها في السنة اللاحقة.

إذن لابد لعمليات التخطيط الاقتصادي و التنبؤ من تقدير قيم المعاملات الفنية للإنتاج $a_{ij}$ في السنة اللاحقة $t$ من خلال قيم هذه المعاملات في السنة الحالية.

كنا رمزنا لمصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج في السنة الحالية بـ $A$ و سنرمز لتقدير هذه المصفوفة في السنة اللاحقة بـ $A_t$ و سنقوم بتقدير عناصر المصفوفة $A_t$ من خلال قواعد التقدم التقني و تأثيره على العمليات الإنتاجية[1].

إن التقدم التقني يؤثر في العمليات الإنتاجية من جهتين:

1) من خلال الإحلال الجزئي لسلع وسيطة مكان سلع أخرى في إنتاج منتجات قطاع معين.
2) من خلال تغير النسبة بين كميات (قيم) السلع الوسيطة و كميات (قيم) منتجات القطاع المدروس.

[1] تسمى هذه الطريقة في تقدير المصفوفة $A_t$ ـ طريقة $RAS$ نسبة إلى العالم البريطاني ريتشارد ستون $(Stone\ R.)$ التي وضعها عام 1962.

الحالة الأولى و التي فيها يتم الإحلال الجزئي لسلع وسيطة مكان سلع أخرى في عملية الإنتاج، فيمكن أن نظهره من خلال معامل موجب نرمز له بـ $r_i > 0$ ، حيث نضرب به السطر $i$ في المصفوفة $A$، حيث إنه إذا كان $r_i > 1$ فإن ما يستخدم من السلع الوسيطة $i$ في القطاع $j$ للحصول على وحدة واحدة من منتجاته يزداد مع الزمن على حساب نقصان استخدامه من السلع الوسيطة الأخرى (من غير القطاع $i$)، و إذا كان $r_i < 1$ فإن ما يستخدم من السلع الوسيطة $i$ في القطاع $j$ للحصول على وحدة واحدة من منتجاته ينقص مع الزمن على حساب زيادة استخدامه من السلع الوسيطة الأخرى (من غير القطاع $i$)، أما إذا كان $r_i = 1$ فإن ما يستخدم من السلع الوسيطة $i$ في القطاع $j$ للحصول على وحدة واحدة من منتجاته لا يتغير مع الزمن سواء زاد أو نقص استخدام القطاع $j$ من السلع الوسيطة الأخرى (من غير القطاع $i$).

أما فيما يتعلق بتغير النسبة بين كميات (قيم) السلع الوسيطة المستخدمة في القطاع $j$ و كميات (قيم) الناتج الإجمالي في هذا القطاع[1]، فنظهره من خلال معامل آخر نرمز له بـ $s_j > 0$ حيث نضرب به العمود $j$ في المصفوفة $A$، فإذا كان $s_j > 1$ فإن النسبة بين السلع الوسيطة التي يستخدمها القطاع $j$ و الإنتاج الإجمالي للقطاع $i$ تزداد مع الزمن، و إذا كان $s_j < 1$ فإن النسبة بين السلع الوسيطة التي يستخدمها القطاع $j$ و الإنتاج الإجمالي للقطاع $i$ تنقص مع الزمن، و إذا كان $s_j = 1$ فإن النسبة بين السلع الوسيطة التي يستخدمها القطاع $j$ و الإنتاج الإجمالي للقطاع $i$ تبقى ثابتة مع الزمن.

[1] عندما تزداد النسبة بين كميات (قيم) السلع الوسيطة التي يستخدمها القطاع $j$ و الإنتاج الإجمالي لهذا القطاع، فإن النسبة بين القيمة المضافة و الإنتاج الإجمالي لهذا القطاع سوف تنقص، و العكس بالعكس.

بناءً على ما ذكرنا أعلاه فإن العنصر $a_{ij}$ في المصفوفة $A$ سيصبح في المصفوفة $A_t$، أي بعد مرور $t$ سنة على الشكل التالي:

$$a_{ij}(t) = r_i a_{ij} s_j \qquad (16-7)$$

نرمز للمصفوفة القطرية التي عناصر قطرها الرئيس المعاملات $r_i$ بالرمز $R$، و للمصفوفة القطرية التي عناصر قطرها الرئيس المعاملات $s_j$ بالرمز $S$ أي إن:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix}$$

و بالتالي يمكن أن نكتب:

$$A_t = R \cdot A \cdot S \qquad (17-7)$$

نلاحظ عند استخدام هذه الطريقة، أن حساب عناصر المصفوفة $A_t$ لا يمكن أن يتم إلا بالتنبؤ بقيم المصفوفتين $R, S$ و هذا الأمر بحد ذاته يشكل مشكلة اقتصادية ليست بسيطة، و إن قمنا بالتنبؤ المذكور بشكل تقريبي، فإن فرضيات هذه الطريقة (فرضية الإحلال بين السلع الوسيطة و فرضية النسبة بين السلع الوسيطة و الإنتاج الإجمالي) فيهما بعد عن الواقع بدرجة معينة، يؤدي إلى خطأ معين في عملية التقدير، مع العلم أن الخطأ الناتج عن الفرض الأول يعدل منه إلى حد ما الخطأ الناتج عن الفرض الثاني.

## 7-5- تأثير تغير المعاملات الفنية في المعاملات الكلية للإنتاج.

لقد وجدنا سابقاً أن المصفوفة $B$ مشتقة من المصفوفة $A$ حيث إن $B = [\mathrm{I} - A]^{-1}$، و بالتالي فإن أي تغير في المعاملات $a_{ij}$ (عناصر المصفوفة $A$) سوف يؤدي إلى تغير كل عناصر المصفوفة $B$. و لكن مقدار هذا التغير في المصفوفة $B$ يتوقف من جهة على العنصر $a_{ij}$ الذي حدث

فيه التغير، و على مقدار هذا التغير من جهة أخرى. لذلك لابد من معرفة مدى تأثير كل معامل من المعاملات الفنية للإنتاج في المعاملات الفنية الكلية للإنتاج (أي في المصفوفة $B$)، و بالتالي في النموذج بالكامل، و ذلك حتى نستطيع عزل المعاملات الهامة من المعاملات قليلة الأهمية.

يمكن دراسة هذا التأثير بطريقتين- طريقة تقريبية و طريقة دقيقة، و سوف نعتمد هنا الطريقة التقريبية لسهولتها، حيث سنترك الطريقة الدقيقة لمقررات أكثر تخصصيةً.

غالباً تستخدم الطريقة التقريبية عندما تكون التغيرات في قيم المعاملات الفنية (عناصر المصفوفة $A$) صغيرة بالقيمة المطلقة.

لنضرب طرفي العلاقة $B=[\mathrm{I}-A]^{-1}$ من اليسار بالمصفوفة $[\mathrm{I}-A]$ و بالاستفادة من خواص المصفوفات نجد:

$$[\mathrm{I}-A]\cdot B=[\mathrm{I}-A]\cdot[\mathrm{I}-A]^{-1}=\mathrm{I} \qquad (18-7)$$

بفرض أن المعامل $a_{ij}$ في المصفوفة $A$ قد طرأ عليه تغير مقداره $\partial a_{ij}$ ، و لنشتق طرفي العلاقة (7-18) فنجد[1]:

$$\frac{\partial[\mathrm{I}-A]}{\partial a_{ij}}\cdot B+[\mathrm{I}-A]\cdot\frac{\partial B}{\partial a_{ij}}=0 \qquad (19-7)$$

حيث إن الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة عبارة عن مصفوفة صفرية من المرتبة $(n,n)$. و بضرب طرفي هذه العلاقة من اليسار بالمصفوفة $B$ نجد:

$$B\cdot\frac{\partial[\mathrm{I}-A]}{\partial a_{ij}}\cdot B+B\cdot[\mathrm{I}-A]\cdot\frac{\partial B}{\partial a_{ij}}=0$$

و بملاحظة أن: $B\cdot[\mathrm{I}-A]=[\mathrm{I}-A]\cdot B=\mathrm{I}$ نجد أن:

[1] حيث إن مشتق مصفوفة بالنسبة إلى متحول عددي هو عبارة عن مصفوفة من ذات المرتبة و كل عناصرها عبارة عن مشتقات عناصر المصفوفة الأصلية بالنسبة لذلك المتحول العددي.

$$\frac{\partial B}{\partial a_{ij}} = -B \cdot \frac{\partial [\mathrm{I} - A]}{\partial a_{ij}} \cdot B \qquad (20-7)$$

حيث إن المصفوفة $B$ هي مقلوب المصفوفة $[\mathrm{I} - A]$ و جداؤهما يساوي مصفوفة الوحدة. ولكن:

$$\frac{\partial [\mathrm{I} - A]}{\partial a_{ij}} = -\left(E_{ij}\right)$$

حيث $\left(E_{ij}\right)$ هي عبارة عن مصفوفة كل عناصرها أصفار عدا العنصر الذي يقع عند تقاطع السطر $i$ مع العمود $j$ الذي يساوي الواحد، و بالتالي يمكن أن نكتب:

$$\frac{\partial B}{\partial a_{ij}} = B\left(E_{ij}\right)B = \begin{bmatrix} b_{1i}b_{j1} & b_{1i}b_{j2} & \cdots & b_{1i}b_{jn} \\ b_{2i}b_{j1} & b_{2i}b_{j2} & \cdots & b_{2i}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{ni}b_{j1} & b_{ni}b_{j2} & \cdots & b_{ni}b_{jn} \end{bmatrix} \qquad (21-7)$$

فمن أجل أي عنصر من عناصر المصفوفة $B$ و ليكن العنصر $b_{kl}$ يكون:

$$\frac{\partial b_{kl}}{\partial a_{ij}} = b_{ki} \cdot b_{jl}$$

أي إن التغير $\partial b_{kl}$ الذي يحدث في العنصر $b_{kl}$ من عناصر المصفوفة $B$ نتيجة تغير العنصر $a_{ij}$ في المصفوفة $A$ بمقدار $\partial a_{ij}$ يساوي:

$$\partial b_{kl} = b_{ki} \cdot b_{jl} \cdot \partial a_{ij} \qquad (22-7)$$

يمكن تعميم العلاقة (22−7) على الحالة التي يتغير فيها أكثر من عنصر في المصفوفة $A$، فنجد أن التغير الكلي الذي يحدث للعنصر $b_{kl}$ سيعطى بالعلاقة التالية:

$$d\, b_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ki} \cdot b_{jl} \cdot \partial a_{ij} \qquad (23-7)$$

**مثال (7−3):**

بفرض أنه لدينا مصفوفة المعاملات الفنية التالية:

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0.3 & 0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix}$$

و بفرض أنه حدثت التغيرات التالية: $\partial a_{11}=+0.1$ ، $\partial a_{31}=-0.1$

فالمطلوب: إيجاد التغير الإجمالي الذي سيحدث لعناصر المصفوفة $B$ نتيجة التغيرات السابقة.

**الحل:** نلاحظ أولاً:

$$\left[\mathrm{I}-A\right]=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ -0.3 & 0.9 & -0.1\\ -0.2 & -0.2 & 0.8\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0.743 & 1.143 & 0.143\\ 0.686 & 0.286 & 1.286\end{bmatrix}$$

بتطبيق العلاقة (7−22) من أجل $\partial a_{11}=+0.1$ نجد:

$$\partial b_{11}=b_{11}\cdot b_{11}\cdot\partial a_{11}=2\cdot 2\cdot 0.1=0.5$$

$$\partial b_{21}=b_{21}\cdot b_{11}\cdot\partial a_{11}=0.743\cdot 2\cdot 0.1=0.149$$

و بطريقة مشابهة نستخرج باقي العناصر فنجد:

$$\partial_1 B=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0.149 & 0 & 0\\ 0.137 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

كذلك بتطبيق العلاقة (7−22) من أجل $\partial a_{31}=-0.1$ نجد:

$$\partial b_{11}=b_{13}\cdot b_{11}\cdot\partial a_{31}=0\cdot 2\cdot(-0.1)=0$$

$$\partial b_{21}=b_{23}\cdot b_{11}\cdot\partial a_{31}=0.143\cdot 2\cdot(-0.1)=-0.029$$

و بطريقة مشابهة نستخرج باقي العناصر فنجد:

$$\partial_2 B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -0.029 & 0 & 0\\ -0.257 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

أما التغير الإجمالي الذي سيحدث لعناصر المصفوفة $B$ نتيجة التغيرات السابقة فنوجده من خلال تطبيق العلاقة (7−23) فنجد:

$$B + \partial_1 B + \partial_2 B = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0.863 & 1.143 & 0.143 \\ 0.566 & 0.286 & 1.286 \end{bmatrix}$$

مع العلم أن المصفوفة $A$ قد أصبحت بعد التغيرات التي حدثت على الشكل التالي:

$$A + \partial_1 A + \partial_2 A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

## 7−6- تأثير تغير المعاملات الفنية للإنتاج في حجوم الإنتاج.

سنبحث الآن في تغير حجم الإنتاج في كل قطاع من قطاعات الاقتصاد الوطني نتيجة تغير العنصر $a_{ij}$ أحد عناصر مصفوفة المعاملات الفنية $A$، بمقدار $\partial a_{ij}$.

لقد وجدنا سابقاً أن: $X = B \cdot Y$ و بناء عليه يمكن أن نكتب العلاقة التالية:

$$X_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \cdot Y_l \qquad (24-7)$$

فإذا كان $\partial b_{kl}$ التغير الذي يحدث للعنصر $b_{kl}$ في المصفوفة $B$، و كذلك $\partial X_k$ التغير الذي يحدث على حجم إنتاج القطاع $k$ نتيجة تغير المعامل الفني للإنتاج $a_{ij}$ بمقدار $\partial a_{ij}$، فنستطيع أن نكتب من خلال العلاقة (7−24):

$$X_k + \partial X_k = \sum_{l=1}^{n} (b_{kl} + \partial b_{kl}) \cdot Y_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \cdot Y_l + \sum_{l=1}^{n} \partial b_{kl} \cdot Y_l$$

أي إن: $$\partial X_k = \sum_{l=1}^{n} \partial b_{kl} \cdot Y_l$$

## تمارين غير محلولة على الفصل السابع

**1)** بفرض لدينا ثلاثة قطاعات إنتاجية في الاقتصاد الوطني، وكانت مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج $A$ بين هذه القطاعات على الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

و بفرض كان شعاع الطلب النهائي على منتجات هذه القطاعات الثلاثة على الشكل التالي:

$$Y = \begin{bmatrix} 800 \\ 900 \\ 600 \end{bmatrix}$$

و المطلوب: تقدير حجم الإنتاج الإجمالي في كل قطاع (الشعاع $X$) واللازم لتغطية الطلب النهائي على منتجات كل قطاع (الشعاع $Y$).

**2)** بفرض لدينا مصفوفة المعاملات الفنية التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

و بفرض حدثت التغيرات التالية: $\partial a_{22} = +0.1$ ، $\partial a_{31} = -0.1$

فالمطلوب:

1. إيجاد التغير الإجمالي الذي سيحدث لعناصر المصفوفة $B$ نتيجة التغيرات السابقة.
2. إيجاد التغير في حجوم الإنتاج نتيجة التغيرات السابقة.

# الفصل الثامن

# أسس البرمجة الخطية

قبل الحديث عن مسائل البرمجة الخطية و طرائق تشكيلها و حلها جبرياً و بيانياً و بطريقة السيمبلكس، لابد من تذكير الطالب بالمتراجحات سواءً بمتحول واحد أم أكثر، و كيفية إيجاد حلول هذه المتراجحات.

## 8-1- المتراجحات:

إذا كان لدينا عددان حقيقيان a , b فإننا نستطيع أن نكتب $a > b$ إذا كان a أكبر تماماً من b، كما يمكن أن نعكسها ونكتبها $b < a$ ونقرأها b أصغر تماماً من a، كما يمكن أن نقول $a \geq b$ أي إن العدد a أكبر أو يساوي b ويمكن أيضاً أن نقول $a \leq b$ أي العدد a أصغر أو يساوي b.

نسمي كل هذه الصيغ متراجحات (أو متباينات)، وهذا يعني أن العددين $a,b$ ليسا متساويين وإنما أحدهما أكبر (أصغر) أو يساوي الآخر، كما في الحالة $a \geq b$.

8-1-1- المتراجحات الخطية:

قد تكون المتراجحات خطية ( من الدرجة الأولى بالنسبة للمتحولات جميعها التي تحتويها ) وقد تكون غير خطية، وقد تكون ذات متحول واحد أو أكثر، وسنقتصر في دراستنا على المتراجحات الخطية والتي لا يزيد عدد متحولاتها عن متحولين اثنين. والتي سوف ندرسها على الشكل التالي:

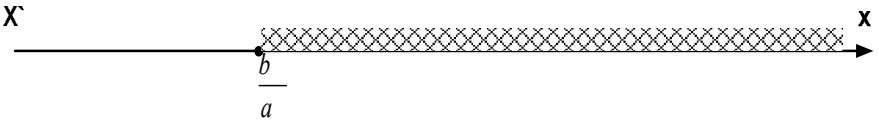
8-1-1-1- المتراجحات الخطية بمتحول واحد:

وهي المتراجحات التي يمكن كتابتها على الشكل $ax \geq b$ وهذه المتراجحة تمثل مجموعة نقاط على محور موّجه x`x حيث يمكن حلها على الشكل التالي: $x \geq \frac{b}{a}$ أي إن مجموعة النقاط التي تمثل حلاً لهذه المتراجحة

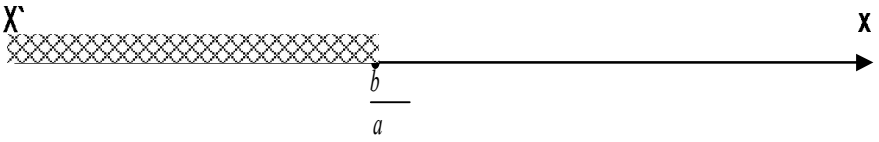
هي نقاط المحور المذكورة والتي تنتمي إلى المجال $x \in \left[\frac{b}{a}, +\infty\right[$، وقد جعلنا المجال مغلقاً من اليسار لأن المتراجحة من الشكل $\geq$، أما لو كانت المتراجحة من الشكل $>$ فيكون المجال $x \in \left]\frac{b}{a}, +\infty\right[$. وعندما تكون المتراجحة من الشكل $ax \leq b$ أو $ax < b$ فتكون المجالات التي تمثل حلولاً لهذه المتراجحة على التوالي $x \in \left]-\infty, \frac{b}{a}\right]$ أو $x \in \left]-\infty, \frac{b}{a}\right[$

وتمثيلها على المحور الموجه يكون على الشكل التالي:

المتراجحة $x \geq \frac{b}{a}$ (الجزء المحدد من المحور):




أو المتراجحة $x \leq \frac{b}{a}$




**مثال (8-1):**

أوجد مجموعة الحلول المشتركة للمتراجحتين التاليتين ثم مثّل نقاط الحل على المحور الموجه

$$3x \geq 12$$
$$5x < 35$$

**الحل:**

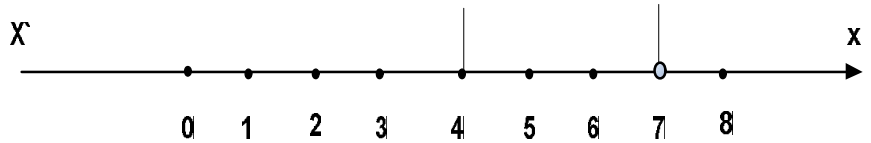
المتراجحة الأولى:

$$3x \geq 12 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow x \in [4, +\infty[$$

المتراجحة الثانية:

$$5x < 35 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x \in ]-\infty, 7[$$

وبالتالي الحل المشترك هو: $x \in [4,7[$




8-1-1-2- المتراجحات الخطية بمتحولين:

تكون عادة المتراجحة الخطية بمتحولين من الشكل $ax + by \geq c$ حيث $a \neq 0$ وكذلك $b \neq 0$ كما يمكن أن تكون إشارة المتراجحة من الشكل $(<,>,\leq,\geq)$، كما أن حلول هذه المتراجحة تكون على شكل منطقة في المستوي الإحداثي XOY.

لإيجاد منطقة حلول هذه المتراجحة، نقوم بتحويل المتراجحة إلى معادلة وذلك باستبدال إشارة المتراجحة $(<,>,\leq,\geq)$ بإشارة مساواة (=)، و نقوم بعد ذلك برسم المستقيم الناتج، والذي يعبر عن حلول المتراجحة، حيث إن المعادلة الناتجة من العملية السابقة تأخذ الشكل التالي $ax + by = c$ وهي معادلة مستقيم. ولرسم هذا المستقيم في مستوي المحاور الإحداثية نستخدم إحدى الطرق المعروفة.

بعد رسم المستقيم في المستوي الإحداثي، نلاحظ أن هذا المستقيم يقسم المستوي عملياً إلى ثلاثة أجزاء نذكرها على الشكل التالي:

1- الجزء الأول: ويقع عن يمين (يسار) وأعلى المستقيم المفروض حسب شكل المتراجحة (أكبر، أصغر).
2- الجزء الثاني: ويقع عن يسار (يمين) وأسفل المستقيم المفروض حسب شكل المتراجحة (أكبر، أصغر).
3- الجزء الثالث: هو مجموعة نقاط المستقيم المفروض ذاتها.

أحد الجزأين الأول أو الثاني يحقق المتراجحة فقط أما الجزء الثالث فهو يحقق المتراجحة عندما تكون من الشكل $(\leq,\geq)$أما إذا كان شكل المتراجحة $(<,>)$ فإن مجموعة نقاط المستقيم لا تحقق المتراجحة.

ولمعرفة أي من الجزأين الأول أو الثاني يحقق المتراجحة لا سبيل لنا إلا عملية التجريب، حيث نختار نقطة معينة من أحد هذين الجزأين (وبشرط أن لا تقع على المستقيم) ونعوض إحداثيات هذه النقطة المختارة في المتراجحة، فإن تحققت المتراجحة عند هذه النقطة، فإن هذه النقطة تكون واقعة في منطقة الحلول المقبولة لهذه المتراجحة وتكون المنطقة الواقعة في الاتجاه الآخر تشكل منطقة الحلول غير المقبولة. أما إذا لم تتحقق المتراجحة عند النقطة المفروضة، فإن هذه النقطة تكون واقعة في منطقة الحلول غير المقبولة للمتراجحة وتكون منطقة الحلول المقبولة في الاتجاه الآخر.

ولاختيار نقطة الاختبار يمكن اختيار أي نقطة في المستوي الإحداثي ولكن غالباً نختار نقطة مبدأ الإحداثيات $(0,0)$، و نعوض إحداثياتها في المتراجحة ونتخذ القرار بناءً على النتيجة وفق ما هو وارد أعلاه.

**مثال (8-2):**

أوجد منطقة الحلول المشتركة للمتراجحتين التاليتين:

$$5x+3y\leq 15$$
$$3x+4y\leq 12$$

**الحل:**

نحول المتراجحتين إلى معادلتين:

$$5x+3y=15$$
$$3x+4y=12$$

لرسم الخطين المستقيمين المعبرين عن هاتين المعادلتين نكتبهما على الشكل:

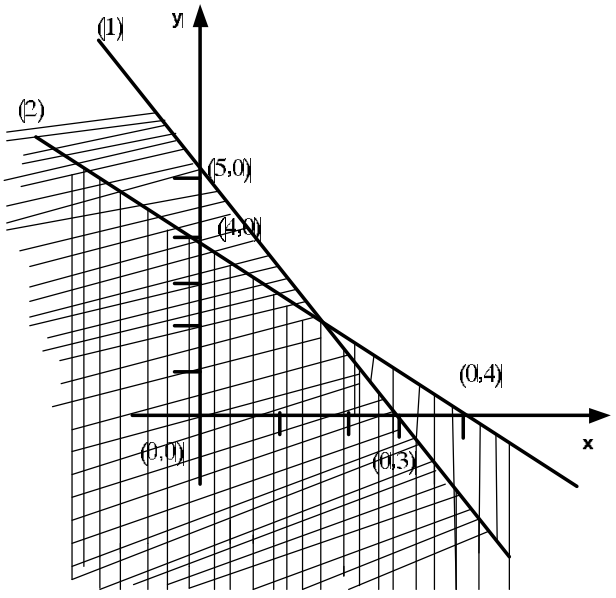
$$\frac{5x}{15}+\frac{3y}{15}=1\Rightarrow\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$
$$\frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}=1\Rightarrow\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$$

نرسم المستقيمين في المستوي الإحداثي ونختبر المتراجحتين عند نقطة المبدأ فنجد :

$5(0)+3(0)=0<15$ المتراجحة الأولى محققة (نقطة المبدأ تقع في منطقة الحلول المقبولة).

$3(0)+4(0)=0<12$ المتراجحة الثانية محققة (نقطة المبدأ تقع في منطقة الحلول المقبولة).

نلاحظ أن منطقة الحلول المشتركة للمتراجحتين معاً هي المنطقة المخططة بخطوط طولانية وعرضانية في الوقت نفسه. فالمنطقة المخططة بخطوط عرضانية فقط تحقق المتراجحة الأولى فقط والمنطقة المخططة بخطوط طولانية فقط تحقق المتراجحة الثانية فقط. انظر الشكل (8−1).




الشكل (8−1)

**مثال (8-3):**

أوجد منطقة الحلول المقبولة و المشتركة للمتراجحات الأربعة التالية:

$$3x + 6y \le 18$$
$$6x + 4y \le 24$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

**الحل:**

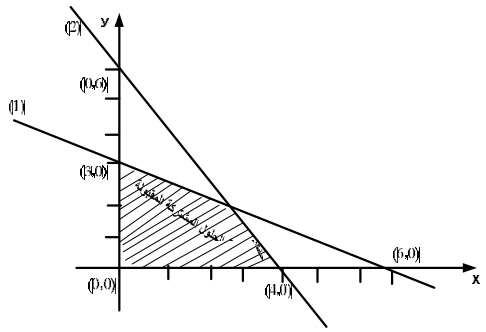
نحول المتراجحات إلى معادلات:

$$3x + 6y = 18 \qquad (1)$$
$$6x + 4y = 24 \qquad (2)$$
$$x = 0 \qquad (3)$$
$$y = 0 \qquad (4)$$

إن المعادلتين الثالثة والرابعة تعبران عن مستقيمين ينطبقان على المحاور الإحداثية حيث $x = 0$ تعبر عن المحور العمودي وبالتالي $x \ge 0$ يعني أن x لا تأخذ قيماً سالبة، كذلك $y = 0$ تعبر عن المحور الأفقي وبالتالي $y \ge 0$ يعني أن y لا تأخذ قيماً سالبة. مما يعني أن منطقة الحلول المشتركة للمتراجحات الأربع هي المنطقة التي تحقق المتراجحتين الأولى والثانية وتكون واقعة في الربع الأول من مستوي الإحداثيات. لذلك نوجد منطقة الحلول المشتركة المقبولة للمتراجحتين الأولى والثانية ونختار منها الجزء الذي يقع في الربع الأول على الشكل التالي:

$$\frac{3x}{18} + \frac{6y}{18} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$$
$$\frac{6x}{24} + \frac{4y}{24} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

نرسم المستقيمين المعبرين عن المتراجحتين الأولى والثانية ونحدد منطقة الحلول المشتركة حيث نلاحظ أن نقطة المبدأ تحقق المتراجحتين فتكون جهة التحقق نحو اليسار والأسفل. (انظر الشكل (8-2)):




الشكل (8-2)

8-1-2- خواص المتراجحات:

للمتراجحات كما للمعادلات قواعد أساسية (خواص) يمكن أن نذكرها كما يلي:

1- إذا جمعنا إلى طرفي المتراجحة عدداً ثابتاً أو طرحنا من طرفيها عدداً ثابتاً فإن العلاقة بين طرفي المتراجحة لا تتغير:

2- إذا ضربنا طرفي المتراجحة بعدد ثابت موجب أو قسمنا طرفيها على عدد ثابت موجب فإن العلاقة بين طرفي المتراجحة لا تتغير.

3- إذا ضربنا طرفي المتراجحة بعدد ثابت سالب أو قسمنا طرفيها على عدد ثابت سالب فإن العلاقة بين طرفي المتراجحة ينعكس اتجاهها.

إن عملية التخطيط سواءً على المستوى الجزئي أم الكلي، تحتاج إلى طرائق كمية تساعد المخططين في إجراء المقارنات بين البدائل المختلفة المتاحة أمام المخطط، وذلك لاختيار البديل الأمثل أو الأفضل، وذلك ضمن الإمكانيات المتاحة، أو ضمن شروط محددة.

فالمنشآت الاقتصادية تحاول دوماً الحصول على أكبر عائد من نشاطها الاقتصادي سواء الإنتاجي، أم التجاري، وذلك من خلال استغلال مواردها المتاحة استغلالاً أمثل، ضمن شروط العملية الاقتصادية التي تمارسها، ويتم الحصول على أكبر ربح أو عائد من العملية الاقتصادية، إما عن طريق زيادة

الإنتاج وإمّا المبيعات ضمن الإمكانيات المتاحة، أو بإنتاج، أو بيع كميات معينة بأقل التكاليف الممكنة. ولتحقيق ذلك هناك طرائق عديدة، من أبسطها وأكثرها سهولة – طريقة البرمجة الخطية–، التي سنعرضها على الشكل التالي:

## 8-2-مفهوم البرمجة الخطية:

تأتي تسمية البرمجة الخطية من كلمتين – برمجة وقد اشتقت من البرنامج أو خطة العمل التي توصلنا إلى مبتغانا من العملية الاقتصادية، والكلمة الثانية الخطية ـ وتعني أن العلاقات الرياضية جميعها المستخدمة في البرنامج أو خطة العمل هي علاقات خطية (أي المتحولات جميعها فيها مرفوعة للأس واحد). وبالتالي يمكننا أن نعرف البرنامج الخطي بأنه:
خطة عمل، أو برنامج يتضمن تابع هدف خطي نسعى إلى تحقيقه (تعظيم ـ تصغير) ضمن مجموعة قيود تكون على شكل متراجحات، أو معادلات خطية مفروضة على متحولات تابع الهدف، وبحل هذا البرنامج نصل إلى الحل الأمثل للمشكلة الاقتصادية التي نسعى لحلها.

وبناءً عليه فإن أسلوب البرمجة الخطية هو من الأساليب الكمية التي يمكن استخدامها في إيجاد الحل الأمثل لكثير من المشكلات الاقتصادية التي تواجهنا. كما أن البرامج الخطية تعتبر من أفضل الطرائق الرياضية التي تساعدنا في معالجة مشكلات الإنتاج، أو التوزيع، أو التخزين، أو المبيعات، والتسويق ضمن شروط محددة مسبقاً، وذلك بهدف الحصول على أكبر عائد من العملية الاقتصادية، أو بشكل آخر ـ تنفيذ الخطة المطلوبة للحصول على أكبر عائد بأقل التكاليف الممكنة.

### 8-2-1- شروط تطبيق أسلوب البرمجة الخطية:

لتطبيق البرمجة الخطية شروط خاصة نذكرها على الشكل التالي:

1- أن تكون المتحولات المستخدمة جميعها قابلة للقياس الكمي وأن تكون العلاقة بين هذه المتحولات خطية.
2- أن تكون المتحولات المستخدمة جميعها غير سالبة (أكبر أو تساوي الصفر) فمثلاً لا يمكن لعدد العمال أو حجم الإنتاج، أو الحجم المستخدم من المواد الأولية،....الخ، أن تكون سالبة، وهو ما نعبر عنه بقيود عدم السلبية.
3- عدم التغير في المواصفات الفنية أو الأسعار للمتحولات المستخدمة جميعها خلال فترة الدراسة.

8-2-2- تشكيل البرنامج الخطي:

إن أي برنامج خطي يتألف من الأجزاء الثلاثة التالية:

1- تابع هدف من الشكل الخطي ويكون على شكل تعظيم Max أو تصغير Min.
2- مجموعة قيود أساسية مفروضة على المتحولات الداخلة في تابع الهدف، وتكون هذه القيود على شكل متراجحات من الشكل $(<,\leq,>,\geq)$أو معادلات خطية حيث تعبر هذه المتراجحات أو المعادلات عن الموارد المتاحة أو المخرجات المطلوب تحقيقها.
3- الجزء الثالث من البرنامج الخطي هو أيضاً عبارة عن قيود فردية تكون على شكل متراجحات خطية، وهي ذاتها في البرامج جميعها ونسميها قيود عدم السلبية وقد تحدثنا عنها أعلاه، ومعناها أن المتحولات جميعها يجب أن تكون غير سالبة (أي أكبر أو تساوي الصفر).

وبناءً عليه يمكن صياغة النموذج العام لمسائل البرمجة الخطية على الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{تابع الهدف} & Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots\ldots + p_nx_n \begin{matrix}\nearrow Max \\ \searrow Min\end{matrix} \\ \text{القيود الاساسية} & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \left(\geq = \leq\right) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \left(\geq = \leq\right) b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \left(\geq = \leq\right) b_m \end{cases} \\ \text{قيود عدم السلبية} & x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \quad (1-8)$$

**ملاحظة 1:**

عندما تكون القيود الأساسية على شكل معادلات نسمي النموذج – نموذجاً نظامياً، ونستخدم مثل هذه النماذج غالباً في عمليات البحث عن الحلول المثلى للمشكلات الاقتصادية نظراً لسهولته.

قبل الغوص في كيفية حل مسائل البرمجة الخطية لابد من التمكن وإتقان عملية كتابة النموذج وصياغته بشكل صحيح، سوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

**مثال (8-4):**

بفرض لدينا مصنع للغسالات المنزلية، ويحتوي هذا المصنع على ثلاثة خطوط للإنتاج، كما يمكنه أن ينتج على كل خط من خطوط الإنتاج طرازين من الغسالات (A, B)، فإذا علمت أن إنتاج الغسالة الواحدة من الطراز A على الخطوط الأول والثاني والثالث يحتاج على التوالي إلى 4 ساعات، 3 ساعات، 5 ساعات. وكذلك إنتاج الغسالة الواحدة من الطراز B على الخطوط الأول والثاني والثالث يحتاج إلى 5 ساعات، 6 ساعات، 4 ساعات على التوالي. وإذا علمت أن المصنع يربح من الغسالة الواحدة من الطراز A 5000

ل.س، ومن الطراز B 6000 ل.س. وإذا علمت أن المصنع يستطيع تشغيل خطوط الإنتاج أسبوعياً الأزمنة التالية: الأول: 90 ساعة، الثاني:120 ساعة، الثالث: 100 ساعة. فالمطلوب:

مساعدة إدارة المصنع على كتابة البرنامج الخطي الذي تستطيع من خلاله الحصول على أكبر ربح ممكن من خلال العملية الإنتاجية دون تجاوز الأزمنة المتاحة للإنتاج.

**الحل:**

لنضع المعلومات السابقة في الجدول التالي لسهولة استخدامها:

الجدول (8-1) معطيات المثال (8-4)

| خطوط الإنتاج | الزمن اللازم لإنتاج القطعة الواحدة | | الزمن المتاح للإنتاج أسبوعياً |
|---|---|---|---|
| | الطراز A | الطراز B | |
| الأول | 4 | 5 | 90 |
| الثاني | 3 | 6 | 120 |
| الثالث | 5 | 4 | 100 |
| الربح من القطعة الواحدة | 5000 | 6000 | |

إذا رمزنا لعدد القطع التي نستطيع إنتاجها من الطراز A بالرمز $x_1$، ومن الطراز B بالرمز $x_2$، فإننا نستطيع صياغة البرنامج على الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{تابع الهدف} & Z = 5000x_1 + 6000x_2 \rightarrow Max \\ \text{القيود الأساسية} & \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 90 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 120 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 100 \end{cases} \\ \text{قيود عدم السلبية} & \begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right\} \quad (2-8)$$

## 8-3- حل مسائل البرمجة الخطية:

يمكن حل مسائل البرمجة الخطية بطرائق عديدة نذكر منها- الطريقة الجبرية، الطريقة البيانية، وطريقة السيمبلكس. ونترك الطرائق الأخرى للمقررات التخصصية.

8-3-1- الطريقة الجبرية لحل مسائل البرمجة الخطية:

لحل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة الجبرية، نحول المتراجحات جميعها (القيود الأساسية إضافةً لقيود عدم السلبية) إلى معادلات. ثم نقوم بحل المعادلات جميعها بعضها مع بعض، وباعتبار أننا ذكرنا سابقاً أننا نستخدم برامج تحتوي متحولين فقط، لذلك سوف نحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً عن طريق حل كل معادلتين حلاً مشتركاً للحصول على الحلول المشتركة لهذه المعادلات، ويكون بذلك عدد الحلول يساوي $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ حلاً، حيث n عدد المعادلات.

بعد حصولنا على حلول المعادلات كلها، نلاحظ أن بعض هذه الحلول يكون مقبولاً وبعضها الآخر غير مقبول. فكي يكون الحل مقبولاً يجب أن يحقق المتراجحات جميعها (القيود)، فإذا كان الحل لا يحقق إحدى المتراجحات على الأقل يكون الحل غير مقبول. ولذلك عند إيجاد الحلول يجب أن نتأكد ولكل حل على حدة من أنه مقبول، ونستبعد الحلول غير المقبولة. ثم نوجد قيمة تابع الهدف للحلول المقبولة فقط، ونختار الحل الذي يجعل قيمة تابع الهدف أمثلية (عظمى، أو صغرى، حسب الحال). وللسهولة فإننا نضع العمليات السابقة بشكل مختصر في جدول مخصص لهذه الغاية، ولسهولة الحصول على النتائج ومقارنتها على الشكل التالي:

الجدول (8–2) نتائج الحل الجبري للبرنامج الخطي

| رقم الحل | كيفية الحل | الحل الناتج | قبول الحل | تابع الهدف |
|---|---|---|---|---|
| 1 | معادلة(1) مع (2) | $x_{11}=.....,x_{21}=.....$ | مقبول/غير مقبول | $z_1=.....$ |
| 2 | معادلة(1) مع (3) | $x_{12}=.....,x_{22}=.....$ | مقبول/غير مقبول | $z_2=.....$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

ولتوضيح كيفية تنفيذ هذه العمليات لنحل البرنامج الذي توصلنا إليه من خلال المثال (8–4).

**مثال (8–5):**

حل البرنامج الخطي التالي حلاً جبرياً (معطيات المثال (8–4)):

$$Z = 5000x_1 + 6000x_2 \rightarrow Max$$
$$4x_1 + 5x_2 \le 90$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 120$$
$$5x_1 + 4x_2 \le 100$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

**الحل:**

نحول المتراجحات جميعها إلى معادلات فنحصل على 5 معادلات على الشكل التالي:

$$4x_1 + 5x_2 = 90 \qquad (1)$$
$$3x_1 + 6x_2 = 120 \qquad (2)$$
$$5x_1 + 4x_2 = 100 \qquad (3)$$
$$x_1 = 0 \qquad (4)$$
$$x_2 = 0 \qquad (5)$$

نقوم بحل هذه المعادلات كل معادلتين مع بعض فنحصل على عدد من الحلول يساوي :

$$\text{حلـــــول } C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

ثم نتأكد من كل حل من الحلول العشرة السابقة، فيما إذا كان مقبولاً أم لا. ونحسب قيمة تابع الهدف للحلول المقبولة فقط. وأخيراً نختار أفضل قيمة لتابع الهدف. هذه الإجراءات نضعها في الجدول التالي:

الجدول (8–3) نتائج حل البرنامج الخطي جبرياً للمثال (8–4)

| رقم الحل | كيفية الحل | الحل الناتج | قبول الحل | تابع الهدف |
|---|---|---|---|---|
| 1 | معادلة(1) مع (2) | $x_{11} = -6.66 , x_{21} = 23.33$ | مرفوض | – |
| 2 | معادلة(1) مع (3) | $x_{12} = 15.56 \ , \ x_{22} = 5.56$ | مقبول | $z_2 = 111111.11$ |
| 3 | معادلة(1) مع (4) | $x_{13} = 0 \quad , \quad x_{23} = 18$ | مقبول | $z_3 = 108000$ |
| 4 | معادلة(1) مع (5) | $x_{14} = 22.5 \quad , \quad x_{24} = 0$ | مرفوض | – |
| 5 | معادلة(2) مع (3) | $x_{15} = 6.66 \quad , x_{25} = 16.66$ | مرفوض | – |
| 6 | معادلة(2) مع (4) | $x_{16} = 0 \quad , \quad x_{26} = 20$ | مرفوض | – |
| 7 | معادلة(2) مع (5) | $x_{17} = 40 \quad , \quad x_{27} = 0$ | مرفوض | – |
| 8 | معادلة(3) مع (4) | $x_{18} = 0 \quad , \quad x_{28} = 25$ | مرفوض | – |
| 9 | معادلة(3) مع (5) | $x_{19} = 20 \quad , \quad x_{29} = 0$ | مقبول | $z_9 = 100000$ |
| 10 | معادلة(4) مع (5) | $x_{110} = 0 \quad , \quad x_{210} = 0$ | مقبول | $z_{10} = 0$ |

نلاحظ أن لدينا أربعة حلول مقبولة فقط وهي الحل رقم (2 و3 و9 و10) وبما أن تابع الهدف من الشكل Max فإننا نلاحظ أن الحل الثاني هو الحل الأمثل لهذا البرنامج حيث قيمة تابع الهدف تساوي $z = 111111.11$ وعندها فإن قيمة $x = 15.56$ وقيمة $y = 5.56$ أي إن المصنع يجب أن ينتج 15.56 غسالة من الطراز A و 5.56 غسالة من الطراز B وبذلك يحقق ربحاً أعظم مقداره $z = 111111.11$ ل.س.

8-3-2- الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية:

هذه الطريقة من أبسط الطرائق لحل مسائل البرمجة الخطية، ولكنها غير فعالة أو حتى غير ممكنة الاستخدام عندما يزيد عدد المتحولات عن اثنين أو ثلاثة، حيث نوجد من خلال هذه الطريقة منطقة الحلول المشتركة للمتراجحات التي تمثل القيود الأساسية للبرنامج، وعندما يكون لدينا متحولان فقط، واستناداً إلى قيود عدم السلبية فإن منطقة الحلول تقع في الربع الأول من مستوى الإحداثيات. كما و إنّ منطقة الحلول المشتركة غالباً ما تكون على شكل مضلع له عدة رؤوس وتكون القيمة المثلى لتابع الهدف عند أحد هذه الرؤوس، لذلك بعد تحديد منطقة الحلول المشتركة للمتراجحات، نوجد قيمة تابع الهدف عند كل نقطة رأسية من النقاط التي تحدد منطقة الحلول المقبولة والتي نسميها النقاط الرأسية (أو النقاط الركينة)، ونختار النقطة (الرأس) الذي تكون قيمة تابع الهدف عنده أمثلية. سواء كانت من الشكل Max أو Min.

وبشكل مختصر يمكننا بيان كيفية الحل وفق هذه الطريقة على الشكل التالي:

- تحويل القيود الأساسية إلى معادلات.
- تمثيل المعادلات بيانياً بخطوط مستقيمة (على اعتبار أن المعادلات خطية).
- إيجاد منطقة الحلول المشتركة المقبولة للمتراجحات جميعاً (على أن تكون في الربع الأول، تماشياً مع قيود عدم السلبية).
- حساب قيمة تابع الهدف عند كل نقطة من النقاط التي تحدد منطقة الحلول المقبولة.
- تحديد النقطة التي تجعل تابع الهدف أمثلاً.

ولتوضيح كيفية القيام بالخطوات السابقة لنحل البرنامج الخطي الذي تم التوصل إليه في المثال (8-4).

**مثال (8-6):**

حل البرنامج الخطي التالي حلاً بيانياً (معطيات المثال رقم (8-4)):

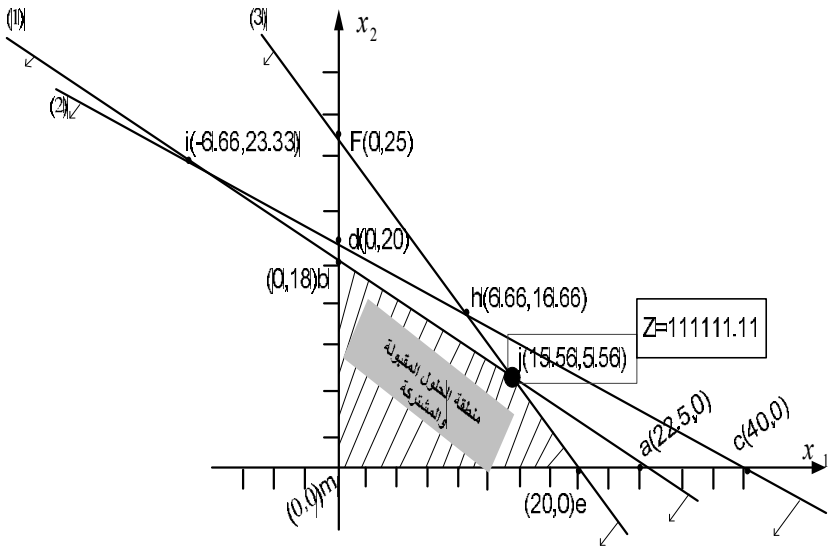
$$Z = 5000x_1 + 6000x_2 \rightarrow Max$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 90$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 120$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

**الحل:**

نحول القيود الأساسية إلى معادلات على الشكل التالي:

$$4x_1 + 5x_2 = 90 \qquad (1)$$
$$3x_1 + 6x_2 = 120 \qquad (2)$$
$$5x_1 + 4x_2 = 100 \qquad (3)$$

نرسم المستقيمات المعبرة عن هذه المعادلات، مع التذكير بأن منطقة الحلول المقبولة -دائماً- تقع في الربع الأول من مستوي الإحداثيات لأن $x_1 \geq 0$ وكذلك $x_2 \geq 0$، وبذلك يكون الشكل البياني على الشكل التالي:




الشكل رقم (8−3)

نلاحظ أن منطقة الحلول المشتركة والمقبولة لهذا البرنامج تقع ضمن المنطقة المحددة بالنقاط الرأسية (m e j b) وعلى محيطها باعتبار أن المتراجحات من الشكل≤. كما نلاحظ أن الحل الأمثل لهذا البرنامج، الذي يتمثل في إيجاد أعظم قيمة لتابع الهدف يقع في إحدى هذه النقاط الرأسية الأربع. مع العلم أن إحداثيات النقاط جميعها معروفة عدا النقطة j الناتجة من تقاطع المستقيم الأول مع المستقيم الثالث، وبحل المعادلتين الأولى والثالثة حلاً مشتركاً نجد أن إحداثيات النقطة j هي: $j\,(15.56,5.56)$.

ولمعرفة الحل الأمثل لهذا البرنامج والمتمثل بتعظيم تابع الهدف، نعوض إحداثيات النقاط الرأسية في تابع الهدف. ونختار النقطة التي تجعل تابع الهدف في أعظم قيمة له. وذلك على الشكل التالي:

−النقطة $m\,(0,0)$ $\Leftarrow$ قيمة تابع الهدف $Z=5000(0)+6000(0)=0$ .

−النقطة $e\,(20,0)$ $\Leftarrow$ قيمة تابع الهدف $Z=5000(20)+6000(0)=100000$ .

-النقطة $j(15.56,5.56)$ $\Leftarrow$ قيمة تابع الهدف

$$.Z = 5000(15.56) + 6000(5.56) = 111111.11$$

-النقطة $b(0,18)$ $\Leftarrow$ قيمة تابع الهدف $Z = 5000(0) + 6000(18) = 108000$.

نلاحظ أن أعظم قيمة لتابع الهدف تكون عند النقطة $j(15.56,5.56)$ وبذلك يتحقق أكبر ربح ومقداره $Z = 111111.11$ ل.س.

**ملاحظة 1:**

يمكن إيجاد الحل الأمثل بيانياً برسم المستقيم الذي يمثل تابع الهدف فإذا كان تابع الهدف من الشكل: $Z = \alpha x_1 + \beta x_2$

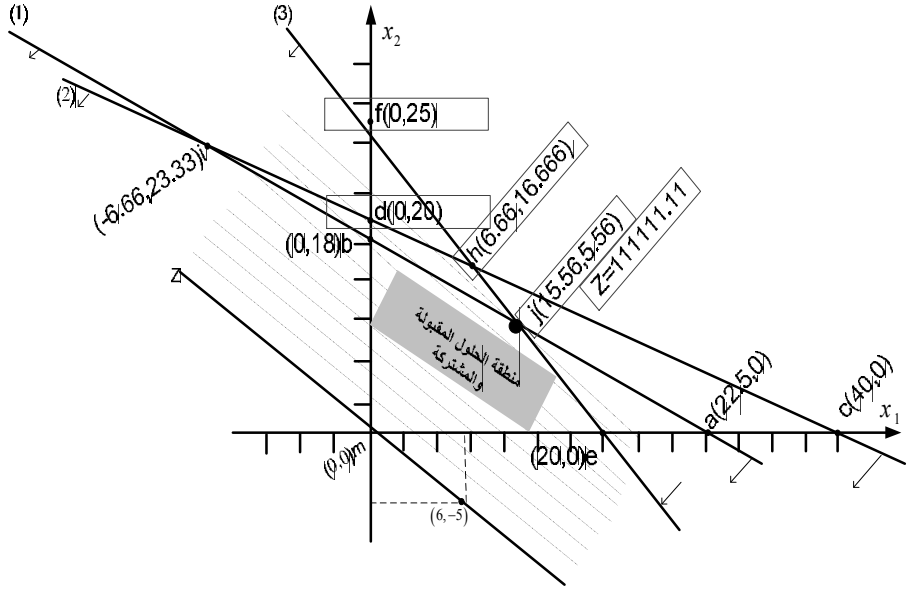
فإننا نستطيع كتابته على الشكل: $x_2 = \frac{Z}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} x_1$ حيث نعتبر هنا أن Z متحول وسيط وليس تابعاً. وبإعطاء Z قيماً متغيرة نحصل على مجموعة من المستقيمات المتوازية والتي يمكن إزاحتها نحو الأعلى أو الأسفل، حسب طبيعة البرنامج الخطي وبحيث تبقى هذه المستقيمات متوازية. حتى يمر المستقيم بأول نقطة أو آخر نقطة من منطقة الحلول المقبولة (حسب طبيعة البرنامج) فتكون هذه النقطة هي الممثلة للحل الأمثل.

ففي مثالنا رقم (8-6) نلاحظ أننا نستطيع كتابة تابع الهدف على الشكل:

$$x_2 = \frac{Z}{6000} - \frac{5000}{6000} x_1$$

وعندما يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ تكون قيمة Z=0 وبالتالي تصبح المعادلة الأخيرة من الشكل $x_2 = -\frac{5}{6} x_1$ ولتحديد نقطة أخرى نعطي $x_1$ القيمة $x_1 = 6$ مثلاً نلاحظ أن $x_2 = -\frac{5}{6} \cdot 6 = -5$، أي إن المستقيم المعبر عن تابع الهدف يمر بنقطتين هما $(0,0), (6,-5)$ نرسم هذا المستقيم ونسحبه نحو الأعلى فنلاحظ أنه يمر بالنقطة j وهي آخر نقطة يمر بها المستقيم لذلك فهي

تمثل الحل الأمثل لهذا البرنامج حيث التابع هنا من الشكل Max ونوضح ذلك من خلال الرسم البياني التالي:




الشكل رقم (8-4)

نلاحظ أن آخر نقطة تمر فيها المستقيمات الموازية للمستقيم Z هي النقطة j لأن التابع من الشكل Max، وبذلك تكون النقطة j هي النقطة التي تمثل الحل الأمثل للبرنامج المذكور.

8-3-3- أساسيات طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية:

قبل الحديث عن طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية لنعرف ما يسمى (النموذج النظامي):

8-3-3-1- النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية:

يعدّ النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية والذي ورد ذكره سابقاً شكلاً خاصاً من النموذج العام لمسائل البرمجة الخطية. وتكون فيه القيود الأساسية على شكل معادلات خطية بدلاً من المتراجحات الخطية، وذلك تسهيلاً لعملية الحصول على الحلول المثلى. وهو يأخذ الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{تابع الهدف} & Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + .....+ p_nx_n \to M\ \text{ax} \\ \text{القيود الاساسية} & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .....+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .....+ a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\ \text{قيود عدم السلبية} & \begin{cases} x_1, x_2, x_3 ....., x_n \geq 0 \\ b_1, b_2, b_3, ....., b_m \geq 0 \end{cases} \end{array}\right\} \quad (4-8)$$

## 8-3-3-2- تحويل النموذج العام إلى النموذج النظامي:

لتحويل النموذج العام إلى النموذج النظامي نتبع الخطوات التالية:

1- إذا كان تابع الهدف من الشكل Min نحوله إلى الشكل Max وذلك بإجراء التحويل التالي ( يضرب التابع بـ (-1)):

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + ..... + p_nx_n \to Min$$

يصبح:

$$-Z = -p_1x_1 - p_2x_2 - ..... - p_nx_n \to Max$$

حيث إن إيجاد Max لتابع معين يكافئ رياضياً إيجاد Min القيمة السالبة للتابع نفسه.

2- نحول القيود الأساسية جميعها من متراجحات إلى معادلات خطية وذلك بإدخال متحولات غير سالبة إضافية عليها على الشكل التالي:

✓ نضيف متحولاً غير سالب $y_i$ إلى الطرف الأيسر لكل متراجحة من الشكل:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ..... + a_{in}x_n \leq b_i$$

لتصبح من الشكل:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ..... + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

✓ نطرح متحولاً غير سالب $y_i$ من الطرف الأيسر لكل متراجحة من الشكل:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

لتصبح من الشكل:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n - y_i = b_i$$

3- نحول الأعداد جميعها $b_i$ في المعادلات القديمة والجديدة إلى أعداد موجبة وذلك بضرب طرفي المعادلة عند اللزوم بالعدد $(-1)$.

4- ندخل المتحولات الإضافية جميعها $y_i$ في تابع الهدف بأمثال تساوي الصفر:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n + 0y_1 + 0y_2 + \ldots + 0y_m \rightarrow Max$$

5- نحول المتحولات السالبة جميعها $x_j$ إلى متحولات موجبة بضربها بالعدد $(-1)$ أي:

$$x_j = -x_j \quad , x_j \geq 0$$

ونعوض ذلك في المعادلات جميعها بما في ذلك تابع الهدف.

6- نعزل المتحولات جميعها غير المقيدة $x_k$ من المعادلات جميعها وذلك بحساب قيمة $x_k$ من إحدى المعادلات القديمة أو الجديدة حيث:

$$x_k = \frac{1}{a_{ik}}\left(b_i - \sum_{j \neq k}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

ونحذف هذه المعادلات من النموذج، ثم نقوم بتعويض هذه المتحولات في المعادلات الأخرى جميعها، وفي تابع الهدف فنحصل على نموذج لا يتضمن متحولات غير مقيدة، وهذا الأمر يؤدي إلى تخفيض عدد المعادلات في النموذج ويسهل عملية الحل. ولكن هذه المتحولات $x_k$ لا تهمل وإنما يعاد حسابها من المعادلات السابقة بعد حل النموذج والحصول على الحل المثالي.

7- يمكن تحويل المتراجحات من الشكل $\alpha_j \le x_j \le \beta_j$ إلى متراجحتين من الشكل:

$$x_j \le \beta_j$$
$$x_j \ge \alpha_j$$

ثم تحويل المتراجحات إلى معادلات كما ورد سابقاً في النموذج.

8-3-3-3- الحل القاعدي للنموذج النظامي:

علينا أن نبحث عن الحل القاعدي غير السالب الذي يحقق أمثلية تابع الهدف (أي يأخذ أكبر قيمة له)، لذلك علينا أن نحول النموذج النظامي إلى شكل قاعدي معين. حيث نضع المتحولات السابقة التي في النموذج النظامي في جدول، فإذا كان الجدول يحتوي على متحولات تشكل أمثالها مصفوفة واحدية، نقول عندها إن هناك حلاً قاعدياً. كما في الجدول التالي:

الجدول (8-4) الشكل العام للحل القاعدي للنموذج

| المتحولات / المعادلات(القاعدة) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | 1 | 0 | 0 | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | 0 | 1 | 0 | $b_2$ |
| 3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | 0 | 0 | 1 | $b_3$ |
| تابع الهدف | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | 0 | 0 | 0 | $Z$=.... |

نلاحظ من الجدول السابق أن هناك حلاً قاعدياً للنموذج، حيث تشكلت لدينا عند المتحولات $y_1$، $y_2$، $y_3$ مصفوفة واحدية، وبالتالي فإن الحل القاعدي هو:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$
$$y_1 = b_1$$
$$y_2 = b_2$$
$$y_3 = b_3$$

8-3-3-4-طريقة السيمبلكس:

إن الطريقتين المذكورتين أعلاه لحل مسائل البرمجة الخطية (الطريقة الجبرية والطريقة البيانية) لا تصلحان غالباً إذا زاد عدد المتحولات عن اثنين ولذلك لابد من وجود طريقة سهلة وواضحة وتستخدم عندما يكون عدد المتحولات أكثر من ذلك. وسنعرض فيما يلي طريقة السيمبلكس في حل مسائل البرمجة الخطية، والتي تعتمد على إيجاد حل قاعدي غير سالب لجملة المعادلات الخطية الممثلة للقيود، ثم إجراء تبديلات بين بعض المتحولات القاعدية وبعض المتحولات الحرة (غير القاعدية) حتى الوصول إلى الحل القاعدي غير السالب المناسب، ومنه نحصل على الحل الأمثل المطلوب بوضع المتحولات جميعها الحرة مساوية للصفر، واستخلاص قيم المتحولات القاعدية من المعادلات التي تتضمنها. ولكي يكون التبديل مفيداً ومثمراً في جعل تابع الهدف أمثل وبشكل مبسط، ندرس أمثال المتحولات المشكلة لتابع الهدف ونختار المتحول ذا أكبر أمثال لحذفه من التابع Z وإدخاله إلى متحولات القاعدة التي نشكلها. وهذه العملية تجعل هذا المتحول قاعدياً وتمكنه من أن يساهم أكثر من غيره في العملية حتى نحصل على الحل الأمثل للبرنامج الخطي. ويمكن ذكر تفاصيل هذه الطريقة على الشكل التالي والتي تتلخص بالخطوات الثلاث التالية:

الخطوة الأولى: في هذه الخطوة نحول النموذج العام إلى النموذج النظامي، وقد تم العرض أعلاه كيف تتم هذه العملية.

الخطوة الثانية: في هذه الخطوة يتم تحويل الشكل النظامي إلى الشكل القاعدي للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة، وقد تم التعرف على ذلك أعلاه أيضاً.

الخطوة الثالثة: في هذه الخطوة نبحث عن الحل الأمثل المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة. وتتم هذه العملية وفق التالي:

1- نختار أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير (في جدول الحل القاعدي) وهو سطر تابع الهدف. حيث نسمي هذه القيمة – المتغير الداخل والعمود المقابل لها– العمود المحوري (عمود الارتكاز) و في حال كان هناك قيمتان متساويتان أو أكثر هي الأكبر في سطر تابع الهدف فنختار إحدى هذه القيم بدون تفضيل.

2- نقسم القيم الموجبة في عمود الثوابت على العناصر المقابلة لها (الموجبة فقط) في العمود المحوري، ونختار أصغر ناتج للقسمة، ونسمي السطر المقابل لهذه القيمة – السطر المحوري (سطر الارتكاز)، كما نسمي أصغر ناتج للقسمة – العنصر المحوري (عنصر الارتكاز) وإذا حصلنا بنتيجة القسمة على أكثر من قيمة (هي الأصغر) نختار أي قيمة منها ولا فرق.

3- نشكل الحل الأساسي المحّسن وذلك بتشكيل جدول جديد يكون فيه السطر المقابل لسطر الارتكاز هو سطر الارتكاز ذاته بعد تقسيم كل عنصر فيه على العنصر المحوري، ونسميه السطر المحوري الجديد أو سطر الارتكاز الجديد، ونجعل باقي عناصر العمود المحوري مساوية للصفر في الجدول الجديد. أما باقي عناصر الأسطر الأخرى في الجدول الجديد فتحسب بالعلاقة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{ما يقابل العنصر في سطر الارتكاز} * \text{ما يقابل العنصر في عمود الارتكاز}}{\text{العنصر المحوري (إعنصر الارتكاز)}}$$

4- نكرر العمليات السابقة حتى نحصل على قيم سطر تابع الهدف كلها أصفار أو قيم سالبة، عندها نتوقف عن الحل ونقرر بأننا وصلنا إلى

الحل الأمثل وفيه تكون القيم الموجودة في عمود الثوابت مقابلة للمتحولات الموجودة في العمود الأول، أما باقي المتغيرات فتكون مساوية للصفر، وقيمة تابع الهدف تكون مساوية للقيمة الموجودة عند تقاطع عمود الثوابت مع سطر تابع الهدف.و لتوضيح كيفية الحل بطريقة السيمبلكس سوف نحل البرنامج الوارد في المثال (8-4) المعروض أعلاه بطريقة السيمبلكس.

**مثال (8-7):**

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السيمبلكس (معطيات المثال (8-4)):

$$Z = 5000x_1 + 6000x_2 \to Max$$
$$4x_1 + 5x_2 \le 90$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 120$$
$$5x_1 + 4x_2 \le 100$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

**الحل:**

- نحول النموذج السابق إلى النموذج النظامي بإضافة متحولات إضافية إلى المتراجحات وإضافتها أيضاً بأمثال معدومة إلى تابع الهدف ليصبح النموذج:

$$Z = 5000x_1 + 6000x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \to M\ \text{ax}$$
$$4x_1 + 5x_2 + y_1 = 90$$
$$3x_1 + 6x_2 + y_2 = 120$$
$$5x_1 + 4x_2 + y_3 = 100$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

-نلاحظ أنه قد تحول الشكل النظامي للبرنامج إلى الشكل القاعدي، لذلك نشكل جدول الحل القاعدي الأول:

الجدول (8-5) جدول الحل الأول

المتحول الداخل ↓

| المتحولات / المعادلات(القاعدة) | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ ← المتحول الخارج | 4 | **5** | 1 | 0 | 0 | 90 |
| $y_2$ | 3 | 6 | 0 | 1 | 0 | 120 |
| $y_3$ | 5 | 4 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| تابع الهدف | 5000 | 6000 | 0 | 0 | 0 | Z-0 |

نلاحظ أن المتحولات الإضافية تشكل حلاً قاعدياً لأنها تشكل مصفوفة الوحدة، لذلك نبدأ بالبحث عن الحل الأمثل:

- إن أكبر قيمة في سطر تابع الهدف 6000 تقابل المتحول $x_2$ لذلك ندخل من عمود $x_2$ في الحل

- نقسم عناصر الثوابت على عناصر العمود المقابل لـ $x_2$ فنجد أن لدينا ثلاث قيم هي:

$\left(\frac{90}{5},\frac{120}{6},\frac{100}{4}\right)$ نلاحظ أن أصغر قيمة هي $\frac{90}{5}$ وهي في السطر الأول وتقابل المتحول الإضافي $y_1$ لذلك نخرج هذا المتحول من قاعدة النموذج، وبالتالي يمكن أن نكتب أنه تحدد لدينا التالي:

العمود الثاني – عمود الارتكاز

السطر الأول – سطر الارتكاز

العنصر 5 – عنصر الارتكاز

- نشكل الجدول الثاني ونضع فيه العمود الثاني كله أصفار ما عدا عنصر الارتكاز نضعه مساوياً الواحد(العنصر الواقع عند تقاطع العمود الثاني مع السطر الأول)

أما عناصر السطر الأول فتقسم كلها على العنصر 5

أما عناصر السطرين الثاني والثالث فتحسب وفق القاعدة التي تقول:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{ما يقابل العنصر في سطر الارتكاز} * \text{ما يقابل العنصر في عمود الارتكاز}}{\text{العنصر المحوري (عنصر الارتكاز)}}$$

فمثلاً العنصر الواقع عند تقاطع السطر الثاني مع العمود الثالث يحسب على الشكل التالي:

$$0-\frac{1\cdot 6}{5}=-\frac{6}{5}$$

وكذلك العنصر الواقع عند تقاطع السطر الثاني مع العمود b (عمود الثوابت) يحسب على الشكل التالي: $120-\frac{90\cdot 6}{5}=120-108=12$

وهكذا بالنسبة لباقي العناصر في الجدول.

الجدول (8-6) جدول الحل الثاني

المتحول الداخل ↓

| المتحولات / القاعدة | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $\frac{4}{5}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 0 | 18 |
| $y_2$ | $-\frac{9}{5}$ | 0 | $-\frac{6}{5}$ | 1 | 0 | 12 |
| $y_3$ ← المتحول الخارج | $\frac{9}{5}$ | 0 | $-\frac{4}{5}$ | 0 | 1 | 28 |
| تابع الهدف | 200 | 0 | -1200 | 0 | 0 | Z-108000 |

– نلاحظ في الجدول الأخير أنه يوجد لدينا قيمة وحيدة موجبة في سطر تابع الهدف وهذه القيمة تقابل المتحول $x_1$ لذلك ندخل المتحول $x_1$ في الحل القاعدي، و باتباع ذات الخطوات السابقة نحصل على الجدول التالي:

الجدول (8–7) جدول الحل الثالث

| المتحولات / القاعدة | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{5}{9}$ | 0 | $-\frac{4}{9}$ | $\frac{50}{9}$ |
| $y_2$ | 0 | 0 | $-\frac{10}{5}$ | 1 | 1 | 40 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{4}{9}$ | 0 | $\frac{5}{9}$ | $\frac{140}{9}$ |
| تابع الهدف | 0 | 0 | $\frac{-10000}{9}$ | 0 | $\frac{-1000}{9}$ | $Z-\frac{1000000}{9}$ |

نلاحظ أن القيم جميعها في سطر تابع الهدف أصبحت سالبة في الجدول الأخير مما يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل والذي يتمثل بالتالي:

$$y_2 = 40,\ x_2 = \frac{50}{9},\ \ x_1 = \frac{140}{9}$$

أما قيمة تابع الهدف فتساوي $Z = \frac{1000000}{9}$ مع العلم أن $y_1 = 0$ ، $y_3 = 0$ .

للتأكد من صحة الحل نعوض القيم التي حصلنا عليها في تابع الهدف والشروط فإن تحققت يكون الحل صحيحاً وإلا فيكون الحل غير صحيح.

# تمارين غير محلولة على الفصل الثامن

**1)** حل المتراجحات التالية كل منها على حدة (بيانياً):

$A)\quad 3x+4\geq 16$

$B)\quad 5+4x\leq 17$

**2)** حدد بيانياً منطقة الحلول المقبولة والمشتركة للمتراجحات التالية:

$$A)\quad \begin{cases} 2x+2y\geq 8 \\ 4x+6y\geq 12 \end{cases}$$

$$B)\quad \begin{cases} x+y\leq 6 \\ 2x+3y\leq 12 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

**3)** حل المتراجحة التالية بيانياً: $5x+4y\geq 20$ ، ثم اضرب طرفي المتراجحة بالعدد $(-2)$ وأوجد مرة أخرى منطقة الحلول المقبولة بيانياً. وقارن بين الحالتين.

**4)** تمتلك إحدى الشركات معملين لإنتاج الأدوات الكهربائية المنزلية، وفي كل معمل ثلاثة خطوط للإنتاج أحدهما ينتج البرادات والآخر الغسالات والثالث المكيفات، وقد تعاقدت الشركة على تزويد إحدى المنشآت بالمقادير التالية:

600 براد، 400 غسالة، 1200 مكيف.

فإذا علمت أن هذه الشركة تتحمل يومياً 200 ألف ليرة سورية لتشغيل المعمل الأول، و160 ألف ليرة سورية لتشغيل المعمل الثاني، وإذا علمت أن المعمل الأول ينتج في يوم العمل الواحد 30 براداً و 10 غسالات و20 مكيفاً، بينما ينتج المعمل الثاني 10 برادات و 10 غسالات و60 مكيفاً، فالمطلوب:

1. وضع البرنامج الخطي لهذه القضية، بحيث تفي هذه الشركة بما تعاقدت عليه بأقل التكاليف.
2. حل البرنامج الخطي بيانياً.
3. حل البرنامج الخطي جبرياً.
4. حل البرنامج الخطي بطريقة السيمبلكس.

**5)** تنتج إحدى شركات السيارات نموذجين (طرازين) من السيارات، وتربح من الطراز الأول لكل سيارة 100 ألف ليرة سورية، ومن الطراز الثاني 70 ألف ليرة سورية، فإذا علمت أن الشركة تحتاج إلى 5 واردیات عمل لتجميع محرك السيارة الأولى و3 واردیات عمل لتجميع محرك السيارة الثانية، كما تحتاج إلى واردیتي عمل لتجميع هيكل كلا السيارتين كما تحتاج إلى واردية واحدة لتجميع محرك السيارة الأولى مع هيكلها، بينما تحتاج إلى نصف واردية عمل لتجميع محرك السيارة الثانية مع هيكلها. فإذا كان الوقت المتاح لدى هذه الشركة هو 390 واردية عمل لتجميع المحركات و210 واردیات لتجميع الهياكل، و220 واردية لتجميع المحركات مع الهياكل، فالمطلوب:

1. صياغة البرنامج الخطي لهذه القضية، بما يحقق أكبر ربح ممكن للشركة.
2. حل البرنامج بيانياً.
3. حل البرنامج جبرياً.
4. حل البرنامج بطريقة السيمبلكس.

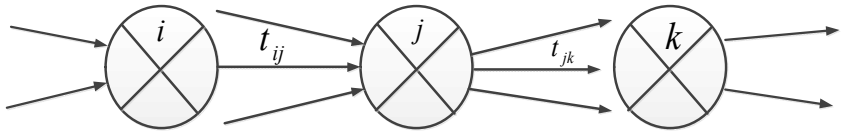
# الفصل التاسع

# مبادئ التخطيط الشبكي

## 9-1- مقدمة وتعاريف:

إن التخطيط الشبكي هو نظام للتخطيط والإدارة، يتناول تخطيط العمليات المعقدة وإدارة تنفيذها بأقصر زمن وأقل كلفة، وهو يعطينا إمكانية لاكتشاف نقاط الاختناق ولإجراء التصحيحات اللازمة، ويعتمد هذا النظام على تجزئة المشروع أو أية عملية معقدة إلى عمليات بسيطة ثم وضعها على شكل شبكة تعكس ترتيب تلك العمليات وتوضح العلاقات بينها، وتسمى هذه الشبكة بشبكة الأعمال (Networks) وهي تتألف من عنصرين أساسين هما: الأنشطة والحوادث.

- النشاط (العملية): وهو أي إجراء لتنفيذ عمل ما، والنشاط يكون مصحوباً بزمن ومقروناً بكلفة، أي إن لكل نشاط مدة زمنية محددة (أو عشوائية) ويتطلب موارد إنسانية ومادية لتنفيذه، ويرسم كل نشاط على الشبكة بوساطة سهم تعلوه المدة الزمنية (t) اللازمة لتنفيذه، ويتجه من حادث بدايته إلى حادث نهايته.
- الحادث: وهو واقعة تشير إلى بداية نشاط ما أو نهايته، ولا يرافق الحادث أي زمن أو تكلفة، ويقابل لحظة زمنية معينة، ونرسم الحادث في الشبكة على شكل دائرة تتضمن رقمه (j)، والحادث قد يكون نتيجة لنهاية عدد من الأنشطة أو بداية لعدد آخر منها.
- الأنشطة السابقة واللاحقة: وتسمى الأنشطة التي تنتهي بالحادث (j) بالأنشطة السابقة له، أما الأنشطة التي تبدأ من الحادث (j) فتسمى بالأنشطة اللاحقة له، وسنرمز للنشاط بدليلي حادثي انطلاقه واستقراره كما يلي:(i,j) و (j,k)....الخ، ويمكننا تمثيل ذلك على الشكل الآتي:




أنشطة لاحقة بـ (J)  أنشطة سابقة لـ (J)

الشكل رقم (9-1)

فالنشاط (i,j) على الشكل (9-1) وكل نشاط في حكمه يعتبر من الأنشطة السابقة للحادث (j) وهو يبدأ من (i) وينتهي في (j).

أما النشاط (j,k) وكل نشاط في حكمه يعتبر نشاطاً لاحقاً بالحادث (j) وهو يبدأ من (j) وينتهي في (k).

أما $t_{ij}$ و $t_{jk}$ فهما مدتا تنفيذ النشاطين (i,j) و(j,k) على الترتيب، وهما موضوعتان على السهم من الأعلى. كما سنصطلح لاحقاً أن نضع رقم الحادث ضمن الدائرة التي تمثل الحادث وفي القسم الأعلى منها بعد تقسيمها إلى أربعة أجزاء بوساطة إشارة مثل X.

- قاعدة الأسبقية: وهي القاعدة التي يتم تنظيم وتنفيذ الحوادث حسبها وتتضمن شروط الأسبقية الآتية:

لا يمكن تحقيق أي حادث ما لم تكن الأنشطة السابقة له مباشرة قد أنجزت تماماً، وإن تحقيق أي حادث يسمح بالانتقال إلى تنفيذ الأنشطة اللاحقة به مباشرة، ولا يمكن البدء في تنفيذ أي نشاط مالم يكن حادثاً بدايته قد تحقق تماماً.

- النشاط الوهمي: هو نشاط فرضي لا يرافقه زمن ولا تكلفة، ونستخدمه أحياناً للتخلص من بعض الحالات الشاذة، ونرسمه على الشبكة بسهم متقطع.
- الحادث الوهمي: هو حادث فرضي نستخدمه للتخلص من بعض الحالات الخاصة.

- الشبكة: وهي التمثيل المتشابك والمتتالي لمجموعة الأنشطة المتفصلة فيما بينها بوساطة حوادث تتفق مع شروط الأسبقية، وعند تشكيل الشبكات يجب أن نراعي فيها القواعد الأساسية الآتية:

1- أن يكون للشبكة حادث بداية وحيد، ولا يسبقه أي نشاط، ونرمز لهذا الحادث بالرمز $p_0$ ونعطيه الرقم (0).

2- ألا تتضمن الشبكة أي حادث ليس له أنشطة سابقة (غير حادث البداية $p_0$)، وإذا صدف واعترضتنا حوادث بدون أنشطة سابقة لها، فإننا نقوم بإدخال أنشطة وهمية تصل حادث البداية أو بأي حادث آخر مناسب، ونرمز لهذه الأنشطة الوهمية بأسهم متقطعة ولا نضع لها زمناً ولا كلفة.

3- أن يكون للشبكة حادث نهاية وحيد ويسمى الهدف، ولا يلحق به أي نشاط كان، ونرمز لهذا الحادث الأخير بالرمز $p_n$.

4- ألا تتضمن الشبكة أية حوادث ليس لها أنشطة لاحقة بها (غير حادث النهاية $P_n$)، وإذا اعترضتنا حوادث بدون أنشطة لاحقة فإننا ندخل على الشبكة أنشطة وهمية لوصل تلك الحوادث بالحادث الأخير أو بأي حادث آخر مناسب.

5- أن يكون تتالي الحوادث وتشابك الأنشطة في الشبكة منسجماً مع قاعدة الأسبقية السابقة، والتي تنص على ما يلي: لا يمكن أن يتحقق الحادث ما لم تنجز الأنشطة السابقة له، كما لا يمكن البدء في تنفيذ أي نشاط ما لم يكن حادث بدايته قد تحقق تماماً.

6- ألا تتضمن الشبكة أي دوار ناجم عن اتجاهات الأسهم فيها.

- خطوات تشكيل الشبكة:

1- نقوم بإعداد قائمة بالحوادث والأنشطة في جدول خاص بحيث يتم توضيح الأنشطة السابقة واللاحقة لكل حادث.

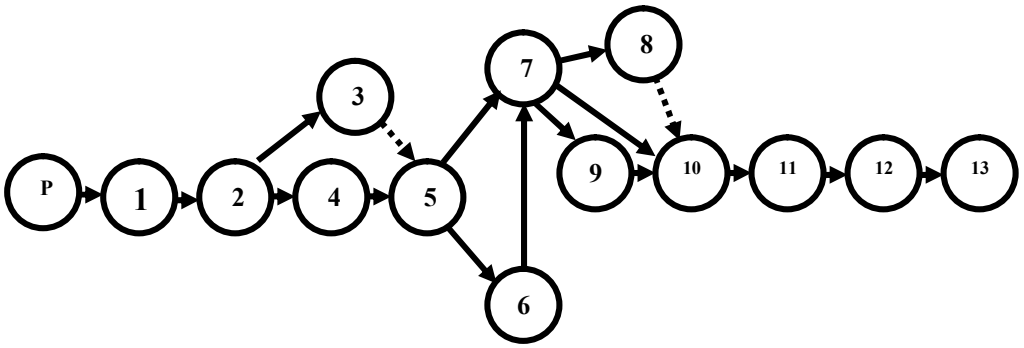
وكمثال نأخذ الأنشطة التي يتألف منها مشروع بناء منزل صغير والمعروضة في الجدول التالي (مثال فرضي): ونقوم برسم الشبكة انطلاقاً من

حادث البداية $p_0$ حتى حادث النهاية $p_n$، ابتداء من اليسار إلى اليمين وبحيث نراعي العلاقات جميعها بين كل نشاط والأنشطة السابقة واللاحقة له والواردة في الجدول التالي:

**جدول الأنشطة لبناء منزل صغير**

| اسم النشاط | حادث انطلاقه | حادث استقراره | الأنشطة السابقة | الأنشطة اللاحقة | مدة التنفيذ | الكلفة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الحصول على الرخصة | $p_0$ | 1 | – | (1,2) | $t_{01}$ | $C_{01}$ |
| حفر الأساس | 1 | 2 | (0,1) | (2,3)(2,4) | $t_{12}$ | $C_{12}$ |
| تمديد المجاري | 2 | 3 | (1,2) | – | $t_{23}$ | $C_{23}$ |
| تدعيم المجاري | 2 | 4 | (1,2) | (4,5) | $t_{24}$ | $C_{24}$ |
| إقامة الأعمدة | 4 | 5 | (2,4) | (5,6) | $t_{45}$ | $C_{45}$ |
| تشييد الجدران | 5 | 6 | (4,5) | (6,7) | $t_{56}$ | $C_{56}$ |
| إقامة قالب السكن | 5 | 7 | (4,5) | (7,8) (7,9) (7,10) | $t_{45}$ | $C_{45}$ |
| سكب السطح | 6 | 7 | (5,6) | (7,8) (7,9) (7,10) | $t_{67}$ | $C_{67}$ |
| تمديد شبكة الكهرباء | 7 | 8 | (6,7) | – | $t_{78}$ | $C_{68}$ |
| تمديد شبكة المياه | 7 | 9 | (5,6) | (9–10) | $t_{79}$ | $C_{69}$ |
| تركيب النوافذ والأبواب | 7 | 10 | (7,9) | (10–11) | $t_{710}$ | $C_{610}$ |
| ردم الأرضية | 9 | 10 | (7,9) | (10–11) | $t_{910}$ | $C_{910}$ |
| تلبيس الجدران | 10 | 11 | (7,10) (0,10) | (11–12) | $t_{10,11}$ | $C_{10,11}$ |
| تبليط الأرض | 11 | 12 | (10,11) | (12–13) | $t_{11,12}$ | $C_{11,12}$ |
| دهان المنزل | 12 | 13 | (11,12) | – | $t_{12,13}$ | $C_{12,13}$ |

ثم نقوم برسم شبكة الأنشطة للمثال السابق فنحصل على الشكل (9–2).



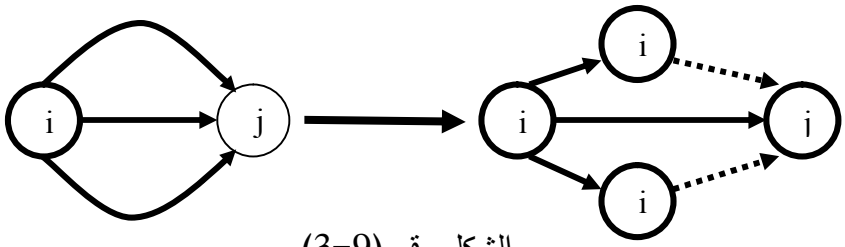

الشكل رقم (9–2): شبكة الأنشطة للمثال السابق

حيث قمنا برسم الأنشطة على التوالي ابتداء من $p_0$ حتى حادث النهاية (13) ولقد أضفنا نشاطين وهميين هما (3,5) و(8,10) وذلك حتى لا تتضمن الشبكة حوادث لا لواحق لها.

وأخيراً نشير إلى أنه يمكننا أن نستخدم رموزاً أخرى لرسم الشبكات حيث يمكننا أن نمثل الأنشطة بدوائر أو مربعات أو مستطيلات، أما الأسهم فنستخدمها للدلالة على العلاقات بين تلك الأنشطة، ولكننا لن نستخدم هذه الرموز الأخيرة في بحثنا هذا.

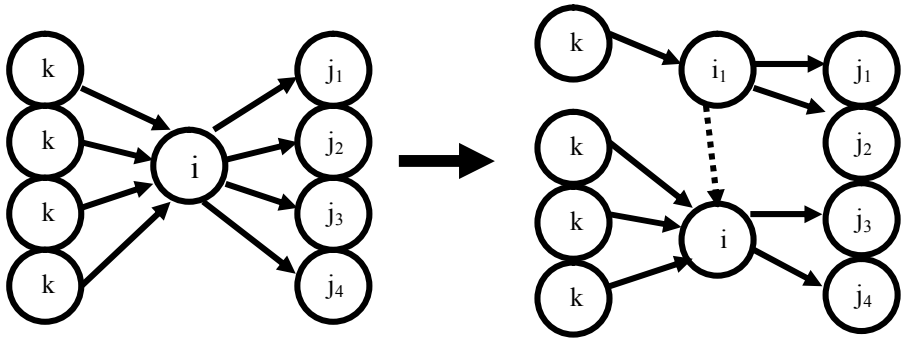
- المسار: هو أية مجموعة من الأنشطة المتتالية والتي تبدأ من حادث البداية $p_0$ وتنتهي عند حادث النهاية $p_n$، أي إن المسار هو أي طريق باتجاه الأسهم ينقلنا من حادث البداية إلى حادث النهاية.
- معالجة بعض الحالات الخاصة:عند رسم الشبكة قد نصادف حالات غير عادية منها:

الحالة التي يكون فيها أنشطة (k نشاطاً) تشترك بحادث الانطلاق (i) وبحادث الاستقرار(j)، فلتمييز هذه الأنشطة عن بعضها نقوم بإدخال (k–1) حادثاً وهمياً ثم نصلها بالحادث (j) بوساطة (k–1) نشاطاً وهمياً كما في الشكل رقم (9–3) (عندما k = 3):




الشكل رقم (9-3)

الحالة التي يكون فيها للحادث (i) عدد من الأنشطة السابقة له وعدد من الأنشطة اللاحقة به، ويكون بعض الأنشطة اللاحقة لا يشترط تنفيذ إلا بعض الأنشطة السابقة له، فعندما يمكننا فصل هذه الأنشطة إلى زمرتين وذلك بإدخال نشاط وهمي كما على الشكل رقم (9-4).




شكل رقم (9-4)

- <u>تحديد المدة الزمنية لكل نشاط:</u>

إن المدة الزمنية لكل نشاط إما أن تكون محددة تماماً، وعندها نعتبر أن مدة النشاط (i.j) هي: $t_{ij} = d_{ij}$ حيث إن $d_{ij}$ هي كمية غير عشوائية. وإما عندما تكون المدة الزمنية $t_{ij}$ عشوائية فإننا نأخذ التوقع الرياضي لـ $t_{ij}$ كأفضل تقدير لتلك المدة ونرمز له بـ $\overline{t_{ij}}$، ولكن حساب هذا التوقع يحتاج إلى معرفة قانون التوزيع الاحتمالي لـ $t_{ij}$ والذي يتضمن ثوابت عددية تختلف من نشاط لآخر ،وإن أكثر قوانين التوزيع الاحتمالي المستخدمة في التخطيط الشبكي هو توزيع بيتا $\beta_{p.q}(x)$

المعرف على المجال (a,b)، لذلك فلإيجاد تقدير لمتوسط المدة الزمنية $\overline{t_{ij}}$، نقوم باستقصاء حول الحد الأدنى $a_{ij}$ والحد الأعلى $b_{ij}$ الذي يمكن أن يستغرقه أي نشاط (i,j)، حيث يسمى المقدار $a_{ij}$ بالتقدير المتفائل، والمقدار $b_{ij}$ بالتقدير المتشائم لتلك المدة $t_{ij}$، وفي هذه الحالة يمكننا حساب $\overline{t_{ij}}$ من العلاقة الآتية:

$$\overline{t_{ij}} = \frac{3a_{ij} + 2b_{ij}}{5} \qquad (1-9)$$

وهذه العلاقة ما هي إلا منوال التوزيع (بيتا) الذي فيه (q=4 و p=3) وعندها يكون تباين t مساوياً:

$$\sigma_t^{\,2} = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{12} \qquad (2-9)$$

وإذا كان المنوال $m_{ij}$ معلوماً يمكننا أن نحسب $\overline{t_{ij}}$ من العلاقة:

$$\overline{t_{ij}} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6} \qquad (3-9)$$

وهذه العلاقة ما هي إلا التوقع الرياضي للتوزيع (بيتا) الذي فيه ($p = 3+\sqrt{2}, q = 3-\sqrt{2}$) وإن العلاقة (9-3) تعطينا تقديراً لمدة النشاط (i,j) ذي أصغر تباين ممكن وهو:

$$\sigma_t^{\,2} = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36} \qquad (4-9)$$

ولكن التقدير (9-3) يحتاج إلى تحديد ثلاثة أرقام بينما يكتفي (9-1) برقمين هما a و b، ويتم تحديد المقادير $a_{ij}$ و $b_{ij}$ و $m_{ij}$ لكل نشاط (i,j) إما عن طريق المعلومات المتراكمة لدى مراكز البحوث العلمية و إما بوساطة استقصاء لدى الخبراء العاملين عن تقديراتهم لكل من هذه الكميات.

في الحقيقة إن المخططات الشبكية تقسم حسب طبيعة المدة للأنشطة الداخلة فيها إلى نوعين أساسيين هما:

أ- المخططات الشبكية ذات المدة الزمنية المحددة وهي التي تكون فيها المدة الزمنية $t_{ij}$ لكل نشاط (i,j) محددة تماماً، وتنطبق هذه الحالة على الأنشطة المؤتمتة أو التي تتميز بقصر مدتها.

ب- المخططات الشبكية ذات المدد الزمنية العشوائية، وهي التي تكون فيها المدة الزمنية $t_{ij}$ لكل نشاط (i,j) عشوائية.

وتنطبق هذه الحالة على معظم المشاريع الاقتصادية، وإننا هنا لن نتناول دراستها بالتفصيل ونكتفي بأن نحسب المدة الزمنية لأنشطتها من إحدى العلاقتين (9-1) أو (9-3) السابقتين، ونعتبر المدة الزمنية للأنشطة وكأنها مدة محددة كما في الحالة الأولى.

- ترقيم حوادث الشبكة: يتم إعادة ترقيم حوادث الشبكة بعد الانتهاء من عملية رسمها بإعطاء الحوادث أرقاماً متزايدة من اليسار إلى اليمين، أي إننا سنبحث عن ترقيم للحوادث بحيث يكون فيه رقم حادث انطلاق كل نشاط أصغر من رقم حادث نهايته، أي بحيث يكون اتجاه السهم من الرقم الأصغر إلى الأكبر.

لذلك نفترض أنه لدينا شبكة فيها (n+1) حادثاً ونريد إعادة ترقيم حوادثها بحيث يكون $i<j$ لكل نشاط (i,j).

ويتم إعادة ترقيم الحوادث بوساطة إيجاد صفوف هذه الشبكة، وبما أن الشبكة تبدأ بحادث واحد، إذن نقوم بما يلي:

1- نضع الرقم (0) لحادث البداية $p_0$.

2- نحذف الأسهم الصادرة عن الحادث $p_0$ (ويتم الحذف بشكل تصوري) فنحصل على عدد من الحوادث لا يدخل فيها أي سهم، نسمي مجموعة هذه الحوادث بمجموعة حوادث الصف الأول ونرمز لها بالرمز $u_1$ ولنفترض أن عددها $k_1$ حادثاً، وعندها نقوم بترقيم حوادث هذه المجموعة بإعطائها الأرقام:

$$1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,k_1$$

3- بعد الانتهاء من ترقيم حوادث الصف الأول ننتقل إلى ترقيم حوادث الصف الثاني، فنقوم بحذف تصوري للأسهم الصادرة عن حوادث الصف الأول، فنحصل على جملة من الحوادث التي لا يدخل فيها أي سهم، نسمي هذه المجموعة من الحوادث بحوادث الصف الثاني ونرمز له بالرمز $u_2$.

ولنفترض أن عددها هو $k_2$ حادثاً وعندها نقوم بترقيم هذه الحوادث بإعطائها الأرقام: $k_1+1,\ k_1+2,\ \ldots\ldots\ldots,k_1+k_2$ وذلك لأن $k_1$ هو آخر رقم استخدم لحوادث الصف الأول.

4- ولترقيم حوادث الصف الثالث نحذف الأسهم الصادرة عن حوادث الصف الثاني فنحصل على حوادث الصف الثالث $u_3$ والتي نفترض أن عددها هو $k_3$، وعندها نقوم بترقيم حوادث هذه المجموعة بإعطائها الأرقام:

$$(k_1+k_2)+1,\quad k_1+k_2+2,\quad k_1+k_2+3,\ldots\ldots\ldots,\ k_1+k_2+k_3$$

وهكذا نتابع العمل حتى نصل إلى حادث النهاية الذي يأخذ الرقم n.

ويمكن البرهان على أنه عندما نحذف الأسهم الصادرة جميعها عن حوادث أي صف مثل $u_L$ فإنه يوجد حادث واحد على الأقل في الصف التالي $u_{L+1}$، ومنه نستنتج أن المجموعة $u_{L+1}$ هي غير خالية مهما تكن L، وهذا ما يضمن استمرار عملية الترقيم حتى النهاية، أما عندما تكون الشبكة كبيرة ومعقدة فإن ترقيمها يمكن أن يتم بوساطة برامج خاصة ونذكر منها خوارزمية (فورد).

ننتقل الآن إلى جوهر الموضوع وهو دراسة هذه الشبكات وتحليلها، ويتم تحليل المخططات الشبكية حسب هدف الدراسة ومن جوانب عدة أهمها:

1- تحليل المخطط الشبكي بالنسبة للزمن.

2- تحليل الشبكة بالنسبة للتكلفة.

3- تحليل الشبكات بالنسبة للمواد الأولية (مادية أو بشرية).

4- تحليل الشبكة بالنسبة للتدفق الأعظمي.

وسنعالج الفقرتين الأولى والثانية كما يلي:

## 9-2- تحليل المخططات الشبكية بالنسبة للزمن:

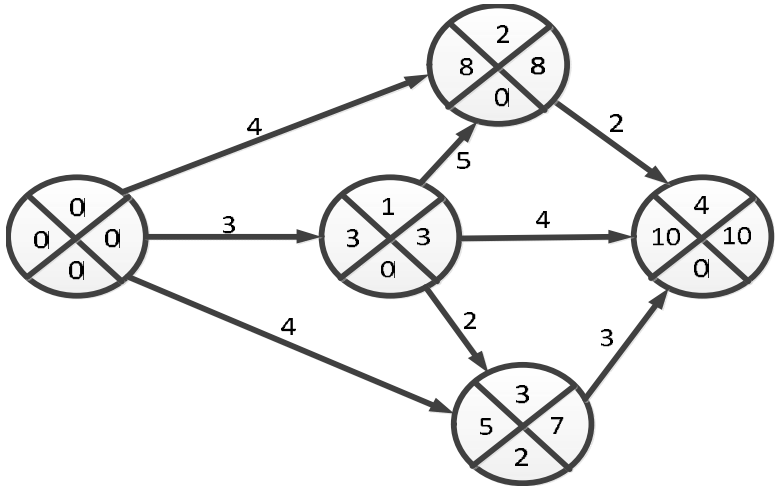
سنتناول في هذه الفقرة مسألة تحديد زمن وقوع كل حادث (j) وخاصة حادث النهاية $p_n$، حيث يعتبر زمن وقوع ذلك الحادث هو زمن إنجاز المشروع.

وعندها نجد أن زمن وقوع الحادث (j) يرتبط بزمن وقوع الحوادث السابقة له من مختلف الصفوف وبمدة الأنشطة السابقة له مباشرة، ولإجراء تحليل زمني لحوادث الشبكة نقوم بتعريف المفاهيم الآتية:

1- أبكر زمن لوقوع الحادث (j):

وهو اللحظة التي لا يمكن للحادث أن يتحقق قبلها، ويتم حساب هذا الزمن انطلاقاً من حادث البداية $p_0$، لذلك فإننا نعتبر أن زمن وقوع حادث البداية $p_0$ هو $T_0 = 0$.

ولنأخذ الشبكة البسيطة الآتية (الأرقام التي فوق الأسهم أو على يسارها هي $t_{ij}$):




الشكل رقم (9-5)

واعتماداً على خواص الشبكات نجد أنه لا يمكن للحادث (2) أن يتحقق قبل أن يتم إنجاز النشاطين السابقين له وهما (0,2) و (1,2) معاً.

ونلاحظ أن مدة إنجاز النشاط (0,2) هي 4 واحدات زمنية، ولكن هذا لا يؤدي إلى تحقق الحادث (2) المشروط بإنجاز النشاط (1,2) أيضاً، ومن جهة

أخرى نجد أن النشاط (1,2) لا يمكن أن يبدأ ما لم يتحقق الحادث (1) والذي لا يمكن أن يتحقق إلا إذا تم إنجاز النشاط (0,1)، أي إن الحادث (1) لا يمكن أن يتحقق قبل 3 واحدات زمنية، حتى يتحقق الحادث (2) يجب أن يتم إنجاز النشاط (2) والذي مدته 5 واحدات زمنية، حتى يتم إنجاز النشاطين (0,1) ثم (1,2) يلزمنا 5+3 = 8 واحدات زمنية، ومن هنا نستنتج أن الحادث (2) لا يمكن أن يتحقق قبل انقضاء 8 واحدات زمنية، وذلك لأن المدة الثانية أكبر من الأولى، لذلك نسمي العدد 8 بأبكر زمن لتحقيق الحادث (2).

وهكذا نجد أن الحادث رقم (3) لا يمكن أن يتحقق قبل أن يتم إنجاز النشاط (0,3) والذي مدته 4، ويتم إنجاز النشاطين (1,3) و(0,1) اللذين يتطلبان مدة 2+3=5 واحدات زمنية، وهي ما يسمى بأبكر زمن لتحقيق الحادث (3)، ولحساب أبكر زمن لتحقيق الحادث (4) نجد أنه مرتبط بأبكر زمن لتحقيق الحوادث التي تسبقه وبمدد الأنشطة الداخلة فيه،فعن طريق النشاط (3,4) نجد أن تحقق (4) يحتاج إلى 3+5 = 8 واحدات، أما عن طريق النشاط (1,4) فإن الحادث (4) لا يحتاج إلا إلى 4+3=7 واحدات زمنية، ولكنه يحتاج عن طريق (2,4) إلى 8+2 = 10 واحدات زمنية.

وهكذا نجد أن حادث النهاية (4) لا يمكن أن يتحقق قبل انقضاء أطول هذه الأزمنة وهو 10 واحدات زمنية، وهو أيضاً أبكر زمن لتحقيق الحادث (4) وأبكر زمن لإنجاز المشروع بكامله.

ولاستنباط قانون عام لحساب أبكر زمن لتحقيق الحادث (j) نفترض أن الحادث (j) مسبوق مباشرة بـ k نشاطاً هي:

$$(i_1,j),\ (i_2,j),\ (i_3,j),\ (i_3,j),\ \ldots\ldots\ldots,(i_k,j)$$

وإن أبكر زمن لوقوع الحوادث $(i_k)$.....$(i_3)$ $(i_2)$ $(i_1)$ هو:

$$T_1,T_2,T_3,\ldots\ldots,T_K$$

على الترتيب، وأن المدة الزمنية للأنشطة السابقة على الترتيب هي:

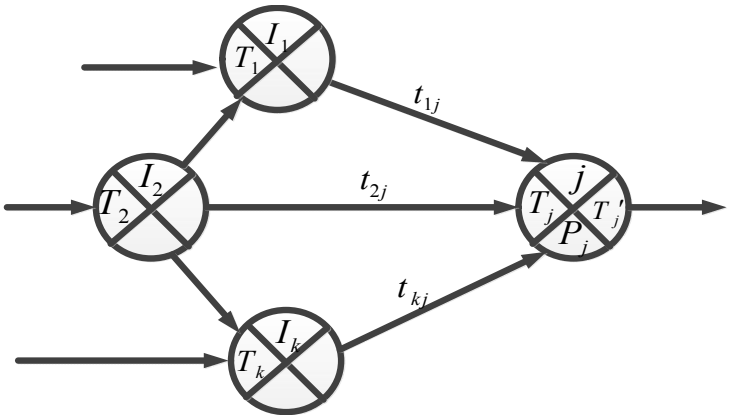
$$t_{1j}, t_{2j}, t_{3j}, \ldots\ldots, t_{kj}$$

وعندها نجد أن أبكر زمن لتحقيق الحادث (j) والذي سنرمز له بالرمز $T_j$ يساوي:

$$T_j = \underset{i=1}{\overset{k}{\text{Max}}} (T_i + t_{ij}) \qquad (5-9)$$

وهو إذن يساوي أكبر المقادير $T_i+t_{ij}$ المأخوذة من الأسهم والحوادث التي تسبق الحادث (j) مباشرة.

ولتسهيل الحسابات نقوم بتقسيم الدائرة التي تمثل الحادث إلى أربعة أقسام كما يلي (انظر الشكل (9-6)).




الشكل رقم (9-6)

ونضع في القسم الأعلى رقم الحادث (j) ونضع في القسم الأيسر أبكر زمن لتحقيق الحادث $T_j$.

أما القسم الأيمن فنتركه لما يسمى بأقصى زمن لتحقيق الحادث (j)، وإن القسم الأسفل سنخصصه لما يسمى بالاحتياطي الكلي الزمني للحادث (j).

ويتم إجراء الحسابات على الشبكة مباشرة وذلك بأن نقوم بإضافة $T_i$ من الحادث (i) إلى المدة الزمنية $t_{ij}$، ثم نأخذ أكبر هذه النتائج فنحصل على $T_j$، ونسجلها في المكان المشار إليه.

وكمثال على ذلك قمنا بحساب $T_j$ للشبكة التي على الشكل (9–5) وهي المسجلة في الربع الأيسر، لقد أشرنا إلى أن الحادث (j) لا يمكن أن يتحقق قبل اللحظة $T_j$، وذلك لأن الحوادث والأنشطة السابقة له تعيق تحققه قبل هذه اللحظة $T_j$، ولكن هذا لا يعني أنه سيتحقق في تلك اللحظة تماماً، بل يمكن أن يتأجل تحققه إلى لحظة تلي اللحظة $T_j$، وأخيراً نشير إلى أنه يتم حساب أبكر زمن لتحقيق حوادث الشبكة انطلاقاً من حادث البداية ($p_0$) حتى حادث النهاية ($p_n$).

ويكون أبكر زمن $T_n$ لتحقيق حادث النهاية ($p_n$) هو أبكر زمن لإنجاز المشروع بكامله.

2– أقصى زمن لتحقيق الحادث (i):

وهو اللحظة التي لا يجوز أن يتأخر تحقق الحادث (i) عنها، لحساب هذه اللحظات نسير باتجاه معاكس لما فعلناه في حساب $T_j$، حيث ننطلق من حادث النهاية $P_n$ حتى حادث البداية ($p_0$)، حتى نتمكن من إجراء الحسابات يجب أن تكون اللحظة التي لا نريد للمشروع أن يتأخر عنها معلومة، ولهذا حتى لا نترك المجال مفتوحاً للتهاون في تنفيذ المشاريع نعتبر أن أبكر زمن لتحقيق حادث النهاية $T_n$ هو نفسه أقصى زمن لإنجاز المشروع ككل، وإذا رمزنا لأقصى زمن لتحقيق حادث النهاية ($p_n$) بالرمز $T'_n$ وقمنا وفقاً لما سبق بوضع المساواة الآتية:

$$T'_n = T_n \qquad (6-9)$$

فإن $T'_n$ تكون هي اللحظة التي لا نريد أن نسمح لتنفيذ المشروع أن يتأخر عنها.

وكتطبيق على مثالنا السابق نضع $T'_y = T_y = 10$، ولحساب أقصى زمن لتحقيق الحوادث الأخرى نلاحظ أن بعض الحوادث السابقة للحادث ($P_n$) يمكن أن تتأخر أو تؤجل أو يمدد تنفيذها إلى لحظة متأخرة عن اللحظة المبكرة Ti لها، ولكن أقصى زمن لتأخير الحادث (n–1) الذي يسبق مباشرة الحادث ($P_n$) هو اللحظة التالية:

$$T'_{n-1} = T'_n - t_{in}$$

ولحساب أقصى زمن للحوادث التي تسبق حادث النهاية $P_n$ مباشرة في المثال السابق وهما الحادثان (2)، (3) نجد أن:

$$T'_2 = 10 - 2 = 8$$
$$T'_3 = 10 - 3 = 7$$

نقوم بوضع هذين الرقمين في الربع الأيمن من دائرة الحادث، ولحساب أقصى زمن للحوادث الأخرى التي تسبق الحوادث في (2) و(3)، نجد أن أقصى زمن للحادث (1) يمكن حسابه اعتماداً على الأنشطة والحوادث اللاحقة بالحادث (1) كما يلي:

من الحادث (2) حيث نجد أنها تساوي 3=5−8.

ومن الحادث (4) حيث نجد أنها تساوي 6=4−10.

ومن الحادث (3) نجد أنها تساوي 5=2−7.

وبذلك نجد أن أقصى زمن يمكن تأجيل تنفيذ الحادث (1) إلى حينه يساوي أصغر هذه الأرقام. أي إن:

$$T'_1 = 8 - 5 = 3$$

ونضعها في الجزء الأيمن للدائرة الخاصة بالحادث (1) وهكذا يمكننا حساب أقصى زمن للحوادث الأخرى.

ولحساب أقصى زمن لتأخر أي حادث (i) نفترض أن عدداً L من الأنشطة (الأسهم) تنطلق من ذلك النشاط وهي:

$$(i,j_1),\quad (i,j_2),\quad (i,j_3),\ldots\ldots,\ (i,j_L)$$

وأن المدد الزمنية لتلك الأنشطة على الترتيب هي:

$$t_{i1},\ t_{i2},\ t_{i3},\ \ldots\ldots\ldots,\ t_{iL}$$

وأن أقصى زمن لتحقيق الحوادث اللاحقة $j_1,j_2,j_3,\ldots\ldots,j_L$ على الترتيب هو:

$$T'_1,\quad T'_2,\quad T'_3,\ .....,\quad T'_L$$

وبناء على ذلك يمكننا أن نحسب أقصى زمن لتحقيق الحادث (i) من العلاقة الآتية:

$$T'_i = \underset{j=l}{\text{Min}} (T'_j - t_{ij}) \qquad (7-9)$$

ويتم حساب هذه الأزمنة انطلاقاً من حادث النهاية ($p_n$) حتى حادث البداية ($p_0$) حيث سنجد حكماً أن أقصى زمن للحادث ($p_0$) يساوي أيضاً إلى أبكر زمن له، أي إن:

$$T'_0 = T_0 = 0$$

أما عملية الحساب فيمكن أن تتم على الشبكة مباشرة بأن نقوم بطرح المدة الزمنية $t_{ij}$ للنشاط (i,j) من أقصى زمن للحادث (j) للأنشطة اللاحقة بالحادث (i) ثم نأخذ أصغرها فنحصل على $T'_i$.

وكمثال على ذلك حسبنا $T'_i$ لحوادث الشبكة التي على الشكل (9-5) ووضعنا النتائج في الربع الأيمن لدوائر الحوادث.

3- احتياط الزمن عند الحادث (j) (مجال التعويم):

بما أن أبكر زمن لتحقيق الحادث يختلف بصورة عامة عن أقصى زمن يسمح به لحدوثه، فإن ذلك يؤدي إلى ظهور احتياط زمني لمعظم حوادث الشبكة، وإن هذا الاحتياطي الزمني بالنسبة للحادث (J) يساوي:

$$R_J = T'_J - T_J \qquad (8-9)$$

وهو عبارة عن مجال $[T_J, T'_J]$ يسمى بمجال التعويم وهو المدة التي يمكن لنا أن نؤخر تنفيذ الحادث (J) دون أن يؤثر ذلك على مدة تنفيذ المشروع ككل وهي $T_n$، وبعبارة أخرى هو المدة التي يمكن للحادث (j) أن يتأخر دون أن يؤثر ذلك على المدة النهائية لتنفيذ المشروع $T_n$. وعند إجراء الحسابات على الشبكة نضع قيمة $R_J$ في الربع الأسفل لدائرة (J).

4- الاحتياطي الكلي للزمن عند النشاط (I,J):

ويحسب هذا الاحتياطي من العلاقة التالية:

$$r_{i,J} = T'_J - T_i - t_{ij} \qquad (9-9)$$

وإن هذا الاحتياطي هو أكبر مقدار زمني يمكن أن يستخدم لزيادة مدة تنفيذ النشاط (I,J) (طبعاً إذا كانت طبيعة ذلك النشاط تسمح بذلك). وبدون أن يؤدي ذلك إلى زيادة مدة تنفيذ المشروع ككل، أي بدون أن يؤثر ذلك على لحظة تحقق الحادث الأخير $T_n$.

ويمكن النظر إلى $r_{ij}$ على أنه أكبر مقدار زمني يمكننا أن نستخدمه لتأخير بداية النشاط (I,J) عن أبكر زمن لتحقيق الحادث (i) وهو $T_i$ وذلك بدون أن نزيد من لحظة تحقيق الحادث الأخير $T_n$، ولكن تأخير بداية النشاط (I,J) بمقدار يساوي إلى كامل الاحتياطي $r_{ij}$ يقتضي أن تبدأ الأنشطة اللاحقة مباشرة له في لحظة أقصى زمن للحادث (J) التي تبدأ منه.

وإن أي تأخير أو تأجيل للحظة بداية النشاط (i,J) أو أي تمديد لمدته الزمنية بمقدار $\Delta_{ij}$ يزيد عن $r_{ij}$ سيؤدي حتماً إلى تأخير حادث النهاية $P_n$، أي سيؤدي إلى تأخير تنفيذ المشروع بأكمله.

كما يمكن اعتبار الاحتياطي الكلي $r_{ij}$ على انه الفرق بين مدة تنفيذ المشروع $T_n$ ومدة أطول مسار يمر عبر ذلك النشاط (i,j)، وأخيراً نشير إلى أن $r_{ij}$ لا يخص النشاط (i,j) وحده بل قد تشترك به الأنشطة الواقعة مع (i,j) على مسار واحد ما.

5- الاحتياطي الزمني الحر عند النشاط (i,j):

ويحسب هذا الاحتياطي من العلاقة الآتية:

$$r'_{i,J} = T_J - T_i - t_{ij} \qquad (10-9)$$

وإن هذا الاحتياطي هو اكبر مقدار زمني يسمح لنا بأن نستخدمه لزيادة مدة النشاط (i,J) وبدون أن يعيق ذلك إمكانية أن تبدأ الأنشطة اللاحقة لحادثة (J) في أبكر زمن لها وهو $T_J$، ويسمى بالاحتياطي الزمني الحر من النوع II عند النشاط (i,j).

وإنه يمكننا اعتبار $r'_{ij}$ على أنه أكبر مقدار زمني يسمح لنا به لتأخير بداية النشاط (i,j) عن أبكر زمن لتحقق حادث بدايته (i) وهو $T_i$، وذلك بدون أن تتأثر بدايات الأنشطة اللاحقة للحادث (J) عن أبكر زمن لها وهو $T_J$.

وفي بعض المراجع قد نصادف نوعاً آخر من الاحتياطي الزمني الحر يعرف بالعلاقة الآتية:

$$r_{ij}^{*} = T_J' - T_i' - T_{ij}$$

وهو عبارة عن أكبر مقدار يسمح به لزيادة مدة النشاط (i,J) بدون أن نعيق إمكانية أن تنتهي الأنشطة السابقة مباشرة لحادثه (i) في أقصى زمن محدد لإنجازها و هو $T_i'$.

ولكننا سوف نقتصر في تحليلنا على النوع المعرف بالعلاقة (9- 10).

6- <u>الاحتياطي الزمني المستقل أو الخاص بالنشاط (i,J):</u>

وهو يحسب من العلاقة الآتية:

$$r_{ij}'' = Max\left[0, (T_J - T_i' - t_{ij})\right] \qquad (11-9)$$

وهو أكبر مقدار زمني يسمح لنا به لزيادة مدة النشاط (i,J) أو لتأخير بدايته بحيث تنتهي الأنشطة السابقة جميعها مباشرة لحادثه (i) في أقصى زمن محدد لها وهو $T_i'$، وبحيث تبدأ الأنشطة اللاحقة جميعها مباشرة لحادثه (J) في أبكر زمن محدد لها وهو $T_J$، وهكذا نجد أن استخدام الاحتياطي $r_{ij}''$ لصالح النشاط (i,J) وحده لن يؤثر على احتياطي أي من الأنشطة الأخرى.

**ملاحظة 1:**

من العلاقتين (9 - 10) و(9 - 9) يمكننا ببساطة أن نستنتج أن:

$$r_{ij} - r'_{ij} = T'_J - T_J = R_J \qquad (12-9)$$

أي إن الفرق بين الاحتياطي الكلي والحر يساوي احتياطي الحادث $R_J$، كما نستنتج أن $r_{iJ} \geq r'_{iJ}$، وعندما تكون $R_J = 0$ فإن $r_{iJ} = r'_{iJ}$، وهذا يعني أنه عندما تكون $R_J = 0$ فإن الاحتياطيين $r_{iJ}$ و $r'_{iJ}$ متساويان للأنشطة الداخلة في الحادث (J).

ومن جهة أخرى نجد من العلاقتين (9– 10) و(9–11) أن:

$$r'_{iJ} - r''_{iJ} = \begin{cases} T'_i - T_i = R_i & ; r''_{iJ} = T_J - T'_i - t_{iJ} > 0 \\ r'_{ij} & ; r''_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (13\text{–}9)$$

وهذا يعني أنه عندما تكون $R_i=0$ فإن $r'_{ij} = r''_{ij}$ للأنشطة المنبثقة عن الحادث (i)، كما نستنتج أيضاً أن: $r'_{iJ} \geq r''_{iJ}$.

7– المسار الحرج:

إن تحديد المسار الحرج يعتبر هدفاً أساسياً في التحليل الزمني للمخططات الشبكية ونتيجة مرجوة للحسابات السابقة جميعها.

فإذا قمنا بدراسة أي مخطط شبكي لوجدنا أنه يتألف من عدد من المسارات التي تصل حادث بدايته ($p_0$) وباتجاه الأسهم، بحادث نهايته ($p_n$)، وإن كلاً من هذه المسارات يتألف من عدد من الأنشطة، وإن المدة الزمنية لكل مسار تساوي مجموع المدد الزمنية للأنشطة الواقعة عليه، ولهذا فإنه يمكننا أن نعرف المسار الحرج بما يلي:

هو المسار ذو أطول مدة من بين المسارات الممكنة للشبكة، أي الذي مدته تساوي $T_n$، ولكن من الأسهل أن نحدد المسار الحرج عن طريق تحديد الأنشطة الواقعة عليه، لذلك فإنه يعرف كما يلي:

- المسار الحرج: هو أي مسار مؤلف من أنشطة حرجة فقط، ومن التعريف الأخير يتضح أنه يمكن أن نصادف أكثر من مسار حرج في المخطط الشبكي، ولتحديد المسار الحرج علينا إذن أن نحدد النشاط الحرج والذي نعرفه كما يلي:
- النشاط الحرج: هو النشاط الذي ينعدم عنده الاحتياطي الكلي للزمن أي يكون (i,J) حرجاً إذا كان $r_{iJ} = 0$، كما يكون الحادث (J) حرجاً إذا كان فيه $R_J = 0$. ولكن العلاقة (9–12) تعطينا أن: $r_{iJ} \geq r'_{iJ}$ ولكن وبما أن $r'_{iJ} \geq 0$ إذن عندما يكون $r_{iJ} = 0$ فإن $r'_{ij} = 0$، وينجم عن هذا أن $R_J = 0$ أيضاً، ومن العلاقة

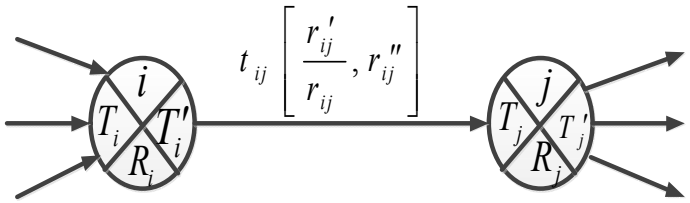
(9–12) يمكننا أن نستنتج أنه عندما تكون $r'_{iJ} = 0$ فإن $r''_{iJ} = 0$ وينجم عنهما أيضاً أن $R_i = 0$.

مما تقدم نخلص إلى النتيجة الآتية: إذا كان النشاط (i,J) حرجاً فإن $r_{iJ} = r'_{iJ} = r''_{ij} = 0$ كما أن $R_i = R_J = 0$. ولكن الشرط $R_i = R_J = 0$ هو شرط لازم ولكنه غير كافٍ ليكون النشاط (i,j) حرجاً.

إذن فلتحديد المسار أو المسارات الحرج نبحث عن الأنشطة الحرجة انطلاقاً من حادث البداية ($p_0$) متتبعين الأنشطة التي احتياطها الكلي $r_{iJ}$ معدوم، حتى نصل إلى حادث النهاية ($p_n$)، ونشير عادة إلى الأنشطة الحرجة بسهم مضاعف لتمييزه عن الأنشطة الأخرى، وبذلك يكون طول المسار الحرج هو مجموع مدد الأنشطة الحرجة الواقعة عليه ويساوي $T_n$، ويستفاد من تحديد الأنشطة الحرجة في معرفة الأنشطة التي لا تتحمل أي تأخير في تنفيذها للتركيز عليها عند التنفيذ.

كما يستفاد من الاحتياطات الزمنية المختلفة في إعادة النظر في توزيع الموارد ووسائل العمل على الأنشطة لاختصار مدة تنفيذها، وإن هذه الاحتياطات هي التي تعبر عن مرونة المخطط الشبكي، وكلما تضاءلت هذه المجالات أصبح المخطط صلباً، ويصبح المخطط صلباً تماماً عندما تكون جميع أنشطته حرجة، وعندها لن يكون في هذا المخطط أي مجال للتسامح في تأخير أي نشاط من أنشطة المخطط المذكور.

وأخيراً نشير إلى أننا سنصطلح عند إجراء الحسابات على الشبكة، كتابة النتائج على الشكل التالي:




الشكل رقم (9–7)

## 8- احتمال إنجاز المشروع قبل موعد محدد $T_f$:

لقد أشرنا سابقاً إلى أن مدة إنجاز المشروع هي $T_n$ زمن تحقق حادثة الأخير (اعتباراً من زمن $p_0$)، وأن هذه المدة هي مجموع مدد الأنشطة الواقعة على المسار الحرج، وبما أن مدة كل نشاط يمكن أن تكون محددة أو عشوائية فإن مسألة حساب احتمال تحقق المشروع قبل موعد محدد $T_f$، وفي حالة عشوائية المدد الزمنية لأنشطة المشروع، ينظر إليها كما يلي:

إذا كانت $t_{iJ}$ المدة الزمنية للنشاط (i,J) عشوائية فإن توقعها وتباينها يحسبان من العلاقتين (9-3) و(9-4) على الترتيب، وإن التوقع الرياضي لمدة إنجاز المشروع يساوي مجموع التوقعات الرياضية لمدد الأنشطة الواقعة على المسار الحرج أي إن:

$$\bar{t} = \sum \overline{t_{iJ}} = T_n \qquad (14-9)$$

وكذلك بالنسبة لتباين هذه المدة فهو يساوي:

$$\sigma_t^2 = \sum \sigma_{t_{ij}}^2$$

وإذا كان عدد تلك الأنشطة كافياً فإن احتمال تحقق المشروع قبل الموعد المحدد $T_f$، يمكن حسابه من جدول تابع الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $\phi$ حيث نجد أن:

$$p(t \le T_f) = \phi\left(\frac{T_f - T_n}{\sqrt{\sum \sigma_{t_{ij}}^2}}\right) \qquad (15-9)$$

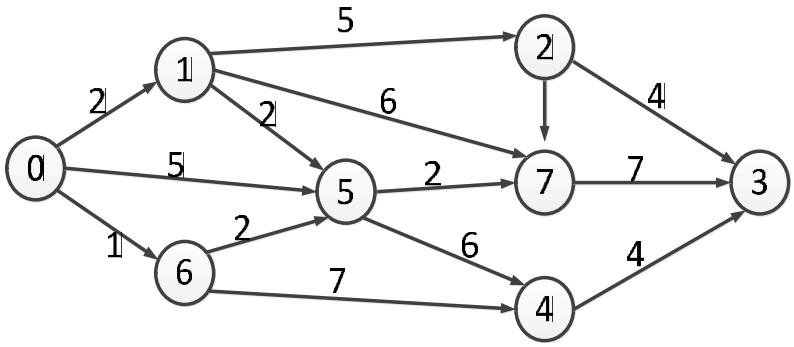
ويمكننا أيضاً حساب احتمال تحقق أي حادث (J) قبل موعد محدد $T_f$ فنجد أن:

$$p\left(t_j \le T_f\right) = \phi\left(\frac{T_f - T_J}{\sqrt{\sum \sigma_{t_{ij}}^2}}\right) \qquad (16-9)$$

حيث إن $T_J$ هو أبكر زمن لتحقق (J) وأن المجموع مأخوذ على أنشطة أطول طريق يصل (J) بحادث البداية $p_0$.

**مثال (9–1):**

ليكن لدينا المخطط الشبكي الآتي:




الشكل رقم (9–8)

حيث تشير الأعداد التي فوق الأسهم إلى مدة النشاط، والمطلوب:

1– إعادة ترقيم حوادث هذه الشبكة.

2– حساب $T$ و$T'$ و$R$ و$r$ و$r'$ و$r''$.

3– تحديد المسار الحرج.

**الحل:**

1– لإجراء عملية إعادة الترقيم بحيث يكون $i < J$ لكل نشاط (i,J) نبدأ من حادث البداية فنعطيه الرقم (0)، ثم نحذف الأسهم المنبثقة جميعها عنه فيظهر لنا الحادثان (1) و(6) بدون سوابق، لذلك نعطيهما الرقمين 1و2 [1لـ(1) و2 لـ (6)]، ثم نقوم بحذف الأسهم المنبثقة جميعها عن (1) فلم نجد أي حادث بدون سوابق، لذلك ننتقل إلى (6) ونحذف الأسهم المنبثقة جميعها عنه فيظهر لنا الحادث (5) لذلك نعطيه الرقم (3)، وبعدها نحذف الأسهم الصادرة عن (5) فيظهر لنا الحادثان (7) و(4) فنعطيهما الترقيمين 4 و5 [4 لـ(4) و5 لـ(7)]،

وعندما نحذف الأسهم المنبثقة عن (7) سيظهر لنا الحادث (2) فنعطيه الرقم (6) ويبقى الحادث الأخير الذي يأخذ الرقم (7) وبذلك تأخذ الشبكة المرقمة حسب ترتيب الأنشطة فيها، الشكل (9-9).

2- نقوم بحساب المؤشرات الزمنية ونسجلها على الشبكة مباشرة حيث نجد أنه عندما نضع $T_0 = 0$ فإن أبكر زمن لتحقيق الحوادث المختلفة يحسب حسب ترتيبها في الترقيم الجديد وانطلاقاً من حادث البداية وهي تساوي:

$T_1 = Max\ (T_0+T_{01}) = Max\ (0+2) = 2$

$T_2 = Max\ (T_0+T_{02}) = Max\ (0+1) = 1$

$T_3 = Max\ (T_0+T_{03}, T_1+t_{13};\ T_2+t_{23}) = Max\ (0+5;\ 2+2,1+2) = 5$

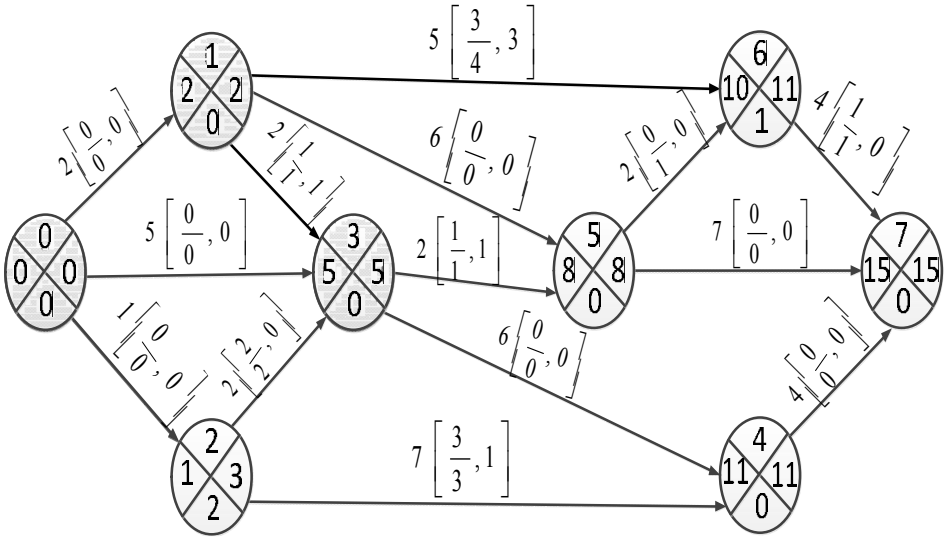
$T_4 = Max\ (T_3+t_{34}, T_2+t_{24}) = Max\ (5+6,1+7) = 11$

$T_5 = Max\ (T_1+t_{15}, T_3+t_{35}) = Max\ (2+6;\ 5+2) = 8$

$T_6 = Max\ (T_1+t_{16}, T_5+t_{56}) = Max\ (2+5,8+2) = 10$

$T_7 = Max\ (T_4+t_{47}, T_5+t_{57}, T_6+t_{67}) = Max\ (11+4;\ 8+5,10+4) = 15$

-3




الشكل رقم (9-9)

ثم نقوم بتسجيل هذه الأزمنة في الربع الأيسر لدوائر الحوادث على الشكل (9–9) السابق، أي إن أبكر مدة زمنية لإنجاز المشروع بأكمله هي 15 واحدة زمنية، ولحساب أقصى زمن لتحقيق الحوادث نضع $T'_7 = T_7 = 15$، ونبدأ بحساب هذه الأزمنة انطلاقاً من حادث النهاية حتى نصل إلى $p_0$.

$$T'_6 = \text{Min}(T'_7 - t_{67}) = \text{Min}(15-4) = 11$$
$$T'_5 = \text{Min}(T'_7 - t_{57}) = \text{Min}(15-7) = 8$$
$$T'_4 = \text{Min}(T'_7 - t_{47}) = \text{Min}(15-4) = 11$$
$$T'_3 = \text{Min}(T'_4 - t_{34},\ \ T'_5 - t_{35}) = \text{Min}(11-6,\ \ 8-2) = 5$$
$$T'_2 = \text{Min}(T'_3 - t_{23},\ \ T'_4 - t_{24}) = \text{Min}(5-2,\ \ 11-7) = 3$$
$$T'_1 = \text{Min}(T'_3 - t_{13},\ \ T'_5 - t_{15},\ \ T'_6 - t_{16}) = \text{Min}(5-2;\ \ 8-6;\ \ 11-5) = 2$$
$$T'_0 = \text{Min}(T'_1 - t_{01},\ \ T'_2 - t_{02},\ \ T'_3 - t_{03}) = \text{Min}(2-2;\ \ 3-1;\ \ 5-5) = 0$$

وإن هذه الأزمنة هي المسجلة في الربع الأيمن لدوائر الحوادث. أما بالنسبة لاحتياطي الحوادث حسبها من العلاقة:

$$R_i = T'_i - T_i \qquad (i:1,2,\ldots\ldots,7)$$

ونسجلها على الشبكة مباشرة وهي الأرقام التي في الربع الأسفل.

ولحساب الاحتياطي الكلي للزمن $r_{ij}$ لمختلف الأنشطة نعتمد على العلاقة (9–9) فنجد أن:

$$r_{01} = T'_1 - T_0 - t_{01} = 2-0-2 = 0$$
$$r_{02} = T'_2 - T_0 - t_{02} = 3-0-1 = 2$$
$$r_{03} = T'_3 - T_0 - t_{03} = 5-0-5 = 0$$
$$r_{13} = T'_3 - T_1 - t_{13} = 5-2-2 = 1$$
$$r_{15} = T'_5 - T_1 - t_{15} = 8-2-6 = 0$$

$$r_{16} = T'_6 - T_1 - t_{16} = 11 - 2 - 5 = 4$$
$$r_{23} = T'_3 - T_2 - t_{23} = 5 - 1 - 2 = 2$$
$$r_{24} = T'_4 - T_2 - t_{24} = 11 - 1 - 7 = 3$$
$$r_{34} = T'_4 - T_3 - t_{34} = 11 - 5 - 6 = 0$$
$$r_{35} = T'_5 - T_3 - t_{35} = 8 - 5 - 2 = 1$$
$$r_{47} = T'_7 - T_4 - t_{47} = 15 - 11 - 4 = 0$$
$$r_{56} = T'_6 - T_5 - t_{56} = 11 - 8 - 2 = 1$$
$$r_{57} = T'_7 - T_5 - t_{57} = 15 - 8 - 7 = 0$$
$$r_{67} = T'_7 - T_6 - t_{67} = 15 - 10 - 4 = 1$$

وهي الأرقام المسجلة في أسفل الكسر ضمن القوسين وفوق أسهم الشبكة.

أما بالنسبة للاحتياطيين الآخرين $r'_{iJ}$ و $r''_{iJ}$ فنلاحظ أن كل منهما معدوم عندما تكون $r_{ij} = 0$ ولهذا يكفي أن نحسبهما للحالات التي تكون فيها $r_{iJ} \neq 0$ وهي:

$$r'_{02} = T_2 - T_0 - t_{02} = 1 - 0 - 1 = 0$$
$$r'_{13} = T_3 - T_1 - t_{13} = 5 - 2 - 2 = 1$$
$$r'_{16} = T_6 - T_1 - t_{16} = 10 - 2 - 5 = 3$$
$$r'_{23} = T_3 - T_2 - t_{23} = 5 - 1 - 2 = 2$$
$$r'_{24} = T_4 - T_2 - t_{24} = 11 - 1 - 7 = 3$$
$$r'_{35} = T_5 - T_3 - t_{35} = 8 - 5 - 2 = 1$$
$$r'_{56} = T_6 - T_5 - t_{56} = 10 - 8 - 2 = 0$$
$$r'_{67} = T_7 - T_6 - t_{67} = 15 - 10 - 4 = 1$$

وهي الأرقام المسجلة في أعلى الكسر ضمن القوسين وفوق أسهم الشبكة.

أما $r''_{iJ}$ فنجد أنها تساوي:

$$r''_{02} = \text{Max}[0,(T_2 - T'_0 - t_{02})] = \text{Max}[0,(1-0-1)] = 0$$
$$r''_{13} = \text{Max}[0,(T_3 - T'_1 - t_{13})] = \text{Max}[0,(5-2-2)] = 1$$
$$r''_{16} = \text{Max}[0,(T_6 - T'_1 - t_{16})] = \text{Max}[0,(10-2-5)] = 3$$
$$r''_{23} = \text{Max}[0,(T_3 - T'_2 - t_{23})] = \text{Max}[0,(5-3-2)] = 0$$
$$r''_{24} = \text{Max}[0,(T_4 - T'_2 - t_{24})] = \text{Max}[0,(11-3-7)] = 1$$
$$r''_{35} = \text{Max}[0,(T_5 - T'_3 - t_{35})] = \text{Max}[0,(8-5-2)] = 1$$
$$r''_{56} = \text{Max}[0,(T_6 - T'_5 - T_{56})] = \text{Max}[0,(10-8-2)] = 0$$
$$r''_{67} = \text{Max}[0,(T_7 - T'_6 - t_{67})] = \text{Max}[0,(15-11-4)] = 0$$

وهي الأرقام المسجلة على يمين الكسر ضمن القوسين فوق أسهم الشبكة.

4- لتحديد المسار الحرج نقوم بتحديد الأنشطة الحرجة انطلاقاً من حادث البداية متتبعين الأنشطة التي يكون فيها $r_{ij} = 0$ فنجد أن الأنشطة الحرجة هي:

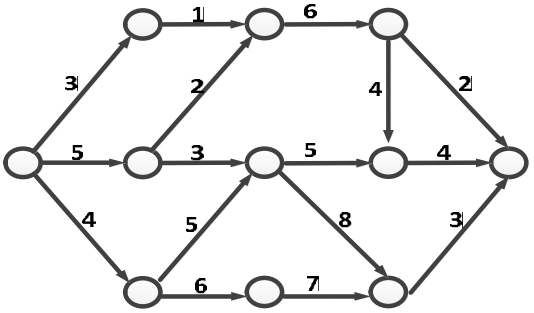
(0,1)، (0,3)، (1,5)، (3,4)، (4,7)، (5,7)

وهي تشكل مسارين حرجين هما المشار إليهما بأسهم مضاعفة، أما بقية الأنشطة فهي غير حرجة لأن احتياطها الكلي غير معدوم.

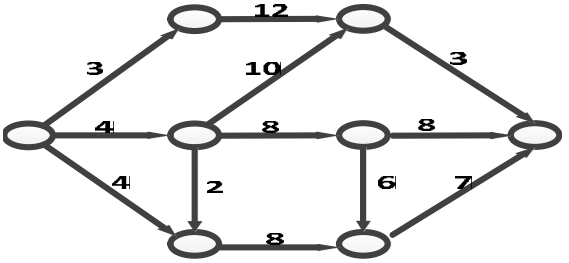
## تمارين غير محلولة على الفصل التاسع

**1)** أوجد المسار الحرج للشبكات الآتية:

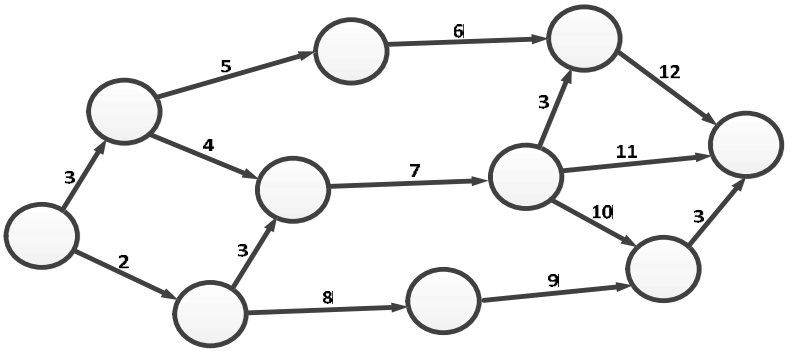
- الشبكة الأولى:




- الشبكة الثانية:




- الشبكة الثالثة:



# دليل المصطلحات العلمية

## عربي – انكليزي

| A | |
|---|---|
| Analysis | تحليل |
| Artificial Variables | متحولات اصطناعية |
| Alternative | بديل |
| Area of feasible solution | منطقة الحلول الممكنة |
| Alternative strategies | إستراتيجية بديلة |
| Acceptance region | منطقة القبول |
| **B** | |
| Basic solutions | حلول قاعدية |
| Basic Variable | متغير أساسي |
| Bounded variable | متغير مقيد |
| Bills | سندات |
| Business indicators | مؤشرات اقتصادية |
| **c** | |
| Capitalization | الحصيلة |
| Coefficient | معامل |
| Column | عمود |
| Condition | شرط |
| Constant Column | عمود ثابت |
| Constraint | قيد ( شرط ) |
| Consumption | استهلاك |
| Cost | تكلفة |
| Cost function | تابع تكلفة |
| Criteria | معيار |
| Curve | منحني |
| Coefficient matrix | مصفوفة المعاملات |
| Change ratio | نسبة التغير |
| **D** | |
| Decision | قرار |
| Demand | طلب |
| Derivative | مشتق |
| Decision under certainty | القرار في حالة التأكد |

| | |
|---|---|
| Decision under uncertainty | القرار في حالة عدم التأكد |
| Dependent variable | متغير تابع |
| Depreciation | اهتلاك |
| Depreciation Rate | معدل اهتلاك |
| **E** | |
| Economy | اقتصاد |
| Elasticity | مرونة |
| Entering variable | متغير داخل |
| Equation | معادلة |
| **F** | |
| Factor | عامل |
| Feasible solution region | منطقة الحلول المقبولة |
| Function | تابع |
| Factorial | عاملي |
| **G** | |
| Graphical solution | الحل البياني |
| Gross | إجمالي |
| Growth | نمو |
| Game theory | نظرية الألعاب |
| **H** | |
| Hypothesis | نظرية |
| **I** | |
| Identity matrix | مصفوفة أحادية |
| Implicit function | تابع ضمني |
| Income | الدخل، الايراد |
| Independent events | حوادث مستقلة |
| Independent random variables | متغيرات عشوائية مستقلة |
| Inequalities | متراجحات (متباينات ) |
| Input | مدخلات |
| Integer programming | برمجة خطية |
| Intersection | تقاطع |
| Impossible event | حادث مستحيل |
| Independents events | حوادث مستقلة |
| K | |
| Key | مفتاح |
| Key column | العمود المفتاح |

| | |
|---|---|
| Key row | الصف المفتاح |
| **L** | |
| Level | مستوى |
| Limit | حد ونهاية |
| Linear | خطي |
| Linear programming | برمجة خطية |
| Linear function | تابع خطي |
| Lagrange multiplier method | طريق ضارب لاغرانج |
| Leaving variable | المتغير الخارج |
| Line graph | خط بياني |
| Linear equations | معادلات خطية |
| **M** | |
| Marginal productivity | إنتاجية حدية |
| Marginal Utility | منفعة حدية |
| Matrix | مصفوفة |
| Maximization | تعظيم |
| Maximum value | قيمة عظمى |
| Minimization | تصغير |
| Minimum value | قيمة صغرى |
| Minor | مصغر ( المصفوفة ) |
| Model | نموذج |
| Multiplier | ضارب |
| Multiplier lagrange | ضارب لاغرانج |
| Mathematical | رياضي |
| Mathematical model | نموذج رياضي |
| **N** | |
| Network | شبكة |
| Node | نقطة تقاطع |
| No negativity | عدم السلبية |
| **O** | |
| Optimum | مثالي - أمثل |
| Optimal solution | الحل الأمثل |
| Output | مخرجات |
| Objective | هدف |
| Objective function | تابع هدف |
| Operations research | بحوث العمليات |

| p | |
|---|---|
| Par Value | القيمة الاسمية |
| Pivot element | محور الارتكاز |
| Programming | برمجة |
| Plan | خطة |
| Planning | تخطيط |
| Present worth (Value) | القيمة الحالية |
| Production | إنتاج |
| Production function | تابع إنتاج |
| Productivity | إنتاجية |
| Progress | تقدم - متوالية |
| Profit | الربح |
| Primal | أولي |
| Partial derivative | مشتق جزئي |
| **R** | |
| Rank | مرتبة |
| Rank of matrix | مرتبة مصفوفة |
| Row | سطر |
| **S** | |
| Simplex method | طريقة السيمبلكس |
| Static | ثابت |
| **T** | |
| Total | كلي |
| Theorem | نظرية |
| Total derivative | مشتق كلي |
| Total differential | تفاضل كلي |
| **u** | |
| Unacceptable solution | حل غير مقبول |
| Unit | واحد ( قياس) |
| Utility | منفعة |
| **v** | |
| Value | قيمة |
| Variable | متحول |

# المراجع


1- الأفندي، عبد القادر،1978، الرياضيات الاقتصادية، جامعة حلب، حلب، سورية.

2- الأفندي، عبد القادر، 1982، رياضيات التأمين، جامعة حلب، حلب،سورية.

3- بحبوح، خالد نجيب؛ رضوان، عبد الرحمن؛ اسماعيل، عصام، 2005، التحليل الاقتصادي الجزئي، جامعة حلب، حلب، سورية.

4- بقجه جي، صباح الدين، 1978، الرياضيات المالية – الجزء الأول، جامعة دمشق، دمشق، سورية.

5- بقجه جي، صباح الدين؛ الجراد، خلف، 1982، بحوث العمليات، جامعة دمشق، دمشق، سورية.

6- حسن، توفيق عبد الرحيم، 2005، مبادئ الاقتصاد الجزئي، عمان، الأردن.

7- الحسين الصطوف، محمد، 1989، التحليل الاقتصادي و الجزئي، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

8- دبيان، السيد عبد المنصور؛ أبو زيد، كمال خليفة؛ نور الدين، ناصر،2001، بحوث العمليات في المحاسبة، الإسكندرية – مصر.

9- دركزنلي، محمد سمير؛ حجير، سمير، 1993، الرياضيات المالية، جامعة حلب، حلب، سورية.

10-عبد المجيد فتيش؛ أ. مارون، 1990، أسس الرياضيات المحاسبية – الجزء الأول، ترجمة أحمد صادق القرماني – موسكو، روسيا.

11- ديوب، محمد عباس، 1999، إدارة الإنتاج، جامعة تشرين – اللاذقية، سورية.

12- الرفاعي، عبد الهادي؛ عكروش، محمد، 2004، أساسيات الرياضة للتجاريين (1) جامعة تشرين – اللاذقية، سورية.

13- الرفاعي، عبد الهادي،2006، الارتباط والسلاسل الزمنية، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

14- الرفاعي، عبد الهادي،2013، أساسيات الرياضيات للتجاريين (1)، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

15- الرفاعي، عبد الهادي؛ بشماني، شكيب،2010، مبادئ التأمين والضمان الاجتماعي، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

16- شيخ ديب، صلاح، 2006 ، بحوث العمليات في الإدارة – الجزء الأول، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

17- شيخ ديب، صلاح، 2008، بحوث العمليات (2)، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

18- الطراونة، محمد؛ عبيدات، سليمان، 1999، مقدمة في بحوث العمليات، الجامعة الأردنية، عمان، الأردن.

19- العلي، إبراهيم محمد؛ كابوس، أمل، حلاق، عمر، 1985، نظرية الاحتمالات، جامعة حلب، حلب، سورية.

20- العلي، إبراهيم محمد، 1993، الرياضيات الاقتصادية ( الإدارية والمالية)، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

21- العلي، إبراهيم محمد، 2004، مدخل إلى بحوث العمليات، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

22- العلي، إبراهيم محمد، 2008، الرياضيات المالية (2) جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

23- فوييفودين، ف، 1988، الجبر الخطي، ترجمة أنطوان يوسف منصور، موسكو، روسيا.

24- قاسم، احمد رفيق، 1981، التحليل الاقتصادي الكلي، حلب، سورية

25- الكسواني، ممدوح الخطيب، 1982، الرياضيات المالية، جامعة دمشق، دمشق، سورية.

26- كورش، أ، 1988، الجبر العالي، ترجمة محمد إبراهيم حسن رزق، موسكو، روسيا.

27- الموسوي، منعم زمزير، 2009، بحوث العمليات، الجامعة الأردنية، عمان، الأردن.

28- النيداني، محمد أسعد عبد الوهاب، 2006، مقدمة في بحوث العمليات، الإسكندرية، مصر.

29- Gary L. Guthrie; Larry D. Lemon, 2004, Mathematics of Interest Rates and Finance, USA,P.467.

## الملحق رقم (1) جدول الرقم التراكمي لأيام السنة الميلادية.

| م | الشهر | جدول مساعد لحساب مدة الإيداع بالأيام ويتم ذلك بطرح عدد التراكم في يوم الإيداع من عدد التراكم في يوم السحب | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | كانون الثاني | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| | يناير 31 | تراكم الأيام | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 2 | شباط | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | | | |
| | فبراير 28 | تراكم الأيام | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | | | |
| 3 | أذار | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| | مارس 31 | تراكم الأيام | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 4 | نيسان | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| | أبريل 30 | تراكم الأيام | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | |
| 5 | أيار | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| | مايو 31 | تراكم الأيام | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 |
| 6 | حزيران | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| | جوان 30 | تراكم الأيام | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | |
| 7 | تموز | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| | جولية 31 | تراكم الأيام | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | 191 | 192 | 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | 206 | 207 | 208 | 209 | 210 | 211 | 212 |
| 8 | آب | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| | أغسطس 31 | تراكم الأيام | 213 | 214 | 215 | 216 | 217 | 218 | 219 | 220 | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 | 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 | 241 | 242 | 243 |
| 9 | أيلول | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| | سبتمبر 30 | تراكم الأيام | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 | 259 | 260 | 261 | 262 | 263 | 264 | 265 | 266 | 267 | 268 | 269 | 270 | 271 | 272 | 273 | |
| 10 | تشرين الأول | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| | أكتوبر 31 | تراكم الأيام | 274 | 275 | 276 | 277 | 278 | 279 | 280 | 281 | 282 | 283 | 284 | 285 | 286 | 287 | 288 | 289 | 290 | 291 | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 | 299 | 300 | 301 | 302 | 303 | 304 |
| 11 | تشرين الثاني | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| | نوفمبر 30 | تراكم الأيام | 305 | 306 | 307 | 308 | 309 | 310 | 311 | 312 | 313 | 314 | 315 | 316 | 317 | 318 | 319 | 320 | 321 | 322 | 323 | 324 | 325 | 326 | 327 | 328 | 329 | 330 | 331 | 332 | 333 | 334 | |
| 12 | كانون الأول | أيام الشهر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| | ديسمبر 31 | تراكم الأيام | 335 | 336 | 337 | 338 | 339 | 340 | 341 | 342 | 343 | 344 | 345 | 346 | 347 | 348 | 349 | 350 | 351 | 352 | 353 | 354 | 355 | 356 | 357 | 358 | 359 | 360 | 361 | 362 | 363 | 364 | 365 |

ملاحظة: مدة الإيداع = الرقم التراكمي ليوم السحب – الرقم التراكمي ليوم الإيداع.

و إذا كانت السنة كبيسة وكانت فترة الإيداع تشمل 29 شباط نضيف يوماً واحداً إلى حاصل الطرح السابق.

# الملحق رقم (2)

جدول قيم الكسر $\frac{r^n-1}{P}=\frac{r^n-1}{r-1}$ حسب معدلات الفائدة المختلفة و عدد من السنوات

| معدل الفائدة $p$ / السنوات $n$ | 0.01 | 0.015 | 0.02 | 0.025 | 0.03 | 0.035 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| *2* | 2.010000 | 2.015000 | 2.020000 | 2.025000 | 2.030000 | 2.035000 |
| *3* | 3.030100 | 3.045225 | 3.060400 | 3.075625 | 3.090900 | 3.106225 |
| *4* | 4.060401 | 4.090903 | 4.121608 | 4.152516 | 4.183627 | 4.214943 |
| *5* | 5.101005 | 5.152267 | 5.204040 | 5.256329 | 5.309136 | 5.362466 |
| *6* | 6.152015 | 6.229551 | 6.308121 | 6.387737 | 6.468410 | 6.550152 |
| *7* | 7.213535 | 7.322994 | 7.434283 | 7.547430 | 7.662462 | 7.779408 |
| *8* | 8.285671 | 8.432839 | 8.582969 | 8.736116 | 8.892336 | 9.051687 |
| *9* | 9.368527 | 9.559332 | 9.754628 | 9.954519 | 10.15911 | 10.36850 |
| *10* | 10.46221 | 10.70272 | 10.94972 | 11.20338 | 11.46388 | 11.73139 |
| *11* | 11.56683 | 11.86326 | 12.16872 | 12.48347 | 12.80780 | 13.14199 |
| *12* | 12.68250 | 13.04121 | 13.41209 | 13.79555 | 14.19203 | 14.60196 |
| *13* | 13.80933 | 14.23683 | 14.68033 | 15.14044 | 15.61779 | 16.11303 |
| *14* | 14.94742 | 15.45038 | 15.97394 | 16.51895 | 17.08632 | 17.67699 |
| *15* | 16.09690 | 16.68214 | 17.29342 | 17.93193 | 18.59891 | 19.29568 |
| *16* | 17.25786 | 17.93237 | 18.63929 | 19.38022 | 20.15688 | 20.97103 |
| *17* | 18.43044 | 19.20136 | 20.01207 | 20.86473 | 21.76159 | 22.70502 |
| *18* | 19.61475 | 20.48938 | 21.41231 | 22.38635 | 23.41444 | 24.49969 |
| *19* | 20.81090 | 21.79672 | 22.84056 | 23.94601 | 25.11687 | 26.35718 |
| *20* | 22.01900 | 23.12367 | 24.29737 | 25.54466 | 26.87037 | 28.27968 |
| *21* | 23.23919 | 24.47052 | 25.78332 | 27.18327 | 28.67649 | 30.26947 |
| *22* | 24.47159 | 25.83758 | 27.29898 | 28.86286 | 30.53678 | 32.32890 |
| *23* | 25.71630 | 27.22514 | 28.84496 | 30.58443 | 32.45288 | 34.46041 |
| *24* | 26.97346 | 28.63352 | 30.42186 | 32.34904 | 34.42647 | 36.66653 |
| *25* | 28.24320 | 30.06302 | 32.03030 | 34.15776 | 36.45926 | 38.94986 |
| *26* | 29.52563 | 31.51397 | 33.67091 | 36.01171 | 38.55304 | 41.31310 |
| *27* | 30.82089 | 32.98668 | 35.34432 | 37.91200 | 40.70963 | 43.75906 |
| *28* | 32.12910 | 34.48148 | 37.05121 | 39.85980 | 42.93092 | 46.29063 |
| *29* | 33.45039 | 35.99870 | 38.79223 | 41.85630 | 45.21885 | 48.91080 |
| *30* | 34.78489 | 37.53868 | 40.56808 | 43.90270 | 47.57542 | 51.62268 |

جدول قيم الكسر $\frac{r^n-1}{P}=\frac{r^n-1}{r-1}$ حسب معدلات الفائدة المختلفة و عدد من السنوات

| معدل الفائدة $p$ / السنوات $n$ | 0.04 | 0.045 | 0.05 | 0.055 | 0.06 | 0.065 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 2.040000 | 2.045000 | 2.050000 | 2.055000 | 2.060000 | 2.065000 |
| 3 | 3.121600 | 3.137025 | 3.152500 | 3.168025 | 3.183600 | 3.199225 |
| 4 | 4.246464 | 4.278191 | 4.310125 | 4.342266 | 4.374616 | 4.407175 |
| 5 | 5.416323 | 5.470710 | 5.525631 | 5.581091 | 5.637093 | 5.693641 |
| 6 | 6.632975 | 6.716892 | 6.801913 | 6.888051 | 6.975319 | 7.063728 |
| 7 | 7.898294 | 8.019152 | 8.142008 | 8.266894 | 8.393838 | 8.522870 |
| 8 | 9.214226 | 9.380014 | 9.549109 | 9.721573 | 9.897468 | 10.07686 |
| 9 | 10.58280 | 10.80211 | 11.02656 | 11.25626 | 11.49132 | 11.73185 |
| 10 | 12.00611 | 12.28821 | 12.57789 | 12.87535 | 13.18079 | 13.49442 |
| 11 | 13.48635 | 13.84118 | 14.20679 | 14.58350 | 14.97164 | 15.37156 |
| 12 | 15.02581 | 15.46403 | 15.91713 | 16.38559 | 16.86994 | 17.37071 |
| 13 | 16.62684 | 17.15991 | 17.71298 | 18.28680 | 18.88214 | 19.49981 |
| 14 | 18.29191 | 18.93211 | 19.59863 | 20.29257 | 21.01507 | 21.76730 |
| 15 | 20.02359 | 20.78405 | 21.57856 | 22.40866 | 23.27597 | 24.18217 |
| 16 | 21.82453 | 22.71934 | 23.65749 | 24.64114 | 25.67253 | 26.75401 |
| 17 | 23.69751 | 24.74171 | 25.84037 | 26.99640 | 28.21288 | 29.49302 |
| 18 | 25.64541 | 26.85508 | 28.13238 | 29.48120 | 30.90565 | 32.41007 |
| 19 | 27.67123 | 29.06356 | 30.53900 | 32.10267 | 33.75999 | 35.51672 |
| 20 | 29.77808 | 31.37142 | 33.06595 | 34.86832 | 36.78559 | 38.82531 |
| 21 | 31.96920 | 33.78314 | 35.71925 | 37.78608 | 39.99273 | 42.34895 |
| 22 | 34.24797 | 36.30338 | 38.50521 | 40.86431 | 43.39229 | 46.10164 |
| 23 | 36.61789 | 38.93703 | 41.43048 | 44.11185 | 46.99583 | 50.09824 |
| 24 | 39.08260 | 41.68920 | 44.50200 | 47.53800 | 50.81558 | 54.35463 |
| 25 | 41.64591 | 44.56521 | 47.72710 | 51.15259 | 54.86451 | 58.88768 |
| 26 | 44.31174 | 47.57064 | 51.11345 | 54.96598 | 59.15638 | 63.71538 |
| 27 | 47.08421 | 50.71132 | 54.66913 | 58.98911 | 63.70577 | 68.85688 |
| 28 | 49.96758 | 53.99333 | 58.40258 | 63.23351 | 68.52811 | 74.33257 |
| 29 | 52.96629 | 57.42303 | 62.32271 | 67.71135 | 73.63980 | 80.16419 |
| 30 | 56.08494 | 61.00707 | 66.43885 | 72.43548 | 79.05819 | 86.37486 |

جدول قيم الكسر $\frac{r^n-1}{P}=\frac{r^n-1}{r-1}$ حسب معدلات الفائدة المختلفة و عدد من السنوات

| معدل الفائدة $p$ / السنوات $n$ | 0.07 | 0.075 | 0.08 | 0.085 | 0.09 | 0.095 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 2.070000 | 2.075000 | 2.080000 | 2.085000 | 2.090000 | 2.095000 |
| 3 | 3.214900 | 3.230625 | 3.246400 | 3.262225 | 3.278100 | 3.294025 |
| 4 | 4.439943 | 4.472922 | 4.506112 | 4.539514 | 4.573129 | 4.606957 |
| 5 | 5.750739 | 5.808391 | 5.866601 | 5.925373 | 5.984711 | 6.044618 |
| 6 | 7.153291 | 7.244020 | 7.335929 | 7.42903 | 7.523335 | 7.618857 |
| 7 | 8.654021 | 8.787322 | 8.922803 | 9.060497 | 9.200435 | 9.342648 |
| 8 | 10.25980 | 10.44637 | 10.63663 | 10.83064 | 11.02847 | 11.23020 |
| 9 | 11.97799 | 12.22985 | 12.48756 | 12.75124 | 13.02104 | 13.29707 |
| 10 | 13.81645 | 14.14709 | 14.48656 | 14.83510 | 15.19293 | 15.56029 |
| 11 | 15.78360 | 16.20812 | 16.64549 | 17.09608 | 17.56029 | 18.03852 |
| 12 | 17.88845 | 18.42373 | 18.97713 | 19.54925 | 20.14072 | 20.75218 |
| 13 | 20.14064 | 20.80551 | 21.49530 | 22.21094 | 22.95338 | 23.72363 |
| 14 | 22.55049 | 23.36592 | 24.21492 | 25.09887 | 26.01919 | 26.97738 |
| 15 | 25.12902 | 26.11836 | 27.15211 | 28.23227 | 29.36092 | 30.54023 |
| 16 | 27.88805 | 29.07724 | 30.32428 | 31.63201 | 33.00340 | 34.44155 |
| 17 | 30.84022 | 32.25804 | 33.75023 | 35.32073 | 36.97370 | 38.71350 |
| 18 | 33.99903 | 35.67739 | 37.45024 | 39.32300 | 41.30134 | 43.39128 |
| 19 | 37.37896 | 39.35319 | 41.44626 | 43.66545 | 46.01846 | 48.51345 |
| 20 | 40.99549 | 43.30468 | 45.76196 | 48.37701 | 51.16012 | 54.12223 |
| 21 | 44.86518 | 47.55253 | 50.42292 | 53.48906 | 56.76453 | 60.26384 |
| 22 | 49.00574 | 52.11897 | 55.45676 | 59.03563 | 62.87334 | 66.98891 |
| 23 | 53.43614 | 57.02790 | 60.89330 | 65.05366 | 69.53194 | 74.35286 |
| 24 | 58.17667 | 62.30499 | 66.76476 | 71.58322 | 76.78981 | 82.41638 |
| 25 | 63.24904 | 67.97786 | 73.10594 | 78.66779 | 84.70090 | 91.24593 |
| 26 | 68.67647 | 74.07620 | 79.95442 | 86.35455 | 93.32398 | 100.9143 |
| 27 | 74.48382 | 80.63192 | 87.35077 | 94.69469 | 102.7231 | 111.5012 |
| 28 | 80.69769 | 87.67931 | 95.33883 | 103.7437 | 112.9682 | 123.0938 |
| 29 | 87.34653 | 95.25526 | 103.9659 | 113.5620 | 124.1354 | 135.7877 |
| 30 | 94.46079 | 103.3994 | 113.2832 | 124.2147 | 136.3075 | 149.6875 |

## الملحق رقم (3)

جدول قيم الكسر $\frac{1-h^n}{P}$ حسب معدلات الفائدة المختلفة و عدد من السنوات

| معدل الفائدة $p$ / السنوات $n$ | 0.01 | 0.015 | 0.02 | 0.025 | 0.03 | 0.035 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.990099 | 0.985222 | 0.980392 | 0.975610 | 0.970874 | 0.966184 |
| 2 | 1.970395 | 1.955883 | 1.941561 | 1.927424 | 1.913470 | 1.899694 |
| 3 | 2.940985 | 2.912200 | 2.883883 | 2.856024 | 2.828611 | 2.801637 |
| 4 | 3.901966 | 3.854385 | 3.807729 | 3.761974 | 3.717098 | 3.673079 |
| 5 | 4.853431 | 4.782645 | 4.713460 | 4.645828 | 4.579707 | 4.515052 |
| 6 | 5.795476 | 5.697187 | 5.601431 | 5.508125 | 5.417191 | 5.328553 |
| 7 | 6.728195 | 6.598214 | 6.471991 | 6.349391 | 6.230283 | 6.114544 |
| 8 | 7.651678 | 7.485925 | 7.325481 | 7.170137 | 7.019692 | 6.873956 |
| 9 | 8.566018 | 8.360517 | 8.162237 | 7.970866 | 7.786109 | 7.607687 |
| 10 | 9.471305 | 9.222185 | 8.982585 | 8.752064 | 8.530203 | 8.316605 |
| 11 | 10.36763 | 10.07112 | 9.786848 | 9.514209 | 9.252624 | 9.001551 |
| 12 | 11.25508 | 10.90751 | 10.57534 | 10.25776 | 9.954004 | 9.663334 |
| 13 | 12.13374 | 11.73153 | 11.34837 | 10.98318 | 10.63496 | 10.30274 |
| 14 | 13.00370 | 12.54338 | 12.10625 | 11.69091 | 11.29607 | 10.92052 |
| 15 | 13.86505 | 13.34323 | 12.84926 | 12.38138 | 11.93794 | 11.51741 |
| 16 | 14.71787 | 14.13126 | 13.57771 | 13.05500 | 12.56110 | 12.09412 |
| 17 | 15.56225 | 14.90765 | 14.29187 | 13.71220 | 13.16612 | 12.65132 |
| 18 | 16.39827 | 15.67256 | 14.99203 | 14.35336 | 13.75351 | 13.18968 |
| 19 | 17.22601 | 16.42617 | 15.67846 | 14.97889 | 14.32380 | 13.70984 |
| 20 | 18.04555 | 17.16864 | 16.35143 | 15.58916 | 14.87747 | 14.21240 |
| 21 | 18.85698 | 17.90014 | 17.01121 | 16.18455 | 15.41502 | 14.69797 |
| 22 | 19.66038 | 18.62082 | 17.65805 | 16.76541 | 15.93692 | 15.16712 |
| 23 | 20.45582 | 19.33086 | 18.29220 | 17.33211 | 16.44361 | 15.62041 |
| 24 | 21.24339 | 20.03041 | 18.91393 | 17.88499 | 16.93554 | 16.05837 |
| 25 | 22.02316 | 20.71961 | 19.52346 | 18.42438 | 17.41315 | 16.48151 |
| 26 | 22.79520 | 21.39863 | 20.12104 | 18.95061 | 17.87684 | 16.89035 |
| 27 | 23.55961 | 22.06762 | 20.70690 | 19.46401 | 18.32703 | 17.28536 |
| 28 | 24.31644 | 22.72672 | 21.28127 | 19.96489 | 18.76411 | 17.66702 |
| 29 | 25.06579 | 23.37608 | 21.84438 | 20.45355 | 19.18845 | 18.03577 |
| 30 | 25.80771 | 24.01584 | 22.39646 | 20.93029 | 19.60044 | 18.39205 |

جدول قيم الكسر $\frac{1-h^n}{P}$ حسب معدلات الفائدة المختلفة و عدد من السنوات

| معدل الفائدة $p$ / السنوات $n$ | 0.07 | 0.075 | 0.08 | 0.085 | 0.09 | 0.095 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.934579 | 0.930233 | 0.925926 | 0.921659 | 0.917431 | 0.913242 |
| 2 | 1.808018 | 1.795565 | 1.783265 | 1.771114 | 1.759111 | 1.747253 |
| 3 | 2.624316 | 2.600526 | 2.577097 | 2.554022 | 2.531295 | 2.508907 |
| 4 | 3.387211 | 3.349326 | 3.312127 | 3.275597 | 3.23972 | 3.204481 |
| 5 | 4.100197 | 4.045885 | 3.992710 | 3.940642 | 3.889651 | 3.839709 |
| 6 | 4.766540 | 4.693846 | 4.622880 | 4.553587 | 4.485919 | 4.419825 |
| 7 | 5.389289 | 5.296601 | 5.206370 | 5.118514 | 5.032953 | 4.949612 |
| 8 | 5.971299 | 5.857304 | 5.746639 | 5.639183 | 5.534819 | 5.433436 |
| 9 | 6.515232 | 6.378887 | 6.246888 | 6.119063 | 5.995247 | 5.875284 |
| 10 | 7.023582 | 6.864081 | 6.710081 | 6.561348 | 6.417658 | 6.278798 |
| 11 | 7.498674 | 7.315424 | 7.138964 | 6.968984 | 6.805191 | 6.647304 |
| 12 | 7.942686 | 7.735278 | 7.536078 | 7.344686 | 7.160725 | 6.983839 |
| 13 | 8.357651 | 8.125840 | 7.903776 | 7.690955 | 7.486904 | 7.291178 |
| 14 | 8.745468 | 8.489154 | 8.244237 | 8.010097 | 7.786150 | 7.571852 |
| 15 | 9.107914 | 8.827120 | 8.559479 | 8.304237 | 8.060688 | 7.828175 |
| 16 | 9.446649 | 9.141507 | 8.851369 | 8.575333 | 8.312558 | 8.062260 |
| 17 | 9.763223 | 9.433960 | 9.121638 | 8.825192 | 8.543631 | 8.276037 |
| 18 | 10.05909 | 9.706009 | 9.371887 | 9.055476 | 8.755625 | 8.471266 |
| 19 | 10.33560 | 9.959078 | 9.603599 | 9.267720 | 8.950115 | 8.649558 |
| 20 | 10.59401 | 10.19449 | 9.818147 | 9.463337 | 9.128546 | 8.812382 |
| 21 | 10.83553 | 10.41348 | 10.01680 | 9.643628 | 9.292244 | 8.961080 |
| 22 | 11.06124 | 10.61719 | 10.20074 | 9.809796 | 9.442425 | 9.096876 |
| 23 | 11.27219 | 10.80669 | 10.37106 | 9.962945 | 9.580207 | 9.220892 |
| 24 | 11.46933 | 10.98297 | 10.52876 | 10.10410 | 9.706612 | 9.334148 |
| 25 | 11.65358 | 11.14695 | 10.67478 | 10.23419 | 9.822580 | 9.437578 |
| 26 | 11.82578 | 11.29948 | 10.80998 | 10.35409 | 9.928972 | 9.532034 |
| 27 | 11.98671 | 11.44138 | 10.93516 | 10.46460 | 10.02658 | 9.618296 |
| 28 | 12.13711 | 11.57338 | 11.05108 | 10.56645 | 10.11613 | 9.697074 |
| 29 | 12.27767 | 11.69617 | 11.15841 | 10.66033 | 10.19828 | 9.769018 |
| 30 | 12.40904 | 11.81039 | 11.25778 | 10.74684 | 10.27365 | 9.834719 |

جدول قيم الكسر $\frac{1-h^n}{P}$ حسب معدلات الفائدة المختلفة و عدد من السنوات

| معدل الفائدة $p$ / السنوات $n$ | 0.04 | 0.045 | 0.05 | 0.055 | 0.06 | 0.065 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.961538 | 0.956938 | 0.952381 | 0.947867 | 0.943396 | 0.938967 |
| 2 | 1.886095 | 1.872668 | 1.859410 | 1.846320 | 1.833393 | 1.820626 |
| 3 | 2.775091 | 2.748964 | 2.723248 | 2.697933 | 2.673012 | 2.648476 |
| 4 | 3.629895 | 3.587526 | 3.545951 | 3.505150 | 3.465106 | 3.425799 |
| 5 | 4.451822 | 4.389977 | 4.329477 | 4.270284 | 4.212364 | 4.155679 |
| 6 | 5.242137 | 5.157872 | 5.075692 | 4.995530 | 4.917324 | 4.841014 |
| 7 | 6.002055 | 5.892701 | 5.786373 | 5.682967 | 5.582381 | 5.484520 |
| 8 | 6.732745 | 6.595886 | 6.463213 | 6.334566 | 6.209794 | 6.088751 |
| 9 | 7.435332 | 7.268790 | 7.107822 | 6.952195 | 6.801692 | 6.656104 |
| 10 | 8.110896 | 7.912718 | 7.721735 | 7.537626 | 7.360087 | 7.188830 |
| 11 | 8.760477 | 8.528917 | 8.306414 | 8.092536 | 7.886875 | 7.689042 |
| 12 | 9.385074 | 9.118581 | 8.863252 | 8.618518 | 8.383844 | 8.158725 |
| 13 | 9.985648 | 9.682852 | 9.393573 | 9.117079 | 8.852683 | 8.599742 |
| 14 | 10.56312 | 10.22283 | 9.898641 | 9.589648 | 9.294984 | 9.013842 |
| 15 | 11.11839 | 10.73955 | 10.37966 | 10.03758 | 9.712249 | 9.402669 |
| 16 | 11.65230 | 11.23402 | 10.83777 | 10.46216 | 10.10590 | 9.767764 |
| 17 | 12.16567 | 11.70719 | 11.27407 | 10.86461 | 10.47726 | 10.11058 |
| 18 | 12.65930 | 12.15999 | 11.68959 | 11.24607 | 10.82760 | 10.43247 |
| 19 | 13.13394 | 12.59329 | 12.08532 | 11.60765 | 11.15812 | 10.73471 |
| 20 | 13.59033 | 13.00794 | 12.46221 | 11.95038 | 11.46992 | 11.01851 |
| 21 | 14.02916 | 13.40472 | 12.82115 | 12.27524 | 11.76408 | 11.28498 |
| 22 | 14.45112 | 13.78442 | 13.16300 | 12.58317 | 12.04158 | 11.53520 |
| 23 | 14.85684 | 14.14777 | 13.48857 | 12.87504 | 12.30338 | 11.77014 |
| 24 | 15.24696 | 14.49548 | 13.79864 | 13.15170 | 12.55036 | 11.99074 |
| 25 | 15.62208 | 14.82821 | 14.09394 | 13.41393 | 12.78336 | 12.19788 |
| 26 | 15.98277 | 15.14661 | 14.37519 | 13.66250 | 13.00317 | 12.39237 |
| 27 | 16.32959 | 15.45130 | 14.64303 | 13.89810 | 13.21053 | 12.57500 |
| 28 | 16.66306 | 15.74287 | 14.89813 | 14.12142 | 13.40616 | 12.74648 |
| 29 | 16.98371 | 16.02189 | 15.14107 | 14.33310 | 13.59072 | 12.90749 |
| 30 | 17.29203 | 16.28889 | 15.37245 | 14.53375 | 13.76483 | 13.05868 |

# المـــــلاحـــــق

## لجنة التدقيق العلمي

| | | |
|---|---|---|
| أ.د. رضوان العمار<br>جامعة تشرين– كلية الاقتصاد | أ.د. محمود طيوب<br>جامعة تشرين– كلية الاقتصاد | أ.د. صلاح شيخ ديب<br>جامعة تشرين– كلية الاقتصاد |

## المدقق اللغـوي

أ.د. خالد يسير

جامعة تشرين – كلية الآداب

قسم اللغة العربية

حقوق الطبع والترجمة والتأليف محفوظة
لدى مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

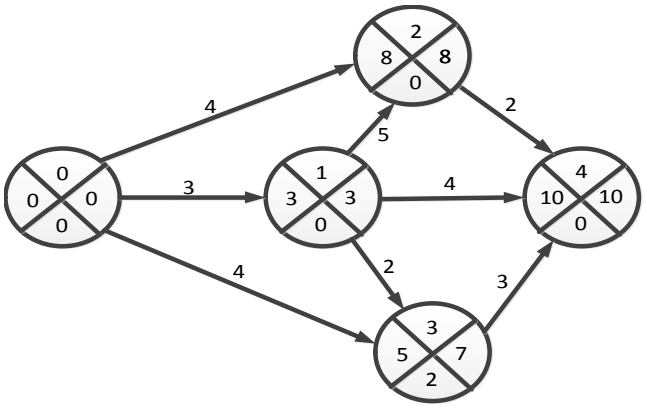
**Syrian Arab Republic**
**Ministry of Higher Education**
**Tishreen University**
**Economy faculty**

# ECONOMICAL MATHEMATICS

## Written By

**Dr. AL ALI IBRAHIM M.**
Prof. of Dept. Statistics and Programming

**Dr. AL RIFAAI A.H.M.**
Prof. of Dept. Statistics and Programming




**FOR SECOND YEAR-STUDENTS**

**1438−1437هـ**
**2017−2016م**