بحوث العمليات

منشورات جامعة تشرين
كلية الاقتصاد

بحوث العمليات

الدكتور: إبراهيم محمد العلي
أستاذ في قسم الإحصاء والبرمجة
كلية الاقتصاد– جامعة تشرين

الدكتور: صلاح شيخ ديب
أستاذ مساعد في قسم إدارة الأعمال
كلية الاقتصاد– جامعة تشرين

لطلاب السنة الثالثة

1435 – 1434هـ

2014 – 2013م

المحتويات

الموضوع	رقم الصفحة
عنوان الكتاب	(1 – 2)
الغلاف	(3 – 4)
قائمة المحتويات	(5 – 11)
قائمة الجداول	(12 – 13)
قائمة الأشكال	14
المقدمة	(15 – 19)
الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات	**(21 – 40)**
1/1– نشأة بحوث العمليات وتطورها	23
1/2– تعريف بحوث العمليات	24
1/3– الخصائص أو السمات الأساسية لبحوث العمليات	25
1/4– بحوث العمليات وبناء النماذج	27
1/5– خطوات بناء واستخدام النماذج	32
1/6– أساليب ونماذج بحوث العمليات	36
1/7– حدود استخدام بحوث العمليات	38
1/8– تدريبات	39
الفصل الثاني: البرمجة الخطية	**(41 – 56)**
2/1– تعريف البرمجة الخطية	43
2/2– شروط استخدام نموذج البرمجة الخطية	45
2/3– النموذج العام لمسائل البرمجة الخطية	47

الموضوع	رقم الصفحة
4/2- النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية	*47*
5/2- إرشادات في عملية التحويل من النموذج العام إلى النموذج النظامي	*48*
6/2- الشكل القاعدي للنموذج النظامي	*52*
7/2- الطرق المستخدمة في حل مسائل البرمجة الخطية وإيجاد الحل الأمثل لها.	*53*
8/2- تدريبات	*55*
الفصل الثالث: الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية	**(*73 -57*)**
1/3- مقدمة	*59*
2/3- خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية	*59*
3/3- حالات خاصة في حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية	*66*
4/3- تدريبات	*72*
الفصل الرابع: طريقة السمبلكس المباشرة والمختصرة	**(*104 -77*)**
1/4- مقدمة	*77*
2/4- خطوات خوارزمية السمبلكس المباشرة	*78*
3/4- تطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المباشرة	*82*
4/4- خوارزمية السمبلكس المعدلة أو المختصرة	*91*
5/4- بعض الملاحظات الهامة للحل وفق خوارزمية السمبلكس المباشرة والمعدلة	*92*

الموضوع	رقم الصفحة
6/4- تطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المعدلة أو المختصرة	*94*
7/4- تدريبات	*103*
الفصل الخامس: طريقة السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية	**(*105* - *121*)**
1/5- مقدمة	*107*
2/5- خطوات خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة	*108*
3/5- تطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة	*110*
4/5- خطوات خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة	*115*
5/5- تطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة	*116*
6/5- تدريبات	*120*
الفصل السادس: النماذج المرافقة وخوارزمية السمبلكس المزدوجة (للنموذجين الأصلي والمرافق)	**(*123* - *166*)**
1/6- مقدمة	*125*
2/6- كيفية تشكيل النموذج المرافق	*126*
3/6- تفسير المعنى الاقتصادي للنموذجين الأصلي والمرافق	*129*
4/6- خطوات خوارزمية السمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق	*136*
5/6- تطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس	*139*

الموضوع	رقم الصفحة
المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق	
6/6- تدريبات	*165*
الفصل السابع: نموذج برمجة الأهداف	**(*167 – 223*)**
1/7- مقدمة	*169*
2/7- الجوانب المقيدة لنموذج البرمجة الخطية	*171*
3/7- تعريف نموذج برمجة الأهداف	*175*
4/7- مزايا نموذج برمجة الأهداف	*177*
5/7- نواحي الاختلاف بين نموذج البرمجة الخطية ونموذج برمجة الأهداف	*179*
6/7- الإطار العام لنموذج برمجة الأهداف	*181*
7/7- الصياغة العامة لنموذج برمجة الأهداف	*188*
8/7- تحليل حساسية نموذج برمجة الأهداف	*189*
9/7- تطبيقات عملية على نموذج برمجة الأهداف	*192*
10/7- تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف	*212*
11/7- تدريبات	*222*
الفصل الثامن: طريقة النقل	**(*225 – 260*)**
1/8- مقدمة	*227*
2/8- تمثيل مشكلة النقل رياضياً	*228*
3/8- طرق إيجاد الحل المبدئي لمسائل النقل	*233*

الموضوع	رقم الصفحة
1/3/8- طريقة الزاوية الشمالية الغربية	*234*
2/3/8- طريقة التكلفة الأقل في السطر	*236*
3/3/8- طريقة التكلفة الأقل في العمود	*238*
4/3/8- طريقة التكلفة الأقل في المصفوفة	*240*
5/3/8- طريقة فوجل التقريبية	*242*
6/3/8- طريقة رسل التقريبية	*245*
4/8- طرق إيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل	*252*
5/8- تدريبات	*259*
الفصل التاسع: طريقة التخصيص	**(*261- 318*)**
1/9- مقدمة	*263*
2/9- خصائص مشكلة التخصيص	*264*
3/9- الصياغة العامة لمشكلة التخصيص	*265*
4/9- طرق حل مسائل التخصيص	*268*
5/9- معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص	*301*
6/9- تدريبات	*316*
الفصل العاشر طبيعة عملية اتخاذ القرارات	**(*319- 352*)**
1/10- مقدمة	*321*
2/10- مفهوم القرار	*322*
3/10- أنواع القرارات	*323*
4/10- طرق اتخاذ القرارات	*325*

الموضوع	رقم الصفحة
5/10- خطوات تحليل القرار واتخاذه	*331*
6/10- البيئات المختلفة لاتخاذ القرار	*333*
7/10- شجرة القرار	*348*
الفصل الحادي عشر: إدارة المشروعات	**(*400 – 353*)**
1/11- مقدمة	*355*
2/11- تعاريف ومصطلحات	*356*
3/11- القواعد العامة لبناء شبكة الأعمال	*358*
4/11- طريقة المسار الحرج وأسلوب بيرت	*360*
5/11- استخدام نموذج بيرت في تخفيض التكلفة	*381*
6/11- تدريبات	*397*
الفصل الثاني عشر: نظرية صفوف الانتظار	**(*426 – 401*)**
1/12- مقدمة	*403*
2/12- الخصائص المميزة لنظرية الانتظار	*404*
3/12- نماذج صفوف الانتظار	*407*
4/12- النماذج الرياضية لتحليل صفوف الانتظار	*410*
5/12- تخفيض التكاليف	*421*
6/12- تدريبات	*423*
الفصل الثالث عشر: نظرية المباراة	**(*456 – 427*)**
1/13- مقدمة	*429*
2/13- شروط استخدام نظرية المباراة	*430*
3/13- بعض المبادئ لعملية اتخاذ القرار في نظرية المباراة	*431*
4/13- تصنيف بيئة القرار لنظرية المباراة	*433*

الموضوع	رقم الصفحة
5/13- تدريبات	*455*
الفصل الرابع عشر: نماذج المحاكاة	**(*457- 486*)**
1/14- تعريف المحاكاة	*459*
2/14- خطوات تطبيق أسلوب المحاكاة أو نموذجها	*460*
3/14- مجالات تطبيق المحاكاة	*461*
4/14- مزايا المحاكاة وعيوبها	*463*
5/14- المحاكاة باستخدام أسلوب (مونت كارلو)	*464*
6/14- استخدام المحاكاة في حل مشكلات نظرية صفوف الانتظار	*475*
7/14- استخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون	*479*
8/14- تدريبات	*486*
الفصل الخامس عشر: تحليل ماركوف	**(*487- 509*)**
1/15- مقدمة	*489*
2/15- مبررات استخدام أسلوب ماركوف	*490*
3/15- خطوات استخدام أسلوب ماركوف	*491*
4/15- افتراضات أسلوب ماركوف	*496*
5/15- حالات عملية	*497*
6/15- تدريبات	*508*
مراجع الكتاب	**(*511- 519*)**
قائمة المصطلحات العلمية	**(*521- 532*)**

قائمة الجداول

رقم الجدول	عنوان الجدول	رقم الصفحة
الجدول رقم (1-1)	النماذج الرمزية في بحوث العمليات	31
الجدول رقم (1-4)	شكل الحل القاعدي	80
الجدول رقم (1-7)	نواحي الاختلاف بين نموذج البرمجة الخطية ونموذج برمجة الأهداف	179
الجدول رقم (1-10)	جدول القرار مع وجود قيم شرطية لشركة أكرم للمنتجات الهندسية	332
الجدول رقم (2-10)	عائد الاستثمارات	334
الجدول رقم (3-10)	جدول القرار مع احتمالات حدوث المواقف المحتملة والقيمة الحالية المتوقعة لشركة أكرم للصناعات الهندسية	337
الجدول رقم (4-10)	العوائد للقرارات المختلفة	338
الجدول رقم (5-10)	حساب خسارة الفرصة البديلة لشركة السيد أكرم	340
الجدول رقم (6-10)	جدول خسارة الفرصة البديلة لشركة السيد أكرم	341
الجدول رقم (7-10)	مصفوفة القرار	343
الجدول رقم (8-10)	أقصى الأقصى	344
الجدول رقم (9-10)	أقصى الأدنى	344
الجدول رقم (10-10)	مصفوفة القرار	345
الجدول رقم (11-10)	معيار الأسف	346

رقم الجدول	عنوان الجدول	رقم الصفحة
الجدول رقم (1-12)	خصائص نظام الانتظار	*406*
الجدول رقم (1-14)	بيانات الطلب الفعلي لإحدى شركات المنسوجات	*465*
الجدول رقم (2-14)	المحاولة الأولى لتوليد الأرقام العشوائية	*466*
الجدول رقم (3-14)	المحاولة الثانية لتوليد الأرقام العشوائية	*466*
الجدول رقم (4-14)	المحاولة الثالثة لتوليد الأرقام العشوائية	*467*
الجدول رقم (5-14)	الطلب على الإطارات لإحدى الشركات خلال 200 يوم	*468*
الجدول رقم (6-14)	المدى بين الأرقام العشوائية المناظرة للاحتمالات المتجمعة	*469*
الجدول رقم (7-14)	الطلب المتوقع خلال عشرة أيام لاحقة	*471*
الجدول رقم (8-14)	محاولات لمحاكاة الطلب	*473*
الجدول رقم (9-14)	عدد المراكب والاحتمالات المقابلة لهم	*475*
الجدول رقم (10-14)	احتمالات عدم اكتمال مراكب الرحلات	*476*
الجدول رقم (11-14)	عدد التأخيرات اليومية والمراكب غير المكتملة	*477*
الجدول رقم (12-14)	الطلب على المنتج والتكرارات	*479*
الجدول رقم (13-14)	الاحتمالات والمدى من الأرقام العشوائية لإعادة الطلب	*480*
الجدول رقم (14-14)	المحاولة الأولى للمحاكاة لحجم طلبية يبلغ 10 وحدات ونقطة إعادة طلب تبلغ 5 وحدات	*483*

قائمة الأشكال

رقم الشكل	عنوان الشكل	رقم الصفحة
الشكل رقم (1-7)	شكل يوضح صياغة نموذج برمجة الأهداف وحله وتطبيقه	*191*
الشكل رقم (1-12)	شكل يمثل نظام الانتظار مركز خدمة واحد مع إتمام الخدمة في مرحلة واحدة	*404*
الشكل رقم (1-14)	نموذج المحاكاة	*460*
الشكل رقم (2-14)	خطوات عملية المحاكاة	*461*
الشكل رقم (3-14)	المحاكاة باستخدام الحاسب الآلي	*474*
الشكل رقم (4-14)	خريطة التدفق لمحاكاة المخزون من أحد المنتجات	*482*

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

أدى التطور في مجالات الأعمال منذ الثورة الصناعية إلى الاتجاه نحو تكوين المشروعات ذات الحجم الكبير، بالإضافة إلى تنوع الأنشطة في المشروع الواحد، وما ترتب عليه من تعدد وتعارض في الأهداف، وكذلك وجود العديد من البدائل في عملية اتخاذ القرارات، وتزايد المشكلات الإدارية المعقدة، والتي تحتاج إلى طريقة علمية لحلها، وقد أدى هذا الاتجاه إلى تعقيد عملية اتخاذ القرارات نظراً لتزايد المتغيرات التي تؤثر على القرارات المختلفة، وترتب على ذلك أن زادت الحاجة إلى أساليب حديثة يمكن للإدارة استخدامها في حل مشكلاتها المختلفة، وقد أدت الحاجة إلى استخدام الأساليب الحديثة بجانب التطور السريع في الحاسبات الالكترونية إلى ظهور فرع جديد من المعرفة يعرف باسم بحوث العمليات Operations Research.

إنّ بحوث العمليات توفر للمدير المحترف الرؤية المتعمقة، والمنهج العلمي للتعامل مع المشكلات التي يواجهها، واتخاذ القرارات الرشيدة لحلها.

وقد حظيت عملية اتخاذ القرارت الإدارية باستخدام أساليب بحوث العمليات المختلفة باهتمام الكثير من الدارسين والممارسين للإدارة، حيث يجد الدارسون في هذا المجال أسلوباً حديثاً ومتطوراً في تحليل البيانات تحليلاً كمياً يساير حركة الإدارة في الاتجاه العلمي، كما أنّ ارتكاز هذا الأسلوب الكمي على علوم الرياضيات والإحصاء، يعطي الدارسين إمكانيات أكثر في الاستفادة من العلوم الأخرى. أما الممارسون فنجد أنّ اهتمامهم باستخدام هذا الأسلوب في اتخاذ القرارات الإدارية أصبح في تزايد مستمر، وذلك لرغبتهم في الاستفادة من الأساليب الإدارية المتطورة، نظراً لما تقدمه من إمكانيات وقدرات كبيرة في مجال التحليل تساعدهم في ترشيد عملية اتخاذ القرارات.

ونظراً لتوسع أساليب بحوث العمليات وتنوع استخداماتها، سوف يقوم المؤلفان بتغطية أهم أساليب بحوث العمليات واستخداماتها المتعددة للمنظمات، كي يتم تقديمها بشكل علمي وواضح لطلابنا الأعزاء في السنة الثالثة في كلية الاقتصاد– جامعة تشرين.

وقد حرص المؤلفان على أن يتم عرض نماذج وأساليب بحوث العمليات المختلفة بأسلوب سهل وواضح، ومرتبط بالواقع الفعلي، وبأمثلة واقعية من واقع منظماتنا، مع الاحتفاظ بالعمق المناسب في طرح المادة العلمية، كذلك حرص المؤلفان على عرض أحدث وأهم أساليب بحوث العمليات بالاعتماد على أحدث الدوريات والكتب العربية والأجنبية في هذا المجال.

وتضمن الكتاب خمسة عشر فصلاً دراسياً.

تناول الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات من حيث نشأة بحوث العمليات وتطورها، والخصائص أو السمات الأساسية لبحوث العمليات، وخطوات بناء واستخدام النماذج، وأساليب ونماذج بحوث العمليات، وحدود استخدام بحوث العمليات.

وتناول الفصل الثاني: البرمجة الخطية، من حيث تعريف وشروط استخدام نموذج البرمجة الخطية، والنموذج العام لمسائل البرمجة الخطية، والنموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية، وإرشادات في عملية التحويل من النموذج العام إلى النموذج النظامي، والشكل القاعدي للنموذج النظامي.

وتناول الفصل الثالث: الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية، وخطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية، وحالات خاصة في حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية.

وتناول الفصل الرابع: طريقة السمبلكس المباشرة والمختصرة، من حيث خطوات خوارزمية السمبلكس المباشرة، وتطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المباشرة، وخوارزمية السمبلكس المعدلة أو المختصرة، وبعض الملاحظات الهامة

للحل وفق خوارزمية السمبلكس المباشرة والمعدلة، وتطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المعدلة أو المختصرة.

وتناول الفصل الخامس: طريقة السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية، من حيث خطوات خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة، وتطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة، وخطوات خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة، وتطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة.

وتناول الفصل السادس: النماذج المرافقة وخوارزمية السمبلكس المزدوجة (للنموذجين الأصلي والمرافق)، من حيث كيفية تشكيل النموذج المرافق، وتفسير المعنى الاقتصادي للنموذجين الأصلي والمرافق، وخطوات خوارزمية السمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق، وتطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس السمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق.

وتناول الفصل السابع: نموذج برمجة الأهداف، من حيث الجوانب المقيدة لنموذج البرمجة الخطية، وتعريف نموذج برمجة الأهداف، ومزايا نموذج برمجة الأهداف، والإطار العام لنموذج برمجة الأهداف، والصياغة العامة لنموذج برمجة الأهداف، وتحليل حساسية نموذج برمجة الأهداف، وتطبيقات عملية على نموذج برمجة الأهداف، وتحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف.

وتناول الفصل الثامن: طريقة النقل، من حيث تمثيل مشكلة النقل رياضياً، وطرق إيجاد الحل المبدئي لمسائل النقل، والتي تتضمن طريقة الزاوية الشمالية الغربية – طريقة التكلفة الأقل السطر – طريقة التكلفة الأقل في العمود- طريقة التكلفة الأقل في المصفوفة- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method- طريقة رسل التقريبية Russel's Approximation Method- وطرق إيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل.

وتناول الفصل التاسع: طريقة التخصيص خصائص مشكلة التخصيص من حيث الصياغة العامة لمشكلة التخصيص، وطرق حل مسائل التخصيص، والتي من أهمها الطريقة المجرية للتخصيص، وطريقة الفرع والحد لحل مسائل التخصيص، ومعالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص، والتي من أهمها عدم تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف، وحل مشكلة التخصيص ذات هدف التعظيم.

وتناول الفصل العاشر: طبيعة عملية اتخاذ القرارات من حيث مفهوم القرار، أنواع القرارات، طرق اتخاذ القرارات، خطوات تحليل القرار واتخاذه، البيئات المختلفة لاتخاذ القرار، شجرة القرار.

وتناول الفصل الحادي عشر: إدارة المشروعات من حيث تعاريف ومصطلحات، القواعد العامة لبناء شبكة الأعمال، طريقة المسار الحرج وأسلوب بيرت، استخدام نموذج بيرت في تخفيض التكلفة، وتدريبات عملية مختلفة.

وتناول الفصل الثاني عشر: نظرية صفوف الانتظار من حيث الخصائص المميزة لنظرية الانتظار، نماذج صفوف الانتظار، النماذج الرياضية لتحليل صفوف الانتظار، تخفيض التكاليف، وتدريبات عملية مختلفة.

وتناول الفصل الثالث عشر: نظرية المباراة من حيث شروط استخدام نظرية المباراة، بعض المبادئ لعملية اتخاذ القرار في نظرية المباراة، تصنيف بيئة القرار لنظرية المباراة، وتدريبات عملية مختلفة.

وتناول الفصل الرابع عشر: نماذج المحاكاة من حيث تعريف المحاكاة، خطوات تطبيق أسلوب المحاكاة أو نموذجها، مجالات تطبيق المحاكاة، مزايا المحاكاة وعيوبها، المحاكاة باستخدام أسلوب (مونت كارلو)، استخدام المحاكاة في حل مشكلات نظرية صفوف الانتظار، استخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون، وتدريبات عملية مختلفة.

وتناول الفصل الخامس عشر: تحليل ماركوف من حيث مبررات استخدام أسلوب ماركوف، خطوات استخدام أسلوب ماركوف، افتراضات أسلوب ماركوف، حالات عملية مختلفة.

ويأمل المؤلفان أن يساهم هذا الجهد في إثراء المكتبة العربية في هذا المجال الخصب بحوث العمليات ، وأن يساعد الباحثين والممارسين والمهتمين في هذا المجال، ونسأل الله أن أكون قد وفقت بما عرضته في هذا الكتاب من مادة علمية بصورة مبسطة وواضحة وسهلة الاستخدام، وبمضمون علمي جيد وجديد.

والله ولي التوفيق

المؤلفان

Syrian Arab Republic
Ministry of Higher Education
Tishreen University
Faculty of Economics

Operations Research

Written by:

DR. Ebrahim Al- Ali
Prof. of Statistic
Faculty of Economics

DR. Salah Shiekh Deeb
Asst. Prof. of Business Administration
Faculty of Economics

1435-1434
2014-2013

اللجنة العلمية

د. علي يونس ميّا : أستاذ في قسم إدارة الأعمال – كلية الاقتصاد – جامعة تشرين– اختصاص إدارة المشروعات الصناعية.

د. حسن مشرقي : أستاذ في قسم إدارة الأعمال – كلية الاقتصاد – حلب– اختصاص نظرية القرارات الإدارية.

د. محمد كبية : أستاذ في قسم الإحصاء والبرمجة– كلية الاقتصاد – جامعة حلب– اختصاص طرق رياضية.

المدقق اللغوي

الدكتور بشير ناصر

أستاذ مساعد في قسم اللغة العربية

كلية الآداب– جامعة تشرين

حقوق الطبع والترجمة والتأليف محفوظة

لدى مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

الفصل الأول

مدخل إلى بحوث العمليات

محتويات الفصل الأول

1/1 – نشأة بحوث العمليات وتطورها

2/1 – تعريف بحوث العمليات

3/1 – الخصائص أو السمات الأساسية لبحوث العمليات

4/1 – بحوث العمليات وبناء النماذج

5/1 – خطوات بناء واستخدام النماذج

6/1 – أساليب ونماذج بحوث العمليات

7/1 – حدود استخدام بحوث العمليات

8/1 – تدريبات

1/1- نشأة بحوث العمليات وتطورها:

تُعدّ بحوث العمليات من فروع المعرفة الحديثة نسبياً، حيث لم يبدأ ظهور هذا الفرع إلا في أثناء الحرب العالمية الثانية، ومن ذلك الحين تطور هذا الفرع من فروع المعرفة تطوراً سريعاً، وقد قامت بريطانيا في أثناء الحرب العالمية الثانية بالاستعانة بفريق من العلماء لدراسة المشكلات الاستراتيجية المتعلقة بوسائل الدفاع، وذلك بهدف تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد العسكرية المحدودة.

ويعتبر تكوين هذا الفريق العلمي بمنزلة نقطة البداية وظهور ما يعرف حالياً ببحوث العمليات، ومن الواضح أنّ السبب في إطلاق اصطلاح بحوث العمليات، يرجع إلى أنّ فريق العلماء الذي كان يجري أبحاثه على العمليات الحربية، ولقد أدت النتائج المشجعة التي توصلت إليها فرق بحوث البريطانية إلى إنشاء فرق مماثلة في الولايات المتحدة.

وقد أدى نجاح فرق بحوث العمليات العسكرية إلى قيام رجال الصناعة بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية بمحاولة الاستفادة مما وصلت إليه هذه الفرق، وقد ساعد حدثان على إدخال بحوث العمليات في الصناعة:

1- الأول عندما قدم جورج دانتزنج نموذج البرمجة الخطية كأسلوب رياضي للوصول إلى التوزيع الأمثل للموارد المحدودة والنادرة، كما قدم طريقة السمبلكس لحل هذا النموذج، ويعتبر نموذج البرمجة الخطية من أهم نماذج بحوث العمليات وأكثرها ملائمة للتطبيق في منشآت الأعمال.
2- أما الحدث الثاني الذي ساعد على انتشار استخدام بحوث العمليات في الصناعة وفي منشآت الأعمال عموماً، فهو ظهور واستخدام الحاسبات الالكترونية بما لها من قدرات فائقة على القيام بالعمليات الحسابية المعقدة والتي تحتاجها معظم أساليب ونماذج بحوث العمليات.

ومن ذلك الحين تطورت بحوث العمليات بصورة كبيرة، وقد تأسست الجمعيات المهنية لبحوث العمليات في بريطانيا والولايات المتحدة الأمريكية، كما

قُدمت العديد من أساليب ونماذج بحوث العمليات مثل نماذج البرمجة الخطية، وبرمجة الأهداف، ونماذج النقل، والتخصيص، ونماذج المخزون، والمباريات، وصفوف الانتظار، وغيرها من النماذج.

2/1- تعريف بحوث العمليات:

لقد تعددت وتباينت الآراء ووجهات النظر في تعريف بحوث العمليات، إلا أنّ هذا التعدد لم يكن يحمل في طياته اختلافاً حقيقياً بقدر ما كان إبراز نواحٍ معينة والتأكيد عليها من وجهة نظر واضع التعريف.

فلدى البعض تعني بحوث العمليات مجموعة من المشكلات، ومجموعة من الأساليب بحيث إذا تمّ التعرف على طبيعة المشكلة أُمكن مباشرة تحديد الأسلوب الذي يمكن أن يتعامل معها ويحلها، وطبقاً لهذا الاتجاه فإنّ بحوث العمليات تندرج تحت مظلة المعارف.

ولدى البعض الآخر، تعني بحوث العمليات منهجاً علمياً للتعامل مع المشكلات المعقدة والمتشعبة، وطبقاً لهذا الاتجاه فإنّ بحوث العمليات تتحول إلى نشاط نفعله وليس معرفة، ومن ناحية أخرى فإنّ محاولات التمييز بين بحوث العمليات ومدخل النظم هي محاولات غير مجدية، لأنّ كل هذه المصطلحات متداخلة جداً، وأي محاولة لتحديد تمايزات واضحة بينها في التعريف هي محاولات تحكمية ومتحيزة.

فقد عرفت جمعية بحوث العمليات في المملكة المتحدة بحوث العمليات بأنها[1] : تطبيق الطرق العلمية على المشكلات المعقدة، والتي تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة من الأفراد، والمعدات، والمواد، والأموال في ميدان الصناعة، والتجارة، والحكومة، والدفاع، والمدخل المميز هو إعداد نموذج علمي للنظام يتضمن قياساً للعوامل المختلفة كالصدفة والخطر، وبمقتضى ذلك النموذج يمكن التنبؤ ومقارنة

1 -L. Stephen, and M. Shutler, (1991), "Operations **Research in Management**", UK: Prentice Hall International, p.5.

عوائد مختلف القرارات، والاستراتيجيات البديلة، وذلك بهدف مساعدة الإدارة في تحديد سياساتها وإجراءاتها بأسلوب علمي.

كذلك وضعت جمعية بحوث العمليات الأمريكية تعريفاً مختصراً لبحوث العمليات مؤداه[1] : بحوث العمليات هي التي تهتم بالتحديد العلمي لأفضل تصميم، وتشغيل لنظم العامل والآلة, وذلك عادة في الظروف التي تتضمن تخصيصاً للموارد المحدودة.

وفي تعريف أخر:[2] بحوث العمليات ما هي إلا تطبيق المنهج العلمي في مشكلات الإدارة، وتتميز بحوث العمليات بتداخل عدد من فروع المعرفة، كالرياضيات، والاقتصاد، والإحصاء، والحاسبات الالكترونية وغيرها.

1/3- الخصائص أو السمات الأساسية لبحوث العمليات:

في ضوء تعريف بحوث العمليات بأنها تطبيق المنهج العلمي في حل مشكلات الإدارة، يمكن تحديد الخصائص الأساسية لبحوث العمليات فيما يلي:[3]

1- حل المشكلات هو محور اهتمام بحوث العمليات:

إذا كانت بحوث العمليات هي تطبيق المنهج العلمي في حل المشكلات، لذلك فإنّ محور اهتمام بحوث العمليات هو مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات لحل المشكلات، ولقد أصبح استخدام الإدارة للنماذج عموماً والنماذج الرياضية بصورة خاصة أمراً ضرورياً، بعد أن أصبح من الصعب التعامل مع مشكلات الواقع العملي مباشرة، نتيجة تعقد هذه المشكلات وشمولها للعديد من المتغيرات ذات العلاقات المترابطة والمتشابكة، ونظراً لتعدد القيود التي تحيط بحل هذه المشكلات،

---

1 -T. A. Hamdy., (1976), "**Operations Research**", Second Edition, USA: Macmillan Publishing Company, p.2.

2- د. هالة عبد الله الخولي، (2000)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر، ص 11.

3 - د. صلاح شيخ ديب، (2007)، " **بحوث العمليات في الإدارة– الجزء الأول** "، جامعة تشرين– مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، ص ص 26-27.

لذلك أصبح من الضروري تجريد هذه المشكلات وصياغتها في صورة نموذج يكون من الأسهل نسبياً التعامل معه بدلاً من التعامل المباشر مع المشكلات الواقعية.

***2*- إنّ بحوث العمليات ترتكز على الطريقة العلمية في البحث والدراسة:**

وهي بطبيعة الحال أحسن الطرق كفاءة وفاعلية إذا ما اتبعها متخذ القرار في كل ما يواجهه من مشكلات، وتقتضي الطريقة العلمية في حل المشكلات السير في خطوات أربع محددة، أولها التحديد الدقيق للمشكلة، وتحديد كافة أبعادها، ثم تأتي الخطوة الثانية متمثلة في تكوين مجموعة الفروض التي تعطي تفسيراً ممكناً لأبعاد المشكلة، أما الخطوة الثالثة فهي اختبار صحة تلك الفروض واستعراض البدائل التي تسهم في حل المشكلة على ضوء الفروض الصحيحة، ثم الخطوة الرابعة المتمثلة في اختيار الحل الأمثل من مجموعة الحلول البديلة ووضعه موضع التنفيذ، ومتابعة نتائج التنفيذ. وبحوث العمليات تعتمد على هذه الخطوات الأربعة عند معالجة ما يواجه الإدارة من مشكلات، وذلك هو الذي يكسبها خاصية هامة وهي ارتكازها على المنهج العلمي في البحث والدراسة.

***3*- إنّ بحوث العمليات تأخذ بالنظرة الشمولية أي بمفهوم النظام:**

تعني هذه الخاصية أنّ بحوث العمليات تتخذ من مدخل النظم أساساً لوصف الظواهر والمشكلات وتشخيصها، ليس من خلال إدارات المنظمة كوحدات قائمة بذاتها، ولكن من خلال الأجزاء المكونة للنظام من حيث علاقات التفاعل فيما بينها، ولذلك فإنّ الدراسات الخاصة ببحوث العمليات لن تكون موجهة نحو كل إدارة من إدارات المنظمة، وإنما على العلاقات المتداخلة بينها، إلا في بعض الحالات التي تكون فيها بعض المشكلات مرتبطة ببعض الوظائف فقط داخل المنظمة.

***4*- تعتبر عمليات بناء النماذج عصب بحوث العمليات:**

النموذج الرياضي لا يخرج عن كونه تمثيلاً مبسطاً للواقع في صورة نموذج يعكسه ويمثله، والغرض منه استنباط علاقات بين متغيرات معينة، بحيث يمكن تحقيق هذه العلاقات عن طريق استخدامها في صورة وصفية أو تنبؤية، ويمكن التوصل أحياناً إلى نتائج لا يمكن استنتاجها أو ملاحظتها في غياب هذا النموذج، لذلك تهتم بحوث العمليات ببناء النماذج الرياضية.

5- ترتكز بحوث العمليات على مفهوم تكامل المعرفة لفروع العلم المختلفة:

فهي تستفيد من التقدم والخبرة والمعرفة من مجموعة العلوم في مختلف التخصصات، لأنّ ذلك من شأنه أن يسهم في إيجاد التكامل في المفاهيم، والذي يعتبر ضرورياً لتفسير الظواهر تفسيراً متكامل الأبعاد، فمثلاً يمكن القول إنّ نظم العامل والآلة لها أبعادها المتنوعة، منها الطبيعية، والبيولوجية، والسيكولوجية، والاجتماعية، والاقتصادية، والهندسية، لذلك فإنّ فهم هذه النظم فهماً صحيحاً يتطلب تعاوناً من المتخصصين في هذه العلوم.

6- الاعتماد على الحاسبات الالكترونية بصورة كبيرة:

تعتمد بحوث العمليات بصورة أساسية على الحاسبات الالكترونية في إجراء العمليات الحسابية والرياضية المعقدة اللازمة لحل النماذج، والوصول إلى حلول للمشكلات، وتتسم المشكلات التي تواجهها منشآت الأعمال بالتعقيد، واشتمالها على العديد من المتغيرات ذات العلاقات المتشابكة، لذلك فإنه من المستحيل في كثير من الحالات أن تتم معالجة هذه المشكلات يدوياً، بل يتطلب الأمر الاستعانة بالحاسبات الالكترونية، وتتمتع الحاسبات الالكترونية بالعديد من المزايا من أهمها سرعة التشغيل، والدقة العالية، وسهولة الاستخدام.

4/1- بحوث العمليات وبناء النماذج:

يُعدّ بناء واستخدام النماذج جوهر بحوث العمليات، ويمكن تعريف النموذج بأنه تمثيل مبسط للواقع الفعلي، ويعني ذلك بالضرورة أنّ النموذج لا يمثل الواقع

بالضبط، وبالتالي فهو ليس تمثيلاً مثالياً طبق الأصل مع الواقع، وإنما هو تبسيط لهذا الواقع، يبرز الخصائص الأساسية المؤثرة على تكوين هذا الواقع وسلوكه، إنّ هذا التبسيط ليس عيباً ولكنه في الحقيقة ميزة، لأنّ الواقع الذي تتعامل معه بحوث العمليات هو مشكلة معقدة ومتشعبة، فإذا كان النموذج يتصف بخصائص التعقيد والتشعب نفسها لتعذر على الحل. ولكن لدينا النموذج، ولدينا الواقع الذي يمكن أن نجرب فيه كل الحلول المقترحة ونقيمها بناء على نتائج تجربتها.

إنّ اللجوء إلى بناء النموذج والتعامل معه أثناء البحث عن حل المشكلة الواقعية بدلاً من التجريب في الواقع على المشكلة الفعلية، له أكثر من ميزة هي:

- ميزة اقتصادية: توفير الوقت، والجهد، والمال.
- تجنب المخاطر الناجمة عن التلاعب بالواقع الفعلي.
- استخدام النموذج لمحاولة فهم الواقع، إذا كان هذا الواقع معقداً ومتشعباً إلى درجة كبيرة جداً.
- استخدام النموذج في الاتصال بالآخرين لتوصيل وتبادل وجهات النظر.

***1/4/1*- الأسباب التي تجعل الإدارة تستخدم النماذج الرياضية:**

1- إنّ استخدام النماذج الرياضية يمكّن من تحديد وحصر عدد كبير جداً من الحلول الممكنة للمشكلة محل البحث.

2- إنّ النماذج الرياضية تمكّن من اختصار الوقت خاصة مع استخدام الحاسبات الالكترونية.

3- إنُ تحرير النموذج يكون أسهل بكثير من تحرير الواقع أو النظام الحقيقي، وبالتالي في ظل إتباع النماذج يكون التجريب أسهل.

4- إنّ تكاليف الوقوع في أخطاء أثناء التجريب أقل بكثير جداً في حالة إجرائها على النموذج، منها في حالة إجرائها على النظام الحقيقي في الواقع الفعلي.

5- إن بيئة الأعمال اليوم تتضمن قدراً عالياً من عدم التأكد، واستخدام النماذج يمكِن الإدارة من أخذ المخاطر المحسوبة في الحسبان عند قيامها بصنع القرار.

6- إنّ تكاليف التحليل باستخدام النماذج أقل بكثير من القيام بذلك مباشرة على النظام أو الواقع الحقيقي.

1/4/2- مبادئ بناء النموذج:

هناك مجموعة من المبادئ يجب أن توجه عمليات بناء النموذج، إنّ كلاً من واضعي نماذج بحوث العمليات، وأيضاً مستخدميها يجب أن يكونوا على وعي تام بحدود هذا المدخل في حل المشكلات واتخاذ القرار، لذلك يجب أن يكونوا على يقظة مستمرة لتجنب الوقوع في الأخطاء التي توضحها المبادئ التالية:[1]

1- لا تقوم ببناء نموذج معقد إذا كان هناك نموذج أكثر بساطة يحقق المطلوب... فالجمال في البساطة.

2- تجنب تكييف المشكلة لتناسب أسلوباً معيناً للحل، فالعكس هو الصحيح، ابحث عن الأساليب التي تتناسب مع المشكلة.

3- تأكد من دقة إجراء خطوة الاستنتاج (حل النموذج)، بحيث لا تعكس النتائج أخطاء داخلية في النموذج ذاته، وتزداد أهمية هذه الخطوة عند استخدام الكمبيوتر في هذه الخطوة.

4- لا تطبّق النموذج على المنظومة الفعلية، قبل أن تتحقق من توافق نتائج النموذج مع النتائج الفعلية، أي يجب أن تتأكد من تمثيل النموذج للواقع.

5- لا تعتبر النموذج بديلاً للواقع، ولا تنسَ أبداً تمثيلاً مبسطاً للواقع... يعتمد على إدراك واضعه للواقع، وعلى ذلك من الطبيعي أن يضع شخصان نموذجين مختلفين لنفس المنظومة الفعلية.

---

1 – د. حسين شرارة، وآخرون، (1998), " **مقدمة في بحوث العمليات (مدخل تطبيقي)**"، القاهرة – مكتبة عين شمس، ص ص 18-19.

6- لا يجب أن تتوقع من النموذج أن يقدم نتيجة لم يصمم لأجلها، ولا تنتقده لفشله في تقديم مثل هذه النتيجة.

7- إنّ أهم المنافع الأساسية في بناء النماذج تتعلق بخطوة بناء النموذج وليس بحله أو تطبيقه... حيث تتطلب خطوة بناء النموذج التعمق الشديد في الواقع المطلوب وضع نموذج له، وهذا في حد ذاته يولد معرفة متعمقة لخفايا المنظومة الفعلية، لم تكن لتتحقق لولا جهود بناء نموذج يمثلها، وهذه المعرفة لها قيمتها الكبيرة حتى وإن لم يستخدم النموذج بعد ذلك.

8- لا يمكن لأي نموذج أن يولد معلومات أفضل من البيانات التي تدخل في حساباته.

9- النماذج... لا تحل... ولن تحل.... محل متخذي القرار من البشر.

1/4/3- أنواع النماذج:

يوجد هناك العديد من التصنيفات للنماذج، إلا أنّ أكثرها شيوعاً هو التصنيف التالي:

أولاً- النماذج المجسمة أو المادية:

وهي أقل النماذج من حيث درجة التجريد، وهي مجسم مادي للنظام أو الشيء بحجم يختلف عن حجمه الحقيقي في الواقع العملي، وهي قد تكون نماذج ثلاثية الأبعاد، مثال ذلك النموذج المصغر للطائرة أو السيارة أو المبنى، كما قد تكون ثنائية الأبعاد، مثل الصورة الفوتوغرافية.

ثانياً- النماذج المناظرة أو المشابهة:

وهي نماذج لا تعبّر عن النظام المراد تمثيله من حيث الشكل، وإنما تعبّر عنه من حيث السلوك، حيث يتم تمثيل خصائص الواقع الفعلي بخصائص أخرى، ومن أمثلة ذلك:

- خريطة الهيكل التنظيمي للتعبير عن علاقات السلطة في المنظمة.
- رسم منحنى بياني يعبّر عن التغير في المبيعات خلال فترة من الزمن.

- رسم خريطة تدفق لتوضيح تسلسل العمليات الصناعية في مصنع.

ثالثاً- النماذج الرمزية:

تستخدم النماذج الرمزية في حالة تعقد العلاقات في بعض النظم، بحيث لا يمكن تمثيلها مادياً، أو قد يكون التمثيل المادي لها مرهقاً وصعباً، ويستغرق وقتاً طويلاً في بنائه وتجسيمه، وهنا نضطر إلى استخدام نموذج أكثر تجريداً بالاستعانة بالرموز وهو النموذج الرياضي، ويلاحظ إنّ معظم تطبيقات بحوث العمليات تستخدم النماذج الرمزية، وتتميز هذه النماذج بأنها أكثر عمومية من النماذج السابق ذكرها، كما يمكنها التعبير عن مواقف مختلفة ومتنوعة، هذا فضلاً عن إمكانية تحويرها بسهولة لأغراض التجربة والتنبؤ. ومن جهة أخرى فإنّ النماذج الرمزية في بحوث العمليات يمكن تصنيفها إلى مجموعتين: النماذج الرياضية، والنماذج الاحتمالية، كما يوضحه الجدول التالي:

الجدول رقم (*1 - 1*)

النماذج الرمزية في بحوث العمليات

النماذج الرمزية	
النماذج الرياضية	**النماذج الاحتمالية**
1- البرمجة الخطية	*1*- نماذج المحاكاة
2- برمجة الأهداف	*2*- نماذج صفوف الانتظار
3- البرمجة الصحيحة	*3*- نظرية القرارات
4- البرمجة غير الخطية	*4*- سلاسل ماركوف
5- البرمجة الديناميكية	*5*- النماذج الاحتمالية للمخزون
6- نماذج المخزون في حالة التأكد	*6*- نماذج بيرت في الشبكات
7- نماذج المسار الحرج في الشبكات	*7*- وغيرها
8- وغيرها...	

1/5- خطوات بناء واستخدام النماذج:

تتمثل بحوث العمليات أساساً في التعبير عن المشكلة محل الدراسة في شكل نموذج رياضي، ولا شك أنّ عملية بناء النموذج الرياضي ليست بالأمر السهل، بل تعد أصعب العمليات وأكثرها دقة وحساسية، فهي مزيج من العلم والفن، وترجع صعوبة بناء النموذج الرياضي إلى تعدد المتغيرات التي تتحكم في سلوك الظاهرة محل الدراسة، الأمر الذي يعقد عملية بناء النموذج، ويصعب من إمكانية التعبير عن العلاقات المتشابكة بين هذه المتغيرات.

وتتمثل خطوات بناء واستخدام النماذج الرياضية في بحوث العمليات فيما يلي:[1]

1/5/1- تحديد المشكلة وتشخيصها:

إنّ أول خطوة من خطوات بناء النماذج هو تحديد المشكلة وتشخيصها بدقة، وفي هذه الخطوة يتم التحقق أولاً من أنّ هناك مشكلة، ويتم تعريفها بدقة وتحديد حجمها، كما يتم تحديد أعراض المشكلة مع التفرقة بين المشكلة وأعراضها، بمعنى أنّ ما يعتبر مشكلة لا يعدو في كثير من الأحيان أن يكون مجرد عرض من أعراض مشكلة حقيقية لم يتم تحديدها بعد، وعلى سبيل المثال فإنّ انخفاض ربحية المنشأة قد يكون أحد أعراض مشكلة، أو عدة مشكلات تتعلق بكفاءة الإدارة في المنشأة. وتحديد المشكلة معناه تشخيصها، والتعرف على أسبابها، وعناصرها المختلفة والعلاقات بين هذه العناصر.

وتُعدّ خطوة تحديد وتشخيص المشكلة من أهم خطوات بناء النماذج، حيث إنّ أي خطأ في هذه الخطوة سوف يؤثر على باقي الخطوات، وبالتالي على النتائج التي يمكن الحصول عليها من النموذج.

2/5/1- تكوين وبناء النموذج الرياضي الملائم للمشكلة:

---

1 – د. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي ود. نجم عبد الله الحميدي, (2008), **الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الأعمال**, الطبعة الأولى, دار وائل للنشر والتوزيع- عمان- الأردن، ص ص 6-8.

يختلف النموذج الرياضي باختلاف طبيعة المشكلة المطلوب حلها، ومدى تعقد العلاقات بين عناصرها، فإذا كانت المشكلة هي تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يحقق للمنشأة أقصى ربح ممكن، يمكن استخدام نموذج البرمجة الخطية، وإذا كانت المشكلة هي توزيع منتجات المنشأة من مراكز الإنتاج (المصانع) إلى مناطق الاستهلاك أو التوزيع، بهدف تخفيض تكلفة النقل إلى أدنى حد ممكن، يمكن استخدام نموذج النقل،....، وهكذا.

وتُعدّ عملية بناء النموذج الرياضي من أصعب العمليات وأكثرها دقة وحساسية، وفيما يلي أهم العناصر المكونة للنموذج الرياضي:

***1*- متغيرات المشكلة:**

وتشمل ثلاثة أنواع من المتغيرات، أولها متغيرات القرار: وهي تمثل متغيرات مستقلة لا تعتمد على غيرها وإنما تؤثر في غيرها من المتغيرات، وهي متغيرات يمكن التحكم فيها من جانب متخذ القرار، ويهدف النموذج الرياضي إلى تحديد القيمة المثلى لهذه المتغيرات، وبمعنى آخر فإنها تمثل المجاهيل يتم إيجاد قيمها من خلال حل النموذج، وثانيها المتغيرات التابعة: وهي المتغيرات التي تتأثر وتعتمد على غيرها، ومن أمثلتها الربح والذي بدوره يعتمد على حجم الإنتاج والمبيعات، وقد يطلق على هذه المتغيرات اصطلاحات منها مقاييس الأداء، أو الفاعلية، أو مخرجات النظام، أما المجموعة الثالثة من متغيرات المشكلة: فتتمثل في المتغيرات التي لا يمكن التحكم فيها، وهي تلك المتغيرات التي تؤثر على قيمة المتغيرات التابعة وتخرج عن نطاق سيطرة وتحكم متخذ القرار، ومن أمثلتها أسعار الفائدة، ومعدل التضخم.

***2*- دالة الهدف:**

تتم المفاضلة بين البدائل المختلفة لحل المشكلة في ضوء معيار معين، ويتم التعبير عن هذا المعيار في صورة دالة الهدف، وتعبّر عن المتغيرات التابعة

في النموذج في علاقتها بالمتغيرات المستقلة المؤثرة عليها، وقد تتمثل دالة الهدف في تعظيم الربح أو تدنية التكاليف، أو أي هدف آخر من الأهداف التي تحددها المنشأة.

3- قيود أو محددات النموذج:

وهي تعبّر عن القيود التي تواجه المنشأة بسبب ندرة الموارد، أو بسبب القوانين أو المنافسة، وأي متغيرات أخرى تخرج عن تحكم وسيطرة متخذ القرار.

4- معالم النموذج:

وهي تشمل معاملات دالة الهدف، والمعاملات الفنية في القيود، وكذلك الكميات المتاحة من كل مورد من الموارد النادرة المحدودة للمنشأة.

1/5/3- حل النماذج:

يقصد بحل النموذج إيجاد قيم متغيرات القرار في ضوء الهدف أو الأهداف التي تسعى المنشأة إلى تحقيقها.

لقد ساد الفكر الاقتصادي والإداري عدة نماذج تفسر سلوك المنشأة، فالنظرية الاقتصادية التقليدية، تعتبر أنّ الهدف الوحيد للمنشأة هو تعظيم الربح، ولقد قدمت عدة نماذج بديلة لفرض تعظيم الربح، ومن أهمها النظرية السلوكية التي تقوم على أنّ قرارات المنشأة يجب أن تأخذ في الحسبان ضرورة المحافظة على الائتلاف داخل المنشأة، والذي يمثل المنشأة، والإدارة، والعاملين ممن لهم مصلحة مع المنشأة، وذلك من خلال إيجاد الحلول التي تحقق إشباع الحد الأدنى لأهداف كل مجموعة من المجموعات التي تكوّن هذا الائتلاف.

لذلك فإنّ متخذ القرار يحاول الوصول إلى أقرب حل ممكن من المستويات المحددة لمجموعة من الأهداف في محيط من المصالح المتضاربة، وفي ضوء معلومات غير كاملة وموارد محدودة.

وعلى ذلك يمكن تقسيم النماذج التي تفسر سلوك وأهداف المنشأة إلى الآتي:

1- نماذج الأمثلية:

في هذه النماذج يفترض أنّ المنشأة تهدف للوصول إلى القيم المثلى للهدف أو الأهداف التي ينبغي تحقيقها، ومن هذه النماذج نموذج البرمجة الخطية، وتتضمن دالة الهدف في نموذج البرمجة الخطية، إما تعظيم الربح، أو تدنية التكاليف.

2- نماذج الإشباع:

في هذه النماذج يُفترض أنّ المنشأة تسعى إلى الوصول إلى حلول مرضية أو مستويات مرضية من الهدف أو الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها، ومن أمثلة النماذج الرياضية الملائمة في هذه الحالة نموذج برمجة الأهداف.

وبعد أن يتم تحديد الهدف أو الأهداف التي تسعى المنشأة لتحقيقها يتم اختيار البديل الأمثل أو المرضي، وذلك من خلال حصر البدائل المختلفة الممكنة، وتحديد النتائج المترتبة على كل بديل، ثم المفاضلة بين هذه البدائل.

وقد تتضمن بعض النماذج الرياضية أسلوباً للحل يضمن حصر كل البدائل الممكنة، وتقييم هذه البدائل، واختيار أفضلها حسب معيار الأفضلية المحدد (حسب دالة الهدف).

1/5/4- اختبار صحة النموذج وتحليل الحساسية:

بعد الانتهاء من صياغة النموذج، وقبل أن يوضع الحل موضع التنفيذ يجب التحقق من مدى صدق تعبير النموذج عن الواقع الذي يمثله، وذلك من خلال اختبار صحة النموذج، وتهتم عملية اختبار صحة النموذج بالتأكد من سلامة الصياغة، والبناء الرياضي والمنطقي للنموذج، وكذلك التأكد من دقة تعبير النموذج عن النظام أو المشكلة التي يمثلها.

ويتم اختبار النموذج بتجربته باستخدام مجموعات مختلفة من البيانات، وملاحظة ما إذا كانت نتائج النموذج تعبّر بصدق عن النظام الذي يمثله أم لا.

بالإضافة إلى اختبار صحة النموذج، فإنه يلزم إجراء تحليل الحساسية لتحديد مدى حساسية الحل الناتج عن النموذج للتغيرات في مدخلات النموذج، أو ثوابت النموذج على الحل الأمثل للنموذج، وإلى أي مدى يظل هذا الحل حلاً أمثلاً نتيجة التغيرات في معلمات النموذج.

***1/5/5*- تنفيذ الحل:**

بعد التأكد من صحة النموذج وصلاحيته، فإنّ الخطوة التالية هي وضع الحل الناتج عن النموذج موضع التنفيذ، ولا يقتصر دور فريق بحوث العمليات على مجرد بناء النموذج، وحله، واختبار صحته، بل يمتد هذا الدور إلى متابعة تنفيذ الإدارة للحل، والتعرف على مشكلات التنفيذ الفعلي، واقتراح الحلول لمعالجتها.

1/6- أساليب ونماذج بحوث العمليات

تتعدد أساليب ونماذج بحوث العمليات، وفيما يلي بعض هذه الأساليب والنماذج:

1- **نموذج البرمجة الخطية:** Linear Programming

يُعدّ نموذج البرمجة الخطية أحد أساليب البرمجة الرياضية، ويستخدم في حل مشكلات تخصيص الموارد النادرة والمحدودة بين الاستخدامات البديلة، ويمكن باستخدام نموذج البرمجة الخطية الوصول إلى التخصيص الأمثل لهذه الموارد بما يحقق للمنظمة أقصى ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة.

2- **نموذج برمجة الأهداف:** Goal Programming

إذا سلمنا أنّ المنشأة تهدف إلى تحقيق أهداف متعددة، لذلك فإنّ معايير القرار يجب أن تكون متعددة الأبعاد، ونموذج البرمجة الخطية الذي انتشر استخدامه بصورة كبيرة في العديد من القرارات، له فائدة محدودة في معالجة المشكلات والقرارات التي تتضمن أهدافاً متعددة، ويرجع ذلك إلى أنّ دالة الهدف

في نموذج البرمجة الخطية أحادية البعد، لذلك يستخدم نموذج برمجة الأهداف في معالجة المشكلات التي تتضمن أهداف متعددة، وليس بالضروري أن تقاس بوحدات قياس متجانسة.

***3*- نموذج النقل:** Transportation Model:

يستخدم نموذج النقل في تحديد التوزيع الأمثل لمنتجات المنشأة من مصانعها إلى مراكز التوزيع والاستهلاك، بما يحقق أدنى تكلفة نقل ممكنة.

4- نموذج التخصيص: Assignment Model:

تقوم مشكلة التخصيص على مفهوم أساسي، يتلخص في العمل على تخصيص عدد من العناصر المفردة (أي ليست كميات ولكنها الوحدة الواحدة) على عدد من الأغراض أو الاستخدامات الفردية أيضاً، بحيث يخصص مصدر معين على غرض معين، ووفق هذا المفهوم فإنّ مشكلة التخصيص، تهدف مثلاً من بين ما تهدف إليه هو الوصول إلى أقل تكلفة وقد يكون لها هدف تعظيم.

***5*- نماذج شبكات الأعمال:** Network Models

تُعدّ شبكات الأعمال على قدر كبير من الأهمية في تطبيق بحوث العمليات، وذلك لأنه يمكن صياغة معظم مشكلات الواقع العملي في صورة شبكات الأعمال، ويُعدّ نموذج بيرت من أهم نماذج شبكات الأعمال انتشاراً في التطبيق العملي.

***6*- نظرية الصفوف:** Queuing Theory

وأحياناً يطلق عليها صفوف الانتظار Waiting Lines، وهي تعالج المواقف التي تتسم بنقاط الاختناق، أو بظهور صفوف الانتظار كما في حالة انتظار عملاء أمام الشباك في البنك، أو انتظار الطلاب لإنجاز إجراءات التسجيل في الجامعة، أو انتظار المواد أمام الآلة في المصنع،....، إلخ، وتكون المشكلة في إيجاد ذلك الحجم الملائم من الموارد أو التسهيلات وتحديد إجراءات التشغيل

(الأولويات) التي تعمل على تخفيض مجموع تكاليف تشغيل النظام، وترفع من كفاءة أداء الخدمة.

7- نماذج أخرى لبحوث العمليات:

يوجد العديد من النماذج الأخرى لبحوث العمليات، ومنها نموذج البرمجة غير الخطية، ونموذج البرمجة بوحدات صحيحة، والبرمجة الديناميكية Dynamic Programming ، والبرمجة الاحتمالية Stochastic Programming ، ومن النماذج الأخرى لبحوث العمليات نظرية المباريات Game Theory، وتفيد في حالة اتخاذ القرارات في ظل وجود أطراف أخرى متنافسة، وتؤدي إلى اختيار الاستراتيجية المثلى للمنشأة في ضوء سياسات واستراتيجيات الأطراف الأخرى المتنافسة, وغير ذلك من أساليب بحوث العمليات.

7/1- حدود استخدام بحوث العمليات:

1- قد لا يمكن إخضاع كل العوامل والمتغيرات المؤثرة في المشكلة للقياس الكمي.

2- إنّ نماذج بحوث العمليات لا توفر الأساس الكامل لاتخاذ القرارات، وإنما توفر معلومات كمية تفيد في أغراض اتخاذ القرارات، ويكون القرار النهائي للإدارة، وبالتالي فإنّ خبرة الإدارة والتقدير الشخصي لمتخذي القرارات من العوامل الهامة للوصول إلى القرار النهائي.

3- يتطلب تطبيق منهج وأساليب بحوث العمليات توافر مجموعة من المقومات المادية، والبشرية، كالحاسبات الالكترونية والخبراء في مجالات المعرفة المختلفة، وقد لا يتوافر ذلك لدى العديد من المنشآت.

8/1- تدريبات

أولاً- أقرأ العبارات التالية، وضع أمام كل عبارة إشارة (√) أو (X) موضحاً رأيك بالإجابة.

1- تُعدّ بحوث العمليات من فروع المعرفة الحديثة نسبياً، حيث لم يبدأ ظهور هذا الفرع إلا في أثناء الحرب العالمية الثانية.

2- بحوث العمليات تعتمد على المنهج العلمي في التعبير عن المشكلات في شكل نماذج رياضية، ثم إيجاد حلول لهذه النماذج.

3- هناك فروقات كبيرة بين بحوث العمليات ومدخل النظم.

4- تعتمد بحوث العمليات على عدد من فروع المعرفة، كالرياضيات والاقتصاد والإحصاء والحاسبات الالكترونية وغيرها.

5- تقتصر فائدة واستخدامات بحوث العمليات على حل المشكلات الصناعية.

6- النموذج يُعدّ تمثيلاً مبسطاً للواقع الفعلي، ويعني ذلك بالضرورة أنّ النموذج لا يمثل الواقع بالضبط، وبالتالي فهو ليس تمثيلاً مثالياً طبق الأصل مع الواقع.

7- إنّ تحديد قيمة المتغيرات في المشكلة يعني حل المشكلة.

8- نموذج البرمجة الخطية يمكن استخدامه في معالجة المشكلات والقرارات التي تتضمن أهدافاً متعددة.

9- يمكن إخضاع كل العوامل والمتغيرات المؤثرة في المشكلات التي تواجه الإدارة للقياس الكمي.

10- تحليل حساسية النموذج يقيس مقدار التغير في مدخلات النموذج أو ثوابت النموذج على الحل الأمثل للنموذج، وإلى أي مدى يظل هذا الحل حلاً أمثلاً نتيجة التغيرات في معلمات النموذج.

ثانياً- تحدث عن خصائص وسمات بحوث العمليات.

ثالثاً- اشرح خطوات بناء النموذج الرياضي.

رابعاً- وضح الفرق بين نموذج البرمجة الخطية، ونموذج برمجة الأهداف.

خامساً- ما هي عناصر النموذج.

سادساً- ما هي الأسباب التي تجعل الإدارة تستخدم النماذج الرياضية.

سابعاً – هل هناك حدود لاستخدام بحوث العمليات وما هي ؟.

ثامناً- ما هي أهم نماذج بحوث العمليات.

الفصل الثاني: البرمجة الخطية

محتويات الفصل الثاني

1/2- تعريف البرمجة الخطية

2/2- شروط استخدام نموذج البرمجة الخطية

3/2- النموذج العام لمسائل البرمجة الخطية

4/2- النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية

5/2- إرشادات في عملية التحويل إلى النموذج النظامي

6/2- الشكل القاعدي للنموذج النظامي

***7/2*- الطرق المستخدمة في حل مسائل البرمجة الخطية وإيجاد الحل الأمثل لها.**

8/2- تدريبات

1/2- تعريف البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية: هي إحدى نماذج (موديلات) البرمجة الرياضية التي تهتم بالتوزيع أو التخصيص الفعّال لموارد محددة على أنشطة معروفة بقصد الوصول إلى هدف مرغوب، وتبنى المسائل أو النماذج الخطية على علاقات رياضية تكون جميعها خطية وهي تتضمن عادة [1].

- هدف نسعى إلى تحقيقه مثل ربح أعظم أو تكلفة دنيا.
- متغيرات قرار يجب تحديدها للوصول إلى الهدف المرغوب.
- قيود فنية تفرض على متغيرات القرار.

وفي تعريف آخر[2]: البرمجة الخطية: أسلوب رياضي لحل مشكلات استغلال الموارد والإمكانيات المحدودة، بطريقة تحقق للمنشأة أقصى ربح ممكن، أو تحملها أقل تكلفة ممكنة.

كذلك يعرفها بعض الاقتصاديين: بأنها طريقة رياضية لتخصيص مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد، بينما تكون جميع القرارات متشابكة، لأنها تقع جميعاً تحت مجموعة من القيود والحدود الثابتة.

وفي تعريف آخر: بأنها الطريقة التي يتم بها تقرير كيفية مقابلة الأهداف المأمولة، كتخفيض التكاليف، أو تعظيم الأرباح في ظل مجموعة من الثوابت تمثل كمية الموارد المتاحة.

وفي تعريف آخر: بأنها اصطلاح يشمل مجال واسع من الأساليب الرياضية، التي تهدف إلى تحقيق أداء أمثل في حدود الامكانيات المتاحة.

---

1 – د. أحمد رفيق قاسم، (1992), **بحوث العمليات**، جامعة حلب – مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، ص 25.

2- سمير بهباوي و د. محمد صبري العطار، **بحوث العمليات في المحاسبة**، القاهرة- مكتبة الأنجلو المصرية، ص 47.

ويتضح من التعريفات السابقة أنّ البرمجة الخطية: ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهدف إلى إيجاد أحسن استخدام للموارد المحدودة وفقاً لمعيار أفضلية معين.

ويمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية رياضياً كما يلي [1] :

$$\text{Maximize } Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n \quad (1)$$

$$\text{Or Minimize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

Subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1 \quad (2)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2 \quad (3)$$

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m \quad (4)$$

$$x_1, x2, \ldots, x_n \geq 0 \quad (5)$$

حيث أنّ:

a_{ij} , b_i , c_j $(i = 1 , 2 , \ldots, m \ ; \ j = 1 , 2 , \ldots, n)$

هي ثوابت تحددها طبيعة المشكلة.

العلاقة رقم (1) تمثل دالة الهدف.

العلاقات (2) و(3) و (4) تمثل قيود أو شروط تخضع لها متغيرات القرار.

العلاقة رقم (5) تمثل قيد عدم السلبية.

1- د. أحمد رفيق قاسم و د.محمد كامل ريحان, (1982), **الطرق الكمية في العلوم الاقتصادية والإدارية**، بلا ناشر, ص11.

2/2- شروط استخدام نموذج البرمجة الخطية:

يساعد استخدام نموذج البرمجة الخطية الإدارة في اتخاذ القرارات ووضع الخطط اللازمة لحل المشكلات التي تواجهها، ولكن هذا النموذج يستند على ثلاثة افتراضات رئيسية (افتراض الخطية، افتراض التأكد التام، افتراض القابلية للتجزئة) وذلك ضمن مجموعة من الشروط الواجب توفرها ومن أهمها:

1- **يجب أن يكون هناك هدف محدد ومعبّر عنه بطريقة كمية:** كما يجب أن يكون الهدف واضحاً ودقيقاً، بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية [1].

2- **يجب أن تكون هناك خطط بديلة يتم الاختيار فيما بينها:** بغرض الوصول إلى الهدف ويجب أن تتسم هذه البدائل بالآتي [2] :

- أن يكون لكل بديل عائد متوقع.
- أن تكون البدائل قابلة للقياس الكمي.
- أن يكون هناك ارتباط بين هذه البدائل.

3- **وجود قيود تحد من حرية الاختيار:** سواء كانت هذه القيود تتعلق بكميات أو أسعار المدخلات، أو ساعات التشغيل الممكنة، أو الطاقة الإنتاجية المتاحة، أو طاقة تخزينية متاحة، أو احتياجات السوق من المنتجات،.....).

4- **إمكانية التعبير عن الهدف والقيود في صورة معادلات أو متباينات:** كشرط جوهري لتطبيق البرمجة الخطية كأسلوب رياضي للحل، حتى يمكن استخدامه في معالجة العديد من المشكلات.

1- N. H. Thomas. and et al, (1971),“ **Introduction to Linear Programming: Methods and Cases”** California:Wadsworth Publishing Company, Inc., p. 9.

2- صلاح الدين إسماعيل، (1990), استخدام أساليب بحوث العمليات في حل مشكلات تخطيط ومراقبة الإنتاج في القطاع العام للصناعات التجميعية، **رسالة ماجستير غير منشورة**، كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان، ص176.

5- **خطية العلاقة بين عناصر المشكلة** [1] : يفترض النموذج أنّ جميع علاقات متغيرات حل المشكلة، سواء المتمثلة في دالة الهدف، أو قيود المشكلة من الدرجة الأولى، كما يفترض أنّ العلاقة بين مدخلات النموذج ومخرجاته خطية، بمعنى أنّ قيم المخرجات تتغير تناسبياً تبعاً لتغير قيم المدخلات بنفس النسبة وفي نفس الاتجاه.

6- **عدم التناقض بين عناصر المزيج المستهدف**[2]: سواء من حيث المخرجات وإمكانية إحداث تشكيلة فيما بينها دون أن يكون أياً منها نقيضاً للآخر - كأن إمكانية إنتاج كراسات ودفاتر معاً، وذلك على العكس تماماً من عدم إمكانية إنتاج ملابس ومواد غذائية في آن واحد - وسواء متعلق منها بمزيج المدخلات كذلك أن تكون من طبيعة واحدة.

7- **قابلية العناصر للتجزئة أو الحلول الكسرية**[3] : يتعامل النموذج مع متغيرات المشكلة التي قد تأخذ قيماً صحيحة، وقد تأخذ هذه المتغيرات قيماً كسرية، فقد يتحدد حجم الإنتاج الأمثل بإنتاج عدد صحيح أو عدد صحيح وجزء من الوحدة في كل منتج من المنتجات.

8- **ضرورة توافر عنصر التأكد:** بمعنى أن تكون البيانات مؤكدة غير قابلة للاحتمال حتى يتسنى وضعها في صورة معادلات، فإذا كانت البيانات غير مؤكدة فالنتائج التي نتوصل إليها تخضع لتغيرات قيمة هذه البيانات مما يضعف من قيمة هذه النتائج.

9- **ضرورة القابلية للقياس:** فلا بدّ أن يكون الهدف قابلاً للقياس، ولذلك لا تتعامل البرمجة الخطية مع الأهداف غير الملموسة.

1- د. حسين شرارة وآخرون، (1998), **مرجع سبق ذكره**، ص40.

2- د. عادل قاسم حسن، (1996), **بحوث العمليات في إنتاج وترشيد المعلومات المحاسبية**، الزقازيق - مكتبة المدينة، ص37.

3- د. حلمي عبد الفتاح البشبيشي وآخرون، (1993), **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر, ص29.

3/2- النموذج العام لمسائل البرمجة الخطية:

الشكل العام لنموذج البرمجة الخطية يأخذ الشكل الآتي:

1- تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + p_0$$

2- مجموعة القيود المفروضة عليه:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b2$$
.
.
.
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ bm$$

3- شروط عدم السلبية:

$$x_j \geq 0 \quad (j:1,2,3,\ldots..,n)$$
$$b_i \geq 0 \quad (i:1,2,3,\ldots..,m)$$

4/2- النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية:

إنّ النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية هو شكل خاص أو محول من النموذج العام، وتكون فيه الشروط الخطية معطاة على شكل معادلات خطية، وذات متحولات موجبة، وذلك لسهولة الوصول إلى الحل الأمثل.

ويأخذ الشكل النظامي للبرمجة الخطية الشكل التالي.[1]

1- د. إبراهيم محمد العلي، (2004)، **مدخل إلى بحوث العمليات**، جامعة تشرين- مديرية الكتب والمطبوعات، ص71.

1- تابع الهدف:

$$\text{Max or Min } Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + p_0$$

2- مجموعة القيود المفروضة عليه:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
.
.
.
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

3- شروط عدم السلبية:

$$x_j \geq 0 \ (j:1,2,3,..,\ n)$$
$$b_i \geq 0 \ \ (i:1,2,3,..,\ m)$$

5/2- إرشادات في عملية التحويل من النموذج العام إلى النموذج النظامي:

1- إذا كان تابع الهدف من النوع L الذي يراد إيجاد أصغر قيمة له، فإننا نقوم بتحويله إلى تابع Z الذي يراد إيجاد أكبر قيمة له، وذلك بإجراء التحويل التالي:

$$\text{Min } L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$
$$\text{Max } Z = \text{Min } (-L) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n - c_0$$

أي إنّ تكبير أي تابع خطي يكافئ رياضياً تصغير القيمة السالبة لهذا التابع.

2- نقوم بتحويل جميع المتراجحات الواردة في الشروط الخطية إلى معادلات خطية، وذلك بإدخال متحولات إضافية عليها غير سالبة.

أ- نضيف متحولاً غير سالباً y_i إلى الطرف الأيسر لكل متراجحة من الشكل ($\leq$):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

تصبح المعادلة بالشكل التالي:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

ب- نطرح متحولاً غير سالباً Y_i إلى الطرف الأيسر لكل متراجحة من الشكل ($\geq$):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

تصبح المعادلة بالشكل التالي:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - y_i = b_i$$

3- نقوم بتحويل جميع الأعداد b_i في المعادلات القديمة والجديدة إلى أعداد غير سالبة، وذلك بضرب طرفي المعادلة بـ (1–) عند اللزوم.

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq -10$$

تصبح هذه المتراجحة بعد ضربها بـ (1–) كما يلي:

$$-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq 10$$

4- ندخل جميع المتحولات الإضافية y_i في معادلة تابع الهدف مضروبة بأمثال صفرية.

$$\text{Max } Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + 0y_1 + 0y_2 + \ldots + 0y_m$$

5- إنّ أي متراجحة من إشارة $\geq$ يمكن تحويلها إلى متراجحة من إشارة $\leq$ وذلك بضربها بـ (1–).

مثال على ذلك:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq -15$$

نقوم بتغيير إشارة هذه المتراجحة بضربها ب (– 1) فتصبح كما يلي:

$$-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq 15$$

6- نقوم بتحويل جميع المتحولات X_j السالبة إلى متحولات غير سالبة، وذلك بإجراء التحويل التالي:

$$x_j = -x_j' \quad ; \qquad x_j' \geq 0$$

ثم نعوض ذلك في جميع المعادلات بما فيها تابع الهدف.

7- نقوم بعزل جميع المتحولات غير المقيدة x_k من جميع معادلات النموذج الخطي بحساب قيمة x_k من إحدى المعادلات، كما يلي:

$$x_k = \frac{1}{a_{ik}} \left(b_i - \sum_{i=k}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

ثم بعد ذلك نقوم بحذف هذه المعادلة من معادلات النموذج المفروضة، ثم نقوم بتعويض قيمة x_k في جميع المعادلات الأخرى، وكذلك في معادلة تابع الهدف، وهذا ما يخفض عدد المتحولات في النموذج، ويخفض عدد معادلات الشروط، إلا أنّ عزل أحد هذه المتحولات لا يعني إهمالها، حيث تتم العودة إليها ثانية في نهاية الحل ويتم حساب قيمتها.

وكذلك يمكن أن نقوم بتحويل جميع المتحولات غير المقيدة x_k إلى الفرق بين متحولين غير سالبين، وذلك بإجراء التحويل التالي:

$$x_k = x_k' - x_k''$$

حيث أنّ: $x_k', x_k'' \geq 0$

ثم نقوم بتعويض ذلك في جميع المعادلات بما فيها معادلة تابع الهدف، ولكن يؤخذ على هذا التحويل بأنه يزيد من عدد المتحولات في النموذج المفروض.

8- إذا كان لدينا ضمن الشروط متراجحات من الشكل الآتي:

$$a_j \leq x_j \leq b_j$$

فإننا يمكن تحويل هذه المتراجحة إلى متراجحتين من الشكل الآتي:

$$X_j \leq b_j$$
$$X_j \geq a_j$$

ويمكن تحويل هاتين المتراجحتين إلى معادلتين بإضافة وطرح المتغير المضاف المناسب.

9- إذا كان لدينا ضمن الشروط متراجحة على شكل مساواة، فيمكن تحويلها إلى متراجحتين بإشارتين مختلفتين كما يلي:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

10- إذا كانت لدينا متراجحة طرفها الأول على شكل قيمة مطلقة، فيمكن التخلص من القيمة المطلقة كما يلي:

$$\left| \mathbf{a_1x_1 + a_2x_2} \right| \leq b_i$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq bi$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b_i$$

6/2- الشكل القاعدي للنموذج النظامي:

في عملية تحويل النموذج النظامي إلى الشكل القاعدي، نضع المتحولات السابقة الموجودة في النموذج النظامي في جدول، وإذا كان الجدول يحوي متحولات تشكل مصفوفة أحادية (أي تكن عناصر القطر الرئيسي لها هي الرقم (1)، نقول أنّ هناك حلاً قاعدياً.

ويوجد في عملية الحل عدة حلول قاعدية غير سالبة، ونسعى دائماً للوصول إلى الحل القاعدي غير السالب، الذي يعطينا أكبر قيمة ل Z ويسمى عندها الحل الأمثل في حالة التعظيم. كما يتضح ذلك في الجدول التالي.

شكل الحل القاعدي

المعادلات	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	الثوابت
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3
تابع الهدف	p_1	p_2	p_3	0	0	0	$Z- p_0$

يتضح لنا من هذا الجدول بأنه يمثل حلاً قاعدياً، حيث تشكلت لدينا مصفوفة أحادية، والتي عناصر القطر الرئيسي لها هي الرقم (1)، وفي هذا الحل القاعدي يكون لدينا:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$
$$y_1 = b_1$$
$$y_2 = b_2$$
$$y_3 = b_3$$

7/2 – الطرق المستخدمة في حل مسائل البرمجة الخطية وإيجاد الحل الأمثل لها:

ويمكن الحصول على الحل المثالي بعد الحصول على الحل القاعدي بعدة طرق، والتي من أهمها ما يلي:

1- الطريقة البيانية:

لا نستطيع اتباعها إلا إذا كان عدد المتحولات $n = 1$ أو $n = 2$ أو إذا كان عددها n يساوي $m + 1$ أو $m + 2$ أو حتى $m + 3$ حتى يمكننا تحويل النموذج إلى تابع لمتحول واحد، أو متحولين، أو ثلاثة متحولات على الترتيب، ورسم منطقة الحلول المقبولة في الفضاء R أو R^2 أو R^3 على الترتيب.

2- طريقة السمبلكس المباشرة:

التي تعتمد على تحويل الشكل العام إلى شكل نظامي، ثم تحويل الشكل النظامي إلى شكل قاعدي، وفق شروط طريقة السمبلكس التي تحافظ على عدم سلبية الثوابت b_i.

3- طريقة السمبلكس المعدلة (المختصرة):

تعتمد على خطوات الطريقة السابقة نفسها مع إضافة بعض التعديلات في خطوات الحل من أجل تسهيل عملية الحل وفق شروط هذه الطريقة.

4- طريقة القاعدة الاصطناعية المباشرة والمعدلة:

تعتمد على إضافة قاعدة اصطناعية إلى المعادلات، بدلاً من البحث عن قاعدة حقيقية حسب ما تقتضيه طريقة السمبلكس، ثم البحث بعد ذلك عن الحل الأمثل بعد التخلص من المتغيرات الاصطناعية، إما وفق طريقة السمبلكس المباشرة أو المعدلة.

5- الطريقة المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق:

تعتمد على إيجاد الحل الأمثل للنموذج الأصلي، والنموذج المرافق له بطريقة واحدة تسهّل عملية الحل وتساعد في توفير الوقت والجهد.

وسوف نناقش مفصلاً هذه الطرق في الفصول القادمة.

8/2- تدريبات

أولاً- اقرأ العبارات التالية، وضع أمام كل عبارة إشارة (√) أو (X) موضحاً رأيك بالإجابة.

1- البرمجة الخطية أسلوب رياضي لحل مشكلات استغلال الموارد والإمكانيات المحدودة، بطريقة تحقق للمنشأة عدة أهداف في الوقت نفسه.

2- من شروط استخدام البرمجة الخطية، يجب أن يكون هناك هدف محدد ومعبّر عنه بطريقة كمية.

3- ليس الضروري أن يكون هناك عدم تناقض بين عناصر المزيج المستهدف.

4- ليس من الضروري التعبير عن الهدف والقيود في صورة معادلات أو متباينات، كشرط جوهري لتطبيق البرمجة الخطية كأسلوب رياضي للحل.

5- قد تكون البيانات غير مؤكدة، ويمكن استخدامها في بناء نموذج البرمجة الخطية.

6- لا تقبل حل مسائل البرمجة الخطية الحلول الكسرية.

7- نقوم بتحويل جميع المتراجحات الواردة في الشروط الخطية إلى معادلات خطية، وذلك بإدخال متحولات إضافية عليها تكون سالبة.

8- ندخل جميع المتحولات الإضافية y_i في معادلة تابع الهدف مضروبة بالرقم (1).

9- نقوم بتحويل جميع الأعداد b_i في المعادلات القديمة والجديدة إلى أعداد غير سالبة، وذلك بضرب طرفي المعادلة بـ (1+) عند اللزوم.

10- يتشكل لدينا الحل القاعدي بوجود مصفوفة أحادية في جدول السمبلكس الأولي.

ثانياً– اشرح خطوات الانتقال من النموذج العام إلى الشكل النظامي للبرمجة الخطية.

ثالثاً– اشرح خطوات الانتقال من الشكل النظامي إلى الشكل القاعدي للبرمجة الخطية.

رابعاً– ما هي أهم طرق إيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية.

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية

محتويات الفصل الثالث

1/3- مقدمة

2/3- خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية

3/3- حالات خاصة في حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

4/3- تدريبات

1/3- مقدمة:

سبق أن ذكرنا، أنّ البرمجة الخطية تعالج مشكلة تخصيص الموارد في ضوء الإمكانيات المتاحة، طبقاً للأهداف المحددة، والتي تتمثل في تحقيق أقصى ربح ممكن (مشكلات تعظيم الأرباح)، أو بالوصول بالتكاليف إلى أدنى حد ممكن (مشكلات تخفيض التكلفة).

ويقتصر استخدام الطريقة البيانية على مواقف اتخاذ القرارات التي لا يزيد فيها عدد الإجراءات البديلة عن اثنين أو ثلاثة، ففي حالة الإجراءين البديلين يتم التعبير عن كل إجراء بديل بأحد المحورين، ثم رسم القيود التي يشتمل عليها الموقف تمهيداً لتحديد منطقة الحلول الممكنة، والتي يقع فيها الحل الأمثل.

وتتميز الطريقة البيانية بالبساطة في التطبيق والاستخدام والعرض، ولكنها لا تصلح إلا لحل المسائل التي يُمكننا حجمها من تمثيلها بيانياً، وحلها من خلال التعرف على البدائل المتاحة، والتي يوضحها الرسم البياني.

2/3- خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية:

لتسهيل فهم طريقة الحل باستخدام الأسلوب البياني فإننا سنعرض الخطوات المتتالية لحل هذا الأسلوب والتي تتضمن الآتي[1]:

الخطوة الأولى: صياغة المشكلة:

نعني بذلك إعداد الصياغة الرياضية للمشكلة، أي تحويل المشكلة من صورتها الوصفية إلى صياغة رياضية تشتمل على عدد من المعادلات والمتباينات، حتى يمكن استخدام المدخل البياني في التعامل مع المشكلة، فالمطلوب تحديد الهدف والتعبير عنه في صورة كمية، أي معادلة رياضية أو دالة رياضية، وتحديد القيود، والتعبير عنها في شكل معادلات ومتباينات، عندها يمكن

1- د. محمد أسعد عبد الوهاب النيداني، (2006)، **مقدمة في بحوث العمليات**، بلا ناشر، ص53.

استخدام الأسلوب الكمي الرياضي في التعامل مع المشكلة، ولعل هذا تأكيد لما سبق قوله، من أنّ عملية بناء النماذج الرياضية هي عصب بحوث العمليات.

وتتكون الصياغة الرياضية للمشكلة من العناصر الأساسية الآتية:

1- وضع أو صياغة دالة الهدف:

الخطوة الأولى في صياغة المشكلة هي تحديد الهدف، الذي سيتم استخدامه كمقياس، أو مؤشر لتقييم الحلول البديلة الممكنة، وتحديد مساهمة المتغيرات القرارية في تحديد مستوى الهدف الموضوع، والمعادلة التي تحدد الهدف في صورة المتغيرات القرارية تسمى دالة الهدف.

2- وضع أو صياغة القيود:[1]

ويتكون كل قيد من طرفين، طرف أيسر ويحتوي على المتغيرات ومعاملاتها الخاصة بالقيد، وطرف أيمن يحتوي على قيمة ثابتة، وهناك ثلاثة أشكال لقيود المسألة:

أ- معادلة إذا كان الطرف الأيمن مساوياً للطرف الأيسر، كمثال:

$$2X_1 + 3X_2 = 12$$

ب- متراجحة إذا كان الطرف الأيسر أقل من أو يساوي الطرف الأيمن، كمثال:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$

ج- متراجحة إذا كان الطرف الأيسر أكبر من أو يساوي الطرف الأيمن، كمثال:

$$2X_1 + 3X_2 \geq 12$$

فلكل متغير معامل في كل قيد من قيود المسألة, والطرف الأيمن من القيد قيمة ثابتة.

الخطوة الثانية: تحويل متراجحات القيود إلى معادلات:

1- د. محمود محمد المنصوري، (1996)، **أساليب بحوث العمليات واستخداماتها في ترشيد عملية إتخاذ القرارات**، بنغازي- مركز بحوث العلوم الاقتصادية، ص25.

في حالة أنّ القيود التي تكون موجودة في الصياغة الرياضية للمشلكة ليست معادلات تماماً لأنها قد تكون (أقل من أو يساوي، أو أكبر من أو يساوي)، أي أنها متراجحات، لذلك لا يمكن تمثيلها على الرسم البياني إلا بعد تحويلها لتأخذ شكل معادلات (=)، ويتم ذلك عن طريق الاستبعاد المؤقت للإشارة (أقل من أو يساوي، أو أكبر من أو يساوي)، ويلاحظ أنّ هذا لا يُعدّ إخلالاً بالأساس الرياضي المنطقي، لأنّ هذا الاستبعاد سيكون مؤقتاً، بمعنى أنه بعد التمثيل البياني لمعادلات القيود بالرسم، سوف نسترد الإشارة التي استبعدناها، وذلك بأن نحدد في أي جهة من هذا الخط سيكون الحل ممكناً، وفي أية جهة يكون الحل غير ممكناً.

الخطوة الثالثة: التمثيل البياني لمعادلات القيود:

بعد تحديد المنطقة التي سيتم تمثيل معادلات المشكلة فيها، أي رسمها بيانياً في صورة خط مستقيم يمثل كل معادلة منها، وحيث إنّ الخط المستقيم يمكن تحديده تماماً بمعرفة أي نقطتين تقعان عليه، لذلك فإنه لرسم معادلة أي قيد نكون بحاجة إلى تحديد نقطتين فقط على هذا الخط، وعن طريق توصيلها يتم رسم الخط المستقيم، ويمكن إيجاد هاتين النقطتين بسهولة عن طريق اختيار أي قيمة لأحد المتغيرين، وبالتعويض عنها في معادلة القيد نحصل على قيمة المتغير الآخر، ويمكن تكرار ذلك بقيم مختلفة لنحصل على النقطة الثانية، ويمكن تبسيط عملية التعويض وتحديد إحداثيات النقطة عن طريق اختيار أن تكون قيمة أحد المتغيرين تساوي الصفر، ثم التعويض في المعادلة لنحصل على قيمة المتغير الآخر، وبعد ذلك يتم تمثيل الإحداثيات لكافة قيود المسألة على الرسم البياني، وتحديد اتجاه منطقة الحلول الممكنة بإدخال الإشارة التي تمّ استبعادها لكل معادلة.

الخطوة الرابعة: تحديد منطقة الحلول الممكنة:

تتكون منطقة الحلول الممكنة من مجموعة النقاط التي تحقق كل قيود المسألة مجتمعة، فهي إذاً المنطقة التي تنتج من تقاطع المسطحات التي تشكل قيود المسألة، وأنّ الحل الممكن ليس بالضرورة أن يكون الحل الأمثل، حيث إنّ الحل الممكن يحقق عدم التعارض مع أي من القيود المفروضة، ولكنه قد لا يحقق دالة الهدف، أي لا يصل بالأرباح إلى حدها الأقصى، أو يخفض التكلفة إلى أدنى حالاتها. في حين أنّ الحل الأمثل هو الذي يفي بكافة القيود، وفي الوقت نفسه يحقق دالة الهدف، وحيث أنّ الحل الأمثل لا بد أن يكون حلاً ممكناً، فإنّ ذلك يعني أنه عند نقطة من النقاط الواقعة في هذه المنطقة أو على حدودها يكمن الحل الأمثل، الذي يعمل على تعظيم أو تدنية دالة الهدف.

الخطوة الخامسة: تعيين الحل الأمثل[1]:

لقد سبق القول إنّ الحل الأمثل هو حل ممكن، أي أنه يقع داخل منطقة الحلول الممكنة أو على حدودها، ولكن من المعروف أنّ هذه المنطقة وحدودها تحتوي عدداً لا نهائياً من النقاط التي يُعدّ كل منها حلاً ممكناً، وليس من المنطقي أن نقوم باختبار كل نقطة تقع داخل أو على حدود منطقة الحلول الممكنة لنرى أيها يحقق أكبر قيمة لدالة الهدف لتكون هي نقطة الحل الأمثل، إننا في حاجة إلى عمل اختبار عدد محدود فقط من تلك النقاط، ولكن كيف يمكن تخفيض النقاط المطلوب اختبارها من بين العدد النهائي الموجود بالمنطقة الممكنة ؟

يمكن القول بأنّ النقاط الواقعة على حدود منطقة الحلول الممكنة هي فقط النقاط التي سيكون من بينها إحدى النقاط الممثلة للحل الأمثل، كذلك فإنّ كل خط خارجي من خطوط المنطقة الممكنة توجد به نقطة واحدة أفضل من كل النقاط الأخرى، وإنّ هذه النقاط تقع دائماً عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة، أي عند

1- د. فريد عبد الفتاح زين الدين، (1997)، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشكلات واتخاذ القرارات**، الزقازيق- مكتبة التكامل، ص45.

تقاطع خطوط القيود، وأنّ الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية لابد أن يكون إحدى هذه النقاط.

مثال:

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات A_1, A_2 وتستخدم لذلك ثلاثة أنواع من المواد الأولية B_1, B_2, B_3 ، وأنّ المقادير اللازمة من كل من هذه المواد لإنتاج وحدة واحدة من المنتجات، والكمية الاحتياطية المتوفرة منها معطاة في الجدول التالي:

المواد الأولية	المنتجات		الكمية الاحتياطية من المواد
	A_1	A_2	
B_1	1	–1	1
B_2	–1	2	2
B_3	2	1	6

الهدف هو الحصول على أكبر ربح ممكن، علماً أن سعر الوحدة من المنتج A_1 هو 1 ل.س، ومن المنتج A_2 هو 2 ل.س.

المطلوب: صياغة المسألة على شكل مسألة برمجة خطية.

وإيجاد الحل الأمثل لها باستخدام الطريقة البيانية.

خطوات الحل:

لنفرض بأنّ كمية ما يمكن إنتاجه من المنتج A_1 هو X_1.

وأنّ كمية ما يمكن إنتاجه من المنتج A_2 هو X_2.

وبالتالي يمكن صياغة النموذج الرياضي للمشكلة كما يلي:

دالة الهدف : $\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$

وذلك ضمن القيود الخطية التالية:

$$X_1 - X_2 \leq 1$$

$$-X_1 + 2X_2 \le 2$$
$$2X_1 + X_2 \le 6$$

شروط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \ge 0$

ويمكن حل هذه المسألة بيانياً كما يلي:

المتراجحة الأولى: $X_1 - X_2 \le 1$

نجعلها بشكل مساواة: $X_1 - X_2 = 1$

نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = -1$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = 1$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 - 0 \le 1$ فالمتراجحة محققة.

المتراجحة الثانية: $-X_1 + 2X_2 \le 2$

نجعلها بشكل مساواة: $-X_1 + 2X_2 = 2$

نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = 1$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = -2$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 \le 2$ فالمتراجحة محققة.

المتراجحة الثالثة: $2X_1 + X_2 \le 6$

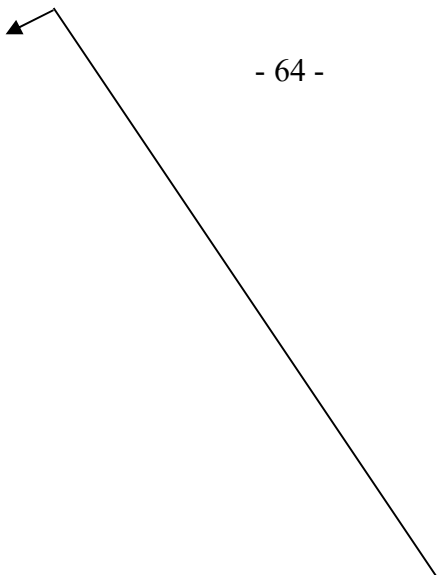
نجعلها بشكل مساواة: $2X_1 + X_2 = 6$

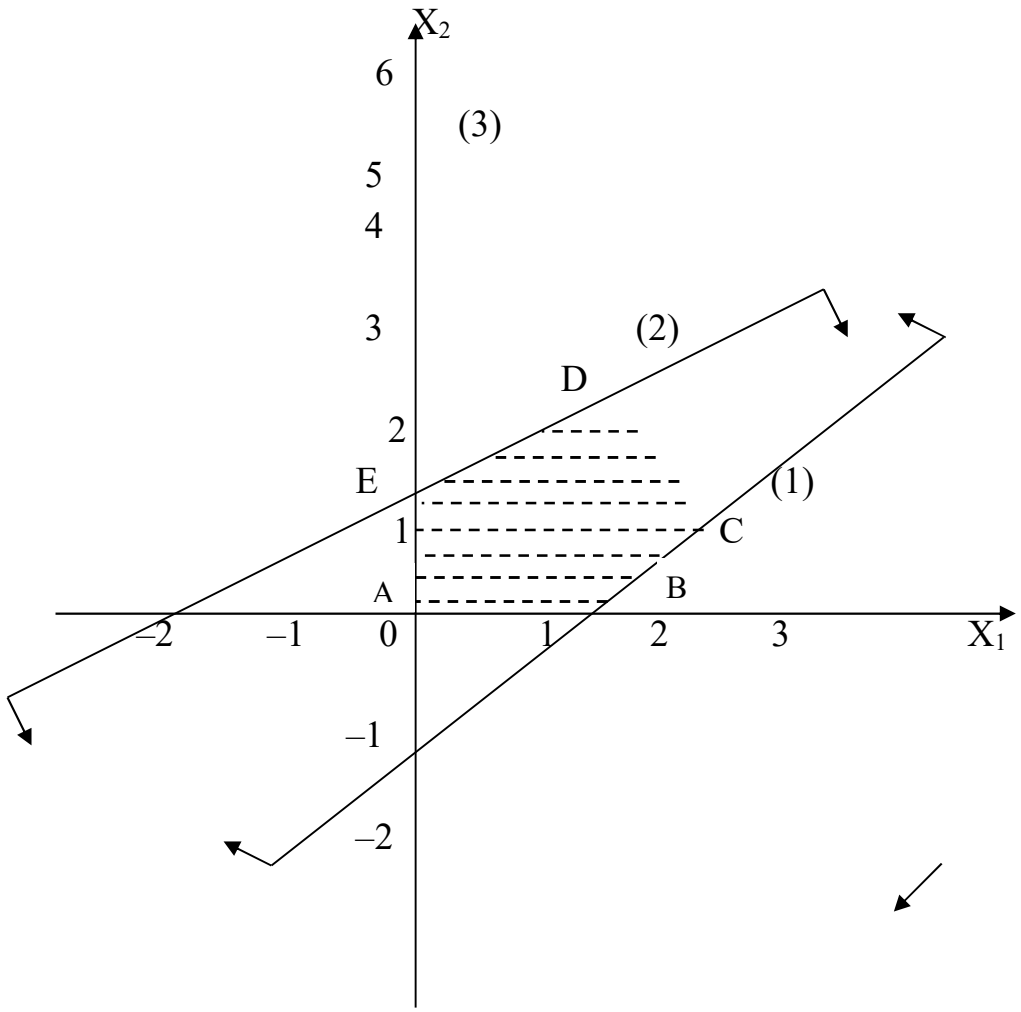
نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = 6$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = 3$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 \le 6$ فالمتراجحة محققة.

بعد ذلك نقوم بتمثيل هذه النقاط على محورين أفقي وعمودي كما يلي:





الحلول المقبولة للقيود الواردة بالإضافة إلى شروط عدم السلبية، هي النقاط الواقعة داخل وعلى محيط المضلع ABCDE ، ولمعرفة الحل الأمثل يمكن عن طريق الحل المشترك للمعادلات الواقعة على نقاط التقاطع المشترك بالنسبة لرؤوس المضلع، والتي تتمثل في:

رؤوس المضلع	قيم الحل المشترك لتقاطع المعادلات		قيمة دالة الهدف
	X_1	X_2	

0	0	0	A
1	0	1	B
5	4/3	7/3	C
6	2	2	D
2	1	0	E

نستنتج من ذلك بأنّ القيمة العظمى ل(Z = 6) وأنّ قيم الحل الأمثل هي:

$X_1 = 2$ و $X_2 = 2$.

ونسمي مجموعة النقاط الواقعة داخل المضلع ABCDE باسم منطقة الحلول المقبولة، ونسمي رؤوس المضلع باسم الحلول الرأسية.

3/3- حالات خاصة في حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية:

هناك حالات خاصة قد نتعرض لها عند الحل باستخدام الطريقة البيانية، في هذا القسم سنتعرض على بعض الحالات الخاصة، وسنناقش كيفية التعرف عليها عن طريق التمثيل البياني لقيود المسألة، أي باستخدام الطريقة البيانية، وأهم هذه الحالات الخاصة:

1/3/3- حالة عدم وجود أي حل مقبول للمسألة:

وفقاً للخطوة الرابعة من خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية، والخاصة بتحديد منطقة الحلول الممكنة، علينا تحديد مجموعة النقاط التي تحقق قيود المسألة، ولا نستطيع الافتراض دائماً أننا سنتمكن من تحديد هذه المنطقة، فقد لا تتفق قيود المسألة على أية نقطة، بمعنى أنه لا توجد نقطة واحدة مشتركة بين قيود المسألة، في هذه الحالة نستنتج أنّ منطقة الحلول الممكنة فارغة، وبالتالي لا يمكن تحديدها، وأنّ المسألة ليس لها حل:

مثال: ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

دالة الهدف: $\text{Max } Z = X_1 + 50X_2$

وذلك ضمن القيود الخطية التالية:

$$X_1 + X_2 \leq 1$$
$$-X_1 + X_2 \leq -1$$
$$X_1 - X_2 \leq -1$$

شروط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

ويمكن حل هذه المسألة بيانياً كما يلي:

المتراجحة الأولى: $X_1 + X_2 \leq 1$

نجعلها بشكل مساواة: $X_1 + X_2 = 1$

نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = 1$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = 1$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 \leq 1$ فالمتراجحة محققة.

المتراجحة الثانية: $-X_1 + X_2 \leq -1$

نجعلها بشكل مساواة: $-X_1 + X_2 = -1$

نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = -1$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = 1$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 \geq -1$ فالمتراجحة غير محققة.

المتراجحة الثالثة: $X_1 - X_2 \leq -1$

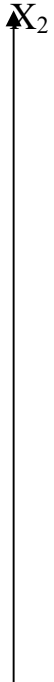
نجعلها بشكل مساواة: $X_1 - X_2 = -1$

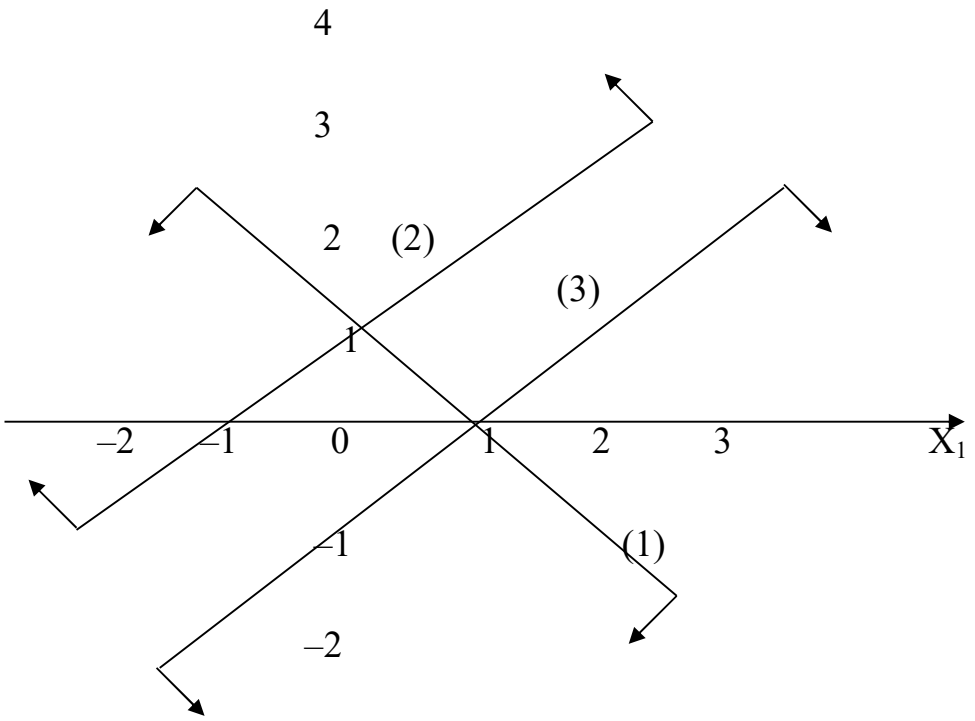
نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = 1$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = -1$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 \geq -1$ فالمتراجحة غير محققة.

بعد ذلك نقوم بتمثيل هذه النقاط على محورين أفقي وعمودي كما يلي:





يتضح من هذا الشكل عدم وجود أي حل مقبول، حيث إنّ منطقة الحلول الممكنة فارغة، ولا توجد نقاط مشتركة بين قيود المسألة، وبالتالي فالمسألة ليس لها حل.

2/3/3- حالة وجود عدد لا نهائي من الحلول المثالية:

حيث إنه يوجد بعض المسائل التي تحتوي منطقة الحلول الممكنة لها على عدد لا نهائي من الحلول المثلى، ويطلق عليها الحلول المثلى البديلة.

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

دالة الهدف : $\text{Max } Z = 4X_1 + 10X_2$

وذلك ضمن القيود الخطية التالية:

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$2X_1 + 5X_2 \leq 10$$

شروط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

ويمكن حل هذه المسألة بيانياً كما يلي:

المتراجحة الأولى: $4X_1 + 3X_2 \leq 12$

نجعلها بشكل مساواة: $4X_1 + 3X_2 = 12$

نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = 4$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = 3$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 \leq 12$ فالمتراجحة محققة.

المتراجحة الثانية: $2X_1 + 5X_2 \leq 10$

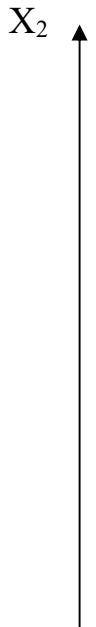
نجعلها بشكل مساواة: $2X_1 + 5X_2 = 10$

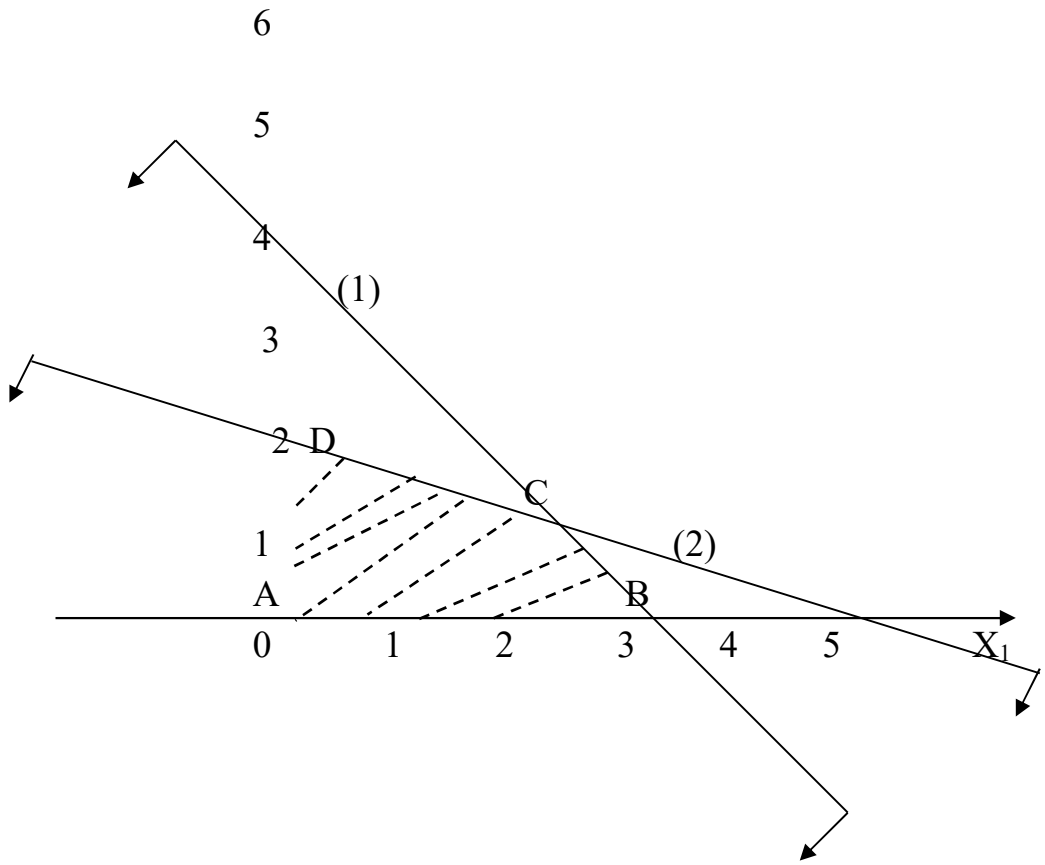
نفرض بأنّ $X_1 = 0$ فيكون عندها $X_2 = 2$

ونفرض بأنّ $X_2 = 0$ فيكون عندها $X_1 = 5$

إذاً في النقطة (0, 0) نجد أنّ $0 \leq 10$ فالمتراجحة محققة.

بعد ذلك نقوم بتمثيل هذه النقاط على محورين أفقي وعمودي كما يلي:





إنّ منطقة الحلول المقبولة هي الواقعة داخل محيط المضلع ABCD، ولتحديد الحل الأمثل، وذلك عن طريق الحل المشترك لنقاط التقاطع بالنسبة للمتراجحات الواردة في المسألة نستنتج ما يلي:

رؤوس المضلع	قيم الحل المشترك لتقاطع المعادلات	قيمة دالة الهدف

	X_2	X_1	
0	0	0	A
12	0	3	B
20	8/7	15/7	C
20	2	0	D

يتضح مما سبق أنّ القيمة العظمى لتابع الهدف $Z = 20$ ، موجودة في أكثر من نقطة على رؤوس المضلع، ويتضح من ذلك وجود عدد غير محدود من الحلول المثلى.

4/3- تدريبات

مسألة رقم (1):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

دالة الهدف : $\text{Max } Z = 7X_1 + 10X_2$

وذلك ضمن القيود الخطية التالية:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 36$$
$$2X_1 + 4X_2 \leq 40$$
$$X_1 \leq 10$$

شروط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

المطلوب حل المسألة التالية باستخدام الطريقة البيانية، واستخراج قيم الحل الأمثل.

مسألة رقم (2):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

دالة الهدف : $\text{Max } Z = 3X_1 + 4X_2$

وذلك ضمن القيود الخطية التالية:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$-3X_1 + 2X_2 \leq 3$$
$$2X_2 \leq 5$$
$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

شروط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

المطلوب حل المسألة التالية باستخدام الطريقة البيانية، واستخراج قيم الحل الأمثل.

مسألة رقم (3):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

دالة الهدف : $\text{Max } Z = 5X_1 + 12X_2$

وذلك ضمن القيود الخطية التالية:

$$X_1 + X_2 \leq 200$$
$$2X_2 \leq 240$$
$$2X_1 + X_2 \leq 210$$

شروط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

المطلوب حل المسألة التالية باستخدام الطريقة البيانية، واستخراج قيم الحل الأمثل.

مسألة رقم (4):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

دالة الهدف : $\text{Max } Z = 4X_1 + 10X_2$

وذلك ضمن القيود الخطية التالية:

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$2X_1 + 5X_2 \leq 10$$

شروط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

المطلوب حل المسألة التالية باستخدام الطريقة البيانية، واستخراج قيم الحل الأمثل.

الفصل الرابع

طريقة السمبلكس المباشرة والمختصرة

محتويات الفصل الرابع

1/4- مقدمة

2/4- خطوات خوارزمية السمبلكس المباشرة

3/4- تطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المباشرة

4/4- خوارزمية السمبلكس المعدلة أو المختصرة

5/4- بعض الملاحظات الهامة للحل وفق خوارزمية السمبلكس المباشرة والمعدلة

6/4- تطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المعدلة أو المختصرة

7/4- تدريبات

1/4- مقدمة:

تناولنا في الفصل السابق الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية، ورأينا أنه عندما تزيد عدد المتغيرات القرارية يكون استخدام الطريقة البيانية محفوفاً بالعديد من صور التعقيد والصعوبة، كذلك الحال إذا زادت معادلات القيود المفروضة على دالة الهدف بالصياغة الرياضية للمشكلة إلى حد يكون تمثيلها في الرسم البياني متداخلاً، ويكون استخدام هذا المدخل أيضاً فيه اتجاه نحو التعقيد في الحل، وما قد يصاحبه من احتمال عدم دقة النتائج التي يمكن التوصل إليها.

لذلك فإنّ هناك مدخلاً آخراً أو طريقة أخرى بديلة للمدخل البياني عندما يكون استخدامه مصدر تعقيد في الحل، وهذا المدخل يطلق عليه طريقة السمبلكس Simplex Method ، وهذه الطريقة في البرمجة الخطية تعطي إمكانيات أكبر، كما يتسع نطاقها عن الطريقة البيانية، إذ يمكن لمتخذ القرار أن يتعامل مع عدد من المتغيرات القرارية يزيد عن إمكانيات الطريقة البيانية، أيضاً لا يوجد بها تعقيد في حال تعددت القيود المفروضة على دالة الهدف في الصياغة الرياضية للمشكلة، فهذه الطريقة يمكن أن تتعامل مع أي عدد من المتغيرات القرارية، ومع أي عدد من معادلات القيود المفروضة، وإن كان الحل يدوياً في مثل تلك الحالات سيكون مرهقاً، إلا أنّ استخدامات الحاسب الآلي والبرامج المتاحة الآن للتشغيل عليه أزالت أية تعقيدات في الحل، خاصة عندما يكبر حجم الصياغة الرياضية للمشكلة.

إنّ طريقة السمبلكس تقوم على منهج مرتب ومنظم، وتعمل من خلال هذا المنهج على إيجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية في إطار خطوات متتابعة ومتعاقبة، ويتم ذلك وفقاً لشرطين: شرط الإمكانية، وشرط الأمثلية.

2/4- خطوات خوارزمية السمبلكس المباشرة:

تتألف هذه الخوارزمية من ثلاث مراحل رئيسية تتضمن[1]:

1- مرحلة تحويل النموذج المفروض إلى شكل نظامي مكافئ له.

2- مرحلة تحويل الشكل النظامي إلى شكل قاعدي للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة.

3- مرحلة البحث عن الحل المثالي المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة، وسوف نستعرض هذه المراحل الثلاث وفق خطوات متتالية ومتكررة، كما يلي.

1/2/4- مرحلة التحويل إلى الشكل النظامي:

تتضمن هذه المرحلة ما يلي:

1- نضيف أو نطرح إلى كل متراجحة متحولاً إضافياً غير سالب $y_i \geq 0$ وذلك حتى نحولها إلى معادلة خطية، وندخل هذه المتحولات y_i مضروبة بأمثال صفرية إلى معادلة تابع الهدف.

2- نجعل جميع الثوابت العددية b_i والموجودة في الطرف الأيمن من المعادلات أعداداً غير سالبة، وذلك بضرب طرفي المعادلة ب (1-) إذا لزم الأمر.

3- نحول جميع الشروط الفردية بحيث نجعل جميع المتحولات الداخلة في معادلة النموذج غير سالبة $(X_j \geq 0)$.

4- نعزل المتحولات غير المقيدة إن وجدت، ونحذفها من النموذج ككل، وذلك بحسابها من بعض المعادلات وتعويضها في المعادلات الأخرى وفي معادلة تابع الهدف، ونحتفظ بالمعادلات التي استخدمناها في عملية العزل جانباً للعودة إليها بعد حصولنا على الحل المثالي، من أجل حساب قيمة

1- د. إبراهيم محمد العلي، **مرجع سبق ذكره**، ص 90.

المتحولات غير المقيدة التي عزلناها في بداية حل المسألة، للوصول إلى قيم المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل..

5- إذا كان تابع الهدف من النوع L الذي يطلب منا جعله أصغر ما يمكن، نقوم بتحويله إلى الشكل Z الذي يطلب جعله أكبر ما يمكن، وذلك بإجراء التحويل التالي:

$$\text{Min } L = c_1x_1 + c2x2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

$$\text{Max } Z = \text{Min } (-L) = c_1x_1 - c2x2 - c_3x_3 - \ldots - c_nx_n - c_0$$

ونتيجة لهذه الخطوات نحصل على شكل نظامي كالتالي:

- يطلب إيجاد القيم غير السالبة للمتحولات:

$$(x_1, x_2 , x_3 , \ldots.., x_n , y_1, y_2 , y_3\ldots\ldots,y_m)$$

والتي تعطينا أكبر قيمة لتابع الهدف:

$$\text{Max } Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n + p_0$$

والتي تحقق الشروط الخطية التالية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n + y_3 = b_3$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m$$

حيث أنّ جميع الثوابت $b_i \geq 0$ ، والمتحولات $x_j \geq 0$ ، والمتغيرات الإضافية $y_i \geq 0$.

وفيما يلي نضع معاملات الشكل النظامي في جدول بعد كتابة تابع الهدف كما يلي:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + \ldots + 0y_m = Z - p_0$$

2/2/4- مرحلة تحويل النموذج النظامي إلى الشكل القاعدي المناسب:

نقوم بوضع المعادلات السابقة في جدول، وإذا كان الجدول يحوي متحولات تشكل مصفوفة أحادية نقول إنّ هناك حلاً قاعدياً.

ويوجد في عملية الحل عدة حلول قاعدية غير سالبة، ونسعى دائماً للوصول إلى الحل القاعدي غير السالب الذي يعطينا أكبر قيمة ل Z ويسمى عندها الحل الأمثل.

الجدول رقم (1-4)

شكل الحل القاعدي

رقم المعادلة	المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_n	y_1	y_2	y_3	y_m	الثوابت b_i
1	y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1n}	1	0	0	0	b_1
2	y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
3	y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3n}	0	0	1	0	b_3
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mn}	0	0	0	1	b_n
تابع الهدف		p_1	p_2	p_3	p_n	0	0	0	0	$Z - p_0$

3/2/4- مرحلة البحث عن الحل الأمثل:

في هذه المرحلة:

1- نقوم باختبار الحل عن طريق اختيار أعلى قيمة موجبة في السطر الأخير والذي هو سطر تابع الهدف في حالة التعظيم.

2- نطلق على هذه القيمة اسم المتغير الداخل والعمود المقابل لها بالعمود المحوري، وإذا وجد أكثر من رقم موجب متساوٍ نختار إحداها بشكل كيفي.

3- نختار سطر الارتكاز أو المتغير الخارج بتقسيم القيم الموجبة في عمود الحل أو عمود الثوابت على العناصر المقابلة لها (الموجبة فقط) في العمود المحوري (عمود الارتكاز)، ونختار أصغر حاصل قسمة والسطر المقابل لها هو سطر الارتكاز، وأصغر حاصل قسمة نسميه العنصر المحوري أو عنصر الارتكاز، وإذا أدى أكثر من رقم إلى النسبة نفسها فنختار إحداها بشكل كيفي، وإذا لم يوجد في العمود المحوري أي رقم موجب فالنموذج ليس له حل.

4- تشكيل حل الأساس المحسن: وذلك بتشكيل جدول جديد يكون فيه السطر المقابل لسطر الارتكاز هو سطر الارتكاز نفسه بعد قسمة كل عنصر من عناصره على عنصر الارتكاز (العنصر المحوري)، ونسميه السطر المحوري الجديد، ثم نجعل بقية عناصر العمود المحوري في الجدول الجديد أصفاراً. ونحسب باقي الأسطر في الجدول الجديد بإحدى الطريقتين:

أ- نحسب كل عناصر السطر المراد حسابه وذلك بضرب السطر المحوري الجديد بالقيمة المقابلة للعنصر المحوري في السطر المراد حساب قيمته بعد تغيير إشارته ثم نضيفه للسطر الأصلي المراد حساب قيمه فنحصل بذلك على السطر الجديد.

ب- نحسب كل عنصر من عناصر السطر على حدة وذلك وفق قاعدة المستطيل والتي تتمثل:

ما يقابل العنصر في سطر الإرتكاز

× ما يقابله في عمود الارتكاز

العنصر الجديد = العنصر القديم − ——————————————

العنصر المحوري

5- نصل إلى الحل الأمثل في حالة انعدام القيم الموجبة في السطر الأخير سطر تابع الهدف، أي تكون هنا جميع القيم إما سالبة أو أصفاراً.

6- الحل الأمثل هو بتخصيص لكل متغير في العمود الأول (عمود القاعدة) القيمة المناظرة له في العمود الأخير (عمود الثوابت bi)، وجميع المتغيرات الباقية تأخذ قيمة الصفر، والقيمة المثلى لتابع الهدف هي الموجودة في السطر الأخير والعمود الأخير من جدول الحل النهائي.

3/4- تطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المباشرة

مسألة رقم (1):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

شروط عدم السلبية:

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس المباشرة.

خطوات الحل:

1- نحول النموذج المفروض إلى الشكل النظامي:

$x_1 - x_2 + y_1 = 1$

$-x_1 + 2x_2 + y_2 = 2$

$2x_1 + x_2 + y_3 = 6$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$

- ندخل y_i إلى معادلة تابع الهدف مضروبة بأمثال صفرية:

$x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 = Z - 0$

2- تحويل الشكل النظامي إلى الشكل القاعدي:

(جدول الحل الأولي)

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	عمود الثوابت b_i
y_1	1	–1	1	0	0	1
y_2 ← م. خارج	–1	(2)	0	1	0	2
y_3	2	1	0	0	1	6
تابع الهدف	1	2	0	0	0	$Z - 0$

يتضح من هذا الجدول أنّ المتحولات الإضافية تشكل حلاً قاعدياً لأنها تمثل مصفوفة أحادية.

بعد تشكل الحل القاعدي لدينا نقوم بالبحث عن الحل الأمثل.

3- البحث عن الحل الأمثل:

- تحديد المتغير الداخل: نختار أعلى قيمة موجبة في سطر تابع الهدف وهي عند $x_2 = 2$.

- لتحديد المتغير الخارج نقسم قيم عمود الثوابت على القيم الموجبة في عمود الارتكاز، ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (2/2 = 1,\ 6/1 = 6) = 1$

نسمي أصغر حاصل قسمة بالعنصر المحوري أو عنصر الارتكاز.

- نرسم جدول جديد نضع فيه عناصر سطر الارتكاز مقسمة على العنصر المحوري أو عنصر الارتكاز، ونضع فيه بقية عناصر العمود المحوري أصفاراً، ونحسب باقي الأسطر بضرب السطر المحوري الجديد بالقيمة المقابلة للعنصر المحوري بعد تغيير إشارته ثم نضيفه للسطر الأصلي المراد حسابه.

(جدول الحل الثاني)

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	عمود الثوابت b_i
y_1	1/2	0	1	1/2	0	2
x_2	–1/2	1	0	1/2	0	1
y_3 ← م. خارج	(5/2)	0	0	–1/2	1	5
تابع الهدف	2	0	0	–1	0	Z – 2

أمثلة على كيفية حساب قيم الأسطر الجديدة في الجدول الثاني:

- السطر الثاني سطر الارتكاز: قسمنا عناصر هذا السطر على العنصر الإرتكاز أو العنصر المحوري والذي هو (2) وجعلنا باقي عناصر العمود أصفاراً.

- لحساب السطر الأول الجديد: نضرب السطر المحوري الجديد بما يقابل العنصر المحوري في السطر الأول المراد حسابه بعد تغيير إشارته، أي بـ (+1)، ثم نضيفه للسطر الأول الأصلي.

السطر المحوري الجديد مضروباً بـ (+1)	–1/2	1	0	1/2	0	1
+ السطر الأصلي	1	–1	1	0	0	1
= السطر الأول الجديد	1/2	0	1	1/2	0	2

- لحساب السطر الثالث الجديد: نضرب السطر المحوري الجديد بما يقابل العنصر المحوري في السطر الثالث المراد حسابه بعد تغيير إشارته، أي بـ (–1)، ثم نضيفه للسطر الثالث الأصلي.

السطر المحوري الجديد مضروباً بـ (–1)	1/2	–1	0	–1/2	0	–1
+ السطر الثالث القديم	2	1	0	0	1	6
= السطر الثالث الجديد	5/2	0	0	–1/2	1	5

- لحساب سطر تابع الهدف الجديد: نضرب السطر المحوري الجديد بما يقابل العنصر المحوري في سطر تابع الهدف المراد حسابه بعد تغيير إشارته، أي بـ (–2)، ثم نضيفه للسطر الأول الأصلي.

السطر المحوري الجديد مضروباً بـ (–2)	1	–2	0	–1	0	–2
+ سطر تابع الهدف القديم	1	2	0	0	0	Z – 0
= سطر تابع الهدف الجديد	2	0	0	–1	0	Z – 2

يتضح من جدول الحل الثاني أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نتابع خطوات الحل للبحث عن الحل الأمثل وذلك باختيار x_1 المتغير الداخل، لأنه الرقم الموجب الوحيد في سطر تابع الهدف.

لاختيار المتغير الخارج نقسم قيم عمود الحل على قيم عمود المتغير الداخل، ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (2 \div 1/2 = 4,\ 5 \div 5/2 = 2) = 2$

وبناء عليه يكون المتغير الخارج y_3، والعنصر المحوري هو (5/2).

لذلك نتابع بناء الجدول الثالث بالخطوات السابقة بنفسها:

(جدول الحل الثالث)

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	عمود الثوابت b_i
y_1	0	0	1	6/10	–2/10	1
x_2	0	1	0	4/10	2/10	2
x_1	1	0	0	–1/5	2/5	2
تابع الهدف	0	0	0	–3/5	– 4/5	Z – 6

يتضح أنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل لعدم وجود أية قيمة موجبة في سطر تابع الهدف، وأنّ قيم الحل الأمثل هي:

$x_1 = 2$

$x_2 = 2$

$y_1 = 1$

$y_2 = y_3 = 0$

$Z - 6 = 0 \rightarrow Z = 6$

من أجل التأكد من أنّ الحل الذي حصلنا عليه هو حل صحيح، يمكن أن نعوض قيم المتغيرات التي حصلنا عليها في معادلة تابع الهدف، وفي معادلات الشروط للتأكد من ذلك.

كانت معادلة تابع الهدف: $\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$

بالتعويض: $Z = 2 + 2 \times 2 = 6$

الشرط الأول: $x_1 - x_2 + y_1 = 1$

بالتعويض: $2 - 2 + 1 = 1$

مسألة رقم (2):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 6x_2 \geq 12$$

شروط عدم السلبية: $x_1 \geq 0$

x_2 غير مقيد

المطلوب حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس المباشرة.

خطوات الحل:

المتغير x_2 غير مقيد أو غير محدد الإشارة نستعيض عنه بتفاضل متغيرين:

$$x_2 = x_2' - x2''$$

نعوض ذلك في معادلة تابع الهدف وباقي المعادلات:

$$3x_1 + 4\,(x_2' - x2'') + y_1 = 12$$
$$3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + y_1 = 12$$
$$2x_1 + 6\,(x2' - x2'') - y_2 = 12$$
$$2X_1 + 6X_2' - 6X_2'' - y_2 = 12$$

وفي معادلة تابع الهدف:

$$Z = 5x_1 + 6x_2' - 6x_2''$$
$$5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' + 0y_1 + 0y_2 = Z - 0$$

بعد أنّ حصلنا على النموذج النظامي، سوف نقوم بتحويل النموذج النظامي إلى الشكل القاعدي المناسب.

جدول الحل المبدئي

المتغير الداخل ↓

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2'	x_2''	y_1	y_2	عمود الثوابت b_i
1	3	4	– 4	1	0	12
2 ← م. خارج	2	(6)	– 6	0	– 1	12
تابع الهدف	5	6	– 6	0	0	Z – 0

يتضح أنّ هذا الجدول لا يشكل لدينا حلاً قاعدياً، لذلك نتابع الحل وفق الخطوات المعتادة لطريقة السمبلكس لتشكيل حل قاعدي ثم الانطلاق منه للوصول إلى الحل الأمثل.

- يتضح من جدول الحل المبدئي أنّ المتغير الداخل هو x'_2 لأنه يمثل أعلى قيمة موجبة في سطر تابع الهدف، ونحدد المتغير الخارج بتقسيم قيم عمود الحل على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل، ونختار أصغر حاصل قسمة.

$$\Theta = \text{Min}\,(12/4 = 3,\ 12/6 = 2) = 2$$

يتضح أنّ المتغير الخارج هو عند المعادلة رقم (2)، وأنّ العنصر المحوري يتمثل في الرقم (6).

- بعد تحديد المتغير الداخل والخارج والعنصر المحوري، نقوم بحساب قيم الجدول الثاني للحل بالطريقة المعتادة، فيتشكل لدينا الجدول الآتي:

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2'	x_2''	y_1	y_2	عمود الثوابت b_i
y_1 ← م. خارج	(10/6)	0	0	1	4/6	4
x_2'	2/6	1	– 1	0	–1/6	2
تابع الهدف	3	0	0	0	1	Z – 12

يتضح أنّ هذا الجدول يشكل لدينا حلاً قاعدياً، لتشكل مصفوفة أحادية في المتغيرات القاعدية.

ولكن هذا الحل لا يمثل الحل الأمثل لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نتابع خطوات الحل للوصول إلى الحل الأمثل.

يتضح لدينا من جدول الحل الثاني أنّ المتغير الداخل هو x_1 لأنه يمثل أعلى قيمة موجبة في سطر تابع الهدف، ونحدد المتغير الخارج بتقسيم قيم عمود الحل على القيم الموجبة في عمود الارتكاز.

$\Theta = \text{Min}\ (4 \div 10/6 = 12/5,\ 2 \div 2/6 = 6) = 12/5$

أي يكون لدينا المتغير الخارج هو y_1، وأنّ العنصر المحوري أو عنصر الارتكاز يتمثل في الرقم (10/6).

بعد تحديد المتغيرين الداخل والخارج، والعنصر المحوري نقوم بحساب قيم الجدول الثالث للحل بالطريقة المعتادة، فيتشكل لدينا الجدول الآتي:

جدول الحل الثالث

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2'	x_2''	y_1	y_2	عمود الثوابت b_i
x_1	1	0	0	6/10	4/10	24/10
x_2'	0	1	– 1	–2/10	–3/10	12/10
تابع الهدف	0	0	0	–18/10	1	Z – 192/10

يتضح أنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل لعدم وجود أي قيمة موجبة في سطر تابع الهدف، وأنّ قيم الحل الأمثل هي:

$x_1 = 24/10$

$x_2 = x_2' - x_2'' = 12/10 - 0 = 12/10$

$y_1 = y_2 = 0$

$Z - 192/10 = 0 \rightarrow Z = 192/10$

من أجل التأكد من أنّ الحل الذي حصلنا عليه هو حل صحيح، يمكن أن نعوض قيم المتغيرات التي حصلنا عليها في معادلة تابع الهدف، وفي معادلات الشروط للتأكد من ذلك.

كانت معادلة تابع الهدف: $\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2$

بالتعويض: $Z = 5 \times 24/10 + 6 \times 12/10 = 192/10$

الشرط الأول: $3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + y_1 = 12$

بالتعويض: $3 \times 24/10 + 4 \times 12/10 - 0 + 0 = 12$

4/4- خوارزمية السمبلكس المعدلة أو المختصرة:

اعتماداً على التفاصيل التي أوردناها في خوارزمية السمبلكس المباشرة يمكننا تلخيص خطوات السمبلكس المعدلة فيما يلي:

1- نحول النموذج المفروض إلى النموذج النظامي.

2- نحول النموذج النظامي إلى الشكل القاعدي، بإتباع الأسلوب المتبع في خوارزمية السمبلكس المباشرة نفسه.

3- نقوم بحذف المصفوفة الأحادية من جدول السمبلكس الموسع.

4- نختبر الحل، ونحدد المتغير الداخل باختيار أعلى قيمة موجبة في سطر تابع الهدف في حالة التعظيم، والعمود المقابل لها هو العمود المحوري أو عمود الارتكاز، ولتحديد المتغير الخارج (سطر الارتكاز) نقسم قيم عمود الحل على القيم الموجبة في عمود الارتكاز، ونختار أصغر حاصل قسمة وهو العنصر المحوري.

5- نشكل جدولاً جديداً، ونستبدل فيه المتغير الداخل بالخارج، والمتغير الخارج بالداخل، ونضع فيه مقلوب العنصر المحوري، ونقسم بقية عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري (عنصر الارتكاز)، ونقسم بقية عناصر العمود المحوري على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب بقية عناصر الجدول بالطريقة المعتادة أو وفق طريقة المستطيل.

6- نستمر بالخطوات السابقة نفسها للوصول إلى الحل الأمثل، والحل الأمثل يتمثل بانعدام الأرقام الموجبة في سطر تابع الهدف في حالة مشكلة التعظيم.

7- يتم تحديد قيم الحل الأمثل، وذلك بمقابلة كل عنصر في العمود الأول بما يقابله في العمود الأخير عمود الثوابت أو قيم الحل، وأي متغير لا يكون موجوداً في العمود الأول (عمود القاعدة) في جدول الحل الأمثل تكون قيمته صفراً.

5/4- بعـض الملاحظـات الهامــة للحـل وفـق خوارزميــة السـمبلكس المباشرة والمعدلة

1- إذا كان تابع الهدف من نوع التخفيض Min:

$$\text{Min } L = p_1x_1 + p_2x_2 + p3x3 + \ldots + p_nx_n$$

فإننا نقوم بتحويله إلى تابع الهدف من نوع التعظيم Max بإجراء التحويل التالي:

$$\text{Max } Z = \text{Min } (-L) = -p_1x_1 - p_2x_2 - p3x3 - \ldots - p_nx_n$$

2- **إذا كانت بعض الشروط معادلات وبعضها الآخر متراجحات:** فإننا نحول المتراجحات إلى معادلات ذات أطراف غير سالبة ($b_i \geq 0$)، وذلك بإضافة أو طرح متحولات موجبة إلى أطرافها اليسرى، ثم نضيف إلى المعادلات التي لا تتضمن متحولات قاعدية متحولات اصطناعية.

3- **حالـة وجود أكثر من عنصر للارتكاز:** وتظهر هذه الحالة عندما يكون لدينا أكثر من عنصر متساويين، يتم اعتماد أحد العنصرين ليكون عنصراً للارتكاز.

4- **حالــة الانحــلال:** وهـي نتيجـة ظهـور رقـم صـفر فـي عمـود الثوابـت (قـيم الحل)، وفي هذه الحالة نتجاهل ذلك الصفر، ونختار عنصر الارتكاز وفق القواعد السابقة، وإذا لم نجد في عمود الارتكاز عنصراً موجباً غير العنصر المقابل لذلك الصفر، فإننا نختاره كعنصر للارتكاز لمرة واحدة، ونجري التبديل اللازم، ثم نعود إلى تعليمات الخوارزمية.

5- **حالة ظهور رقم سالب في عمود الثوابت bi:** يمكن التخلص منه فوراً عن طريق اعتبار سطره سطراً للارتكاز، ثم نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز، ونختار أصغر حاصل قسمة موجب، وإذا لم نجد أي حاصل قسمة موجب فإننا سنأخذ أعلى حاصل قسمة سالب (

وهو الأقرب إلى الصفر) الذي يمثل عنصر الارتكاز، ويكون عموده يمثل المتغير الداخل أو عمود الارتكاز.

6- **حالة عدم وجود حل مثالي:** وقد نصادف هذه الحالة في أية مرحلة من مراحل الحل، ونستدل على ذلك في حالة عدم وجود عنصر موجب بين عناصر عمود الارتكاز، وهذا يعني أنّ منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تزايد Z ، وفي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعلن ذلك.

7- **حالة عدم وجود أي حل مقبول:** وتحدث هذه الحالة عندما تكون الشروط متعارضة، ونستدل على ذلك عندما تكون جميع عناصر أحد الأسطر سالبة، ويكون العدد الثابت b_i موجباً، وفي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعلن ذلك.

8- **حالة وجود أكثر من حل مثالي:** وتحدث هذه الحالة عندما يكون مستقيم أو مستوى تابع الهدف موازياً لأحد أضلاعه أو سطوح منطقة الحلول المشتركة والواقع في جهة تزايد التابع Z.

9- **حالة وجود حل مثالي منحل:** وتظهر هذه الحالة في آخر مراحل الحل، ونستدل عليها عندما نكون وصلنا للحل المثالي، ويكون أحد الثوابت b_i مساوياً للصفر، وليس لهذه الحالة أية تأثيرات على النموذج الأصلي.

10- **حالة الدوران:** وهي الحالة التي تعيدنا إلى الوضعية نفسها التي كنا قد انطلقنا منها، أو مررنا بها أثناء عملية الحل، ويتم التخلص منها باختيار عنصر للارتكاز غير العنصر النظامي وذلك لمرة واحدة فقط.

6/4- تطبيقات عملية على طريقة السمبلكس المعدلة أو المختصرة

مسألة رقم (1):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 8$$
$$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 12$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل للمسألة التالية باستخدام خوارزمية السمبلكس المعدلة.

خطوات الحل:

1- نحول الشكل المفروض إلى النموذج النظامي:

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + y_1 = 10$$
$$x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 + y_2 = 8$$
$$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + y_3 = 12$$

تابع الهدف يصبح:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 = Z - 0$$

شرط عدم السلبية:

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , y_1, y_2 , y_3 \geq 0$$

2- نحول النموذج النظامي إلى الشكل القاعدي المناسب:

سنقوم ببناء جدول السمبلكس الأولي أو المبدئي، وإذا كان يحتوي مصفوفة أحادية يكون قد تشكل لدينا حل قاعدي.

جدول السمبلكس المبدئي

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	عمود الثوابت b_i
y_1	1	2	4	2	1	0	0	10
y_2	1	1	6	1	0	1	0	8
y_3	4	2	4	1	0	0	1	12
تابع الهدف	2	3	2	1	0	0	0	Z –0

يتضح لنا أنّ هذا الجدول يشكل حلاً قاعدياً لأنه تشكلت لدينا مصفوفة أحادية، والحل وفق طريقة السمبلكس المعدلة، أول خطوة نقوم بها هي حذف المصفوفة الأحادية وفق الجدول التالي:

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	عمود الثوابت b_i
y_1 ← م. خارج	1	(2)	4	2	10
y_2	1	1	6	1	8
y_3	4	2	4	1	12
تابع الهدف	2	3	2	1	Z – 0

هذا الجدول يشكل حلاً قاعدياً، ولكنه لا يشكل حلاً أمثلاً، لذلك سنقوم بتحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل.

نحدد المتغير الداخل باختيار أعلى قيمة في سطر تابع الهدف وهي عند $x_2 = 3$

لتحديد المتغير الخارج، نقسم قيم عمود الحل على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل، ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (10/2 = 5,\ 8/1 = 8,\ 12/2 = 6) = 5$

إذاً المتغير الخارج هو y_1 والعنصر المحوري هو (2).

بعد ذلك نرسم جدولاً جديداً، نجري فيه التبديل بين المتغير الخارج بالداخل، والمتغير الداخل بالخارج، ثم نضع فيه مقلوب العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز، وباقي عناصر عمود الارتكاز على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة، أو وفق قاعدة المستطيل، فيتشكل لدينا الجدول التالي.

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	y_1	x_3	x_4	عمود الثوابت b_i
x_2	1/2	1/2	2	1	5
y_2	1/2	–1/2	4	0	3
y_3 ← م. خارج	(3)	–1	0	–1	2
تابع الهدف	1/2	–3/2	– 4	–2	Z – 15

هذا الجدول كذلك لا يشكل حلاً أمثلاً لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك سنقوم بتحسين الحل، باختيار الرقم الموجب الوحيد في سطر تابع الهدف كمتغير داخل وهو $x_1 = 1/2$, ونقوم بتحديد المتغير الخارج بتقسيم قيم عمود الحل على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل، ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (5 \div 1/2 = 10,\ 3 \div 1/2 = 6,\ 2/3) = 2/3$

إذاً المتغير الخارج هو y_3 والعنصر المحوري هو (3).

بعد ذلك نرسم جدولاً جديداً نجري فيه التبديل بين المتغير الخارج بالداخل، والمتغير الداخل بالخارج، ثم نضع فيه مقلوب العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري، وباقي عناصر عمود الارتكاز على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة، أو وفق قاعدة المستطيل، فيتشكل لدينا الجدول التالي.

جدول الحل الرابع

المتحولات / القاعدة	y_3	y_1	x_3	x_4	عمود الثوابت b_i
X_2	–1/6	2/3	2	7/6	14/3
y_2	–1/6	–2/6	4	1/6	8/3
x_1	1/3	–1/3	0	–1/3	2/3
تابع الهدف	–1/6	–4/3	– 4	–11/6	Z – 46/3

هذا الجدول يشكل جدول الحل الأمثل لانعدام القيم الموجبة في سطر تابع الهدف، وأنّ قيم الحل الأمثل هي:

$x_1 = 2/3$

$x_2 = 14/3$

$y_2 = 8/3$

$X_3 = X_4 = 0$

$y_1 = y_3 = 0$

$Z – 46/3 = 0 \rightarrow Z = 46/3$

مسألة رقم (2):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } L = x_1 - 2x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$-7x_1 + 8x_2 \leq 0$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 6$$

خطوات الحل:

– نقوم بتحويل تابع الهدف من النوع Min إلى النوع Max :

$$\text{Max } (Z) = \text{Min } (-L) = -x_1 + 2x_2$$

– الشروط الأخيرة نقوم بتحويلها إلى الشكل التالي:

$0 \leq x_1$ $\quad$ $x_1 \leq 4$

$0 \leq x_2$ $\quad$ $x_2 \leq 6$

– نقوم بتحويل الشكل المفروض إلى الشكل النظامي:

$$x_1 + x_2 + y_1 = 5$$
$$-7x_1 + 8x_2 + y_2 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 + y_3 = 18$$
$$x_1 + y_4 = 4$$
$$x_2 + y_5 = 6$$

معادلة تابع الهدف تصبح:

$$-x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 = Z - 0$$

شروط عدم السلبية:

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

- نقوم بتحويل الشكل النظامي إلى الشكل القاعدي المناسب:

جدول السمبلكس الموسع

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	عمود الثوابت b_i
y_1	1	1	1	0	0	0	1	5
y_2	–7	8	0	1	0	0	0	0
y_3	3	2	0	0	1	0	0	18
y_4	1	0	0	0	0	1	0	4
y_5	0	1	0	0	0	0	1	6
تابع الهدف	–1	2	0	0	0	0	0	Z – 0

- نقوم بحذف المصفوفة الأحادية من جدول السمبلكس الموسع:

جدول الحل الثاني

↓ المتغير الداخل

المتغيرات / القاعدة	x_1	x_2	عمود الثوابت b_i
y_1 ← م. خارج	1	(1)	5
y_2	–7	8	0
y_3	3	2	18
y_4	1	0	4
y_5	0	1	6
تابع الهدف	–1	2	Z – 0

حالة الانحلال: هو ظهور صفر في عمود قيم الحل، نتجاهل ذلك الصفر، ونختار العنصر المحوري وفق القواعد السابقة، ولكن إذا لم نجد عنصراً موجباً في عمود الارتكاز غير العنصر المقابل لذلك الصفر فإننا نختاره كعنصر للارتكاز لمرة واحدة، ونجري التبديل اللازم ثم نعود إلى تعليمات الخوارزمية.

– نقوم باختيار المتغير الداخل الذي يمثل أعلى قيمة موجبة في سطر تابع الهدف وهو عند $x_2 = 2$, ونحدد المتغير الخارج بتقسيم قيم عمود الحل على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (5/1 = 5,\ 18/2 = 9,\ 6/1 = 6) = 5$

بعد ذلك نرسم جدولاً جديداً، نجري فيه التبديل بين المتغير الخارج بالداخل، والمتغير الداخل بالخارج، ثم نضع فيه مقلوب العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري، وباقي عناصر عمود الارتكاز على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة، أو وفق قاعدة المستطيل، فيتشكل لدينا الجدول التالي.

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

المتغيرات / القاعدة	x_1	y_1	عمود الثوابت b_i
x_2	1	1	5
y_2 ← م. خارج	(–15)	–8	– 40
y_3	1	–2	8
y_4	1	0	4
y_5	–1	–1	1
تابع الهدف	–3	–2	Z – 10

حالة ظهور عدد سالب في عمود الثوابت أو قيم الحل، يمكن أن يكون نتيجة للحالة السابقة، لذلك يجب التخلص من ذلك العنصر فوراً، وذلك باعتبار سطره سطراً للارتكاز، ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل) نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (-3/-15 = 1/5, -2/-8 = 1/4) = 1/5$

إذاً المتغير الداخل هو X_1 والعنصر المحوري هو (-15).

بعد ذلك نرسم جدولاً جديداً، نجري فيه التبديل بين المتغير الخارج بالداخل، والمتغير الداخل بالخارج، ثم نضع فيه مقلوب العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري، وباقي عناصر عمود الارتكاز على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة، أو وفق قاعدة المستطيل، فيتشكل لدينا الجدول التالي.

جدول الحل الرابع

المتغيرات / القاعدة	y_2	y_1	عمود الثوابت b_i
x_2	1/15	7/15	35/15
x_1	–1/15	8/15	40/15
y_3	1/15	–38/15	80/15
y_4	1/15	–8/15	20/15
y_5	1/15	–7/15	55/15
تابع الهدف	–3/15	– 6/15	Z – 2

هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل لانعدام القيم الموجبة في سطر تابع الهدف، وأنّ قيم الحل الأمثل تتمثل في:

$x_1 = 40/15$

$x_2 = 35/15$

$y_3 = 80/15$

$y_4 = 20/15$

$y_5 = 55/15$

$y_1 = y_2 = 0$

$Z - 2 = 0 \rightarrow Z = 2$

وللتأكد من صحة النتائج نطبقها على دالة الهدف والشروط.

كانت معادلة تابع الهدف:

$$Max\ (Z) = -x_1 + 2x_2$$

$$= -40/15 + 2(35/15) = 2$$ بالتعويض

كانت معادلة الشرط الأول:

$$x_1 + x_2 + y_1 = 5$$

$40/15 + 35/15 + 0 = 5$ بالتعويض

7/4- تدريبات

مسألة رقم (1):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = -x_1 + x2 + 3x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$
$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + x_3 \leq 5$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس المباشرة.

مسألة رقم (2):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } L = -x_1 + x2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 1$$
$$3x_1 + x_2 \leq 2$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس المباشرة.

مسألة رقم (3):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 3$$
شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس المعدلة.

مسألة رقم (4):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } L = -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس المعدلة.

مسألة رقم (5):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 30$$
$$3x_1 + x_2 \leq 15$$
شروط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس المعدلة.

الفصل الخامس

طريقة السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية

محتويات الفصل الخامس

1/5- مقدمة

2/5- خطوات خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة

3/5- تطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة

4/5- خطوات خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة

5/5- تطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة

6/5- تدريبات

1/5- مقدمة:

لقد لاحظنا أنّ معالجة النموذج الخطي تبدأ بتحويل النموذج العام إلى نموذج نظامي، ثم تحويل النموذج النظامي إلى شكل قاعدي، ثم بعد ذلك البحث عن الحل الأمثل. أي أنّ عملية البحث عن الحل المثالي لا تبدأ إلا بعد حصولنا على شكل قاعدي محدد، لذلك كان من المنطقي أن يفكر الباحثون باجتهاد شكل قاعدي مصطنع، وذلك عن طريق تشكيل قاعدة اصطناعية مؤلفة من جملة من المتحولات الاصطناعية غير السالبة تضاف إلى كل من معادلات الشروط (إذا لم تتضمن متحولاً قاعدياً) في النموذج النظامي، وهذا يسهل عملية الحل للوصول إلى الحل الأمثل.

ويجب ملاحظة أنّ إضافة متغيرات اصطناعية إلى الطرف الأيسر من المعادلات تتم بغرض إيجاد حل مبدئي بطريقة سهلة، إلا أنّ هذا الحل لا يعد حلاً ممكناً.

ولذلك يجب التأكد من أنّ هذه المتغيرات سوف تترك الحل الأساسي وتأخذ القيمة صفر حتى نصل إلى حل يعبّر عن النموذج الرياضي الأصلي، والمعبّر عن المشكلة، فإذا استحال ذلك بأن ظل جانب من هذه المتغيرات الاصطناعية له قيمة موجبة، دلّ ذلك على عدم إمكانية الوصول إلى حل ممكن للمشكلة الأساسية، إذ أنّ هذه المتغيرات الاصطناعية لا تحمل أي معنى حتى يمكن تصور وجودها في الحل النهائي، ويتم استبعاد هذه المتغيرات بطريقة السمبلكس نفسها.

2/5- خطــوات خوارزميــة الســمبلكس ذات القاعــدة الاصــطناعية المباشرة:

1- نكتب مسألة البرمجة الخطية في شكلها النظامي:

- تابع الهدف:

$$Max\ Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + p_0$$

- مجموعة القيود المفروضة عليه (معادلات خطية):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
.
.
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

- شروط عدم السلبية:

$$X_j \geq 0\ (j: 1, 2, 3,.., n)$$
$$b_i \geq 0\ \ (i:1, 2, 3,.., m)$$

2- نشكل من هذا الشكل النظامي شكلاً قاعدياً اصطناعياً بأن نضيف إلى الطرف الأيسر لكل من المعادلات السابقة (إذا لم تتضمن متحولاً قاعدياً) متحولاً اصطناعياً غير سالباً $\varepsilon_i \geq 0$ ، وذلك حتى نشكل قاعدة اصطناعية تتكون من المتحولات غير السالبة ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_m$)، فنحصل بذلك على الشكل القاعدي المناسب.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2 = b_2$$
.
.
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m = b_m$$

وبما أنّ متحولات القاعدة الاصطناعية أدخلت على شروط كانت في الأصل معادلات خطية، إذاً نستنتج أنّ كلاً من هذه المتحولات يجب أن تأخذ قيمة تساوي الصفر حتى تبقى الشروط الخطية محققة. لذلك يجب أن ننقلها من القاعدة إلى المتحولات غير القاعدية حتى تأخذ قيماً صفرية، وحتى يمكن إجراء ذلك الانتقال بواسطة خوارزمية السمبلكس المباشرة نقوم بإدخال هذه المتحولات الاصطناعية إلى تابع الهدف Z مضروبة بأمثال كبيرة بشكل كاف M ومسبوقة بإشارة ناقص وذلك حتى لا نعيد نقلها إلى المتحولات القاعدية ثانية.

ولذلك نكتب تابع الهدف الجديد على الشكل التالي:

$$Max\ Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - M\varepsilon_1 - M\varepsilon_2 - \ldots - M\varepsilon_m + p_0$$

حيث إنّ M هو عدد موجب كبير جداً، وهو على الأقل أكبر من أي قيم (p_j).

وقد اقترح الباحثون أن تكون قيمة $M = 10$ إذا كانت أمثال المتغيرات في معادلة تابع الهدف 10 وما دون، وتكون $M = 100$ إذا وجد في معادلة تابع الهدف أمثال أكبر من 10.

3- نضع معاملات النموذج الموسع في جدول كالآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	.	x_n	ε_1	ε_2	.	ε_m	عمود الثوابت b_i
ε_1	a_{11}	a_{12}	.	a_{1n}	1	0	.	0	b_1
ε_2	a_{21}	a_{22}	.	a_{2n}	0	1	.	0	b_2
. .	. .	. .	.	. .	. .	. .	.	. .	. .
ε_m	a_{m1}	a_{m2}	.	a_{mn}	0	0	.	1	b_m
تابع الهدف	p_1	p_2	.	p_n	–M	–M	.	–M	$Z - p_0$

4- كيفية التخلص من المتغيرات الاصطناعية:

أ- ننظر إلى الثوابت b_i المقابلة للمتحولات الاصطناعية ونختار أكبرها، ونعتبر سطرها هو سطر الارتكاز، وإذا كان الرقم الأكبر متساوٍ عند أكثر من متغير نختار إحداها بشكل كيفي على أنه يمثل المتغير الخارج أو سطر الارتكاز.

ب- لتحديد عمود الارتكاز يتم بواسطة تقسيم عناصر سطر تابع الهدف (العناصر p_j) على عناصر سطر الارتكاز، ونختار أصغر حاصل قسمة موجب، والذي يمثل عنصر الارتكاز وعموده هو عمود الارتكاز، وفي حال عدم وجود قيم موجبة نختار أكبر حاصل قسمة سالب (وهو الأقرب إلى الصفر)، ونكرر هذه العملية حتى نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية ونحصل على قاعدة عادية مؤلفة من المتحولات الأساسية.

5- بعد التخلص من جميع المتحولات الاصطناعية، نعود إلى العمل بواسطة خوارزمية السمبلكس المباشرة كالمعتاد، وندرس إشارات معاملات تابع الهدف في السطر الأخير فإذا أصبحت جميعها غير موجبة فإنّ ذلك يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، وإذا كان غير ذلك نتابع خطوات الحل بطريقة خوارزمية السمبلكس المباشرة للوصول إلى الحل الأمثل.

3/5- تطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

شروط عدم السلبية $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

المطلوب حل المسألة باستخدام طريقة القاعدة الاصطناعية المباشرة.

خطوات الحل:

1- نضيف المتغيرات الاصطناعية إلى المعادلات الخطية:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \varepsilon_1 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + \varepsilon_2 = 3$$

2- نضيف هذه المتغيرات الاصطناعية إلى معادلة تابع الهدف:

مع ملاحظة أنّ إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى معادلة تابع الهدف تكون مضروبة ب (M–)، وهنا لتحديد M ننظر إلى أمثال (x_1, x_2, x_3, x_4) في معادلة تابع الهدف، ونختار رقماً أكبر من أكبر الأمثال وليكن هنا $M = 10$.

تصبح معادلة تابع الهدف:

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 10\varepsilon_1 - 10\varepsilon_2 = Z - 0$$

3- نضع المعادلات في جدول كالآتي:

جدول الحل المبدئي

↓ المتغير الداخل

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	ε_1	ε_2	عمود الثوابت b_i
ε_1 ← م. خارج	1	(3)	2	2	1	0	3
ε_2	2	2	1	1	0	1	3
تابع الهدف	5	3	4	–1	–10	–10	Z – 0

من خلال النظر إلى الجدول نجد أنّ هناك قاعدة تقدم حل أساس أولي:

$\varepsilon_1 = 3$

$\varepsilon_2 = 3$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$Z = 0$

4- كيفية التخلص من المتغيرات الاصطناعية:

- نحدد سطر الارتكاز بالنظر إلى قيم الثوابت b_i ونختار أعلى قيمة والتي يمثلها سطر الارتكاز، باعتبار هنا القيمتين متماثلتين نختار إحداها وليكن ε_1 هو المتغير الخارج أو سطر الارتكاز.
- لتحديد المتغير الداخل أو عمود الارتكاز نقسم العناصر الموجبة في سطر تابع الهدف على سطر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (5/1 = 5,\ 3/3 = 1,\ 4/2 = 2) = 1$

إذاً يكون لدينا المتغير الداخل هو x_2 والعنصر المحوري هو الرقم (3).

5- بعد ذلك نرسم جدول جديد نضع فيه سطر الارتكاز مقسوماً على عنصر الارتكاز، وباقي عناصر عمود الارتكاز أصفاراً، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة أو وفق طريقة المستطيل.

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

القاعدة \ المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	ε_1	ε_2	عمود الثوابت b_i
x_2	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	1
← ε_2 (م. خارج)	(4/3)	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	1
تابع الهدف	4	0	2	–3	–11	–10	Z – 3

6- نختار المتغير الاصطناعي ε_2 كمتغير خارج (سطر الارتكاز)، ولتحديد المتغير الداخل نقسم القيم الموجبة في سطر تابع الهدف على القيم الموجبة في سطر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (4 \div 4/3 = 3) = 3$

إذاً يكون لدينا المتغير الداخل هو X_1 والعنصر المحوري هو الرقم (4/3).

7- بعد ذلك نرسم جدولاً جديداً نضع فيه سطر الارتكاز مقسوماً على عنصر الارتكاز، وباقي عناصر عمود الارتكاز أصفاراً، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة أو وفق طريقة المستطيل.

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	ε_1	ε_2	عمود الثوابت b_i
x_2 ← م. خارج	0	1	(3/4)	3/4	1/2	–1/4	3/4
x_1	1	0	–1/4	–1/4	–2/4	3/4	3/4
تابع الهدف	0	0	3	–2	–9	–13	Z – 6

8- نلاحظ من هذا الجدول أننا قد تخلصنا من المتغيرات الاصطناعية، ولكن لم نصل بعد للحل الأمثل لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف.

9- نحاول تحسين الحل باختيار أعلى قيمة موجبة في سطر تابع الهدف، والعنصر المقابل لها هو المتغير الداخل (عمود الارتكاز) وهو عند $x_3 = 3$, ولتحديد المتغير الخارج نقسم قيم عمود الثوابت b_i على قيم عمود المتغير الداخل الموجبة ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (3/4 \div 3/4 = 1) = 1$

إذاً يكون لدينا المتغير الداخل هو X_3 والعنصر المحوري هو الرقم (3/4).

10- بعد ذلك نرسم جدولاً جديداً نضع فيه سطر الارتكاز مقسوماً على عنصر الارتكاز، وباقي عناصر عمود الارتكاز أصفاراً، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة أو وفق طريقة المستطيل.

جدول الحل الرابع

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	ε_1	ε_2	عمود الثوابت b_i
x_3	0	4/3	1	1	2/3	–1/3	1
x_1	1	1/3	0	0	–1/3	2/3	1
تابع الهدف	0	–4	0	–5	–38	–12	Z – 9

يتضح أنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل لانعدام القيم الموجبة في سطر تابع الهدف، وأنّ قيم الحل الأمثل تتمثل في:

$x_1 = 1$

$x_3 = 1$

$x_2 = x_4 = 0$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$Z - 9 = 0 \rightarrow Z = 9$

4/5- خطوات خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة:

تتلخص خطوات الحل وفق هذه الطريقة بما يلي:

1- نحول النموذج المفروض إلى الشكل النظامي.

2- نحول الشكل النظامي إلى شكل قاعدي اصطناعي.

3- نشكل جدول السمبلكس المختصر (بعد حذف المصفوفة الأحادية)، الذي يحوي سطره الأعلى المتحولات الحرة، وعموده الأول المتغيرات القاعدية فقط.

4- ننظر إلى عمود الثوابت b_i ونختار أكبر القيم المقابلة للمتحولات الاصطناعية فيتحدد المتغير الخارج من القاعدة (سطر الارتكاز)، ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل) نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب، وإذا لم نجد قيمة موجبة نختار أعلى حاصل قسمة سالب (وهو الأقرب للصفر).

5- بعد تحديد المتغير الداخل والخارج، نجري التبديل بين المتغير الداخل بالخارج والمتغير الخارج بالداخل، ونحذف العمود الجديد الذي سينتقل إليه المتحول، ثم نتابع الحل وفق خوارزمية السمبلكس المعدلة، ونستمر بذلك حتى نتخلص من جميع المتغيرات الاصطناعية.

6- بعد التخلص من المتغيرات الاصطناعية، ننظر إلى سطر تابع الهدف إذا كانت جميع القيم سالبة أو أصفاراً نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وإلا نتابع الحل وفق طريقة السمبلكس المعدلة للوصول إلى الحل الأمثل.

7- نحصل على قيم الحل الأمثل بمقابلة المتحولات في العمود الأول بالقيم المقابلة لها في العمود الأخير (عمود الثوابت b_i)، والمتحولات غير الموجودة في العمود الأول في جدول الحل الأمثل قيمها تساوي الصفر.

5/5- تطبيقـات عمليـة وفـق خوارزميـة السـمبلكس ذات القاعـدة الاصطناعية المعدلة:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } (L) = 40x_1 + 60x_2 + 50x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 4$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام طريقة السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة.

خطوات الحل:

1- نحول النموذج المفروض إلى الشكل النظامي:

$$\text{Max } Z = \text{Min } (-L) = -40x_1 - 60x_2 - 50x_3$$

الشروط الخطية تصبح:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - y_1 + \varepsilon_1 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - y_2 + \varepsilon_2 = 4$$

معادلة تابع الهدف:

$$-40x_1 - 60x_2 - 50x_3 + 0y_1 + 0y_2 - 100\varepsilon_1 - 100\varepsilon_2 = Z - 0$$

شروط عدم السلبية:

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$$

2- نحول الشكل النظامي إلى الشكل القاعدي:

جدول الحل المبدئي

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	ε_1	ε_2	عمود الثوابت b_i
ε_1	1	4	2	–1	0	1	0	5
ε_2	3	2	2	0	–1	0	1	4
تابع الهدف	–40	–60	–50	0	0	–100	–100	Z – 0

3- نقوم بحذف المصفوفة الأحادية من جدول الحل المبدئي:

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	عمود الثوابت b_i
← م. خارج ε_1	1	(4)	2	–1	0	5
ε_2	3	2	2	0	–1	4
تابع الهدف	–40	–60	–50	0	0	Z – 0

4- تحديد المتغير الخارج (سطر الارتكاز) للتخلص من المتغيرات الاصطناعية، نختاره عند أعلى قيمة للمتغيرات الاصطناعية، وهي في هذا الجدول عند $\varepsilon_1 = 5$، ولتحديد المتغير الداخل, علماً أنه في هذا الجدول لا توجد قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نقسم هذه القيم السالبة في سطر تابع الهدف على قيم المتغير الخارج (سطر الارتكاز)، ونختار أكبر حاصل قسمة سالب (وهو الأقرب إلى الصفر).

$\Theta = \text{Max}\ (-40/1 = -40, -60/4 = -15, -50/2 = -25) = -15$

إذاً المتغير الداخل هو x_2 والعنصر المحوري هو الرقم (4).

5- نشكل جدولاً جديداً، نجري التبديل بين المتغير الداخل بالخارج والمتغير الخارج بالداخل، ونحذف العمود الجديد الذي سينتقل إليه المتغير الاصطناعي، ثم نحسب قيم الجدول وفق خوارزمية السمبلكس المعدلة، عن طريق أخذ مقلوب العنصر المحوري ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر عمود الارتكاز (المتغير الداخل) على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول بالطريقة المعتادة أو وفق قاعدة المستطيل فينتج لدينا الجدول التالي:

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	x_1	ε_1	x_3	y_1	y_2	عمود الثوابت b_i
x_2	1/4	م. محوري	2/4	–1/4	0	5/4
← م. خارج ε_2	10/4		1	2/4	–1	6/4
تابع الهدف	–25		–20	–15	0	Z + 75

6- ندخل المتغير ε_2 كمتغير خارج للتخلص منه، ولتحديد المتغير الداخل نقسم القيم السالبة في سطر تابع الهدف على قيم المتغير الخارج (سطر الارتكاز)، ونختار أكبر حاصل قسمة سالب (وهو الأقرب إلى الصفر).

$\Theta = \text{Max}\ (-25 \div 10/4 = -10, -20/1 = -20, -15 \div 2/4 = -30)$
$= -10$

إذاً المتغير الداخل هو x_1 والعنصر المحوري هو الرقم (10/4).

7- نشكل جدولاً جديداً، نجري التبديل بين المتغير الداخل بالخارج والمتغير الخارج بالداخل، ونحذف العمود الجديد الذي سينتقل إليه المتحول، ثم نحسب قيم الجدول وفق خوارزمية السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الرابع

المتحولات / القاعدة	ε_1	x_3	y_1	y_2	عمود الثوابت b_i
x_2		4/10	–3/10	1/10	11/10
x_1		4/10	2/10	–4/10	6/10
تابع الهدف		–10	–10	–10	Z + 90

8- يتضح من هذا الجدول أنه يشكل جدول الحل الأمثل، وذلك بعد أن تخلصنا من المتغيرات الاصطناعية، وكذلك سطر تابع الهدف لا يحتوي أي رقم موجب.

وأنّ قيم الحل الأمثل هي:

$x_1 = 6/10$

$x_2 = 11/10$

$x_3 = 0$

$y_1 = y_2 = 0$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$Z + 90 = 0 \rightarrow Z = -90$

6/5- تدريبات

مسألة رقم (1):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } L = 5x_1 - 2x_2 - x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$9x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$$
$$-11x_1 + 3x_2 - x_3 = 9$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة.

مسألة رقم (2):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$4x_1 + 5x_2 \geq 10$$
$$5x_1 + x_2 \geq 3$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المباشرة.

مسألة رقم (3):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 80x2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 = 200$$
$$x_1 \leq 80$$

$x_2 \geq 60$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة.

مسألة رقم (4):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } L = 200x_1 + 300x2 + 100$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$6x_1 + 3x_2 \geq 45$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 25$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة.

مسألة رقم (5):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 2x_1 - 5x2 + x_3 - 6x_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$4x_1 - 2x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 12$$
$$-3x_1 + 2x_2 - 8x_4 = -31$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية مستخدماً طريقة خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة.

الفصل السادس

النماذج المرافقة وخوارزمية السمبلكس المزدوجة (للنموذجين الأصلي والمرافق)

محتويات الفصل السادس

1/6- مقدمة

2/6- كيفية تشكيل النموذج المرافق

3/6- تفسير المعنى الاقتصادي للنموذجين الأصلي والمرافق

4/6- خطوات خوارزمية السمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق

5/6- تطبيقات عملية وفق خوارزمية السمبلكس السمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق.

6/6- تدريبات

1/6- مقدمة:

مفهوم المرافق يشير إلى أنه يمكن معالجة أية مشكلة تندرج تحت البرمجة الخطية بطريقتين، الأولى هي النموذج الأصلي للبرمجة الخطية، والثانية هي تحويل ذلك النموذج الأصلي إلى نموذج آخر مرافق له.

ففي البرمجة الخطية عندما تكون المشكلة الأصلية مشكلة تعظيم أي مشكلة الوصول إلى أقصى قيمة لدالة الهدف، فإنّ المشكلة المرافقة لها تكون مشكلة تخفيض، والعكس صحيح، ويلاحظ أنه إذا كان هناك حل أمثل ممكن للمشكلة الأصلية، فإنه بحل مشكلة المرافق سوف نصل إلى الحل الممكن الأمثل نفسه.

وهنا قد يتبادر إلى ذهن القارئ سؤال منطقي، وهو لماذا نحتاج إلى التعامل مع مشكلة المرافق، طالما أنه في الإمكان التوصل إلى حل المشكلة التي تواجهنا باستخدام الصياغة الأولية أو الأصلية للمشكلة، الحقيقة أنّ المرافق في البرمجة الخطية يعتبر مدخلاً اقتصادياً هاماً، وبواسطته تستطيع الإدارة أن تحصل على حلول للمشكلات متعددة الحلول البديلة، إضافة إلى العديد من المزايا من أهمها:

1- أنه يمكن الحصول على معلومات غاية في الأهمية من خلال نتائج حل مشكلة المرافق، خاصة ما يمكن أن نطلق عليها معلومات أسعار الظل التي تُبنى عليها عملية تحليل الحساسية.
2- في كثير من الأحيان يكون من الأسهل حل مشكلة المرافق بدلاً من التعامل مع الصياغة الأصلية، فإذا كانت المشكلة الأصلية بها عدد قليل من المتغيرات ولكنها تحتوي على الكثير من القيود، فإنّ حل مشكلة المرافق يقلل كثيراً من العمليات الحسابية للوصول إلى الحل الأمثل.

2/6- كيفية تشكيل النموذج المرافق:

إنّ النموذج المرافق لنموذج خطي هو نموذج خطي أيضاً، ولكنه يتضمن متحولات جديدة ومعرف على شروط خطية وفردية جديدة، وله تابع هدف جديد، وحله المثالي مرتبط بالحل المثالي للنموذج الأول، لذلك نطلق على النموذج الخطي الأولي اسم النموذج الأصلي، وعلى النموذج المقابل له اسم النموذج المرافق.

النموذج الأولي: هو النموذج الأصلي

النموذج الثاني: هو النموذج المرافق

يوجد بعض الملاحظات الهامة يجب أخذها بالاعتبار قبل إيجاد النموذج المرافق:

1- قبل إيجاد النموذج المرافق للأصلي يجب جعل جميع المتراجحات الخطية بإشارة واحدة كلها أكبر أو يساوي، أو أصغر أو يساوي.

2- نرمز لمتحولات النموذج المرافق بالرموز:

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$

ويتم وضعها عادة على يسار النموذج، وعددها يساوي عدد الشروط الخطية بالنموذج الأصلي.

3- نشكل تابع الهدف بضرب المتحولات المرافقة u بالثوابت الحرة.

$$\text{Min } Z' = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + \ldots + b_nu_n$$

إذا كان تابع الهدف في النموذج الأصلي من النوع Max يكون المرافق من النوع Min.

وإذا كان تابع الهدف في النموذج الأصلي من النوع Min يكون المرافق من النوع Max.

4- نشكل القيود الخطية للنموذج المرافق:

أ- قيود عدم السلبية في النموذج الأصلي يقابلها في المرافق متراجحات خطية، وعدد هذه المتراجحات يساوي عدد قيود عدم السلبية.

ب- قيود عدم السلبية في النموذج المرافق يقابلها في النموذج الأصلي متراجحات خطية، وعدد هذه المتراجحات يساوي عدد قيود عدم السلبية

5- المتحولات: قد يكون هناك عقبات في النموذج الأصلي ولإيجاد المرافق بهذه العقبات:

أ- المتحولات غير المقيدة في النموذج الأصلي يقابلها في المرافق معادلات خطية، وعددها يساوي عدد المتحولات.

ب- المعادلات الخطية في النموذج الأصلي يقابلها متغيرات غير مقيدة في المرافق، وعددها يساوي عدد المعادلات الخطية.

ليكن لدينا النموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$u_1 \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$$
$$u_2 \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2$$
$$u_3 \qquad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , x_3 \ge 0$

فيكون لدينا النموذج المرافق هنا:

$$\text{Min } Z' = b_1u_1 + b2u2 + b_3u_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 \ge p_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 \ge p_2$$
$$a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \ge p_3$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2, u_3 \ge 0$

مثال رقم (ا):

أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

النموذج المرافق:

$$\text{Min } Z' = 6u_1 + 3u_2 + 5u_3 + 4u_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2u_1 - 3u_2 + 2u_4 \geq 4$$
$$3u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4 \geq 3$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$

مثال رقم (2):

أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2$$
$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

النموذج المرافق:

$$\text{Max } Z' = u_1 + 2u_2 + 3u_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2u_1 + u_2 + 3u_3 \leq 2$$
$$u_1 - 2u_2 + 2u_3 \leq 1$$
$$u_1 + u_2 - 5u_3 \leq 4$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2 \geq 0$

u_3 غير محدد الإشارة

3/6- تفسير المعنى الاقتصادي للنموذجين الأصلي والمرافق:

مسألة هامة:

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات هما A, B وتستخدم لذلك أربعة أنواع من المواد الأولية هي : S_1, S_2, S_3, S_4 ، وأنّ المقادير اللازمة من كل من هذه المواد لإنتاج وحدة واحدة من كل من المنتجين A, B ، والكمية الاحتياطية المتوفرة منها، وسعر البيع لكل وحدة من A , B معطاة في الجدول الآتي:

المنتجات / المواد الأولية	مستلزمات الوحدة من المنتجات A	مستلزمات الوحدة من المنتجات B	الكميات الاحتياطية أو المتوفرة من المواد
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
S_4	3	0	18
سعر الوحدة	7	5	

المطلوب: إيجاد الخطة الإنتاجية المثالية التي تجعل قيمة منتجات هذه الشركة أكبر ما يمكن، ثم إيجاد النموذج المرافق وإيجاد حله المثالي، ثم القيام بتفسير المعنى الاقتصادي للنموذجين الأصلي والمرافق، وإيجاد العلاقة بينهما.

خطوات الحل:

لنرمز لمقدار ما يجب إنتاجه من المنتجين A, B بالرمزين X_1, X_2 على الترتيب:

فيكون لدينا تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 5x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 19$$
$$2x_1 + x_2 \leq 13$$
$$3x_2 \leq 15$$
$$3x_1 \leq 18$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

نوجد النموذج المرافق له:

تابع الهدف:

$$\text{Min } Z' = 19u_1 + 13u_2 + 15u_3 + 18u_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 \geq 7$$
$$3u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 5$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$

لإيجاد الحل الأمثل لهذا النموذج نحول تابع الهدف من النوع Min إلى الشكل Max ، بعد ذلك نطرح من الطرف الأيسر لكل من المتراجحتين متحولاً إضافياً غير سالباً v_1 , v_2 فتصبح بالشكل التالي:

تابع الهدف:

$$\text{Max } (Z'') = \text{Min } (-Z') = -19u_1 - 13u_2 - 15u_3 - 18u_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 - v_1 = 7$$
$$3u_1 + u_2 + 3u_3 - v_2 = 5$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2 \geq 0$

لحل هذا النموذج نستخدم طريقة السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية المعدلة:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z'' = -19u_1 - 13u_2 - 15u_3 - 18u_4 + 0v_1 + 0v_2 - 100\varepsilon_1 - 100\varepsilon_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 - v_1 + \varepsilon_1 = 7$$

$$3u_1 + u_2 + 3u_3 - v_2 + \varepsilon_2 = 5$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$

جدول الحل المبدئي

المتغير الداخل ↓

القاعدة \ المتحولات	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	عمود الثوابت b_i
ε_1 ← م. خارج	2	2	0	(3)	–1	0	7
ε_2	3	1	3	0	0	–1	5
تابع الهدف	–19	–13	–15	–18	0	0	$Z'' - 0$

نقوم أولاً بالتخلص من المتغيرات الاصطناعية باختيار أعلاها قيمة والذي يمثل المتغير الخارج (سطر الارتكاز) وهو عند ε_1 ، ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل)، نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونختار هنا أكبر حاصل قسمة سالبة لأنّ كل قيم سطر تابع الهدف سالبة.

$$\Theta = \text{Max } (-19/2, -13/2, -18/3) = -18/3$$

إذاً المتغير الداخل هو u_4 والعنصر المحوري هو الرقم (3).

بعد ذلك نقوم بتشكيل جدول جديد نجري فيه التبديل بين المتغير الداخل والخارج، ونحذف العمود المقابل لعمود الارتكاز، ونأخذ مقلوب العنصر المحوري ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر عمود الارتكاز على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول وفق طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	u_1	u_2	u_3	ε_1	v_1	v_2	عمود الثوابت b_i
u_4	2/3	2/3	0	محذوف	–1/3	0	7/3
← ε_2 (م. خارج)	3	(1)	3		0	–1	5
تابع الهدف	–7	–1	–15		–6	0	$Z'' + 42$

بعد ذلك نتخلص من المتغير الاصطناعي الآخر وهو ε_2 الذي يكون سطراً للارتكاز (المتغير الخارج)، ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل) نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونختار هنا أكبر حاصل قسمة سالبة لأنّ كل قيم سطر تابع الهدف سالبة.

$\Theta = \text{Max}\ (-7/3, -1/1 = -1, -15/3 = -5) = -1$

إذاً المتغير الداخل هو u_2 والعنصر المحوري هو الرقم (1).

بعد ذلك نقوم بتشكيل جدول جديد نجري فيه التبديل بين المتغير الداخل والخارج، ونحذف العمود المقابل لعمود الارتكاز، ونأخذ مقلوب العنصر المحوري ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر عمود الارتكاز على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول وفق طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

المتحولات / القاعدة	u_1	ε_2	u_3	v_1	v_2	عمود الثوابت b_i
u_4	(–4/3)	محذوف	–2	–1/3	2/3	–1
u_2	3		3	0	–1	5
تابع الهدف	–4		–12	–6	–1	$Z'' + 47$

← م. خارج

إنّ وجود عدد سالب في قيم عمود الثوابت يجب التخلص منه فوراً باعتبار سطره سطراً للارتكاز، ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل) نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (–4/–4/3 = 3, –12/–2 = 6, –6/–1/3 = 18) = 3$

إذاً المتغير الداخل هو u_4 والعنصر المحوري هو الرقم (4/3–).

بعد ذلك نقوم بتشكيل جدول جديد نجري فيه التبديل بين المتغير الداخل والخارج، ونأخذ مقلوب العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على العنصر المحوري، ونقسم باقي عناصر عمود الارتكاز على العنصر المحوري بعد تغيير إشارته، ونحسب باقي عناصر الجدول وفق طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الرابع

المتحولات / القاعدة	u_4	u_3	v_1	v_2	عمود الثوابت b_i
u_1	–3/4	6/4	1/4	–2/4	3/4
u_2	9/4	–6/4	–3/4	2/4	11/4
تابع الهدف	–3	–6	–5	–1	$Z'' + 50$

يتضح أنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل لانعدام القيم الموجبة في سطر تابع الهدف، وأنّ قيم الحل الأمثل تتمثل في الآتي:

$u_1 = 3/4$

$u_2 = 11/4$

$u_3 = u_4 = 0$

$v_1 = v_2 = 0$

$Z'' + 50 = 0 \rightarrow Z'' = -50$

تفسير المعنى الاقتصادي للنموذجين الأصلي والمرافق:

*- لتفسير المعنى الاقتصادي لتابع الهدف في النموذجين الأصلي والمرافق نلاحظ:

تابع الهدف في النموذج الأصلي:

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 5x_2$$

وأنّ تابع الهدف في النموذج المرافق:

$$\text{Min } Z' = 19u_1 + 13u_2 + 15u_3 + 18u_4$$

نستنتج مايلي:

1- إنّ متحولات التابع الأصلي Z هي كميتي الإنتاج X_1, X_2 من A, B على الترتيب، وأنّ هذه الكميات مضروبة بالأسعار تعطينا قيمة المنتجات Z والتي يجب أن تكون أكبر ما يمكن.

2- بينما متحولات التابع المرافق Z' هي عبارة عن الأسعار u_1, u_2, u_3, u_4 لوحدة المواد الأولية S_1, S_2, S_3, S_4 على الترتيب، وإنّ هذه الأسعار مضروبة بالكميات المتوفرة تعطينا قيمة المواد الأولية المتوفرة، ولهذا تسمى المتحولات u_1, u_2, u_3, u_4 بأسعار الظل.

*- لتفسير المعنى الاقتصادي للقيود في النموذجين الأصلي والمرافق نلاحظ:

القيد الأول في النموذج الأصلي:

$2x_1 + 3x_2 \leq 19$

أي ما يلزمنا من المادة الأولية S_1 لإنتاج وحدة من المنتج A مضروباً بكمية المنتج A + ما يلزمنا من المادة الأولية S_1 لإنتاج وحدة من المنتج B مضروباً بكمية المنتج B يجب أن لا يزيد عن 19 المتوفر من S_1.

وهكذا بالنسبة لبقية قيود النموذج الأصلي.

القيد الأول في النموذج المرافق:

$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 \geq 7$

أي أنّ قيمة ما يلزم من المواد الأولية لإنتاج وحدة من المنتج A والتي تساوي $(2u_1 + 2u_2 + 3u_4)$ وتعبّر عن تكلفة الوحدة من المنتج A لا يمكن أن تقل عن تكلفة الوحدة من المنتج A والذي يساوي 7.

وبتعويض الحل المثالي المرافق نجد أنّ:

$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 \geq 7$

$2.\ 3/4 + 2.11/4 + 0 = 28/4 = 7$

وهكذا بالنسبة لبقية قيود النموذج المرافق.

*- لتفسير المعنى الاقتصادي للحل المثالي في النموذجين الأصلي والمرافق نلاحظ:

أنّ الحل المثالي للنموذج الأصلي $(x_1 = 5,\ x_2 = 3)$ يعطينا أفضل خطة للإنتاج والتي تجعل قيمة ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن (وذلك ضمن الموارد المتوفرة)، وأنّ الحل المثالي للنموذج المرافق يعطينا أفضل تشكيلة لأسعار المواد الأولية فيما لو استخدمت بدون هدر، وبالتالي فإنها تعطينا أصغر قيمة لتلك الموارد المستخدمة

فيها، وهي بالتالي ستعطينا أفضل خطة للإنتاج، ولهذا يعتبر الحل المثالي للنموذج المرافق حلاً مرافقاً للحل المثالي للنموذج الأصلي.

وهما يرتبطان بالعلاقة التالية:

$$\text{Max } Z = p_1x'_1 + p_2x'_2 + p_3x'_3 + \ldots + p_nx'_n$$
$$= \text{Min } Z' = b_1u'_1 + b_2u'_2 + b_3u'_3 + \ldots + b_mu'_m$$

4/6- خطوات خوارزمية السمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق:

يمكننا إيجاد الحلين المثاليين لكل من النموذجين الأصلي والمرافق بآن واحد, وذلك بعد كتابتهما على الشكل القاعدي المناسب، وذلك بإضافة أو طرح متحولات إضافية، أو باستخدام بعض المتحولات الاصطناعية وعزل المتحولات غير المقيدة، لنفترض أنه نتيجة لمعالجة هذين النموذجين تمكنا من كتابتهما على الشكل القاعدي التالي (وليس بالضرورة قاعدي موجب).

النموذج الأصلي:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2$$
.
.
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m$$
$$x_j \geq 0 \text{ (j: 1, 2, 3,....., n)}$$
$$y_i \geq 0 \text{ (i: 1, 2, 3,....., m)}$$

ولا يشترط هنا أن تكون b_i أكبر أو يساوي الصفر.

النموذج المرافق:

تابع الهدف:

$$\text{Min } Z' = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + \ldots + b_mu_m$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \ldots + a_{m1}u_m - v_1 = p_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \ldots + a_{m2}u_m - v_2 = p_2$$
.
.
$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{mn}u_m - v_n = p_n$$
$$u_i \geq 0 \text{ (i: 1, 2, 3,….., m)}$$
$$v_j \geq 0 \text{ (j: 1, 2, 3,….., n)}$$

ولا يشترط هنا أن تكون p_j أكبر أو يساوي الصفر.

بعد ذلك يمكننا كتابة هذه المعاملات للنموذجين في شكل جدول واحد مختصر:

		$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	. . . .	$-v_n$	
	المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	. . . .	x_n	عمود الثوابت b_i
u_1	y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	. . . .	a_{1n}	b_1
u_2	y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	. . . .	a_{2n}	b_2
u_3	y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	. . . .	a_{3n}	b_3
.	.	.	.	.	. . . .	.	.
u_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	. . . .	a_{mn}	b_m
	تابع الهدف p_j	p_1	p_2	p_3	. . . .	p_n	$Z - 0$ Max
							$Z' - 0$ Min

لذلك فإنه علينا عند البحث عن الحل المثالي للنموذجين معاً أن نعمل على جعل جميع العناصر $b_i \geq 0$ وكذلك جعل جميع العناصر $p_j \leq 0$, ولتحقيق ذلك علينا أن نعتمد على أحد النموذجين المترافقين (الأصلي أو مرافقه)، ونضع متحولاته ومعاملاته في جدول كالجدول السابق (المعتمد للنموذج الأصلي)، ونضع متحولات النموذج المرافق حول الإطار الخارجي لذلك الجدول.

وبصورة عامة نجد أنّ ضرورة وضع النموذجين في جدول مشترك ومختصر لا تسمح لنا بالتخلص من الثوابت السالبة في الطرف الأيمن، ولهذا فإنّ الحالة العامة للجدول المزدوج السابق يمكن أن تتضمن ثوابت سالبة $b_i \leq 0$ كما يمكن أن يتضمن في عناصر السطر الأخير عناصر موجبة $p_j \geq 0$.

لذلك فإنه يجب علينا عند البحث عن الحل المثالي للنموذجين أن نعمل على معالجة هذه العناصر **اعتماداً على النموذج الأصلي** ونقوم ذلك بمرحلتين هما:

1- **المرحلة الأولى:** فيها يجب أن نجعل جميع الثوابت b_i غير سالبة، وهذا يقابل الحصول على حل قاعدي غير سالب للنموذج الأصلي.

2- **المرحلة الثانية:** وفيها يجب أن نجعل جميع عناصر سطر تابع الهدف غير موجبة (في حالة تعظيم دالة الهدف)، وهذا ما يقابل الحصول على الحل المثالي المطلوب للنموذج الأصلي.

وتسمى الخوارزمية التي تعتمد على النموذج الأصلي في إيجاد الحل المثالي للنموذج الأصلي ومرافقه **بالخوارزمية المزدوجة الأصلية.**

كما يمكننا البحث عن الحل المثالي للنموذجين معاً **اعتماداً على النموذج المرافق،** وعندها سيكون علينا أن نبحث عن الحل المثالي لها كذلك على مرحلتين هما:

1- **المرحلة الأولى:** نجعل فيها جميع عناصر سطر تابع الهدف أرقاماً غير سالبة (لأنّ تابع الهدف هنا من النوع Min).

2- المرحلة الثانية: فيها نجعل جميع عناصر عمود الثوابت b_i أرقاماً غير سالبة، وهذا يقابل الحصول على الحل المثالي للنموذج المرافق.

وتسمى الخوارزمية التي تعتمد على النموذج المرافق في إيجاد الحل المثالي للنموذجين معاً **بالخوارزمية المزدوجة المرافقة.**

5/6- تطبيقات عملية على خوارزمية السمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق.

مسألة رقم (1) :

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = -2x_1 - x_2 + x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2$$
$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 3$$
$$-4x_1 - 7x_2 + 4x_3 \leq -4$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق باستخدام طريقة الخوارزمية المزدوجة الأصلية.

خطوات الحل:

1- نحول النموذج المفروض إلى الشكل النظامي:

وذلك بإضافة متغيرات إضافية إلى الطرف الأيسر من المتراجحات.

$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 + y_1 = -2$$
$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 + y_2 = 3$$
$$-4x_1 - 7x_2 + 4x_3 + y_3 = -4$$

معادلة دالة الهدف تصبح:

$$-2x_1 - x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 = Z - 0$$

2- نقوم بحل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل المبدئي

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	
	المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	عمود الثوابت b_i
u_1	y_1	–3	–2	1	–2
u_2	y_2	1	5	–2	3
u_3 ← م. خارج	y_3	–4	(–7)	4	–4
	تابع الهدف	–2	–1	1	Z – 0

3- حيث إنّ عمود b_i يحتوي قيماً سالبة، ولذلك ومن أجل تحقيق شرط الإمكانية نبدأ الحل باختيار أكبر رقم سالب في القيمة المطلقة في قيم عمود الثوابت b_i وهو عند (–4) ونعتبر سطره سطراً للارتكاز (المتغير الخارج)، ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل)، نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر الارتكاز، ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$$\Theta = \text{Min}\ (-2/-4 = 1/2, -1/-7 = 1/7, 1/4) = 1/7$$

إذاً المتغير الداخل هو عند x_2 و $-v_2$ والعنصر المحوري هو (–7).

4- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-u_3$	$-v_3$	
	المتحولات / القاعدة	x_1	y_3	x_3	عمود الثوابت b_i
u_1 ← م. خارج	y_1	–13/7	(–2/7)	–1/7	–6/7
u_2	y_2	–13/7	5/7	6/7	1/7
v_2	x_2	4/7	–1/7	–4/7	4/7
	تابع الهدف	–10/7	–1/7	3/7	Z + 4/7

5- نلاحظ أنه مازال هناك رقم سالب في عمود bi وهو عند (6/7–) لذلك نختاره سطراً للارتكاز, ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل) نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$$\Theta = \text{Min}\ (-10/7 \div -13/7 = 10/13,\ -1/7 \div -2/7 = 1/2) = 1/2$$

إذاً المتغير الداخل هو عند y_3 و $-u_3$ والعنصر المحوري هو (2/7–).

6- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-u_1$	$-v_3$	
	المتحولات / القاعدة	x_1	y_1	x_3	عمود الثوابت b_i
u_3	y_3	13/2	–7/2	1/2	6/2
u_2 ← م. خارج	y_2	–13/2	5/2	1/2	–2
v_2	x_2	3/2	–1/2	–1/2	1
	تابع الهدف	–1/2	–1/2	1/2	Z + 1

7- نلاحظ أنه مازال هناك رقم سالب في عمود bi وهو عند (2–) لذلك نختاره سطراً للارتكاز, ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل) نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (-1/2 \div -13/2 = 1/13,\ 1/2 \div 1/2 = 1) = 1/13$

إذاً المتغير الداخل هو عند x_1 و $-v_1$ والعنصر المحوري هو (13/2–).

8- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الرابع

المتغير الداخل ↓

		$-u_2$	$-u_1$	$-v_3$	
	المتحولات / القاعدة	y_2	y_1	x_3	عمود الثوابت b_i
u_3 ← م. خارج	y_3	1	–1	(1)	1
v_1	x_1	–2/13	–5/13	–1/13	4/13
v_2	x_2	2/13	1/13	–5/13	7/13
	تابع الهدف	–1/13	–9/13	6/13	Z + 15/13

9- نلاحظ من الجدول السابق أنّ شرط الإمكانية قد تحقق بأن أصبحت جميع قيم عمود b_i موجبة، ولكن شرط الأمثلية لم يتحقق بعد لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نختار القيمة الموجبة الوحيدة والتي هي (6/13) ونعتبرها عموداً للارتكاز (المتغير الداخل)، ولتحديد سطر الارتكاز (المتغير الخارج) نقسم عناصر عمود الثوابت b_i على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (1/1=1\ ) = 1$

إذاً المتغير الخارج هو عند y_3 و u_3 والعنصر المحوري هو (1).

10- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الخامس

		$-u_2$	$-u_1$	$-u_3$	
	المتحولات / القاعدة	y_2	y_1	y_3	عمود الثوابت b_i
v_3	x_3	1	–1	1	1
v_1	x_1	–1/13	–6/13	1/13	5/13
v_2	x_2	8/13	–4/13	5/13	12/13
	تابع الهدف	–7/13	–3/13	–6/13	Z + 9/13

يتضح من هذا الجدول أن شرط الأمثلية قد تحقق بالإضافة إلى شرط الإمكانية، حيث أصبحت قيم عناصر b_i موجبة، وأصبحت جميع عناصر سطر تابع الهدف غير موجبة، وبالتالي فإنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل وأنّ قيم الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق تتمثل في:

النموذج الأصلي:

$x_1 = 5/13$

$x_2 = 12/13$

$x_3 = 1$

$y_1 = y_2 = y_3 = 0$

$Z = -9/13$

النموذج المرافق:

$u_1 = 3/13$ $\quad u_2 = 7/13$ $\quad u_3 = 6/13$

$v_1 = v_2 = v_3 = 0$

$Z' = -9/13$

مسألة رقم (2):

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 4x_5$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 5$$
$$-3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 9$$

شروط عدم السلبية: $x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \geq 0$

x_1 متغير غير مقيد

المطلوب إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق باستخدام طريقة الخوارزمية المزدوجة الأصلية.

خطوات الحل:

1- نحول النموذج المفروض إلى الشكل النظامي:

$$x_1 = x'_1 - x''_1$$

نعوض ذلك في كل المعادلات ومعادلة تابع الهدف.

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = 3x'_1 - 3x''_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 4x_5$$

الشروط الخطية تصبح:

$$x'_1 - x''_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_1 = 1$$
$$2x'_1 - 2x''_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + y_2 = 5$$
$$-3x'_1 + 3x''_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + y_3 = 9$$
$$3x'_1 - 3x''_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 + y_4 = -9$$

معادلة تابع الهدف بعد إضافة المتغيرات المضافة تصبح:

$$3x'_1 - 3x''_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 = Z - 0$$

2- نحل هذه المسألة باستخدام طريقة خوارزمية السمبلكس المعدلة:

جدول الحل المبدئي

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	$-v_4$	$-v_5$	$-v_6$	
	المتحولات / القاعدة	x'_1	x''_1	x_2	x_3	x_4	x_5	عمود الثوابت b_i
u_1	y_1	1	–1	1	1	1	1	1
u_2	y_2	2	–2	2	1	2	3	5
u_3	y_3	–3	3	2	3	1	–1	9
← u_4	y_4	3	**(–3)**	–2	–3	–1	1	–9
	تابع الهدف	3	–3	4	6	7	4	$Z - 0$

م. خارج

3- حيث إنّ عمود b_i يحتوي قيماً سالبة، ولذلك ومن أجل تحقيق شرط الإمكانية، نبدأ الحل باختيار الرقم سالب الوحيد الموجود في عمود b_i وهو عند (–9) ونعتبر سطره سطراً للارتكاز (المتغير الخارج)، ولتحديد عمود الارتكاز (المتغير الداخل) نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر الارتكاز ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$$\Theta = \text{Min}\ (3/3 = 1, -3/-3 = 1) = 1$$

إذاً المتغير الداخل هو عند x''_1 و $-v_2$ والعنصر المحوري هو (–3).

4- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-u_4$	$-v_3$	$-v_4$	$-v_5$	$-v_6$
	المتحولات / القاعدة	x'_1	y_4	x_2	x_3	x_4	x_5	عمود الثوابت b_i
← u_1 (م. خارج)	y_1	0	–1/3	5/3	**(2)**	4/3	2/3	4
u_2	y_2	0	–2/3	10/3	3	8/3	7/3	11
u_3	y_3	0	1	0	0	0	0	0
v_2	x''_1	–1	–1/3	2/3	1	1/3	–1/3	3
	تابع الهدف	0	–1	6	9	8	3	Z + 9

5- نلاحظ من الجدول السابق أنّ شرط الإمكانية قد تحقق بأن أصبحت جميع قيم عمود الثوابت b_i موجبة، ولكن شرط الأمثلية لم يتحقق بعد لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نختار أعلى قيمة موجبة في سطر تابع الهدف والتي هي عند (9) ونعتبرها عموداً للارتكاز(المتغير الداخل)، ولتحديد سطر الارتكاز (المتغير الخارج) نقسم عناصر b_i على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (4/2 = 2,\ 11 \div 10/3 = 33/10,\ 3/1 = 3\ ) = 2$

إذاً المتغير الخارج هو عند y_1 و u_1 والعنصر المحوري هو (2).

6- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-u_4$	$-v_3$	$-u_1$	$-v_5$	$-v_6$
	المتحولات / القاعدة	x'_1	y_4	x_2	y_1	x_4	x_5	عمود الثوابت b_i
v_4 ← م. خارج	x_3	0	–1/6	5/6	1/2	**(4/6)**	2/6	2
u_2	y_2	0	–1/6	5/6	–3/2	4/6	8/6	5
u_3	y_3	0	1	0	0	0	0	0
v_2	x''_1	–1	–1/6	–5/6	–1/2	–2/6	–4/6	1
	تابع الهدف	0	1/2	–3/2	–9/2	2	0	Z – 9

7- نلاحظ من الجدول السابق أنّ شرط الأمثلية لم يتحقق بعد لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نختار القيمة الموجبة الوحيدة والتي هي (2) ونعتبرها عموداً للارتكاز (المتغير الداخل)، ولتحديد سطر الارتكاز (المتغير الخارج) نقسم عناصر b_i على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (2 \div 4/6 = 3,\ 5 \div 4/6 = 7.5\ ) = 3$

إذاً المتغير الخارج هو عند x_3 و v_4 والعنصر المحوري هو (4/6).

8- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الرابع

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-u_4$	$-v_3$	$-u_1$	$-v_4$	$-v_6$	
	المتحولات / القاعدة	x'_1	y_4	x_2	y_1	x_3	x_5	عمود الثوابت b_i
v_5	x_4	0	–1/4	5/4	3/4	6/4	2/4	3
u_2	y_2	0	0	0	–2	–1	1	3
← u_3 م. خارج	y_3	0	**(1)**	0	0	0	0	0
v_2	x''_1	–1	–1/4	–5/12	–1/4	2/4	–1/4	2
	تابع الهدف	0	1	–22/8	–6	–3	–1	Z – 15

9- نلاحظ من الجدول السابق أنّ شرط الأمثلية لم يتحقق بعد لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نختار القيمة الموجبة الوحيدة والتي هي (1) ونعتبرها عموداً للارتكاز (المتغير الداخل)، ولتحديد سطر الارتكاز (المتغير الخارج) نقسم عناصر b_i على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (0/1 = 0) = 0$

إذاً المتغير الخارج هو عند y_3 وu_3 والعنصر المحوري هو (1).

10- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الخامس

		$-v_1$	$-u_3$	$-v_3$	$-u_1$	$-v_4$	$-v_6$	
	المتحولات / القاعدة	x'_1	y_3	x_2	y_1	x_3	x_5	عمود الثوابت b_i
v_5	x_4	0	1/4	5/4	3/4	6/4	2/4	3
u_2	y_2	0	0	0	–2	–1	1	3
u_3	y_4	0	1	0	0	0	0	0
v_2	x''_1	–1	1/4	–5/12	–1/4	2/4	–1/4	2
	تابع الهدف	0	–1	–22/8	–6	–3	–1	Z – 15

يتضح من هذا الجدول أنّ شرط الأمثلية قد تحقق بالإضافة إلى شرط الإمكانية، حيث أصبحت قيم عناصر b_i موجبة، وأصبحت جميع عناصر سطر تابع الهدف غير موجبة، وبالتالي فإنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل، وأنّ قيم الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق تتمثل في:

النموذج الأصلي:

$x_1 = x'_1 - x''_1 = 0 - 2 = -2$

$x_4 = 3 \qquad x_2 = x_3 = x_5 = 0$

$y_2 = 3 \qquad y_1 = y_3 = 0$

$Z - 15 = 0 \longrightarrow Z = 15$

النموذج المرافق:

$u_1 = 6 \qquad u_3 = 1 \qquad v_1 = 0$

$v_3 = 22/8 \qquad v_4 = 3 \qquad v_6 = 1 \qquad v_2 = v_5 = 0$

$Z' = 15$

مسألة رقم (3)

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = 5X_1 - X_2 - 4X_3$$

وذلك ضمن الشروط التالية:

$$-X_2 - 2X_3 \leq -9$$
$$X_1 - X_2 \leq -1$$
$$-X_1 - X_2 + 3X_3 \leq -8$$
$$-X_1 + X_3 \geq -4$$

شروط عدم السلبية:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق باستخدام طريقة الخوارزمية المزدوجة الأصلية.

خطوات الحل:

1- نحول النموذج المفروض إلى الشكل النظامي:

$$-x_2 - 2x_3 + y_1 = -9$$
$$x_1 - x_2 + y_2 = -1$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + y_3 = -8$$
$$x_1 - x_3 + y_4 = 4$$

معادلة دالة الهدف تصبح:

$$5x_1 - x_2 - 4x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 = Z - 0$$

شروط عدم السلبية:

$$X_1, X2, X_3 \geq 0$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

جدول الحل المبدئي

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	
	المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	عمود الثوابت b_i
u_1 ← م. خارج	y_1	0	(–1)	–2	–9
u_2	y_2	1	–1	0	–1
u_3	y_3	–1	–1	3	–8
u_4	y_4	1	0	–1	4
	تابع الهدف	5	–1	–4	Z – 0

نبدأ باختيار أكبر رقم سالب في القيمة المطلقة في قيم عمود الحل وهو عند 9– لذلك نعتبره سطراً للارتكاز أو المتغير الخارج، ومن أجل تحديد المتغير الداخل نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونختار اصغر حاصل قسمة موجب.

$$\Theta = \text{Min}\ (-1/-1 = 1, -4/-2 = 1) = 1$$

إذاً المتغير الداخل هو عند x_2 و $-v_2$ والعنصر المحوري هو (1–).

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

		$-v_1$	$-u_1$	$-v_3$	
	المتحولات / القاعدة	x_1	y_1	x_3	عمود الثوابت b_i
v_2	x_2	0	–1	2	9
u_2	y_2	1	–1	2	8
u_3	y_3	–1	–1	5	1
u_4 ← م. خارج	y_4	(1)	0	–1	4
	تابع الهدف	5	–1	–2	Z + 9

$\Theta = \text{Min}\ (8/1=8,\ 4/1 = 4) = 4$

إذاً المتغير الداخل هو عند x_1 و v_1- والعنصر المحوري هو (1).

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

		$-u_4$	$-u_1$	$-v_3$	
	المتحولات / القاعدة	y_4	y_1	x_3	عمود الثوابت b_i
v_2	x_2	0	–1	2	9
u_2	y_2	–1	–1	3	4
u_3 ← م. خارج	y_3	1	–1	(4)	5
v_1	x_1	1	0	–1	4
	تابع الهدف	–5	–1	3	Z – 11

لم نصل بعد للحل الأمثل لوجود قيم موجبة في سطر تابع الهدف، لذلك نختار الرقم (3) الذي يمثل المتغير الداخل أو عمود الارتكاز، ومن أجل تحديد المتغير الخارج أو سطر الارتكاز:

$\Theta = \text{Min}\ (9/2, 4/3, 5/4) = 5/4$

إذاً المتغير الداخل هو عند x_3 و v_3- والعنصر المحوري هو (4).

جدول الحل الرابع

$-u_4 \qquad -u_1 \qquad -u_3$

	المتحولات / القاعدة	y_4	y_1	y_3	عمود الثوابت b_i
v_2	x_2	–2/4	–2/4	–2/4	26/4
u_2	y_2	–7/4	–1/4	–3/4	1/4
v_3	x_3	1/4	–1/4	1/4	5/4
v_1	x_1	5/4	–1/4	1/4	21/4
	تابع الهدف	–23/4	–1/4	–3/4	Z – 59/4

يتضح من هذا الجدول أن شرط الأمثلية قد تحقق بالإضافة إلى شرط الإمكانية، حيث أصبحت قيم عناصر b_i موجبة، وأصبحت جميع عناصر سطر تابع الهدف غير موجبة، وبالتالي فإنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل وأنّ قيم الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق تتمثل في:

قيم الحل الأمثل للنموذج الأصلي:

$x_1 = 21/4$

$x_2 = 26/4$

$x_3 = 5/4$

$y_2 = 1/4$

$y_1 = y_3 = y_4 = 0$

$Z = 59/4$

قيم الحل الأمثل للنموذج المرافق:

$u_1 = 1/4$

$u_3 = 3/4$

$u_4 = 23/4$

$u_2 = 0$

$v_1 = v_2 = v_3 = 0$

$Z' = 59/4$

مسألة رقم (4)

ليكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = 5X_1 - X_2 - 4X_3$$

وذلك ضمن الشروط التالية:

$$-X_2 - 2X_3 \leq -9$$
$$X_1 - X_2 \leq -1$$
$$-X_1 - X_2 + 3X_3 \leq -8$$
$$-X_1 + X_3 \geq -4$$

شروط عدم السلبية:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب إيجاد النموذج المرافق، ثم إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق باستخدام طريقة الخوارزمية المزدوجة المرافقة.

أولاً: إيجاد النموذج المرافق:

$$\text{Min } L = -9u_1 - u_2 - 8u_3 + 4u_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$u_2 - u_3 + u_4 \geq 5$$
$$-u_1 - u_2 - u_3 \geq -1$$
$$-2u_1 + 3u_3 - u_4 \geq -4$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$

خطوات إيجاد الحل الأمثل للنموذج المرافق:

1- نحول النموذج المفروض إلى الشكل النظامي:

$$-u_2 + u_3 - u_4 + v_1 = -5$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + v_2 = 1$$
$$2u_1 - 3u_3 + u_4 + v_3 = -4$$

معادلة دالة الهدف تصبح:

$$-9u_1 - u_2 - 8u_3 + 4u_4 + 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = L - 0$$

شروط عدم السلبية: $u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$

$v_1, v_2, v_3 \geq 0$

2- نحول الشكل النظامي إلى الشكل القاعدي المناسب:

جدول الحل المبدئي

المتغير الداخل ↓

		y_1	y_2	y_3	y_4	
	المتحولات / القاعدة	u_1	u_2	u_3	u_4	عمود الثوابت b_i
x_1	v_1	0	–1	1	–1	–5
م. خارج ← x_2	v_2	(1)	1	1	0	1
x_3	v_3	2	0	–3	1	4
	تابع الهدف	–9	–1	–8	4	L – 0

$\Theta = \text{Min}\ (1/1 = 1,\ 4/2 = 2) = 1$

المتغير الداخل هو عند u_1 و y_1 والعنصر المحوري هو (1). والمتغير الخارج عند v_2 و x_2

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

		x_2	y_2	y_3	y_4	
	المتحولات / القاعدة	v_2	u_2	u_3	u_4	عمود الثوابت b_i
م. خارج ← x_1	v_1	0	–1	1	(–1)	–5
y_1	u_1	1	1	1	0	1
x_3	v_3	–2	–2	–5	1	2
	تابع الهدف	9	8	1	4	L + 9

لتحديد عنصر الارتكاز والمتغير الداخل نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونختار أكبر حاصل قسمة سالب الذي يمثل عنصر الارتكاز، وعموده يمثل المتغير الداخل أو عمود الارتكاز، وإذا لم نجد أي حاصل قسمة سالب نختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Max}\ (-8/1 = -8, -4/2 = -4) = -4$

المتغير الداخل هو عند u_4 و y_4 والعنصر المحوري هو (-1)، والمتغير الخارج عند v_1 و x_1.

جدول الحل الثالث

المتغير الداخل ↓

		x_2	y_2	y_3	x_1	
	المتحولات / القاعدة	v_2	u_2	u_3	v_1	عمود الثوابت b_i
y_4	u_4	0	1	–1	–1	5
y_1	u_1	1	1	1	0	1
x_3 ← م. خارج	v_3	–2	–3	(–4)	1	–3
	تابع الهدف	9	4	5	4	L – 11

$\Theta = \text{Max}\ (-9/2, -4/3, -5/4) = -5/4$

المتغير الداخل هو عند u_3 و y_3 والعنصر المحوري هو (-4). والمتغير الخارج عند v_3 و x_3.

جدول الحل الرابع

		x_2	y_2	x_3	x_1	
	المتحولات / القاعدة	v_2	u_2	v_3	v_1	عمود الثوابت b_i
y_4	u_4	2/4	7/4	–1/4	–5/4	23/4
y_1	u_1	2/4	1/4	1/4	1/4	1/4
y_3	u_3	2/4	3/4	–1/4	–1/4	3/4
	تابع الهدف	26/4	1/4	5/4	21/4	L – 59/4

يتضح من هذا الجدول أن شرط الأمثلية قد تحقق بالإضافة إلى شرط الإمكانية، حيث أصبحت جميع عناصر سطر تابع الهدف أرقاماً غير سالبة، وأصبحت قيم عناصر b_i موجبة، وبالتالي فإنّ هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل، وأنّ قيم الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق تتمثل في:

قيم الحل الأمثل للنموذج المرافق:

$u_1 = 1/4$

$u_3 = 3/4$

$u_4 = 23/4$

$u_2 = 0$

$v_1 = v_2 = v_3 = 0$

$L = 59/4$

قيم الحل الأمثل للنموذج الأصلي:

$x_1 = 21/4$

$x_2 = 26/4$

$x_3 = 5/4$

$y_2 = 1/4$

$y_1 = y_3 = y_4 = 0$

$L' = 59/4$

مسألة رقم (5):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = -4x_1 - 2x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$-6x_1 - 2x_2 \leq -6$$

$$-8\ x_1 - 6x_2 \leq -12$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 6$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

المطلوب إيجاد النموذج المرافق للبرنامج الخطي، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق باستخدام طريقة الخوارزمية المزدوجة المرافقة.

خطوات الحل:

النموذج المرافق:

تابع الهدف:

$$\text{Min } Z' = -6u_1 - 12u_2 + 6u_3$$

الشروط الخطية:

$$-6u_1 - 8u_2 + 2u_3 \geq -4$$

$$-2u_1 - 6u_2 + 4u_3 \geq -2$$

شروط عدم السلبية: $u_1 , u_2 , u_3 \geq 0$

لحل هذه النموذج وفق طريقة الخوارزمية المزدوجة المرافقة:

1- نحول النموذج الموجود إلى الشكل النظامي:

$$6u_1 + 8u_2 - 2u_3 + v_1 = 4$$
$$2u_1 + 6u_2 - 4u_3 + v_2 = 2$$

تابع الهدف:

$$-6u_1 - 12u_2 + 6u_3 + 0v_1 + 0v_2 = Z' - 0$$

شروط عدم السلبية: $u_1 , u_2 , u_3, v_1, v_2 \geq 0$

2- نقوم بحل النموذج وفق خوارزمية السمبلكس المعدلة:

جدول الحل المبدئي

المتغير الداخل ↓

		y_1	y_2	y_3	
	المتحولات / القاعدة	u_1	u_2	u_3	عمود الثوابت b_i
x_1	v_1	6	8	–2	4
x_2 ← م. خارج	v_2	2	(6)	–4	2
	تابع الهدف	–6	–12	6	$Z' - 0$

3- يتضح من الجدول السابق أنّ شرط الإمكانية محقق، حيث إنّ جميع قيم عمود الثوابت b_i موجبة، لذلك ننتقل للشرط الثاني وهو تحقيق شرط الأمثلية، حيث إنّ تابع الهدف لدينا من النوع Min فإنّ الحل الأمثل يتحقق لدينا بانعدام القيم السالبة في سطر تابع الهدف.

4- لتحديد المتغير الداخل هنا نختار أعلى رقم سالب بالقيمة المطلقة في سطر تابع الهدف وهو عند (12–) ونعتبره عموداً للارتكاز (المتغير

الداخل)، ولتحديد سطر الارتكاز (المتغير الخارج) نقسم قيم عمود الثوابت على القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (4/8 = 1/2,\ 2/6 = 1/3) = 1/3$

إذاً المتغير الداخل هو عند u_2 و y_2 والعنصر المحوري هو (6).

5- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثاني

المتغير الداخل ↓

		y_1	x_2	y_3	
	المتحولات / القاعدة	u_1	v_2	u_3	عمود الثوابت b_i
x_1 ← م. خارج	v_1	20/6	–8/6	20/6	8/6
y_2	u_2	2/6	1/6	–4/6	2/6
	تابع الهدف	–2	2	–2	$Z' - 0$

6- يتضح من الجدول السابق أنّ شرط الأمثلية لم يتحقق بعد لوجود قيم سالبة في سطر تابع الهدف، لذلك نختار أكبرها بالقيمة المطلقة ونعتبره عموداً للارتكاز، وهنا لدينا قيمتان متساويتان نختار إحداها بشكل اختياري وليكن (–2) عند u_1 و y_1 ونعتبرها عموداً للارتكاز (المتغير الداخل), ولتحديد سطر الارتكاز (المتغير الخارج) نقسم قيم عمود الثوابت على

القيم الموجبة في عمود المتغير الداخل ونختار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (8/6 \div 20/6 = 8/20,\ 2/6 \div 2/6 = 1) = 8/20$

إذاً المتغير الداخل هو عند u_1 و y_1 والعنصر المحوري هو $(20/6)$.

7- نجري التبديل بين المتغيرين الداخل والخارج وذلك بالنسبة للنموذجين الأصلي والمرافق، ونكمل بناء الجدول الجديد وفق تعليمات طريقة السمبلكس المعدلة.

جدول الحل الثالث

		x_1	x_2	y_3	
	المتحولات / القاعدة	v_1	v_2	u_3	عمود الثوابت b_i
y_1	u_1	3/10	–4/10	1	2/5
y_2	u_2	–1/10	3/10	–1	1/5
	تابع الهدف	3/5	6/5	0	$Z' + 24/5$

يتضح من الجدول السابق أنّ شرط الأمثلية قد تحقق لانعدام القيم السالبة في سطر تابع الهدف، وبذلك نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل لتحقق شرط الإمكانية والأمثلية.

وأنّ قيم الحل الأمثل للنموذج المرافق تتمثل في:

$u_1 = 2/5$

$u_2 = 1/5$

$u_3 = 0$

$v_1 = v_2 = 0$

$Z' + 24/5 = 0 \rightarrow Z' = -24/5$

قيم الحل الأمثل للنموذج الأصلي:

$x_1 = 3/5$

$x_2 = 6/5$

$y_3 = 0$

$y_1 = y_2 = 0$

$Z = -24/5$

6/6- تدريبات

مسألة رقم (1):

أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 7$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

مسألة رقم (2):

أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = 2x_1 - 4x_2 + 11x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 7$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

مسألة رقم (3):

أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

وذلك ضمن الشروط التالية:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

مسألة رقم (4):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = 4x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$-x_2 - 2x_3 \leq -10$$
$$x_1 - x_2 \leq -1$$
$$-x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 1$$
$$x_1 - x_3 \leq 1$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق باستخدام طريقة الخوارزمية المزدوجة الأصلية.

مسألة رقم (5):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = 9x_1 + x_2 - 15x_3 - x_4$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$-3x_1 + 2x_2 + 9x_3 + x_4 \leq 7$$
$$6x_1 + 16x_2 - 12\ x_3 - 2x_4 \leq 10$$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

المطلوب إيجاد النموذج المرافق، ثم إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق باستخدام طريقة الخوارزمية المزدوجة المرافقة.

الفصل السابع

نموذج برمجة الأهداف Goal Programming

محتويات الفصل السابع

1/7- مقدمة

2/7- الجوانب المقيدة لنموذج البرمجة الخطية

3/7- تعريف نموذج برمجة الأهداف

4/7- مزايا نموذج برمجة الأهداف

5/7- نواحي الاختلاف بين نموذج البرمجة الخطية وبرمجة الأهداف

6/7- الإطار العام لنموذج برمجة الأهداف

7/7- الصياغة العامة لنموذج برمجة الأهداف

8/7- تحليل حساسية نموذج برمجة الأهداف

9/7- تطبيقات عملية على نموذج برمجة الأهداف

10/7- تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف

11/7- تدريبات

1/7- مقدمة:

يعتبر نموذج برمجة الأهداف من أساليب البرمجة الرياضية التي تستخدم في ظل تعدد الأهداف المرجوة وتعارضها، عند الاختيار بين بدائل القرار في حالات تخصيص الموارد، وهو نموذج رياضي يسعى إلى إيجاد أحسن الحلول وأقربها إلى القيم المحددة للأهداف، أي أنّ هذا النموذج يسعى إلى معالجة تعدد الأهداف بتحقيق أكثر الحلول قرباً لمجموعة الأهداف المحددة مسبقاً، وهو لا يعمل على تعظيم أو تدنية هدف معين بذاته، وإنما يحاول الوصول إلى أقرب نتيجة لقيم الأهداف المحددة مقدماً، وذلك عن طريق تدنية مجموع انحرافات النتائج عن الأهداف المحددة مقدماً إلى أدنى حد ممكن.

في بيئة الأعمال الحديثة تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة ليس دائماً الهدف الوحيد الذي تسعى المنظمات لتحقيقه، وعادة تعظيم الربح الكلي يعتبر واحداً من الأهداف العديدة تتضمن تعظيم الحصة السوقية, وتحقيق الاستخدام الكامل للموارد المتاحة، تقديم إدارة الجودة البيئية، ومقابلة العديد من الأهداف غير الاقتصادية[1] .

ويعتبر نموذج برمجة الأهداف الأكثر شيوعاً لمعالجة المشكلات ذات الأهداف المتعددة، إنه بالإضافة لذلك يمكنه التعامل مع الأهداف المتعددة والتي تقاس بوحدات قياس مختلفة، وليس من الضروري أن تكون كل الأهداف في الشكل نفسه (إما تعظيم أو تخفيض)، وفي دالة هدف نموذج برمجة الأهداف نحاول تخفيض الانحرافات غير المرغوب بها إلى أقل حد ممكن[2] .

---

1 - B. Render, and R. M. Stair, (2000), "**Quantitative Analysis For Management**", Sevan Edition, USA: Prentice- Hall, Inc, pp. 491-492.

2 - K. G. Murty, (1995), "**Operations Research Deterministic Optimization Models**", USA: Prentice- Hall, Inc, p. 280.

إنّ نموذج برمجة الأهداف يعتبر امتداداً لنموذج البرمجة الخطية، ويعتمد على وضع الأهداف المتعددة في أسلوب يعكس أولويات متخذ القرار، والأوزان الترجيحية لهذه الأهداف المتضمنة في الأولويات المختلفة[1] .

وأنّ بداية نموذج برمجة الأهداف عادة تُعزى إلى(**Charnes *et al***) في عام 1955، وبعدها تمّ تطويره بواسطة العديد من الباحثين، ومناقشة شاملة حديثة تمّ تقديمها بواسطة (**Romero**) في عام 1991 و(**Ignizio, and Cavalier**) في عام 1994[2].

ومداخل عديدة تطورت لتعبّر عن المشكلات التي لا تملك حلاً وحيداً، مثل الموجود في نموذج البرمجة الخطية ذات الهدف الواحد, والعديد من الحلول المعقولة تمّ تحديدها، والتدخل من قبل متخذ القرار يكون مطلوباً لإيجاد الحلول الأفضل[3].

وأنّ الاختلاف الجوهري في هيكل نموذج برمجة الأهداف عن البرمجة الخطية يكمن في أنّ برمجة الأهداف لا تحاول تعظيم أو تخفيض دالة الهدف كما هو الحال في البرمجة الخطية، وإنما تسعى إلى تدنية الانحرافات غير المرغوب بها للأهداف الموضوعة إلى أدنى حد ممكن.[4]

---

1 - R. H. Mohamed, S. A. Raafat, and Z. M. EL-Akkad, (2001), "Using Goal Programming in the Input – Output Table Analaysis" **The 13th Annual Conference on Statistics & computer Modeling in Human & Social Science**, Faculty of Economics & Political Science – Cairo University, p.2.

2 - R. H. Mohamed, S. A. Raafat**,** and Z. M. EL-Akkad, **Op. Cit**, p.3.

3- A. Arbel, and P. Korhonen, (2001), "Using Objective Values to Start Multiple Objective Linear Programming Algorithms" **European Journal of Operational Research**, No. 128, p. 588.

4- د. محمد كامل السيد, (2003), استخدام نموذج برمجة الأهداف لتحديد المكونات الأكثر ملاءمة ونسب التخصيص المثلى للأموال المستثمرة بمحفظة قطاع تأمينات الممتلكات والمسئولية بالسوق المصري، **مجلة المحاسبة والإدارة والتامين**، كلية التجارة– جامعة القاهرة، العدد الستون، ص. 549.

2/7- الجوانب المقيدة لنموذج البرمجة الخطية:

بالرغم من أنّ نموذج البرمجة الخطية قد شاع استخدامه في مواقف متعددة، بجانب أنه أثبت فاعليته في علاج الكثير من المشكلات الإدارية نتيجة للمزايا التي يتمتع بها، إلا أنّ هناك بعض أوجه القصور من حيث فروض وحدود النموذج أبرزها:

أ- تقتصر صلاحية هذا النموذج على حل المشكلات التي تنطوي على هدف واحد لمتخذ القرار يكون مطلوباً تعظيمه أو تخفيضه لأقصى حد ممكن, بينما نجد أنّ العديد من المشكلات الواقعية في الحياة العملية تتصف بخاصية تعدد المصالح وتعارض الأهداف.

ب- على الرغم من أنّ البعض يعتبر أنّ تعدد الأهداف ينتهي في الأجل الطويل إلى هدف تعظيم ربح المنظمة، إلا أنه في الأجل القصير يمكن أن تكون الأهداف متعارضة، كما يصعب إيجاد وسيلة تقوم بالتعبير عن كل هدف في صورة هدف الربح[1].

ج- هناك قبول محدود لاعتبار أنّ هدف تعظيم الربح أو تخفيض التكاليف يصلح كهدف عام لكل القرارات الإدارية والمحاسبية[2].

د- بالنظر إلى نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف، نجد أنه يتضمن دالة هدف وحيدة ومجموعة من القيود غير المتعارضة، ويستلزم الوفاء بكل تلك القيود حتى يمكن اعتبار الحل ممكناً، ولقد أثبت التحليل المعاصر للقرارات أنّ هناك تعارض بين الأهداف، وليس ذلك فحسب، بل تمّ إثبات إمكانية وجود تعارض بين القيود الأخرى التي يتضمنها النموذج في الكثير من المشكلات الواقعية.

1- د. محمد شريف توفيق، (1985), **برمجة الأهداف منهج متقدم لصياغة وحل نماذج البرامج الرياضية متعددة الأهداف**، الزقازيق- مكتبة التكامل، ص19 .

2- **المرجع السابق ذكره**، ص 150 .

وأنّ استخدام نموذج البرمجة الخطية التقليدي في معالجة تلك المشكلات التي تنطوي على تعدد وتعارض الأهداف بل والقيود أحياناً، لا يمكن أن يقدم أية معلومات لمتخذ القرار بشأن البدائل التي يمكن أن يلجأ إليها لحل المشكلة. **وبشكل عام فإنّ الجوانب المقيدة والانتقادات الموجهة لنموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف، والتي تتعلق بفروض، وبناء، ومخرجات النموذج يمكن بلورتها في الآتي:**

أ- **بالنسبة لافتراض الخطية:** فليس هناك ضمان أن تعطينا مشكلات التطبيق العملي دوال خطية، وفي حال عدم توافر دوال خطية فقد نلجأ إلى أسلوب آخر.

ب- **بالنسبة لافتراض القابلية للتجزئة:** فإذا كانت المشكلة تستوجب ضرورة وجود كميات صحيحة للمتغيرات، فإنّ نموذج البرمجة الخطية بشكله التقليدي قد يعجز عن إعطاء تلك النتائج، إلا إذا أصبح ذلك قيداً إضافياً في هذا النموذج، وهذا ينقلنا إلى أسلوب آخر وهو نموذج البرمجة الخطية باستخدام وحدات صحيحة.

ج- **بالنسبة لبناء النموذج:** في حالة الأهداف المتعددة تعامل هذه الأهداف كقيود مفروضة على النموذج وتكون متساوية الأهمية، بالإضافة إلى أنّ هذه الأهداف تكون لها أولوية مطلقة في الهدف المتضمن دالة الهدف.

د- **بالنسبة لمخرجات النموذج:** يفشل نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف في الوصول إلى الحل الأمثل في حالة تعارض القيود، وتصبح المشكلة ليس لها حل.

وفيما يلي نورد مثالاً تطبيقياً لبيان العجز الذي ينتاب نموذج البرمجة الخطية التقليدي أثناء تطبيقه، حيث قدم Charns & Cooper مثالاً واضحاً للنماذج الرياضية التي لا يوجد لها حل باستخدام نموذج البرمجة الخطية التقليدي. [1]

تابع الهدف:

$$\text{Max } Z = x_1 + 0.5x_2$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$5x_1 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \geq 8$$
$$-x_1 + x_2 \geq 4$$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

نحل هذه المسألة بالطريقة البيانية:

المتراجحة الأولى:

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$
$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 6$$
$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 4$$

في النقطة (0,0) نجد أنّ $0 \leq 12$ المتراجحة محققة.

المتراجحة الثانية:

$$5x_1 = 10$$
$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0$$
$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$

في النقطة (0,0) نجد أنّ $0 \leq 10$ المتراجحة محققة.

1- A, Charnes, and W. W. Cooper**., "Management Models and Industrial Application of Linear Programming**", N.Y: John Wiley & Sons, Inc., 1961, pp: 215-222.

المتراجحة الثالثة:

$x_1 + x_2 = 8$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 8$

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 8$

في النقطة (0,0) نجد أنّ $0 \geq 8$ المتراجحة غير محققة.

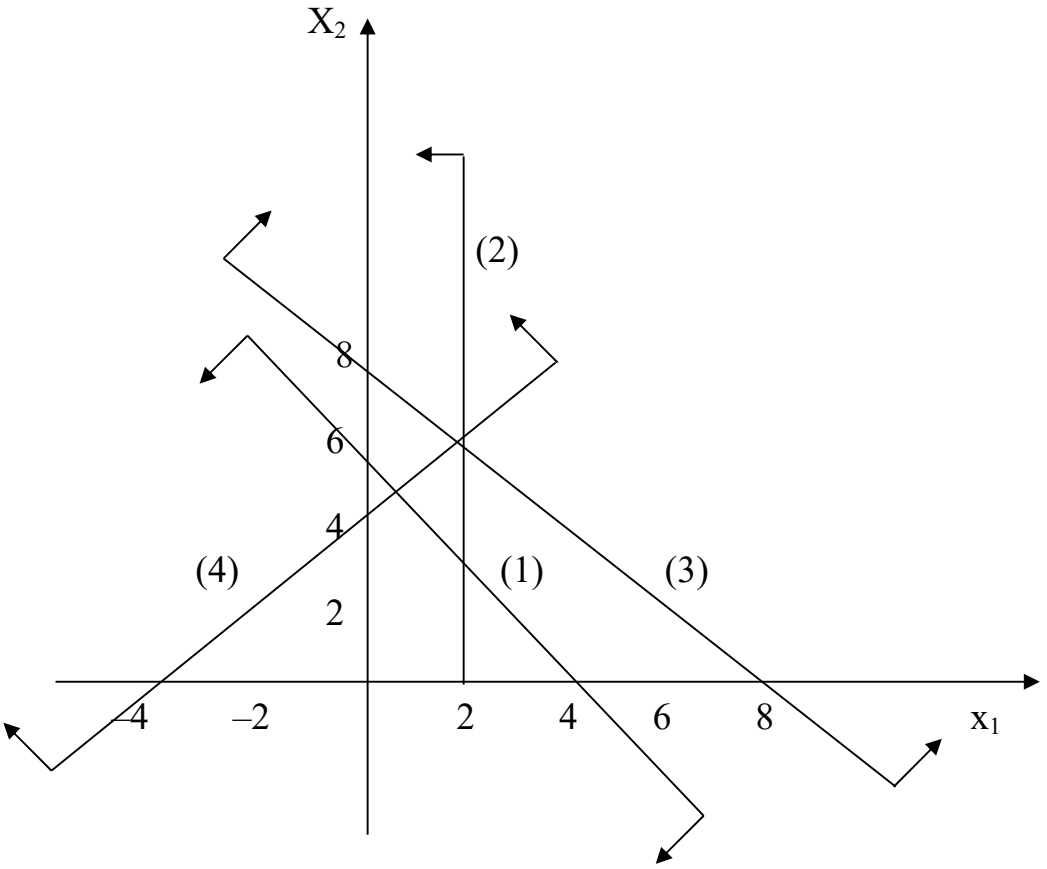
المتراجحة الرابعة:

$-x_1 + x_2 = 4$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4$

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -4$

في النقطة (0,0) نجد أنّ $0 \geq 4$ المتراجحة غير محققة.



حيث إنه لا توجد حلول ممكنة تستوفي جميع قيود المشكلة محل البحث، هذا يعني أنّ هذه المشكلة ليس لها حل باستخدام نموذج البرمجة الخطية، وسوف نرى لاحقاً كيف أنّ نموذج برمجة الأهداف عالج المشكلات التي لا يوجد لها حل باستخدام نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف، وذلك بإعطاء نتائج أقرب ما يمكن إلى تحقيق الأهداف المحددة.

ونرى أنه بالرغم مما أثير حول القيود والانتقادات التي تحيط بنموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف في الواقع العملي، فإنّ هناك العديد من المواقف التي تحتاج إلى استخدام هذا النموذج في علاج مشكلاتها.

3/7- تعريف نموذج برمجة الأهداف:

يعتبر نموذج برمجة الأهداف امتداداً لنموذج البرمجة الخطية، حيث يمكن لهذا الأسلوب معالجة المشكلات التي تتضمن أهدافاً رئيسة متعددة، وأهدافاً فرعية متعددة حتى ولو كانت متعارضة[1] ، كما أنّ دالة الهدف في نموذج برمجة الأهداف قد تشمل وحدات قياس غير متجانسة مثل الليرات،عدد الوحدات،...، إلخ.

ويتم معالجة الأهداف المتعددة والمتعارضة عن طريق ترتيب الأهداف وتوضيحها، بحيث يتم تحقيق الأهداف ذات المرتبة الدنيا بعد تحقيق الأهداف التي تعلوها مرتبة، أو بعد أن تصل هذه الأهداف إلى نقطة لا يمكن بعدها إحداث أي تحسينات عليها في ظل القيود المتعارضة[2].

1- H. L. Li, and S. Yu, (2000), "Solving Multiple Objective Quasi – Convex Goal Programming Problems by Linear Programming", **International Transactions in Operational Research**, No.7, pp. 265-284.

2- د. شعبان يوسف مبارز ود. بهاء الدين بديع القاضي، (1993), تقييم بدائل الاستثمار المتاحة لبرنامج خصخصة موارد قطاع الأعمال العام باستخدام أسلوب برمجة الأهداف ونظرية المنفعة المتعددة الأهداف، **المجلة العلمية للبحوث والدراسات التجارية**، كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان، السنة السابعة – العدد الثاني، ص338.

ويقوم نموذج برمجة الأهداف على مبدأ أساسي، هو أنّ متخذي القرار لا ينظرون عادة للحلول المثلى وخاصة في ظل تعدد الأهداف وتعارضها، ولكن يتطلعون إلى الحلول التي يمكن اعتبارها مقبولة أو قريبة من الوضع الأمثل.

ويمكن تعريف نموذج برمجة الأهداف بأنه:

نموذج رياضي يهدف إلى إيجاد أحسن الحلول وأقربها إلى قيم عدد من الأهداف المحددة مقدماً، وبعبارة أخرى يهدف نموذج برمجة الأهداف إلى تخفيض مجموع الانحرافات عن الأهداف المحددة مقدماً إلى أدنى حد ممكن[1].

وفي تعريف آخر:[2]

نموذج برمجة الأهداف يعتبر تقنية تستخدم من أجل اختيار القرارات الأفضل في حال وجود أهداف عديدة تسعى الشركة إلى تحقيقها.

وفي تعريف آخر:[3]

بأنه نموذج رياضي يسعى لمعالجة المواقف ذات الأهداف المتعددة والمتعارضة، من خلال نظام الأولويات لتحقيق الأهداف يؤدي إلى تحديد متغيرات القرار التي تخفض مجموع الانحرافات غير المرغوب فيها عن الأهداف المحددة مقدماً إلى أدنى حد ممكن، في ضوء مجموعة من القيود التي تحد من تحقيق كل أو بعض الأهداف بقيمها المحددة مقدماً.

1- د. أحمد هشام معوض سليم، (1997), **أساليب البرامج الخطية (الجزء الثاني)**، شبين الكوم- الولاء للطبع والتوزيع، ص191.

2- W. L. Winston, C. Albright, and M. Broadie, (1997), "**Practical Management Science – Spreadssheet Modeling and Applications**", USA: An International Thomson Publishing Company, p. 338.

3- د . نبيل فهمي سلامة، (1986), استخدام نموذج برمجة الأهداف في التخطيط قصير المدى لمكاتب المحاسبة والمراجعة، **المجلة العلمية للاقتصاد والتجارة**، كلية التجارة – جامعة عين شمس، العدد الأول، ص485.

وفي تعريف آخر[1]:

يعرف بأنه أحد النماذج الرياضية متعددة الأهداف الذي يسعى لإيجاد أقرب وأحسن حل يوفق إلى أقصى حد ممكن بين مجموعة الأهداف المرتبة للمشكلة، وذلك من خلال تحديد قيم متغيرات القرار التي تخفض مجموع الانحرافات عن الأهداف المحددة مقدماً إلى أدنى حد ممكن.

وفي تعريف آخر[2]:

برمجة الأهداف تعتبر تقنية تستخدم من أجل حل مشكلات القرارات متعددة الأهداف، عادة مع إطار البرمجة الخطية.

ومما سبق نرى بأنّ نموذج برمجة الأهداف يعتبر نموذجاً رياضياً يستخدم في ظل تعدد الأهداف الموجودة عند الاختيار بين بدائل القرار، ويسعى للوصول إلى أحسن الحلول وأقربها للقيم المحددة للأهداف وهو الحل المرضي، ودالة الهدف في نموذج برمجة الأهداف تحاول تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها عن القيم المحددة للأهداف إلى أدنى حد ممكن.

4/7- مزايا نموذج برمجة الأهداف:

يعتبر نموذج برمجة الأهداف امتداداً لنموذج البرمجة الخطية، وعلى الرغم من التماثل في طريقة العرض الرياضي لكلا النموذجين، إلا أنّ نموذج برمجة الأهداف يمتاز عن نموذج البرمجة الخطية بقدرته على تحليل ومعالجة المشكلات ذات الأهداف المتعددة والمتعارضة.

وطبقاً لنموذج برمجة الأهداف فإنه يتم تخفيض الانحرافات عن تحقيق الأهداف في ظل القيود الموجودة، وعلى أساس الأهمية النسبية والأولوية لكل هدف

1- د. فريد عبد الفتاح زين الدين، **مرجع سبق ذكره**، ص115.

2- D. R. Anderson, D. J. Sweeney, and T. A.Williams, (2000), "**An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making**", New York: South- Western College Publishing, p. 105.

بدلاً من تعظيم أو تخفيض دالة الهدف مباشرة، كما في نموذج البرمجة الخطية، فيكون الغرض من استخدام نموذج برمجة الأهداف هو الوصول إلى الحل المرضي (**Satisfice Solution**) الذي يخفض مجموع الانحرافات عن الأهداف المرجوة إلى أدنى حد ممكن، بينما الغرض من استخدام نموذج البرمجة الخطية هو الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة [1] (**Optimize Solution**).

وهكذا نجد أنّ نموذج برمجة الأهداف استطاع أن يعالج العيب الأساسي في نموذج البرمجة الخطية، وهو التزامه بهدف واحد فقط وذلك عن طريق معالجة المشكلات المتعددة الأهداف، والذي لا يشترط أن تقاس هذه الأهداف بوحدات قياس متجانسة.

كما يتميز نموذج برمجة الأهداف بالعديد من المزايا من أهمها:

1- يأخذ النموذج في الاعتبار الأهداف المتعددة، ويتمشى ذلك مع اتجاه الأهداف المتعددة في كثير من القرارات الإدارية والمحاسبية والاقتصادية.

2- يوفّر هذا النموذج كمية كبيرة من البيانات لمتخذي القرار تساعدهم في اتخاذ القرار السليم، وتجعل الإدارة أكثر فهماً لطبيعة المشكلة.

3- يسمح النموذج بعملية التوفيق بين الأهداف المتعارضة، ولذلك فإنّ القيمة الحقيقية لنموذج برمجة الأهداف تكمن في قدرته على إيجاد حلول للمشكلات التي تتضمن أهدافاً متعددة ومتعارضة وفقاً لهيكل أولويات أو تفصيلات الإدارة.

4- يؤدي استخدام نموذج برمجة الأهداف إلى التحديد الأمثل لقيم الأهداف، ولذلك فإنّ الأهداف التي نحصل عليها من النموذج تكون أهدافاً قابلة للتحقق، ومتناسبة مع الإمكانيات والموارد المتاحة للمنظمة.

1- د. سيد محمد جبر، (1989), استخدام نموذج برمجة الأهداف في إعداد موازنات الأقسام الداخلية، **مجلة التكاليف** (الجمعية العربية للتكاليف)، العدد الأول والثاني، السنة الثامنة عشر، ص79.

5- يساعد نموذج برمجة الأهداف الإدارة على تحقيق المنفعة القصوى من المصادر المستخدمة في الإنتاج.

6- قيم الأهداف التي نحصل عليها من نموذج برمجة الأهداف، هي القيم المثلى التي يجب استخدامها في الرقابة وتقييم الأداء، حيث يمكن التعرف على ما تمّ إنجازه بناء على المخطط، وتحليل الانحرافات أولاً بأول، وتحديد أسبابها، واتخاذ الإجراءات اللازمة لعلاجها وتجنب تكرار حدوثها.

7- يُعدّ نموذج برمجة الأهداف أسلوباً سهلاً للاستخدام بالمقارنة مع بعض الأساليب الرياضية الأخرى، كما أنه من السهل حله باستخدام الحاسب الآلي.

نتيجة للمزايا السابقة استطاع نموذج برمجة الأهداف أن يقدم حلولاً للمشكلات التي عجز نموذج البرمجة الخطية عن تقديم حلولاً لها.

5/7- نواحي الاختلاف بين نموذج البرمجة الخطية ونموذج برمجة الأهداف:

الجدول رقم (1-7)

نواحي الاختلاف بين نموذج البرمجة الخطية ونموذج برمجة الأهداف

العنصر	البرمجة الخطية	برمجة الأهداف
الغرض أو الهدف	أمثل	إشباع
التعبيرات الكمية	خطية	خطية وغير خطية
التركيب أو البناء	هدف واحد، عدد من القيود	أهداف متعددة، عدد من القيود
دالة الهدف	متغيرات قرارية	متغيرات انحراف
القيود والأهداف	أهمية متساوية	مرتبة حسب الأهمية
الحل بالكومبيوتر	متاح	غالباً متاح
الاستخدام/التطبيق	متعددة	كثيرة

مما سبق يتضح أنّ نقاط الاختلاف بين نموذج البرمجة الخطية ونموذج برمجة الأهداف تتلخص فيما يلي:

1- يعمل نموذج البرمجة الخطية من خلال هدف واحد معبراً عنه بدالة هدف خطية، كما أنّ متغيرات القرار يجب أن تكون متجانسة، بحيث تمثل دالة الهدف وحدات قياس متجانسة، بينما يعمل نموذج برمجة الأهداف من خلال هدف رئيس واحد وأهداف فرعية، أو مجموعة من الأهداف الرئيسة بالصورة التي يمكن أن تختلف معها وحدات قياس متغيرات قرار ما تعبيراً عن الأهداف المختلفة، كما يمكن استخدام نظام للأوزان يحدد الأهمية النسبية لكل هدف من الأهداف التي تعمل الإدارة على تحقيقها.

2- تعبّر دالة هدف نموذج البرمجة الخطية عن هدف تسعى الإدارة لتحقيقه محدداً بمجموعة من القيود غير المتعارضة، وهذا يعني إهمال حقيقة وجود تعارض وتداخل بين الأهداف، بينما تمثل دالة هدف نموذج برمجة الأهداف محاولة النموذج الرياضي تخفيض أو إلغاء الانحرافات غير المرغوب فيها عن الأهداف المحددة إلى أدنى حد ممكن.

3- تشمل دالة هدف نموذج البرمجة الخطية على المتغيرات القرارية التي تهدف إلى تحقيق أقصى أو أدنى قيمة لها، بينما تتضمن دالة الهدف في نموذج برمجة الأهداف كل متغيرات الانحراف التي تعبّر عن مختلف الأهداف لتقليل الانحرافات عن الأهداف المطلوبة إلى أدنى حد ممكن.

4- تعمل دالة هدف نموذج البرمجة الخطية في ظل قيود تأخذ شكل متباينات أو معادلات خطية، أما قيود دالة نموذج برمجة الأهداف، تقوم على مفهوم متماثل مع اعتبار الأهداف المراد تحقيقها جزءاً من هذه القيود في صورة معادلات خطية.

5- من وجهة نظر أسلوب حل النموذج، يمكن القول إنّ حل نموذج البرمجة الخطية يستوجب الوفاء بكل قيود النموذج حتى يمكن اعتبار الحل ممكناً، لذلك البرمجة الخطية تعطي الحل الأمثل للمشكلة، أما نموذج برمجة الأهداف فيعطي الحل المرضي أو المناسب للمشكلة في ظل القيود الموجودة على الأهداف.

6- هناك اعتبار آخر على قدر كبير من الأهمية يتعين أخذه في الحسبان في مجال مقارنة نموذج البرمجة الخطية مع نموذج برمجة الأهداف، وهو طريقة معاملة قيود النموذج, فنموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف يبدأ من فرض أساسي ينبثق من التبسيط غير الواقعي للمشكلات الفعلية، وهو عدم تعارض تلك القيود فيما بينها، ثم يستخدمها لتحديد منطقة الحلول الممكنة، بحيث يتعين أن يفي الحل الناتج عن النموذج بكل قيد موجود حتى يمكن اعتباره حلاً ممكناً، أما نموذج برمجة الأهداف يعتبر أنّ تلك القيود تتمثل في مجموعتين:

أ- **قيود الأهداف:** التي تعكس مستوى الطموح مع توضيح مقدار مساهمة كل متغير قراري في تحقيق المستوى المستهدف والانحرافات المتعلقة بقيود الأهداف.

ب- قيود الموارد.

6/7- الإطار العام لنموذج برمجة الأهداف:

يتحدد الإطار العام لنموذج برمجة الأهداف في ضوء ثلاثة عناصر رئيسة هي (دالة الهدف، ومجموعة القيود المفروضة على المشكلة، وقيود عدم السلبية)، وسوف نقوم بتوضيح طبيعة وخصائص هذه العناصر فيما يلي:

1/6/7- دالة الهدف:

تتميز دالة الهدف في نموذج برمجة الأهداف بأنها تتضمن معايير عامة مرتبطة بالهدف العام المطلوب تحقيقه، وهو تخفيض الانحرافات غير المرغوب

فيها عن الأهداف المطلوبة إلى أدنى حد ممكن، بدلاً من دالة هدف مقيدة بمعيار واحد كما في نموذج البرمجة الخطية، وهو إما تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة، وتبين دالة الهدف لنموذج برمجة الأهداف مجموعة الانحرافات الموجبة والسالبة التي يجب تخفيضها إلى أدنى حد ممكن، وغالباً ما يصحب هذه الانحرافات أوزان ترجيح لأهداف تمثل الأولويات التي تضعها الإدارة لتحقيق الأهداف المختلفة[1] .

وأنّ دالة الهدف ذات أبعاد متعددة، وبالتالي فإنّ هذا النموذج يستطيع أن يتعامل بفاعلية مع مشكلة تعدد الأهداف، كما أنّ إعطاء أولويات وأوزان نسبية للأهداف يمكّن من معالجة مشكلة الأهداف مع بعضها البعض[2] ، هذا بالإضافة إلى أنّ إعداد دالة الهدف لنموذج برمجة الأهداف لا يشترط توافر وحدة قياس واحدة لجميع الأهداف، فدالة الهدف يمكن أن تشتمل على وحدات قياس غير متجانسة، مما أدى إلى زيادة فعالية وموضوعية النموذج[3].

ويتم صياغة دالة الهدف بحيث إنه عندما تتحقق القيمة المثلى لها نكون قد وصلنا إلى أقرب ما يمكن من تحقيق الأهداف المطلوبة، ولذلك تتطلب صياغة دالة الهدف تحديد العناصر التالية:

1/1/6/7- تحديد المستويات المرغوبة للأهداف:

تعدّ عملية تحديد المستويات المرغوبة للأهداف الخطوة الأولى في صياغة نموذج برمجة الأهداف، لذلك يجب ألا تكون تلك المستويات مرتفعة جداً بحيث يكون من الصعب تحقيقها، مما يترتب عليه انخفاض الروح المعنوية والإحباط الذي سوف يصيب العاملين نتيجة الفشل في تحقيق الأهداف، كما يجب ألا تكون

1- C. O. Benjamin, (1985), " A Linear Goal Programming For Public Sector Project Selection", **Journal of The Operational Research Society**, Vol. 36, No. 1, p.15.

2- S. I. Gross, (1986), "A Process for Determining Priorities and Weights For Large – Scale Linear Programming" **Journal of The Operational Research Society**, Vol. 37, No. 8, p.380.

3- يسري محمد علي خيري، (1993), ترشيد إعداد الموازنة الرأسمالية بمنظور إسلامي باستخدام نموذج برمجة الأهداف بالأعداد الصحيحة، **رسالة ماجستير غير منشورة**، كلية التجارة – جامعة المنصورة، ص63.

منخفضة بحيث يكون من السهل تحقيقها، لأنّ ذلك لا يتطلب من العاملين بذل جهود خاصة، ولا تعطي دافعاً للعمل، لذلك يجب وضع الأهداف عند مستويات مقبولة لمحاولة تحقيقها قدر الإمكان.

وتتكون دالة هدف نموذج برمجة الأهداف من الانحرافات غير المرغوب فيها عن مستويات الأهداف المطلوب تحقيقها، بحيث يتم تخفيض مجموع هذه الانحرافات إلى أدنى حد ممكن, ومن الممكن أن يكون الانحراف أكبر من قيمة الهدف ويرمز له بالرمز (d^+)، أو أن يكون الانحراف أصغر من قيمة الهدف ويرمز له بالرمز (d^-)، وتتوقف إشارة الانحراف في دالة الهدف على رغبة متخذ القرار في تحقيق مستوى الهدف المطلوب.

ويمكن إيضاح بعض الحالات التي يمكن أن تظهر فيها قيمة (d) وأثر ذلك على دالة الهدف فيما يلي[1]:

أ- **تحقيق مستوى الهدف بالضبط:** أي أنّ متخذ القرار يرغب في تحقيق مستوى الهدف بالضبط بدون أي زيادة أو نقصان عن هذه القيمة، وفي هذه الحالة يتم وضع متغيرات الانحراف (d^+, d^-) في دالة الهدف كما يلي:

المطلوب تخفيض (d^+, d^-) إلى أدنى حد ممكن.

ب- **تحقيق أقصى قيمة للهدف:** أي أنّ متخذ القرار يرغب في تخفيض الانحراف السالب، بينما يكون الانحراف الموجب مرغوباً فيه، وفي هذه الحالة يتم صياغة دالة الهدف من الانحراف السالب فقط كما يلي:

المطلوب تخفيض d^- إلى أدنى حد ممكن.

1- د. مسعود عبد الله بدري ود. جمال محمد المهيري، (2000), نموذج متعدد الأهداف للتخطيط الأمثل لمواقع المستوصفات الطبية، **المجلة العربية للعلوم الإدارية**، جامعة الكويت، المجلد السابع، العدد الثاني، مايو, ص 299.

ج- تحقيق أدنى قيمة للهدف: أي أنّ متخذ القرار يرغب في تخفيض الانحراف الموجب بينما يكون الانحراف السالب مرغوباً فيه، وفي هذه الحالة يتم صياغة دالة الهدف من الانحراف الموجب فقط كما يلي:

المطلوب تخفيض d^+ إلى أدنى حد ممكن.

أي أنه بصفة عامة إذا كان قيد الهدف **(أصغر من أو يساوي)** وذلك قبل إضافة متغير الانحراف فإننا سوف نضيف متغير الانحراف الموجب إلى دالة الهدف، أما إذا كان قيد الهدف **(أكبر من أو يساوي)** فسوف يتم إضافة متغير الانحراف السالب إلى دالة الهدف، أما إذا كان قيد الهدف **(بشكل مساواة)** فإنّ دالة الهدف سوف تحتوي على كل من متغيري الانحراف الموجب والسالب.

2/1/6/7- ترتيب أولوية الأهداف:

نظراً لأنّ الموارد الموجودة لتحقيق الأهداف المطلوبة تكون عادة محدودة بطبيعتها، لذلك فإنّ التحقيق الكامل للأهداف المرغوبة يكون أمراً صعباً، حيث يترتب على تلك الندرة تحقيق بعض الأهداف وإهمال البعض الآخر، ولذلك نجد أنّ متخذ القرار غالباً ما يضع لنفسه نظام الأولويات يعكس تفضيلاته للأهداف التي تبين مدى أهمية تحقيق كل هدف[1] .

ولذلك فإنه لترشيد قرار الإدارة عند توزيعها للموارد المتاحة على البدائل المختلفة باستخدام نموذج برمجة الأهداف، يتطلب الأمر صياغة دالة الهدف بحيث تعكس أولويات تحقيق الأهداف، ويتم ذلك عن طريق تخصيص معاملات للأولويات المختلفة تعكس أهميتها النسبية وتتميز هذه المعاملات بالعلاقة الآتية :

$و_{م} >>> و_{2م+1}$

ومعنى ذلك أنّ معامل الأولوية ($و_{م}$) للهدف (م) أكبر من معامل الأولوية ($و_{2}$) للهدف ($م_{+1}$) حتى لو ضرب معامل الأولوية للهدف ($م_{+1}$) في أي عدد مهما

1- N. Bryson, (1995), "A Goal Programming Method For Generating Priority Vectors", **Journal of The Operational Research Society**, Vol. 46, No. 5, p. 642.

كان كبيراً، فإنّ ناتج الضرب لن يجعل الهدف (م+1) أكبر من أو يساوي الهدف (م). أي أنه لن يتم خفض انحرافات هدف أولوية أقل قبل تخفيض انحرافات هدف ذو أولوية أعلى.

وعلى هذا فإنّ الخطوة الأولى في حل نموذج برمجة الأهداف تتمثل في تخفيض الانحراف عن الهدف ذي الأولوية العليا، وعندما نصل بقيمة هذا الانحراف إلى صفر أو إلى نقطة لا يمكن بعدها إدخال أي تحسينات عليه نبدأ في تخفيض الانحراف عن الهدف الذي يقع في مستوى أولوية أقل مباشرة من مستوى أولوية الهدف السابق، ولكن مع مراعاة أنّ محاولة تحقيق هذا الهدف يجب ألا يؤثر على المستوى الذي تمّ تحقيقه للهدف ذي الأولوية الأعلى، وبالمثل لباقي الأهداف ذات معاملات الأولوية الأقل.

وسوف يتوقف الحل عند النقطة التي عندها يتم محاولة تحقيق الأهداف ذات الأولوية الأقل يترتب عليه الإضرار بالأهداف ذات الأولوية الأعلى، التي تمّ الوصول إلى الحل الأمثل لها، هذا يعني أنه لن يكون هناك حل عملي يستطيع تحقيق كل الأهداف في وقت واحد، ولكن نستطيع الوصول إلى حل يقلل مقدار عدم تحقيق الأهداف التي لم نستطع الوصول إليها بدون الإضرار بتحقيق أي هدف ذي أولوية أعلى.

وهناك عدة طرق لترتيب الأهداف يمكن للإدارة إتباع أي منها، وسوف نوضح أهم هذه الطرق فيما يلي:

أ- طريقة الترتيب المتوازن[1]:

1- يرجع إلى:

- د. دلال صادق بطرس، **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر، بلا تاريخ نشر، ص ص. 484 -488.

- د . محمد صبري العطار، (1989)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر، ص ص.187-191.

وفقاً لهذه الطريقة لا تفرق الإدارة بين عدم تحقيق الهدف بالزيادة أو النقص، في الوقت الذي تفرق فيه بين أهمية تحقيق هدف وآخر، ويتم ترتيب الأهداف وفقاً لهذه الطريقة، بإجراء مقارنة بين كل هدفين معاً وتحديد أي الهدفين أكثر أهمية من الآخر، ويطلق على هذه الطريقة اصطلاح (أسلوب مقارنة كل زوجين)، وبإتمام التحليل لكل البدائل الممكنة للأهداف، فإنه يمكن ترتيب كل الأهداف وفقاً لأهميتها للإدارة.

إذا كان لدينا عدد من الأهداف مقداره (n)، فإنّ عملية المقارنة بين كل زوج من الأهداف تسفر عن عدد من المقارنات مقداره $n(n-1)/2$.

ب- طريقة الترتيب غير المتوازن[1]:

طبقاً لهذه الطريقة يتم تخصيص أوزان نسبية لمتغيرات الانحراف التي تشترك في نفس مستوى الأهمية، أي أنه يتم تخصيص أوزان نسبية مختلفة لمتغيرات الانحراف الموجبة والسالبة للهدف الواحد، وذلك لتعبّر عن سيكولوجية الإدارة تجاه القصور في بلوغ مستوى الهدف (d^-)، أو تخطي هذا المستوى (d^+)، فلا شك أنّ هناك فرقاً بين تحقيق مستوى أقل من المستوى المطلوب للهدف وتحقيق مستوى أعلى منه.

كما أنه من الممكن أن يشترك أكثر من هدف في مستوى أولوية واحدة فيتم تخصيص أوزان نسبية لمتغيرات الانحراف في هذا المستوى، وتفيد عملية التخصيص هذه في حل مشكلة عدم القدرة على جمع الانحرافات المختلفة لتعدد وحدات قياسها.

2/6/7 – القيود في نموذج برمجة الأهداف:

يحتوي نموذج برمجة الأهداف على نوعين من القيود:

---

[1]- د. محمد صبري العطار، **مرجع سبق ذكره**، ص 189.

أ- القيود الهيكلية:

لا تختلف القيود الهيكلية لنموذج برمجة الأهداف عنها في نموذج البرمجة الخطية، حيث تعبّر عن القيود الأساسية التي تفرضها طبيعة المشكلة محل الدراسة، وتبين هذه القيود (قيود الموارد المالية والتكنولوجية – وقيود الموارد الاقتصادية الأخرى بالإضافة إلى أية قيود أخرى تفرضها المشكلة محل الدراسة)، وتظهر هذه القيود في نموذج برمجة الأهداف في صورة معادلات أو متباينات خطية يحتاج تحويلها إلى إدخال متغيرات مضافة عليها.

ب- قيود الأهداف:

تتضمن قيود الأهداف في نموذج برمجة الأهداف كافة الأهداف التي تسعى المنظمة لتحقيقها، والمستوى الواجب تحقيقه لكل منها، بالإضافة لتوضيح مساهمة كل متغير قراري في تحقيق المستويات المحددة للأهداف المختلفة، والانحرافات الموجبة والسالبة لمختلف الأهداف.

ولصياغة قيود الأهداف رياضياً قد يواجه متخذ القرار بالحالات الآتية[1]:

1- إذا كان قيد الهدف في شكل معادلة فإنّ هذا يعني رغبة متخذ القرار في تحقيق مستوى معين للهدف بالضبط لا أكثر ولا أقل، ومن ثم يتضمن قيد الهدف كلا النوعين من الانحرافات السالبة والموجبة (d^+, d^-).

2- إذا كان قيد الهدف على شكل متباينة يكون متخذ القرار أمام إحدى حالتين:

- اعتبار المستوى المحدد للهدف بمثابة حد أقصى لا ينبغي تجاوزه، فإنّ المتباينة تأخذ شكل ($\leq$) ومن ثم يتضمن قيد الهدف الانحراف السالب (d^-) فقط عن الهدف.

1- د. محمد صبري العطار، **مرجع سبق ذكره**، ص353.

– اعتبار المستوى المحدد للهدف بمثابة حد أدنى لا ينبغي أن تقل عنه المتباينة فإنّ المتباينة تأخذ شكل ($\leq$) ومن ثم يتضمن قيد الهدف الانحراف الموجب (d^+) فقط عن الهدف.

ج– شروط عدم السلبية:

يقضي هذا الشرط أن لا تظهر متغيرات المشكلة الخاضعة للدراسة في الحل الأمثل بقيم سالبة، فهي إما أن تكون مساوية للصفر أو أكبر من الصفر, وتشمل هذه المتغيرات جميع متغيرات نموذج برمجة الأهداف، سواء كانت متغيرات القرار، أو متغيرات الانحراف السالبة والموجبة عن القيم المحددة للأهداف، أو المتغيرات المضافة.

7/7– الصياغة العامة لنموذج برمجة الأهداف

صياغة نموذج برمجة الأهداف بشكل عام كما يلي[1] :

$$\text{Minimize } \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{m} W_i (di^+ + d_i^-)$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

$$x_j,\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0$$

x_j: تشير إلى متغيرات القرار

W_i: تشير إلى أولويات الأهداف

1- M. J. Schniederjans, and C. M. Karuppan, (1995), "Designing A Quality Control System in A Service Organization: A Goal Programming Case Study" **European Journal of Operational Research**, No. 81, p. 252.

- C. B. Diminnie, and N. K. Kwak, (1986), "A Hierarchical Goal Programming Approach to Reverse Allocation in Institutions of Higher Learning", **Journal of The Operational Research Society,** Vol. 37, No. 1, p.63.

d_i^- : تشير إلى القصور في تحقيق الأهداف

d_i^+: تشير إلى التجاوز في تحقيق الأهداف

a_{ij}: تشير إلى معامل المتغير القراري

$\sum_{i=1}^{m}$: تشير إلى الأهداف من $i = 1$ وحتى m

$\sum_{j=1}^{n}$: تشير إلى المتغيرات القرارية من $j = 1$ وحتى n

b_i : تشير إلى القيمة المستهدفة للهدف

8/7- تحليل حساسية نموذج برمجة الأهداف:

يعتمد الحل الأمثل الذي نحصل عليه للمشكلة التي يتم صياغتها في شكل نموذج برمجة الأهداف اعتماداً كلياً على مدخلات النموذج، والتي تتمثل في القيود المفروضة على الموارد المتاحة، ومستويات الأهداف المطلوب تحقيقها، وأولويات الترتيب لهذه الأهداف، والأوزان الترجيحية لهذه الأهداف، ويبقى الحل مثالياً إذا كانت ظروف التنفيذ الفعلي ما زالت تتفق مع الظروف التي تمّ في ظلها تخطيط متغيرات النموذج (الأهداف والقيود)، ولكن إذا كان هناك تغيير في مدخلات النموذج، وفي الظروف المحيطة بمتخذي القرار، فإنّ ذلك سيؤثر على مشكلة برمجة الأهداف، وبالتالي سيؤثر على الحل الأمثل بالتبعية.

وكذلك لا يكون الحل العملي لهذه المشكلة حلاً كاملاً وفعّالاً بمجرد تحديد الحل الأمثل، ولكن يتطلب الأمر ضرورة أن يلجأ القائمون على إعداد النموذج وحله إلى القيام بتحليلات كاملة ووافية تطمئنهم على سلامة تقديراتهم، وتبين لهم قبل إعداد التخطيط بشكل نهائي مدى استجابة متغيرات المشكلة، ومستويات الأهداف السابق إعدادها للتغيرات في الظروف التي أخذت بالحسبان عند إجراء تلك التحليلات، ومن أهم التحليلات المستخدمة في هذا المجال تحليل الحساسية.

ويعتبر تحليل الحساسية تحليلاً كمياً يبحث بالإجابة على السؤال – ماذا يحدث لو حدث تغير في كل أو بعض قيم معاملات المتغيرات الداخلة في تركيب النموذج، كما أنه يعتبر أيضاً وسيلة للتأكد من مثالية الحل– وهل مازال الحل أمثلاً بعد حدوث التغيرات المختلفة، وهل مازال يحقق كل القيود الموضوعة، وهل سوف يظل هو الحل الأمثل لفترة طويلة، وبسبب مشكلة تعدد الأهداف واختلاف أهميتها في مشكلة برمجة الأهداف أصبح تحليل الحساسية أكثر تعقيداً ولكنه من جانب آخر أكثر أهمية.

ولتحليل حساسية النموذج يجب أن نأخذ بالاعتبار التحليلات الرئيسية التالية[1]:

أ– تأثير التغيرات في المستويات الأصلية الموضوعة للأهداف.

ب– تأثير التغيرات في ترتيب أولويات الأهداف.

ج– تأثير التغيرات في الأوزان الترجيحية للأهداف والأولويات المختلفة.

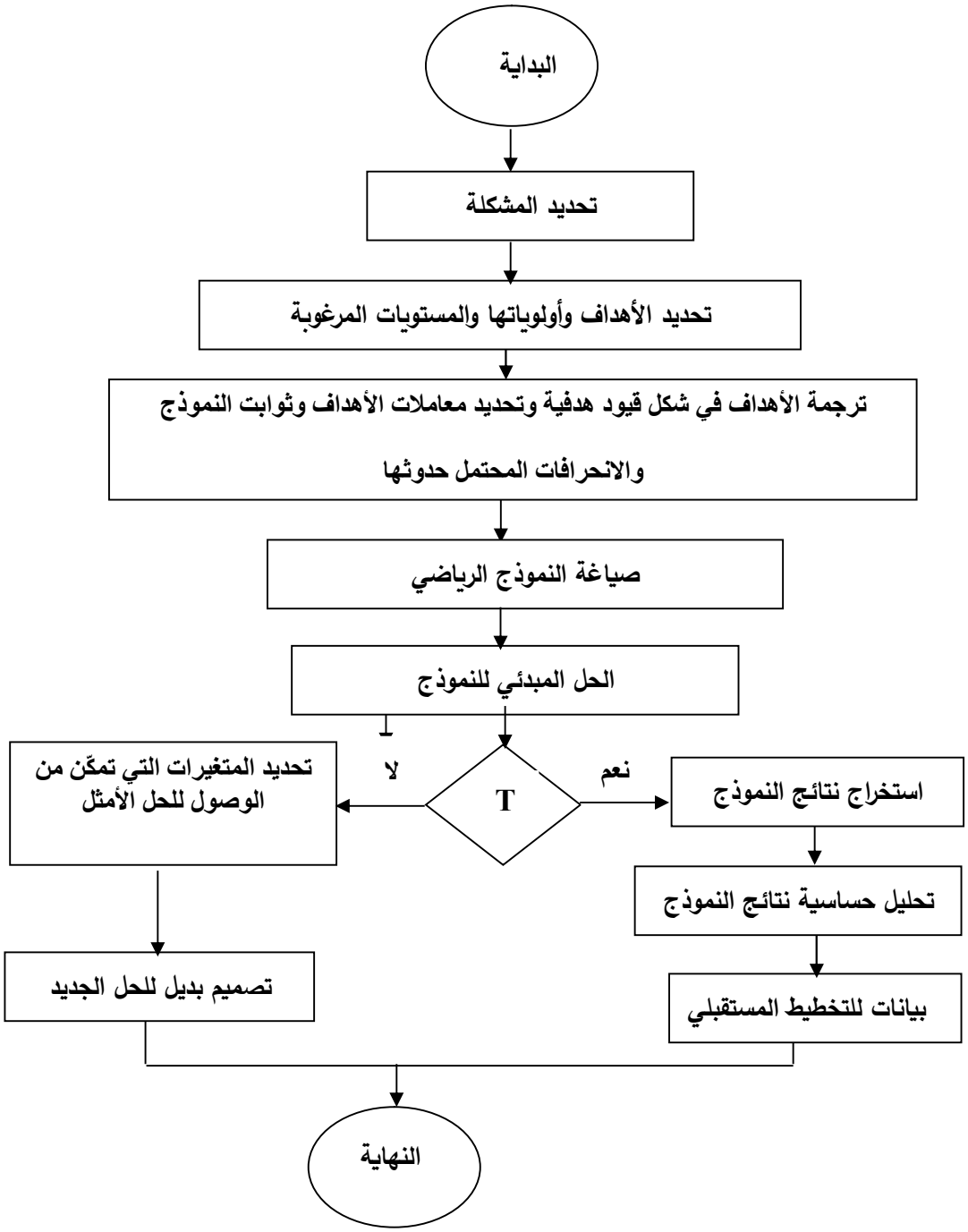
1- برجع إلى:

– د.محمد شريف توفيق، **مرجع سبق ذكره**، ص 165 .

– د.فريد عبد الفتاح زين الدين، **مرجع سبق ذكره**، ص385.

الشكل رقم (1-7)

شكل يوضح صياغة نموذج برمجة الأهداف وحله وتطبيقه



9/7- تطبيقات عملية على نموذج برمجة الأهداف:

مسألة هامة:

بفرض أنّ مدير الإنتاج بإحدى الشركات الصناعية يقوم حالياً بوضع مستويات الإنتاج لمنتجات الشركة، والمتمثلة في نوعين من المنتجات هما X_1, X_2، وتقوم خطة الشركة على التشغيل الكامل لطاقة المصنع من خلال العمل لمدة خمسة أيام أسبوعياً، وبثلاث ورديات يومياً، وكل وردية ثماني ساعات، أي أنّ الطاقة الأسبوعية للمصنع هي 7200 دقيقة (7200 = 60 × 8× 3 ×5).

ويتم إنتاج كلا نوعي المنتج في خط تجميع مشترك، يستطيع الانتهاء من المنتج الأول في دقيقتين، والمنتج الثاني في دقيقة واحدة، وقد وضع مدير الإنتاج أمامه محاولة تحقيق هدفين:

- الهدف الأول ويمثل هدف الأولوية الأولى، وهو تحقيق إجمالي عائد مساهمة مقداره 70000 ليرة سورية على الأقل، علماً أنّ هامش ربح المنتج الأول هو 15 ل.س، وهامش ربح المنتج الثاني هو 10 ل.س.
- الهدف الثاني وهو يمثل أيضاً هدف الأولوية الثانية ويتمثل في تحديد إجمالي عدد الوحدات المنتجة من النوعين معاً بعدد لا يزيد عن 5000 وحدة في الأسبوع، وذلك تمشياً للخطة الموضوعة لمستويات المخزون.

المطلوب إيجاد خطة الإنتاج المثلى في ضوء المعلومات السابقة.

خطوات الحل مفصلاً:

- قيود برمجة الأهداف:

كان من المفروض أن نبدأ هنا بإعداد دالة الهدف أولاً باعتبارها تمثل الجزء الأول من الصياغة الرياضية، مثلما كنا نتعامل مع مشكلات البرمجة الخطية، لكننا نرى أنه من الملائم لأغراض التوضيح والفهم أن نبدأ بصياغة مشكلة برمجة الأهداف بصياغة القيود المفروضة على دالة الهدف، لأنها ستيسر أمامنا إعداد صياغة دالة الهدف بشكل أسرع وأصح كما سنرى في الجزء التالي.

عادة سنجد أنّ مشكلات برمجة الأهداف تتضمن نوعين من القيود المفروضة على دالة الهدف، النوع الأول ونطلق عليه قيود فنية أو تكنولوجية، والنوع الثاني نطلق عليه قيود أهداف، والنوع الأول من القيود يتعامل مع طاقات الموارد والحدود الأخرى التي لا تمثل هدفاً موضوعاً بالمعنى المفهوم للهدف، وهي بذلك تماثل القيود الموجودة في مسائل البرمجة الخطية، أما النوعية الثانية من القيود بمشكلة برمجة الأهداف فإنها تمثل الأهداف المحددة والموضوعة في أولويات واجبة التنفيذ.

من خلال استعراض المسألة الحالية سنجد أنها تمثل مشكلة تتضمن ثلاثة قيود، أحدها يمكن تصنيفه ليندرج تحت نوع القيود التكنولوجية، وهو يتعلق بالطاقة الإنتاجية لخط التجميع، أما القيدان الآخران فيمكن تصنيفهما كقيدي هدف، الأول يتعلق بهدف الربح وهو تحقيق عائد مساهمة مقداره 70000 ليرة سورية، والهدف الآخر يتعلق بمستوى المخزون الموضوع والمحدد.

- بالنسبة للقيد الفني أو التكنولوجي (وهو قيد طاقة التجميع):

إذا رمزنا لعدد الوحدات المنتجة من النوعية الأولى من المنتجات بالرمز x_1، ورمزنا لعدد الوحدات المنتجة من النوعية الثانية من المنتجات بالرمز x_2، فإنّ قيد الطاقة يمكن صياغته على النحو التالي:

$$2x_1 + x_2 \leq 7200$$

وبعد إضافة المتغير المضاف y_1 ليمثل الطاقة غير المستغلة ستصبح معادلة القيد على الشكل التالي:

$$2x_1 + x_2 + y_1 = 7200$$

- بالنسبة لقيود الأهداف:

قيود الأهداف تُعالج بطريقة مختلفة بعض الشيء، ويرجع السبب في ذلك إلى أنّ المستوى المحدد والموضوع للهدف المعين يمثل وضعاً خاصاً، حيث إنه قد لا يمكن استيفاؤه وتحقيقه تماماً بنفس المستوى المحدد، إذ ربما يتحقق هذا الهدف بأكثر مما هو موضوع، أو بأقل مما هو موضوع، وهي كلها احتمالات واردة، وحتى يمكن مراعاة ذلك فإنّ الأمر يتطلب إضافة متغيرين لكل قيد من قيود الأهداف، وهذه المتغيرات يطلق عليها اصطلاح المتغيرات الانحرافية، لأنّ قيمة كل متغير منها تمثل مقدار انحراف الحل عن مستوى الحل الموضوع، فمتغير الانحراف الموجب والذي سنرمز له بالرمز (d^+) يمثل مقدار الزيادة عن الهدف الموضوع، في حين أنّ متغير الانحراف السالب والذي سنرمز له بالرمز (d^-) يمثل المقدار الذي لن يتحقق من الهدف.

وحيث إنّ الهدف الأول بمثالنا الحالي قد حدد مقدار الربح على الأقل ما مقداره 70000 ليرة سورية، وإذاً يمكن صياغته بالطريقة المعتادة:

$$15x_1 + 10x_2 \geq 70000$$

وبناء على هذا الفهم فإنّ هدف الربح ذات الأولوية الأولى يمكن تحويله إلى صورة المعادلة التالية:

$$15x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 70000$$

والحكمة من إضافة كلا المتغيرين إلى قيد الهدف، هو أنه يجعلنا نقف على حقيقة أنه قد لا يكون في مقدورنا تحقيق أرباح مقدارها 70000 ليرة سورية تماماً وبالضبط، لأنّ هناك ثلاثة احتمالات للحل هي:

الاحتمال الأول:

أن يكون مقدار الربح القابل للتحقيق معادلاً تماماً وبالضبط لمستوى الهدف المحدد مقدماً وهو 70000 ليرة سورية، في هذه الحالة يكون (d_1^+) مساوياً للصفر، و(d_1^-) مساوياً للصفر، حيث لا يوجد انحراف في تحقيق هدف الأولوية الأولى.

الاحتمال الثاني:

أن يكون مقدار الربح القابل للتحقيق يقل عن الربح المحدد مقدماً كهدف نسعى إليه، وفي هذه الحالة فإنّ متغير الانحراف السالب (d_1^-) تكون له قيمة مساوية للفرق بين الربح المحقق ومستوى الربح المستهدف، وتكون قيمة الانحراف الموجب (d_1^+) مساوية للصفر.

الاحتمال الثالث:

أن يكون مقدار الربح القابل للتحقيق يزيد عن الربح المحدد مقدماً كهدف نسعى إليه، وفي هذه الحالة فإنّ متغير الانحراف الموجب (d_1^+) تكون له قيمة مساوية لمقدار الزيادة بين الأرباح المحققة فعلاً ومستوى الربح المستهدف، وتكون قيمة الانحراف الموجب (d_1^-) مساوية للصفر.

وبالطريقة نفسها يتم صياغة قيد الهدف الثاني الممثل لهدف الأولوية الثانية (مستوى المخزون الموضوع للمنتجات).

إذ يتم عن طريق إضافة متغير انحراف يقل عن الهدف (d_2^-)، وطرح متغير انحراف يزيد عن الهدف (d_2^+).

وعلى ذلك يتم تعديل صياغة قيد هدف الأولوية الثانية من شكله الحالي وهو:

$$x_1 + x_2 \leq 5000$$

إلى الشكل الصحيح في صورة معادلة القيد التالي:

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5000$$

وبعد الانتهاء من مناقشة إعداد صياغة القيود الثلاثة الواردة بمسألتنا الحالية، فإنّ الصياغة الرياضية لقيود الموارد والأهداف في صورتها الكاملة تكون:

قيد طاقة التجميع $2x_1 + x_2 + y_1 = 7200$

هدف الربح $15x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 70000$

هدف مستوى المخزون $x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5000$

شروط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , d_1^- , d_1^+ , d_2^- , d_2^+ \geq 0$

دالة هدف نموذج برمجة الأهداف:

إنّ دالة هدف نموذج برمجة الأهداف تسعى إلى تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها لقيود الأهداف، حيث إنّ مدير الإنتاج قد قرر أن يكون الربح المستهدف يساوي على الأقل 70000 ليرة سورية، لذلك فإنّ الأمر يتطلب اعتبار عدم تحقيق هذا الهدف والمقاس بمتغير الانحراف السالب (d_1^-) هو انحراف غير مرغوب فيه، ينبغي العمل على تخفيضه، بينما لا يضاف لدالة الهدف متغير الانحراف الموجب (d_1^+) والذي يقيس الزيادة أو التجاوز في تحقيق هدف الربح لأنه انحراف مرغوب فيه.

أما بالنسبة لهدف الأولوية الثانية والمتمثل في تحديد حجم الإنتاج من المنتجين معاً بما لا يزيد عن 5000 وحدة، فإنّ المبالغة أو التجاوز في تحقيق هذا الهدف (أي إنتاج أكثر من 5000 وحدة) يعتبر انحرافاً غير مرغوب فيه، وبالتالي فإنّ متغير الانحراف الموجب (d_2^+) والذي يمثله يجب إضافته لدالة الهدف، ولا يضاف لدالة الهدف متغير الانحراف الآخر (d_2^-) لأنه يمثل انحراف مرغوب فيه.

وكقاعدة عامة: إذا كان قيد الهدف (أقل من أو يساوي) فإنه يتعين إضافة متغير الانحراف الذي يبالغ في تحقيق الهدف (d^+) إلى دالة الهدف.

أما إذا كان قيد الهدف (أكبر من أو يساوي) فإنه يجب إضافة متغير الانحراف الذي يقيس مقدار النقص أو عدم التحقيق (d^-) إلى دالة الهدف.

أما إذا كان القيد بشكل مساواة فإنه يجب إضافة كلا المتغيرين (d^+, d^-) إلى دالة الهدف لأنّ كلاً منهما في تلك الحالة يمثل انحرافاً غير مرغوب فيه.

وعلى ذلك ستكون مكونات دالة هدف نموذج برمجة الأهداف عبارة عن كافة متغيرات الانحراف غير المرغوب فيها للأهداف المختلفة، وسيكون هدف هذه الدالة العمل على تخفيض هذه الانحرافات وفقاً للأولويات المحددة، حيث نبدأ أولاً بالأولويات الأولى ثم بعدها تباعاً لغاية باقي الأولويات والأهداف ولا يمكن إطلاقاً تجاوز هذه الأولويات في الحل.

ويمكن صياغة دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Min } Z = w_1 d_1^- + w_2 d_2^+$$

وتلخيصاً لما تقدم فيمكن صياغة نموذج برمجة الأهداف بشكل متكامل:

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = w_1 d_1^- + w_2 d_2^+$$

وذلك ضمن الشروط:

$$2x_1 + x_2 + y_1 = 7200$$
$$15x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 70000$$
$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5000$$

شروط عدم السلبية:

$$x_1 , x_2 , d_1^- , d_1^+ , d_2^- , d_2^+ \geq 0$$

جدول السمبلكس المبدئي

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية L_1	L_2	المتغيرات الأساسية	القيم	x_1	x_2	y_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
0	0	y_1	7200	2	1	1	0	0	0	0
1	0	d_1^-	70000	15	10	0	1	–1	0	0
0	0	d_2^-	5000	1	1	0	0	0	1	–1
دالة الهدف			الأرباح الداخلة	0	0	0	0	0	0	1
0		L_2	التكاليف الداخلة	0	0	0	0	0	0	0
			صافي التغير	0	0	0	0	0	0	1
دالة الهدف			الأرباح الداخلة	0	0	0	1	0	0	0
70000		L_1	التكاليف الداخلة	15	10	0	1	–1	0	0
			صافي التغير	**–15**	**–10**	0	0	1	0	0

شرح الجدول:

– تحديد المتغيرات الأساسية بالجدول المبدئي بالطريقة المعتادة في نموذج البرمجة الخطية، وذلك عن طريق وضع قيمة المتغيرات القرارية (x_1, x_2) مساوية للصفر، وعندئذ يتم تعيين أي المتغيرات المضافة، أو متغيرات الانحراف بالقيود الموجودة بالصياغة ستكون أساسية بغرض تحقيق تلك القيود.

- فإنّ قيد الطاقة سيكون متوازناً عندما تكون قيمة المتغير المضاف (y_1) تساوي 7200 حيث أنّ: $x_1 = x_2 = 0$ عند الحل المبدئي.

$$2x_1 + x_2 + y_1 = 7200$$
$$2 \times 0 + 0 + y_1 = 7200$$
$$y_1 = 7200$$

- وبالطريقة نفسها فإنّ قيد هدف الربح يكون متوازناً عندما يكون متغير انحراف عدم التحقق (d_1^-) مساوياً 70000، ومتغير التحقق مساوياً للصفر (حيث إنه لا إنتاج ومن ثم لا أرباح)، أي عدم تحقق أي مستوى من هدف الربح وعليه فإنّ متغير التحقق يساوي الصفر.

$$15x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 70000$$
$$15(0) + 10(0) + d_1^- - 0 = 70000$$
$$d_1^- = 70000$$

- وكذلك فإنّ قيد مستوى المخزون يكون متعادلاً عندما يكون متغير التحقق مساوياً 5000، ومتغير انحراف التجاوز مساوياً للصفر (حيث إنه بالجدول المبدئي لا يوجد إنتاج ومن ثم فلن يكون هناك تجاوز في هدف المخزون المحدد)، أي (d_2^+) ستكون مساوية للصفر في الحل المبدئي.

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5000$$
$$0 + 0 + d_2^- - 0 = 5000$$
$$d_2^- = 5000$$

بالنسبة لمعاملات دالة الهدف:

إنّ جدول السمبلكس التقليدي يتعامل مع المشكلات وحيدة الهدف، أما برمجة الأهداف فإنها تتعامل مع المشكلات المتعددة الأهداف، لذلك ينبغي أن تعكس معاملات دالة الهدف هذا التعدد في الأهداف، حيث يوجد في مسألتنا الحالية هدفان هما (الربح ومستوى المخزون)، وقد رمزنا لهدف الأولوية الأولى بالرمز (L_1)، ولهدف الأولوية الثانية بالرمز (L_2).

- بالنسبة لهدف الربح وهو هدف الأولوية الأولى، وهو تخفيض قيمة الانحراف السالب d_1^- (متغير انحراف عدم التحقق)، لذلك فإنّ دالة هدف مستوى الأولوية الأولى هي:

$$Min = 0x_1 + 0x_2 + 0y_1 + d_1^- + 0d_1^+ + 0d_2^- + 0d_2^+$$

وعلى ذلك سنجد أنّ المتغير الأساسي y_1 معامله في هدف الأولوية الأولى صفر، كذلك هو الحال بالنسبة للمتغير الأساسي d_2^- أما المتغير d_1^- فمعامله 1.

- بالنسبة لدالة هدف مستوى الأولوية الثانية (مستوى المخزون) يمكن كتابتها:

$$Min = 0x_1 + 0x_2 + 0y_1 + 0d_1^- + 0d_1^+ + 0d_2^- + d_2^+$$

من هذه الدالة يتضح أنّ كل المتغيرات معاملها في دالة الهدف للأولوية الثانية صفراً ما عدا متغير الانحراف الموجب d_2^+، لذلك سنجد أنّ معاملات المتغيرات الأساسية بالجدول المبدئي عند الأولوية الثانية كلها مساوية للصفر.

تجسيد تعدد الأهداف:

يتم تقسيم الجزء الأسفل من الجدول إلى عدد من الأقسام وفقاً لعدد الأهداف الموجودة، فأقل الأهداف أولوية يوضع في أول قسم، ثم الذي يليه في الأولوية يوضع في القسم الثاني وهكذا. في كل جزء من الأجزاء المخصصة لمستوى الأولويات يجري تقسيمه أفقياً إلى ثلاثة صفوف، أولها يخصص للأرباح الداخلة، والثاني يمثل التكاليف الداخلة، والأخير فيخصص لصافي التغير، ولتحديد الأرباح الداخلة عند كل مستوى من مستويات الأولوية الموضوعة، هي تمثل معاملات دالة الهدف لكل متغير عند مستوى الأولوية المخصص.

بالنسبة لمستوى الأولوية (L_1)، نجد أنّ الأرباح الداخلة الوحيدة غير الصفرية هي المقابلة للمتغير d_1^- (هدف الربح غير المحقق)، وعند مستوى الأولوية الثانية

(L_2)، فإنّ الأرباح الداخلة الوحيدة غير الصفرية هي المقابلة للمتغير d_2^+ (التجاوز أو المبالغة في مستوى المخزون)، لذلك سنضع رقم (1) في صف الأرباح الداخلة عند مستوى الأولوية الأولى، وأسفل عمود المتغير d_1^- وباقي معاملات الصف تكون صفراً، وسيتم كتابة رقم (1) بصف الأرباح الداخلة عند الأولوية الثانية، وتحت عمود المتغير d_2^+ وباقي معاملات الصف تكون صفراً.

حساب قيم صف التكاليف الداخلة:

يتم حساب قيم صف التكاليف الداخلة، وهي تمثل مجموع حواصل ضرب المعاملات الواردة في كل عمود في القيم المقابلة لها بعمود معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية، ويكون حاصل الضرب هو بمنزلة التكلفة الداخلة لذلك العمود، مع ملاحظة أن يتم ذلك عند كل مستوى أولوية.

فمثلاً التكلفة الداخلة لعمود المتغير x_1 عند مستوى الأولوية الأولى يتم حسابها كما يلي:

x_1
2
15
1

×

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية عند L_1
0
1
0

=

0
15
0

التكاليف الداخلة 15

وكذلك سيتم حساب التكلفة الداخلة للمتغير x_1 عند مستوى الأولوية الثانية بنفس الطريقة كما يلي:

X_1
2
15
1

×

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية عند L_2
0
0
0

=

0
0
0

التكاليف الداخلة 0

حساب قيم صف صافي التغير:

صافي التغير = الأرباح الداخلة – التكاليف الداخلة

مثلاً بالنسبة للمتغير (X_1) عند مستوى الألوية الأولى تكون قيمة صافي التغير كالآتي: $0 - 15 = -15$

وعند مستوى الأولوية الثانية (L_2) تكون قيمة صافي التغير كالآتي:

$$0 - 0 = 0$$

حساب قيمة دالة الهدف للحل المبدئي:

يتم عن طريق ضرب قيمة كل متغير أساسي في معامل الهدف المقابل لذلك المتغير عند الأولوية المحددة ومن ثم يتم جمع ناتج الضرب فيكون هو قيمة دالة الهدف عند تلك الأولوية.

القيم
7200
70000
5000

×

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية عند L_1
0
1
0

=

0
70000
0

قيمة دالة الهدف 70000

وبالنسبة لمستوى الأولوية الثانية (L_2) تكون قيمة دالة الهدف كالآتي:

القيم		معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية عند L_2		
7200	×	0	=	0
70000		0		0
5000		0		0
				قيمة دالة الهدف 0

وبهذا نكون قد استكملنا كافة البيانات والمعلومات للجدول المبدئي.

وقد يكون من المفيد أن نعلق على مغزى النتائج التي يظهرها الجدول المبدئي:

إذ ما معنى أنّ قيمة دالة الهدف للأولوية الأولى 70000، أو بمعنى آخر يبلغ الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الأولى (الربح) ما يعادل 70000 وهذا بطبيعة الحال أمر منطقي، لأنّ جدول الحل المبدئي يمثل حالة عدم إنتاج، أي أنّ قيمة (X_1, X_2) مساوية للصفر، طالما الأمر كذلك فإنه لا أرباح محققة، أي أنّ الأرباح المستهدفة كأولوية أولى مقدارها 70000 ، في حين أنّ الحل المبدئي يحقق أرباحاً محققة مقدارها الصفر، أي أنّ نتائج الحل الحالي تنحرف انحرافاً غير مرغوب فيه عن المستهدف بما مقداره 70000.

ومن ناحية أخرى فإنّ حالة عدم الإنتاج التي يمثلها جدول الحل المبدئي، يعني أنّ قيمة كل من المتغيرات القرارية (X_1, X_2) مساوية للصفر، ومن ثم لا يوجد إنتاج للتخزين، أي أنّ هدف الأولوية الثانية مستوفى تماماً دون انحراف غير مرغوب فيه، ولهذا السبب سنجد أنّ قيمة دالة الهدف للأولوية الثانية مقدارها

صفر، أي لا يوجد انحراف غير مرغوب فيه في تحقيق هدف التخزين كأولوية ثانية.

اختبار مثالية الحل:

لقد تعودنا في مشكلات البرمجة الخطية في اختبار مثالية الحل فيها، إذا كانت المشكلة تمثل مشكلة تخفيض دالة الهدف، بأن يتحقق شرط الأمثلية عندما تكون كافة قيم صف صافي التغير موجبة أو صفرية، إذ إنّ غياب القيم السالبة في صف صافي التغير يعني أنّ الانحرافات السالبة لا يمكن الاستمرار فيها أكثر من ذلك. أي هنا لاختبار مثالية الحل فإننا ننظر إلى صافي التغير لمستوى الأولوية الأعلى أولاً، فإذا تبين أنّ كل القيم موجبة أو صفرية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا ظهرت قيم سالبة في صف صافي التغير عند هذا المستوى من الأولوية فيتعين الدخول في جولة تالية لتحسين الحل.

وهنا يثار تساؤل ما هو موقف صافي التغير للأولويات الدنيا ؟ ألا يمكن استخدامها للحكم على المثالية وتحسين الحل ؟ سيتم الإجابة على هذا السؤال بحينه عندما نواجه هذا الموقف في الحل.

تطبيقاً لما سبق نلاحظ أنّ هناك قيماً سالبة للمتغيرات القرارية (X_1, X_2) في صف صافي التغير بالنسبة لهدف الأولوية الأولى (L_1)، لذلك يمكن القول إنّ الحل الذي يقدمه الجدول المبدئي هو حل غير أمثل، ويتعين السير في خطوات تحسين الحل التالية.

تحسين الحل:

يتم إجراء تحسين الحل بنفس الخطوات المعتادة في مشكلات البرمجة الخطية.

أ- **اختيار المتغير الداخل:**

سيتم اختيار المتغير الداخل ذات أكبر قيمة صافي تغير بإشارة سالبة (بالقيمة المطلقة)، طالما أنّ هذا المتغير له قيمة صافي تغير صفرية عند أهداف الأولويات الأقل.

من جدول الحل المبدئي يتضح أنّ كلاً من المتغيرين (x_1, x_2) لهما قيم صافي تغير سالبة عند مستوى الأولوية الأولى ($x_1 = -15, x_2 = -10$) سيتم اختيار x_1 كمتغير داخل.

ب- تعيين المتغير الخارج:

عن طريق قسمة قيمة كل متغير أساسي في الجدول على المعامل الموجب المقابل في عمود المتغير الداخل، ويتم اختيار أصغر حاصل قسمة موجب.

$\Theta = \text{Min}\ (7200/2 = 3600,\ 70000/15 = 4667,\ 5000/1 = 5000)$
$= 3600$

ج- تعيين العنصر المحوري أو عنصر الارتكاز:

مما سبق نجد أنّ العنصر المحوري يتحدد من تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل وهو الرقم (2)، كما يتضح من الجدول السابق.

إعداد الجدول الثاني للحل:

تتم كافة العمليات المطلوبة لتشكيل الجدول الثاني للحل طبقاً لمنهج طريقة السمبلكس المعتادة، إذ سيتم تقسيم عناصر سطر الارتكاز أو المتغير الخارج على العنصر المحوري، وجعل بقية عناصر العمود المحوري أصفاراً، وحساب بقية عناصر الجدول كما اعتدنا سابقاً إما:

نأخذ العنصر المقابل للعنصر المحوري في السطر المراد حساب قيمته ونغير إشارته، ونضربه في السطر المحوري الجديد، ثم نضيفه للسطر الأصلي فنحصل على عناصر السطر الجديد. أو **وفق قاعدة المستطيل:**

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{ما يقابل العنصر في سطر الإرتكاز} \times \text{ما يقابله في عمود الارتكاز}}{\text{العنصر المحوري}}$$

وكذلك فإنّ صف صافي التغير، وكذلك قيم دالة الهدف يتم حسابها وفقاً لما اتبعناه عند إعداد الجدول السابق، وبعد إجراء كافة العمليات الحسابية المطلوبة سيظهر جدول الحل الثاني على الصورة التالية.

جدول الحل الثاني

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية L_1	معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية L_2	المتغيرات الأساسية	القيم	x_1	x_2	y_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
0	0	x_1	3600	1	1/2	1/2	0	0	0	0
1	0	d_1^-	16000	0	**5/2**	**–15/2**	1	–1	0	0
0	0	d_2^-	1400	1	1/2	–1/2	0	0	1	–1
دالة الهدف			الأرباح الداخلة	0	0	0	0	0	0	1
	0	L_2	التكاليف الداخلة	0	0	0	0	0	0	0
			صافي التغير	0	0	0	0	0	0	1
دالة الهدف			الأرباح الداخلة	0	0	0	1	0	0	0
	16000	L_1	التكاليف الداخلة	**0**	**5/2**	**–15/2**	1	–1	0	0
			صافي التغير	0	–5/2	15/2	0	1	0	0

نلاحظ من الجدول الثاني، أنه بدخول x_1 إلى الحل كمتغير أساسي قد أدى إلى انخفاض دالة هدف الأولوية الأولى (الربح) من 70000 إلى 16000 وهو انحراف غير مرغوب فيه بالنسبة لهدف الربح، وفي الوقت نفسه استمرت قيمة دالة هدف الأولوية الثانية مساوية للصفر ما تفسير ذلك؟

من الجدول الثاني يتضح أنّ قيمة المتغير الأساسي (x_1) هي 3600 وهذا يعني أنه وفقاً للحل الوارد بجدول الحل الثاني سيتم إنتاج عدد 3600 وحدة من المنتج x_1، وحيث إنّ هامش ربح الوحدة الواحدة منها 15 ل.س، إذن إنّ إنتاج هذه الكمية سيحقق أرباحاً مقدارها 54000 (54000 = 15× 3600)، وهذا يعني أنّ الانحراف عن هدف الربح سينخفض بمقدار 54000 عما كان عليه في جدول الحل المبدئي، أي سيصبح الانحراف عن الهدف مقداره (= 54000 – 70000 16000)، ولذلك وجدنا أنّ الجدول الثاني يعطي قيمة دالة هدف للأولوية الأولى الربح مقدارها 16000 ، ومن ناحية أخرى لماذا استمرت قيمة دالة هدف الأولوية الثانية مساوية للصفر كما كانت عليه في الجدول المبدئي؟ للإجابة على ذلك نقول إنّ إنتاج 3600 وحدة من x_1 يعتبر أقل من الحد الأقصى لمستوى المخزون والمحدد ب 5000 وحدة من المنتجين، أي أنه حتى الآن لا توجد انحرافات غير مرغوب فيها بالنسبة لهدف الأولوية الثانية، ولهذا السبب ظهرت قيمة دالة هدف الأولوية الثانية مساوية للصفر.

ولكن هل الجدول الحالي يمثل الحل الأمثل أم يتعين العمل على تحسينه؟

وفقاً لقاعدة الأمثلية نجد من فحص قيم صف صافي التغير عند الأولوية الأولى أنّ هناك قيماً سالبة عند x_2 مقدارها (5/2–)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، وبناء عليه سيكون المتغير x_2 هو المتغير الداخل (المتغير الوحيد الذي له قيمة صافي تغير سالبة عند مستوى الأولوية الأولى)، ولتحديد المتغير الخارج:

$$\Theta = \text{Min}(3600 \div 1/2 = 7200,\ 16000 \div 5/2 = 6400,\ 1400 \div 1/2 = 2800) = 2400$$

أي أنّ المتغير الخارج هو d_2^- والعنصر المحوري هو (1/2).

جدول الحل الثالث

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية L_1	L_2	المتغيرات الأساسية	القيم	x_1	x_2	y_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
0	0	x_1	2200	1	0	1	0	0	–1	1
1	0	d_1^-	9000	0	0	**–5**	1	–1	**–5**	5
0	0	x_2	2800	0	1	–1	0	0	2	–2
دالة الهدف		L_2	الأرباح الداخلة	0	0	0	0	0	0	1
0			التكاليف الداخلة	0	0	0	0	0	0	0
			صافي التغير	0	0	0	0	0	0	1
دالة الهدف		L_1	الأرباح الداخلة	0	0	0	1	0	0	0
9000			التكاليف الداخلة	0	0	–5	1	–1	–5	5
			صافي التغير	0	0	5	0	1	5	–5

من الجدول الثالث يمكن أن نقف على الملاحظات التالية:

- إنّ هذا الجدول لا يمثل الحل الأمثل، حيث إنّه مازالت توجد قيمة صافي تغير سالبة بالنسبة للأولوية الأولى عند المتغير (d_2^+)، ومن ثم فإنّ اختيار هذا المتغير للدخول في جولة تالية للحل سيعمل على تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الربح بمقدار 5 ل.س عن كل وحدة تضاف من المتغير (d_2^+).
- يلاحظ أيضاً أنّ قيمة صافي التغير في مستوى الأولوية الثانية للمتغير (d_2^+) هو (1+)، وحيث إنّ هذا المتغير يمثل الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الثانية (هدف مستوى المخزون)، هذا يعني أنّ زيادة وحدة واحدة من (d_2^+)، سيؤدي إلى زيادة قيمة دالة هدف الأولوية الثانية بمقدار (1).
- مما سبق نجد أنّ هناك تناقضاً، ففي حين زيادة (d_2^+) بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى تخفيض 5 وحدات من الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الأولى (الربح)، نجد أنه في الوقت نفسه يعمل على زيادة الانحرافات غير المرغوب فيها لهدف الأولوية الثانية بمقدار (1) وهنا نتساءل ما هو التصرف الواجب حيال هذا التناقض ؟.
- للإجابة على ذلك نقول إنّ برمجة الأهداف تقوم على قاعدة أساسية مؤداها: **(أي تحسين يمكن أن يؤدي إلى تحسين في هدف مستوى الأولوية الأعلى فإنه ينبغي إجراؤه بصرف النظر عن الأثر الذي سيحدثه على أهداف الأولويات الأقل).**
- لتحديد المتغير الخارج:

$$\Theta = \text{Min}\ (2200/1 = 2200,\ 9000/5 = 1800) = 1800$$

أي أنّ المتغير الخارج هو d_1^- والعنصر المحوري هو (5).

وبالتالي فإنّ اختيار d_1^- كمتغير خارج يشير إلى أنّ هدف الربح كمستوى أولوية أولى سوف يتم الوفاء به كاملاً في الجدول التالي، لأنّ خروجه سيجعله متغيراً غير أساسياً وقيمته الصفر.

جدول الحل الرابع

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية L_1	L_2	المتغيرات الأساسية	القيم	x_1	x_2	y_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
0	0	x_1	400	1	0	2	–1/5	1/5	0	0
0	1	d_2^+	1800	0	0	–1	1/5	–1/5	–1	1
0	0	x_2	6400	0	1	–3	2/5	–2/5	0	0
دالة الهدف			الأرباح الداخلة	0	0	0	0	0	0	1
1800		L_2	التكاليف الداخلة	0	0	–1	1/5	–1/5	–1	1
			صافي التغير	0	0	1	–1/5	1/5	1	0
دالة الهدف			الأرباح الداخلة	0	0	0	1	0	0	0
0		L_1	التكاليف الداخلة	0	0	0	0	0	0	0
			صافي التغير	0	0	0	1	0	0	0

يتضح من هذا الجدول ما يلي:

1- إنّ قيمة دالة الهدف مستوى الأولوية الأولى يساوي الصفر، هذا يعني أنّ هدف الأولوية الأولى قد تمّ تحقيقه بالكامل بدون أي انحراف غير مرغوب فيه، ويمكن التأكد من ذلك بالنظر إلى صف صافي التغير عند مستوى تلك الأولوية، سنجد أنّ كل معاملات هذا الصف إما قيماً موجبة أو صفرية.

2- كذلك يتبين أنّ هدف الأولوية الثانية لم يتم تحقيقه بالكامل، إذ سنجد أنّ قيمة دالة هدف تلك الأولوية مساوية للقيمة 1800 ، هذا يعني أنّ الحل الذي سيمثله الجدول الرابع سيتم وفقاً له إنتاج 1800 وحدة زيادة عن مستوى الحد الأقصى للمخزون، وفقاً لهذا الحل سيتم إنتاج 400 وحدة من x_1 ، و6400 وحدة من x_2 ، أي أنّ إجمالي الإنتاج يزيد بمقدار 1800 وحدة عن مستوى المخزون المحدد بعدد 5000 وحدة.

$(6800 - 5000 = 1800)$

3- بالنظر إلى صف صافي التغير عند مستوى الأولوية الثانية (L_2)، سنجد أنّ المتغير (d_1^-) له قيمة صافي تغير سالبة، ولذلك هل يمكن اختيار (d_1^-) كمتغير داخل حتى يمكن تخفيض الانحراف غير المرغوب عن هدف الأولوية الثانية ؟.

هل يمكن اختيار (d_1^-) كمتغير داخل حتى يمكن تخفيض الانحراف عن هدف الأولوية الثانية ؟.

حقيقة الأمر أنّ اختيار (d_1^-) كمتغير داخل في جولة تالية لحل سيؤدي إلى تخفيض الانحراف عن هدف الأولوية الثانية، ولكن قبل أن يتم الاختيار، علينا أن نتساءل عن أثر اختياره كمتغير داخل على دالة هدف الأولوية الأولى.

إنّ قيمة صافي التغير للمتغير (d_1^-) عند مستوى الأولوية الأولى هي (1+) وهذا يعني أنّ دخول هذا المتغير كمتغير داخل في جولة تالية للحل سيؤدي إلى وجود

انحراف غير مرغوب فيه في هدف الأولوية الأولى، وحيث إنّ القاعدة السابقة تقرر أنه لا ينبغي أن يكون تحسين هدف الأولوية الأدنى على حساب هدف الأولوية الأعلى، لذلك فإنّ الحل الذي يقدمه الجدول الرابع هو الحل الأمثل.

10/7- تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف:

من المنطقي أن يكون تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف أكثر صعوبة بالمقارنة بتحليل حساسية مشكلات البرمجة الخطية وحيدة الهدف، وهذه الصعوبة ناشئة بطبيعة الحال من تعدد أهداف مشكلة برمجة الأهداف، واختلاف أولويات تلك الأهداف، وبالرغم من تلك الصعوبة النسبية إلا أنّ متابعة نتائج حل نموذج برمجة الأهداف بتحليل حساسيتها على درجة عالية من الأهمية، وتعطي تفسيرات غاية في الأهمية، وفهم عميق لما ستكون عليه النتائج في حالة تغير بعض عناصر المشكلة.

وسوف نتناول باختصار تحليل حساسية التغيرات التالية:

أولاً: تأثير التغيرات في المستويات الأصلية الموضوعة للأهداف.

ثانياً: تأثير التبادل النسبي الضمني بين الأهداف.

ثالثاً: تأثير التغيرات في تسلسل أولوية الأهداف.

أولاً- تأثير التغير في المستوى الموضوع للهدف:

لقد سبق القول إنّ نموذج برمجة الأهداف يعدّ بمنزلة مدخل استيفاء أو تحقيق، بمعنى أنه نموذج يسعى إلى استيفاء وتحقيق مستويات موضوعة ومحددة لكل هدف، ووفقاً لهذا الفهم فإنّ هذا النموذج لا يمكن اعتباره مدخلاً لتعظيم أو تخفيض الأهداف كما هو الحال في نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف.

لذلك فإنّ السؤال الذي نواجهه عند تحليل الحساسية لنموذج برمجة الأهداف هو:

ما هو أثر التغيرات التي يمكن أن تحدث في المستويات الموضوعة لكل هدف؟

للإجابة على هذا السؤال فإنه يتعين أن يتم ذلك بشكل عملي.

حتـى يـتم توضـيح الكيفيـة التـي يـتم بهـا معالجـة هـذا العنصـر، لـذلك سنستعرض فيما يلي جدول الحل الأمثل للمشكلة التي سبق حلها في المسألة السابقة، وهي المشكلة التي تمثل حالة إحدى الشركات تنتج نوعين من السلع هما x_1, x_2 ، وأنّ هامش ربح الوحدة من النوعية الأولى كانت 15 ل.س، ومن النوعية الثانية 10 ل.س، وأنّ الشركة المذكورة وضعت أهدافها كالآتي:

الهدف الأول: تحقيق 70000 ل.س ربح على الأقل (أولوية أولى)

الهدف الثاني: تحقيق مستوى مخزون لا يزيد عن 5000 وحدة (أولوية ثانية).

وأنه يلزم لدراسة أثر التغيرات التي يمكن أن تحدث في المستويات الموضوعة لكل هدف أن نقوم بتحليل متغيرات الانحراف (التحقق والتجاوز) وفقاً لصفتهما في جدول الحل الأخير، أي المتغيرات الانحرافية الأساسية وغير الأساسية.

وقبل أن نقوم بهذا التحليل سنورد فيما يلي جدول الحل الأخير للمشكلة التي نعالجها الآن على سبيل المثال.

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية L_1	L_2	المتغيرات الأساسية	القيم	x_1	x_2	y_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
0	0	x_1	400	1	0	2	–1/5	1/5	0	0
0	1	d_2^+	1800	0	0	–1	1/5	–1/5	–1	1
0	0	x_2	2800	0	1	–3	2/5	–2/5	0	0
دالة الهدف		L_2	الأرباح الداخلة	0	0	0	0	0	0	1
1800			التكاليف الداخلة	0	0	–1	1/5	–1/5	–1	1
			صافي التغير	0	0	1	–1/5	1/5	1	0
دالة الهدف		L_1	الأرباح الداخلة	0	0	0	1	0	0	0
0			التكاليف الداخلة	0	0	0	0	0	0	0
			صافي التغير	0	0	0	1	0	0	0

1- متغيرات الانحراف غير الأساسية:

أ- بالنظر إلى متغيرات انحراف هدف الربح (الأولوية الأولى) وهي (d_1^-, d_1^+) نجدها قد ظهرتا في جدول الحل الأخير (الحل الأمثل) كمتغيرات غير أساسية، حيث إنها لم تظهر بعمود المتغيرات الأساسية.

وتوجد صيغتان لتحديد الحد الأقصى للتغير المسموح به في مستوى الهدف لمتغيرات الانحراف عدم التحقق والتجاوز وهي كما يلي:

$$\text{الحد الأقصى للتغير المسموح به في مستوى الهدف لمتغير الانحراف غير الأساسي } (d^-_M) \text{ والمقابل للمتغير الأساسي } Z = \frac{\text{(–) قيمة المتغير الأساسي } Z \text{ في الحل النهائي}}{\text{معامل القيد } Z \text{ للمتغير } d^-_M}$$

المعادلة الثانية:

$$\text{الحد الأقصى للتغير المسموح به في مستوى الهدف لمتغير التجاوز غير الأساسي } (d^+_M) \text{ والمقابل للمتغير الأساسي ق} = \frac{\text{قيمة المتغير الأساسي } Z \text{ في الحل النهائي}}{\text{معامل القيد } Z \text{ للمتغير } d^+_M}$$

سوف نقوم فيما يلي بتطبيق هاتين المعادلتين لمتغيرات الانحراف غير الأساسية (السالبة والموجبة) المناظرة لمتغيرات الانحراف الأساسية في جدول الحل الأمثل.
حيث إنّ لكل هدف في نموذج برمجة الأهداف متغير عدم تحقق (d^-_M)، ومتغير تجاوز (d^+_M)، لذلك فإنّ الحد الأقصى للتغيرات في مستوى الهدف المعين، لا بد وأن يتم حسابه لكل من نوعي الانحراف (عدم التحقق والتجاوز)، ولكن هنا يتبادر سؤال منطقي وهو:

أي الحدود المستخرجة سيتم استخدامها، هل سيتم استخدام حدود عدم التحقق أو حدود التجاوز؟، الحقيقة وكما سنرى أنه لا يوجد اختلاف بينهما، إذ سنجد أنّ كلا المتغيرين سيعطي الحدود نفسها.

فبالنسبة لمتغير عدم تحقق هدف الربح (d_1^-)، فإنه سيتم حساب له ثلاثة حدود وفقاً لعدد المتغيرات الأساسية الواردة بالجدول الأخير، وباستخدام المعادلة الأولى سيتم حساب تلك الحدود كالآتي:

المتغيرات الأساسية	القيم	d_1^-	نتيجة تطبيق المعادلة الأولى
x_1	400	–1/5	–(400) ÷ (–1/5) = 2000
d_2^+	1800	1/5	–(1800) ÷ (1/5) = – 9000
x_2	6400	2/5	–(6400) ÷ (2/5) = –16000

من هذه النتائج يتبين أنّ حدود التغير في المستوى الموضوع لهدف الربح هي زيادة مقدارها 2000 ل.س (الرقم الموجب الوحيد) في المستوى الموضوع للهدف، أو تخفيض مقداره 9000 ل.س (أقل رقم بإشارة سالبة)،أي أنّ مستوى هدف الربح الأصلي يمكن أن ينخفض إلى 61000 (9000 – 70000)، أو يرتفع إلى 72000 (2000 + 70000) دون أن يؤثر ذلك على الوضع النهائي الأمثل للمتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل. ويلاحظ أنّ تلك النتيجة التي توصلنا إليها يمكن أن نحصل عليها أيضاً، إذا ما استخدمنا متغير التجاوز (d_1^+)، ولإثبات ذلك سنستخدم فيما يلي صيغة المعادلة الثانية لتحديد حدود التغير كما يلي:

المتغيرات الأساسية	القيم	d_1^+	نتيجة تطبيق المعادلة الثانية
x_1	400	1/5	(400) ÷ (1/5) = 2000
d_2^+	1800	–1/5	(1800) ÷ (–1/5) = – 9000
x_2	6400	–2/5	(6400) ÷ (–2/5) = –16000

وهي النتائج نفسها التي توصلنا إلها من تطبيق المعادلة الأولى على متغير انحراف عدم التحقق (d_1^+).

ب- أما بالنسبة لهدف مستوى الحد الأقصى للمخزون والذي تمّ صياغته في صورة أنه يجب أن لا يزيد مستوى المخزون من إنتاج الشركة عن 5000 وحدة، ومن الجدول الأخير نجد أنّ متغير انحراف عدم التحقق لهذا الهدف (d_2^-) قد ظهر كمتغير غير أساسي في جدول الحل الأمثل، في حين إنّ متغير انحراف التجاوز (d_2^+) ظهر كمتغير أساسي.

لذلك سنقوم بتطبيق المعادلة الأولى بالنسبة لمتغير الانحراف غير الأساسي d_2^+

المتغيرات الأساسية	القيم	d_2^-	نتيجة تطبيق المعادلة الأولى
x_1	400	0	غير محدد
d_2^+	1800	–1	–(1800) ÷ (–1) = 1800
x_2	6400	0	غير محدد

هذه النتائج تشير إلى أنّ المستوى الموضوع لهدف الحد الأقصى للمخزون (5000) وحدة يمكن أن يزيد بمقدار 1800 وحدة، أو أن ينخفض بأي مقدار (الانخفاض غير محدد)، دون أن يؤثر ذلك على الوضع الأمثل للمتغيرات الأساسية بجدول الحل الأمثل.

وعلى ذلك فإنّ المستوى الموضوع لذلك الهدف يمكن أن ينخفض إلى صفر أو يرتفع إلى 6800 وحدة، دون تغير المزيج الأمثل للمتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل.

2- متغيرات الانحراف الأساسية:

بالنسبة **لمتغير الانحراف السالب** فإنه يمكن أن ينخفض الجانب الأيمن الأصلي للقيد (ثابت القيد) بمقدار يعادل قيمته في جدول الحل الأخير، أو أن يزيد

بأي مقدار دون أن يؤثر ذلك على تغير المزيج الأمثل للمتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل.

أما بالنسبة **لمتغير الانحراف الموجب** فإنّ الجانب الأيمن الأصلي للقيد يمكن أن يزيد بمقدار يعادل قيمته في جدول الحل النهائي، أو ينخفض بأي مقدار دون أن يؤثر على تغير المزيج الأمثل للمتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل. حيث أنّ (d_2^+) قد ظهر في جدول الحل الأخير كمتغير انحراف أساسي، وقيمته في الحل الأخير هي 1800، إذاً يمكن القول إنّ مستوى الحد الأقصى للمخزون يمكن أن يزيد بمقدار 1800 وحدة، أو أن ينخفض بأي مقدار دون تغير الوضع الأمثل للمتغيرات الأساسية بجدول الحل الأمثل.

ثانياً- التبادل النسبي بين الأهداف:

بالرغم من أنّ برمجة الأهداف لا تحاول أن تجري تبادلاً بين الأهداف، إلا أنه في مقدورنا أن نحدد ضمنياً القيم النسبية لمختلف الأهداف عن طريق تحليل واختبار جدول الحل الأخير، وذلك لأنه سيعطي لمتخذ القرار قدراً كبيراً من المعلومات الهامة تعطيه مرونة في اتخاذ القرار بناء على هذا الفهم.

إنّ التبادل النسبي بين الأهداف يعني الوقوف على الأثر الذي سيتركه تخفيض الانحراف غير المرغوب لهدف الأولوية الدنيا على الانحراف غير المرغوب لهدف الأولوية العليا، لقد سبق أن ذكرنا أنه يتعين ألا يكون تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الدنيا على حساب ظهور انحراف غير مرغوب فيه لهدف الأولوية الأعلى.

وهنا نريد أن نقف على حقيقة أثر تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الدنيا بمقدار وحدة واحدة على الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الأعلى.

بالنظر إلى جدول الحل الأخير السابق نرى أنّ الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الثانية هو مقداره 1800 وحدة ويكون التساؤل هنا:

ألا يمكن تحسين هذا الوضع؟ وبمعنى آخر ألا يمكن تخفيض هذا الانحراف إلى مقدار أقل؟ الإجابة بأنه يمكن تخفيضه، إذاً كيف يتم ذلك، ولماذا لم يتم ذلك؟

أما كيف يتم ذلك فإننا لو نظرنا إلى صف صافي التغير عند الأولوية الثانية سنجد أنه في الإمكان تحسين دالة هدف الأولوية الثانية عن طريق اختيار المتغير (d_1^-) كمتغير داخل في جولة تالية للحل، حيث إنّ له قيمة صافي تغير سالبة، مما يعني أنّ اختياره كمتغير داخل سيؤدي إلى تحسين دالة الهدف أي تخفيض الانحراف في هذا الهدف إلى مقدار أقل, أما لماذا لم يتم ذلك؟

فلقد سبق أن ذكرنا أننا لا نقوم بإجراء التحسين لأنّ قيمة صافي التغير لذلك المتغير (d_1^-) عند مستوى الأولوية الأولى هي (1+)، بمعنى أنه لو أصبح المتغير (d_1^-) متغيراً أساسياً، فإنّ القيمة التي سيأخذها ستعادل قيمة عدم تحقيق هدف الربح ذات الأولوية الأعلى.

معنى ذلك أنه مقابل كل ليرة تفقد في هدف الربح نحصل على تخفيض مقداره (1/5) في عدد الوحدات المنتجة زيادة عن مستوى الحد الأقصى للمخزون، أو بمعنى آخر أنّ تخفيض عدد الوحدات المنتجة زيادة عن مستوى الحد الأقصى للمخزون بمقدار وحدة واحدة سيكون أثره بمنزلة تخفيض في الأرباح بمقدار 5 ليرات.

لذلك يمكننا أن نقرر أنّ التبادل أو التحويل الضمني بين الهدفين (الربح ومستوى المخزون)، هو 5 ليرات تخفيض في الأرباح مقابل كل وحدة زيادة في مستوى المخزون.

مما سبق يمكننا أن نستخلص مدى أهمية هذه المعلومات لمتخذ القرار في إمداده بحقائق تمكّنه من أن يتخذ القرار السليم، فإذا كان مستعداً للتضحية بأرباح مقدارها 9000 ل.س مقابل عدم زيادة حجم المخزون عن الهدف الموضوع، فإنه يمكن ذلك إلا أنه في هذه الحالة يكون قد أعطى لهدف المخزون أولوية أولى.

ثالثاً– التغيرات في ترتيب أولويات الأهداف:

قد تؤدي التغيرات في ترتيب أولويات مختلف الأهداف إلى إحداث تأثيرات هامة على الحل الأمثل الذي تمّ التوصل إليه قبل إجراء تلك التغيرات، ولذلك فإنّ من مجالات تحليل الحساسية التي يتعين القيام بها في مشكلات برمجة الأهداف هي إعادة ترتيب أولويات الأهداف لتحديد تأثير التغيرات في ترتيب الأولويات على الحل الأمثل.

فعلى سبيل المثال وجدنا في المشكلة الحالية أنّ هناك هدفين، يمثل هدف الربح الأولوية الأولى، ويمثل الحد الأقصى للمخزون الأولوية الثانية، وبفرض أنه قد تم إعادة ترتيب تلك الأولويات بأن أصبح هدف الحد الأقصى للمخزون مستوى الأولوية الأولى، وهدف الربح الأولوية الثانية.

للإجابة على ذلك نقول إنه بالرغم من أنّ إعادة الحل من بدايته أمر ممكن، إلا أنه ليس من الضروري إجراؤه، وأنّ اختبار الحساسية كاف للوصول إلى المعلومات التي نريدها، وسنرى كيف يتحقق ذلك.

لقد تبين لنا أنّ الجدول الأخير الذي تمّ التوصل إليه لحل المشكلة الحالية يمثل جدول الحل الأمثل، وذلك لأنّ أية محاولة لتحسين هدف المخزون سيكون على حساب هدف الربح، وعليه إذا تغيرت أولويات هذه الأهداف، فإنّ هذا الجدول لن يكون هو جدول الحل الأمثل، لأنّ هدف المخزون سيأخذ الآن أسبقية على هدف الربح.

وعلى ذلك إذا اعتبرنا أنّ هدف المخزون هو الذي يمثل هدف الأولوية الأولى، وقمنا بتحسين الحل عن طريق ضم المتغير (d_1^-) إلى الحل باعتباره المتغير ذات القيمة السالبة الوحيدة بصف صافي التغير لهدف المخزون، فسيكون المتغير الخارج في هذه الحالة هو المتغير (d_2^+)، وبعد إجراء التحسين سنصل إلى جدول جديد يطابق تماماً الجدول الثالث للحل لتلك المشكلة وفقاً لمستوى الأولويات الأصلية.

ويلاحظ أنّ ذلك الجدول الجديد هو الجدول الأمثل بالنسبة لتغير درجات الأولوية، وسيكون صف صافي التغير لهدف الأولوية الأولى (وهو الآن L_2) كله قيم صفرية أو موجبة، وهذا يشير إلى عدم إمكانية تحسينه عن طريق ضم المتغير (d_2^+) إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، إلا أنّ إعادة ترتيب الأهداف يمنعنا من عمل ذلك، لأنّ المتغير (d_2^+) له قيمة صافي تغير مقدارها (1+) في هدف الأولوية العليا الجديد (المخزون).

إنّ هذا المثال البسيط قد أوضح أنه يمكن اختبار تأثير إعادة ترتيب أولويات الأهداف بقليل من العمليات الحسابية البسيطة، هذا على الرغم من الأهمية القصوى لذلك التحليل لرجال الإدارة ومتخذي القرارات، إذ إنه يتيح لهم حلولاً بديلة للاختيار من بينها، وبالنسبة لمسألتنا الحالية سيكون أمام الإدارة بديلان يمكن الاختيار من بينهما وهما:

ترتيب الأولويات		قيم المتغيرات القرارية		مستوى تحقيق الهدف	
أولى	ثانية	x_1	x_2	الربح	المخزون
الربح	المخزون	400	6400	70000	6800
المخزون	الربح	2200	2800	61000	5000

11/7- تدريبات

مسألة رقم (1):

يحاول مدير الإنتاج بإحدى الشركات الصناعية وضع جدولة لإنتاج الأسبوع القادم من نوعين من منتجات الشركة.

- النوع الأول يمثل جهاز تلفزيون حجم كبير وتعطي الوحدة منه هامش ربح مقداره 1000 ليرة سورية.
- النوع الثاني يمثل جهاز تلفزيون حجم صغير وتعطي الوحدة منه هامش ربح مقداره 800 ليرة سورية.

ويهدف مدير الإنتاج إلى تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل للأسبوع القادم، علماً أنه قد تبين من المعلومات المتاحة بقسم التسويق أنّ هناك ارتباطات مع بعض العملاء يتعين الالتزام بها وتتمثل في تسليمها عدد 100 جهاز حجم كبير، وعدد 200 جهاز حجم صغير في نهاية الأسبوع القادم.

كذلك فإنّ مدير الإنتاج على علم بأنّ قوة العمل المتاحة لديه لا تزيد عدد ساعات التشغيل الأسبوعي عن 600 ساعة عمل، وتحتاج النوعية الأولى من الأجهزة إلى ثلاث ساعات عمل لتجميعها، وتحتاج النوعية الثانية إلى ساعتين عمل فقط.

وتهدف الشركة إلى تحقيق عدد من الأهداف ذات الأولويات المعينة وهي:

1- هدف الأولوية الأولى: تحقيق 200000 ل.س أرباحاً على الأقل.
2- هدف الأولوية الثانية: إنتاج 100 جهاز تلفزيون كبير الحجم على الأقل.
3- هدف الأولوية الثالثة: إنتاج 200 جهاز فيديو صغير الحجم على الأقل.
4- هدف الأولوية الرابعة: تجنب التشغيل لوقت إضافي (الساعات المتاحة 600 ساعة عمل).

المطلوب: إيجاد حجم الإنتاج الأمثل في ضوء المعلومات السابقة.

مسألة رقم (2):

بفرض أنّ إحدى الشركات الإنتاجية تقوم بإنتاج نوعين من المنتجات، وكل منهما يمر بعمليتين إنتاجيتين في قسمين، وأنّ طاقة هذين القسمين هي 30 ساعة للقسم الأول، و60 ساعة للقسم الثاني أسبوعياً، وأنّ كل وحدة من المنتج الأول تحتاج 2 ساعة من القسم الأول و6 ساعات من القسم الثاني.

أما المنتج الثاني فإنّ كل وحدة منه تحتاج إلى 3 ساعات من القسم الإنتاجي الأول، وإلى 4 ساعات من القسم الإنتاجي الثاني.

المطلوب مساعدة إدارة الشركة في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل في ضوء الأهداف التي وضعتها الإدارية وهي مرتبة كما يلي:

- هدف الأولوية الأولى: إنتاج 10 وحدات على الأقل من المنتجين معاً.
- هدف الأولوية الثانية: إنتاج 7 وحدات على الأقل من المنتج الثاني.
- هدف الأولوية الثالثة: تجنب التشغيل الإضافي للقسم الأول.
- هدف الأولوية الرابعة: تجنب التشغيل الإضافي للقسم الثاني.
- هدف الأولوية الخامسة: إنتاج 4 وحدات على الأقل من المنتج الأول.

الفصل الثامن

طريقة النقل

محتويات الفصل الثامن

1/8- مقدمة

2/8- تمثيل مشكلة النقل رياضياً

3/8- طرق إيجاد الحل المبدئي لمسائل النقل

1/3/8- طريقة الزاوية الشمالية الغربية

2/3/8- طريقة التكلفة الأقل في السطر

3/3/8- طريقة التكلفة الأقل في العمود

4/3/8- طريقة التكلفة الأقل في المصفوفة

5/3/8- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method

6/3/8- طريقة رسل التقريبية Russel's Approximation Method

4/8- طرق إيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل

5/8- تدريبات

1/8- مقدمة:

تُعدّ طريقة النقل أحد مجالات التطبيق الهامة لأساليب البرمجة الخطية، فمشكلة النقل تتعلق بقرارات تخصيص أو تعيين الطريقة المثلى للانتقال المادي لكميات من السلع توجد في نقاط معينة يطلق عليها نقاط التوريد أو الإمداد (من المصانع مثلاً)، إلى مواقع أخرى يطلق عليها نقاط الطلب (إلى مراكز التوزيع أو الاستهلاك) وذلك بشرط أن تصل التكلفة الكلية للنقل إلى أقل ما يمكن.

وأنّ مشكلة أو طريقة النقل ما هي إلا نموذج رياضي يتم تكوينه بشكل خاص مستهدفاً تحديد البديل الأمثل لنقل وتوزيع كميات معينة ممّا هو متاح من مصادر التوريد إلى مناطق استهلاك أو مستودعات تحتاج إلى تموينها بكميات معينة بحيث تصل تكلفة النقل إلى حدها الأدنى.[1]

ويتطلب الأمر حتى يمكن تطبيق نموذج النقل أن تكون المشكلة موضوع الدراسة تتوافر فيها بعض السمات أو الخصائص، بحيث إذا ما توافرت تلك الخصائص يمكن القول إنه يمكن حلها والتعامل معها بنموذج النقل، أما إذا فقدت أحد أو بعض تلك الخصائص يصبح من غير الممكن الاستفادة من نموذج النقل في حل تلك المشكلة، ويتعين البحث عندئذ عن أسلوب آخر يمكن من خلاله التعامل مع هذه المشكلة وتلك الخصائص هي: [2]

1- وجود عدة نقاط توريد (مصانع مثلاً) ذات طاقات محددة، ووجود عدة نقاط طلب (مراكز توزيع، مخازن) لها أيضاً طاقات استيعابية محددة، ويتعين أن تكون طاقات نقاط التوريد، وكذلك الطاقات الاستيعابية لمراكز الطلب معروفة ومقاسة كمياً بوحدات طبيعية (وحدات، أوزان).

1- د. محمد سليمان هدى، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في قطاع النقل البحري**، بلا تاريخ نشر، بلا ناشر، ص 185.

2- د. فريد عبد الفتاح زين الدين، **مرجع سبق ذكره**، ص ص. 140-141.

2- توافر عدد من البدائل المتاحة، أي أنّ هناك عدداً من الطرق التي يمكن استخدامها لنقل وشحن المنتجات من نقاط التوريد إلى نقاط الطلب، ويكون القرار الأمثل هو الاختيار من بين هذه الطرق البديلة والمفاضلة بينها ليس بشكل جزئي كل على حدة، ولكن بشكل كلي يعمل على تدنية إجمالي تكلفة النقل للكميات كلها.

3- لا بد وأن تتوافر وبشكل دقيق بيانات عن تكلفة النقل للوحدة من كل مركز توريد إلى كل مركز طلب.

2/8- تمثيل مشكلة النقل رياضياً:

يقصد بمشكلة النقل عملية نقل منتج معين من مصادر إنتاجه إلى مراكز توزيعه أو استهلاكه، سواء كان هذا المنتج مواد أولية تنقل من مواردها إلى مراكز تصنيعها، أو نقل سلع تامة الصنع من مصانعها أو مخازنها إلى مراكز توزيعها أو استهلاكها.[1]

نفرض أننا نريد نقل إحدى المواد من مراكز الإنتاج أو التخزين إلى مراكز الاستهلاك، لنفترض أنه لدينا n مركزاً للإنتاج أو التخزين، وأنّ المادة المفروضة فيها متوفرة بكميات محددة تساوي:

$b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_j \ldots\ldots, b_n$

كما نفترض أنه يوجد لدينا m مركزاً استهلاكياً، وأنّ كلاً منها يحتاج إلى كميات معينة من تلك المادة تساوي:

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_i \ldots\ldots, a_m$

ولنفترض أنّ تكلفة نقل الوحدة من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j تساوي c_{ij}.

1- د. أحمد رجب عبد العال ود. فتحي رزق السوافيري، (1998)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، كلية التجارة – جامعة الإسكندرية، ص234.

كما نرمز للكمية التي يجب نقلها من المركز الإنتاجي j إلى المركز الاستهلاكي i بالرمز x_{ij} ولنضع هذه المعطيات في جدول كالآتي:

مراكز الإنتاج j / مراكز الاستهلاك i	1	2	…..	j	…..	n	الكميات المطلوبة
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…..	c_{1j} x_{1j}	…..	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…..	c_{2i} x_{2j}	…..	c_{2n} x_{2n}	a_2
……	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…..	c_{ij} x_{ij}	…..	c_{jn} x_{jn}	a_i
……	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…..	c_{mi} x_{mi}	…..	c_{mn} x_{mn}	a_m
الكميات المتوفرة	b_1	b_2	…..	b_j	…..	b_n	

المطلوب تحديد حجم عمليات النقل x_{ij} من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

وهنا يوجد لدينا حالتين:

1- حالة النموذج المغلق:

وهي الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة من تلك المادة مساوياً لإجمالي الكميات المطلوبة منها، أي الحالة التي يكون فيها:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وفي هذه الحالة يكون لدينا تابع الهدف هو التابع الآتي:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} cijxj \rightarrow Min$$

أما الشروط فتحددها الكميات المتوفرة والكميات المطلوبة من كل مركز.

وبما أنّ مجموع ما يجب نقله من المركز الإنتاجي j إلى المراكز الاستهلاكية لابد وأن يساوي مقدار ما هو متوفر منه، إذاً يجب أن تتحقق لدينا الشروط التالية:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + \ldots\ldots + x_{m1} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + \ldots\ldots + x_{m2} = b_2$$
.
.
$$x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \ldots\ldots + x_{mn} = b_n$$

وهذه تمثل مجاميع الأعمدة.

وبما أنّ مجموع ما يجب نقله من المركز الاستهلاكي i إلى المراكز الإنتاجية لابد وأن يساوي مقدار ما هو مطلوب منه إذاً يجب أن تتحقق الشروط التالية:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots\ldots + x_{1n} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots\ldots + x_{2n} = a_2$$
.
.
$$x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \ldots\ldots + x_{mn} = a_m$$
$$x_{ij} \geq 0 \ (i: 1, 2, 3, \ldots m) \ , (j: 1, 2, 3, \ldots n)$$

وهذه تمثل مجاميع الأسطر.

2- حالة النموذج المفتوح:

هذه الحالة التي تكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة لا يساوي إجمالي الكميات المطلوبة، وهنا نواجه إحدى الحالتين:

أ- الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة أكبر من إجمالي الكميات المطلوبة، أي عندما يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} bj$$

في مثل هذه الحالة نضيف إلى المراكز الاستهلاكية المحددة بالمسألة مركز استهلاكياً وهمياً (n+1)، ونجعل مقدار استهلاكه يساوي الفرق بين الإجماليين:

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

كما نضع تكلفة النقل من مراكز الإنتاج جميعها إلى ذلك المركز الوهمي مساوية للصفر أي نضع:

$$c_{j,n+1} = 0 \ (i: 1, 2, 3, \ldots\ldots, m)$$

وبذلك نكون قد حولنا هذا النموذج المفتوح إلى نموذج مغلق يتضمن m مركزاً إنتاجياً و(n + 1) مركزاً استهلاكياً، ونطبق عليه ما طبقناه على الحالة السابقة.

وبذلك يأخذ النموذج الشكل التالي:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_j \rightarrow Min$$

وذلك ضمن الشروط الآتية المختصرة:

$$\sum_{J=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i: 1, 2, 3, \ldots\ldots, m + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j: 1, 2, 3, \ldots\ldots, n)$$

ب- الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة أقل من إجمالي الكميات المطلوبة، أي عندما يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

في مثل هذه الحالة نضيف إلى المراكز الإنتاجية المحددة بالمسألة مركز إنتاجياً وهمياً (m+1)، ونجعل مقدار ما ينتجه يساوي الفرق بين الإجماليين:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

كما نضع تكلفة النقل من ذلك المركز إلى المراكز الاستهلاكية مساوية للصفر أي نضع:

$$c_{j,m+1} = 0 \ (j: 1, 2, 3, \ldots\ldots, n)$$

وبذلك يأخذ النموذج الشكل التالي:

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \rightarrow \text{Min}$$

وذلك ضمن الشروط الآتية المختصرة:

$$\sum_{J=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i: 1, 2, 3, \ldots\ldots, m+1)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad (j: 1, 2, 3, \ldots\ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

3/8- طرق إيجاد الحل المبدئي لمسائل النقل:

في الحقيقة يوجد عدة طرق لإيجاد الحل المبدئي الممكن، وتلك الطرق ليست جميعها على درجة الكفاءة نفسها في التوصل إلى ذلك الحل المبدئي الممكن، فهناك طرق كل ما يعنيها فقط التوصل إلى ذلك، إلى حل أساسي مبدئي ممكن، أي مجرد استيفاء قيود العرض والطلب، دون أي اعتبار لعامل تكلفة النقل، وهناك طرق أخرى أكثر كفاءة إذ إنّ شغلها الشاغل ليس فقط مجرد إيجاد حل مبدئي ممكن، بل إنها تعمل في الوقت نفسه إلى أن يكون هذا الحل المبدئي الممكن يقترب ما أمكن من الحل الأمثل، ومن ثم يوفر الجهد المبذول في عدة جولات للحل وصولاً للحل الأمثل، إذ أنها طرق تأخذ في اعتبارها بالإضافة إلى استيفاء قيود العرض والطلب التوصل إلى حل مبدئي ذات إجمالي تكلفة نقل منخفضة، أي أنها تنظر أيضاً إلى عامل التكلفة، حتى وهي تعمل على إيجاد حل مبدئي ممكن، وعموماً فإنّ الطرق المستخدمة في إيجاد الحل المبدئي الممكن تتمثل في:

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
2- طريقة التكلفة الأقل في السطر.
3- طريقة التكلفة الأقل في العمود.
4- طريقة التكلفة الأقل في المصفوفة.
5- طريقة فوجل التقريبية.
6- طريقة رسل التقريبية

حتى يتحقق لدينا حل قاعدي في جميع الطرق السابقة لا بدّ من تحقق القاعدة العامة الآتية:

عدد الخلايا المليئة في المصفوفة = (n + m – 1)

حيث n تمثل عدد الأعمدة في المصفوفة، وm تمثل عدد الصفوف في المصفوفة.

وسوف نتناول هذه الطرق مفصلاً فيما يلي:

1/3/8- طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تُعدّ هذه الطريقة من أسهل الطرق المستخدمة لإيجاد الحل المبدئي الممكن لمشكلات النقل، وهي أكثر الطرق شيوعاً واستخداماً، ولقد سُميت بالزاوية الشمالية الغربية لأنها تبدأ بشغل الخلية الواقعة في أقصى الركن الشمالي الغربي بالجدول المبدئي، ثم نتابع خطوات شغل باقي وفق الأسلوب الذي تسير عليه هذه الطريقة حتى يتم التوصل إلى حل قاعدي مناسب، وذلك بشرط المحافظة على التوازن المفروض للكميات المطلوبة والمتوفرة في جميع أسطر وأعمدة المصفوفة.

لتوضيح كيفية العمل بهذا الطريقة سنقوم بتطبيقها على المسألة لتالية:

مسألة هامة: لنفرض أنه لدينا المسألة التالية:

لدينا إحدى الشركات الصناعية التي لديها ثلاثة مصانع رئيسة (مراكز الإنتاج)، ولديها أربعة مراكز رئيسة لتوزيع منتجاتها (مراكز للاستهلاك)، وأنّ تكلفة نقل الوحدة والكميات المتوفرة والمطلوبة معطاة في الجدول التالي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6 x_{11}	8 x_{12}	3 x_{13}	60
B_2	12 x_{21}	15 x_{22}	11 x_{23}	130
B_3	4 x_{31}	7 x_{32}	2 x_{33}	110
B_4	3 x_{41}	8 x_{42}	5 x_{43}	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

نبدأ بخطوات الحل وفق هذه الطريقة كما يلي:

نبدأ بالحل من الخلية الأولى من الزاوية الشمالية الغربية، ونضع فيها أكبر كمية يمكن نقلها من المركز الإنتاجي A_1 إلى المركز الاستهلاكي B_1 ، أي نضع فيها $x_{11} = 60$ ، وبذلك نكون قد لبينا حاجة المركز الاستهلاكي B_1، وبذلك يتبقى لدينا في المركز الإنتاجي A_1 مقدار 90 ، ثم بعد ذلك نلبي حاجة المركز الاستهلاكي B_2 بأن نضع فيه 90 من A_1 و40 من A_2 ، وبذلك نكون قد لبينا طلب المركز الاستهلاكي B_2 ، ثم بعد ذلك نضع 80 من المركز الإنتاجي A_2 إلى المركز الاستهلاكي B_3 ، يتبقى 30 حاجة المركز الاستهلاكي B_3 نأخذها من المركز الإنتاجي A_3، وأخيراً 50 حاجة المركز الاستهلاكي B_4 نأخذها من المتوفر في المركز الإنتاجي A_3 ، وبذلك يتحقق التوازن بين الكميات المتوفرة والكميات المعروضة. نضع هذه المعلومات في جدول كما يلي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6 **60**	8	3	60
B_2	12 **90**	15 **40**	11	130
B_3	4	7 **80**	2 **30**	110
B_4	3	8	5 **50**	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

وحتى يتشكل لدينا حل قاعدي مبدئي يجب أن تتحقق لدينا العلاقة التالية:
عدد الخلايا المليئة = (n + m – 1) حيث n تمثل عدد الأعمدة في المصفوفة، و m تمثل عدد الصفوف في المصفوفة.
وبالنظر إلى الجدول السابق نجد أن عدد الخلايا المليئة = 6، وبذلك يتحقق شرط الحل المبدئي القاعدي.
وستكون تكلفة النقل الإجمالية وفق هذه الطريقة (ونحسبها عن طريق ضرب الكميات في الخلايا المليئة بتكلفة نقل الوحدة في كل خلية) كما يلي:
$60 \times 6 + 90 \times 12 + 40 \times 15 + 80 \times 7 + 30 \times 2 + 50 \times 5 = 2910$

2/3/8- طريقة التكلفة الأقل في السطر:

تعتمد هذه الطريقة في إيجاد الحل المبدئي الممكن ليس فقط على اعتبارات القيود ولكن ستنظر بعين الاعتبار إلى التكلفة أيضاً، وتقوم على مبدأ إشباع الخلية ذات التكلفة الأقل في كل سطر قبل غيرها، بما يحقق التوازن بين المطلوب والمتوفر في كل سطر وعمود، نبدأ بالسطر الأول ثم بعد ذلك ننتقل للسطر الذي يليه بالأسلوب نفسه حتى يتم تغطية جميع الأسطر، وذلك بما لا يخل بشرط التوازن بين الكميات المتوفرة والمطلوبة في كل سطر وعمود.
لو طبقنا هذه الطريقة على مسألتنا الحالية نجد:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6	8	3 **60**	60
B_2	12 **110**	15	11 **20**	130
B_3	4 **40**	7 **70**	2	110
B_4	3	8 **50**	5	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 350

يتضح من هذا الجدول أننا بدأنا بملئ الخلية ذات التكلفة الأقل في السطر الأول، وكانت عند 3 في الخلية B_1A_3 حيث كان السطر الأول مطلوب فيه 60 والعمود المقابل لهذه الخلية الأقل يوجد فيه 80 أخذنا منها 60 ويتبقى فيه 20 ، ثم بعد ذلك ننتقل للسطر الثاني، نجد أنّ أقل تكلفة في هذا السطر هي عند 11 في الخلية B_2A_4 نجد أنّ هذا السطر مطلوب له 130 والعمود المقابل لهذه الخلية يوجد فيه فقط 20 ، نملئ هذه الخلية بـ 20 فقط المتوفر في العمود المقابل لها، ثم نبحث عن الخلية ذات التكلفة الأقل التالية في هذا السطر فنجدها عند 12 في الخلية B_2A_1 فنملأ هذه الخلية بالمتبقي المطلوب من السطر الثاني وهو كمية 110 نأخذها من المتاح في العمود الأول A_1 فيتبقى فيه 40 ، وبذلك نكون قد انتهينا من السطر الثاني، وبعدها ننتقل للسطر الثالث فنجد أنّ أقل تكلفة في هذا السطر هي 2 ولكن العمود المقابل لها تمّ إشغاله، لذلك ننتقل إلى الخلية ذات التكلفة الأقل في هذا السطر التي تليها فنجدها 4 عند الخلية B_3A_1 فنقوم بملئ هذه الخلية بـ40 المتوفر في العمود الأول المقابل لها، بعد ذلك ننتقل إلى الخلية

ذات التكلفة الأقل التالية في هذا السطر فنجدها 7 عند الخلية B_3A_2 نملأ هذه الخلية ب 70 وهو الباقي المطلوب لهذا السطر، وهي نأخذها من المتوفر في العمود A_2 وبذلك نكون قد شغلنا الصف الثاني، ثم ننتقل إلى السطر الثالث فنجد أنّ أقل تكلفة في هذا السطر عمودها غير مشغول هي 4 عند الخلية B_3A_1 فنقوم بملئ هذه الخلية بـ 40 وهو الباقي من المتوفر في العمود A_1، ثم ننتقل للخلية ذات التكلفة الأقل التالية في هذا السطر فنجدها 7 عند الخلية B_3A_2 نملأ هذه الخلية بـ 70 وهو الباقي من المطلوب لهذا السطر وبذلك نكون قد غطينا السطر الثالث، ثم ننتقل للسطر الرابع والأخير نجد في هذا السطر أنّ أقل تكلفة فيه والمقابلة لعمود غير مشغول هي 8 عند الخلية B_4A_2 نملئ هذه الخلية بـ 50 وهي تمثل المطلوب لهذا السطر والباقي من المتوفر في العمود A_2 وبذلك نكون قد غطينا السطر الرابع، وحققنا التوازن بين الكميات المتوفرة والمطلوبة في هذه المصفوفة.

وبالنظر إلى الجدول السابق نجد أن عدد الخلايا المليئة = 6 وبذلك يتحقق شرط الحل المبدئي القاعدي عدد الخلايا المليئة = $(n + m - 1)$

وستكون تكلفة النقل الإجمالية وفق هذه الطريقة (ونحسبها عن طريق ضرب الكميات في الخلايا المليئة بتكلفة نقل الوحدة في كل خلية) كما يلي:

$$60 \times 3 + 110 \times 12 + 20 \times 11 + 40 \times 4 + 70 \times 7 + 50 \times 8 = 2770$$

وهي تكلفة نقل أقل من الطريقة السابقة طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

3/3/8- طريقة التكلفة الأقل في العمود:

تعتمد هذه الطريقة كذلك في إيجاد الحل المبدئي الممكن ليس فقط على اعتبارات القيود ولكن ستنظر بعين الاعتبار إلى التكلفة أيضاً، وتقوم على مبدأ إشباع الخلية ذات التكلفة الأقل في كل عمود قبل غيرها من الخلايا، بما يحقق التوازن بين المطلوب والمتوفر في كل سطر وعمود، نبدأ بالعمود الأول ثم بعد ذلك ننتقل للعمود الذي يليه بالأسلوب نفسه حتى يتم تغطية جميع الأعمدة، وذلك بما لا يخل بشرط التوازن بين الكميات المتوفرة والمطلوبة في كل سطر وعمود.

لو طبقنا هذه الطريقة على مسألتنا الحالية نجد:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6	8 **60**	3	60
B_2	12	15 **50**	11 **80**	130
B_3	4 **100**	7 **10**	2	110
B_4	3 **50**	8	5	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 350

يتضح من هذا الجدول أننا بدأنا بملئ الخلية ذات التكلفة الأقل في العمود الأول وكانت عند 3 في الخلية B_4A_1 ، حيث المطلوب في السطر المقابل لها هو 50 نقوم بشغل هذا الصف، ثم ننتقل للخلية الأقل التالية في هذا العمود فنجدها عند 4 في الخلية B_3A_1 ، السطر المقابل لها مطلوب له 110 والباقي المتوفر في هذا العمود هو 100 ، نقوم بملئ هذه الخلية بـ 100 وبذلك نكون قد أشغلنا العمود الأول وتبقى 10 من حاجة السطر الثاني، ثم بعد ذلك ننتقل للعمود الثاني فنجد أنّ أقل تكلفة بهذا العمود والمقابلة لسطر غير مشغول هي 7 عند الخلية B_3A_2 نقوم بملئ هذه الخلية بـ 10 وهو المتبقي من حاجة السطر الثاني، ثم ننتقل للخلية التالية ذات التكلفة الأقل في هذا العمود فنجدها عند 8 في الخلية B_1A_2 ، نملأ هذه الخلية بـ 60 وهو المطلوب للسطر الأول، ثم ننتقل للتكلفة الأقل التالية في هذا العمود والمقابلة لسطر غير مشغول فنجدها عند 15 في الخلية B_2A_2 ونضع فيها 50 وهي المتبقي من المتوفر في العمود الثاني، وبذلك نكون قد أشغلنا العمود الثاني، بعد ذلك ننتقل للعمود الثالث والأخير فنجد أنّ الخلية الوحيدة في هذا

العمود والمقابلة لسطر غير مشغول هي عند 11 في الخلية B_2A_3 نضع فيها 80 وهي تمثل المتوفر في العمود الثالث والباقي من المطلوب السطر الثاني، وبذلك نكون حققنا التوازن بين الكميات المتوفرة والمطلوبة في هذه المصفوفة.

وبالنظر إلى الجدول السابق نجد أن عدد الخلايا المليئة = 6 وبذلك يتحقق شرط الحل المبدئي القاعدي عدد الخلايا المليئة = $(n + m - 1)$، وستكون تكلفة النقل الإجمالية وفق هذه الطريقة (ونحسبها عن طريق ضرب الكميات في الخلايا المليئة بتكلفة نقل الوحدة في كل خلية) كما يلي:

$$100 \times 4 + 50 \times 3 + 60 \times 8 + 50 \times 15 + 10 \times 7 + 80 \times 11 = 2730$$

وهي تكلفة نقل أقل من الطريقتين السابقتين.

4/3/8- طريقة التكلفة الأقل في المصفوفة:

وفقاً لهذه الطريقة فإنها لن تكتفي فقط بالنظر إلى أدنى تكلفة في كل سطر أو أدنى تكلفة في كل عمود، وإنما يتم التعامل مع المصفوفة كلها بكامل صفوفها وأعمدتها، وذلك بغية الوصول إلى جدول مبدئي ممكن، وأيضاً إجمالي تكلفة النقل وفقاً له في وضع معقول يمكننا من الوصول إلى جدول الحل الأمثل بمجهود أقل وفي عدد أقل من جداول تحسين الحل أقل.

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6 **60**	8	3	60
B_2	12 **10**	15 **120**	11	130
B_3	4 **30**	7	2 **80**	110
B_4	3 **50**	8	5	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

يتضح من هذا الجدول أننا بدأنا بملئ الخلية ذات التكلفة الأقل في المصفوفة وهي عند 2 في الخلية B_3A_3 ، عندها يتم شغل الخلية بكمية مقدارها 80 وهي تعادل المتوفر في العمود الثالث A_3 وبذلك نكون قد أشغلنا العمود الثالث بالكامل وبالتالي يتم استبعاده، ويتبقى مطلوب للسطر الثالث 30، بعد ذلك نبحث عن أقل تكلفة في المصفوفة بعد استبعاد العمود الثالث فنجدها 3 عند الخلية B_4A_1 فنقوم شغلها بكمية 50 وهي تعادل المطلوب في السطر الرابع B_4 وبذلك نكون قد أشغلنا السطر الرابع بالكامل وبالتالي يتم استبعاده، ويتبقى متوفر في العمود الأول A_1 كمية مقدراها 100، بعد ذلك نبحث عن أقل تكلفة في المصفوفة بعد استبعاد من تمّ إشغاله فنجدها عند 4 في الخلية B_3A_1 ، فنقوم بملئ هذه الخلية بكمية 30 وهي تعادل الباقي من المطلوب في السطر الثالث B_3 وبالتالي يتم إشباع السطر الثالث ويتم استبعاده، ويتبقى متوفر في العمود الأول A_1 كمية مقدراها 70 ، بعد ذلك نبحث عن أقل تكلفة في المصفوفة بعد استبعاد من تمّ إشغاله فنجدها عند 6 في الخلية B_1A_1 ، وبالتالي يتم إشباع السطر الأول B_1 بكمية 60 ويتم استبعاده, ويتبقى متوفر في العمود الأول A_1 كمية مقدراها 10، بعد ذلك نبحث عن أقل تكلفة في المصفوفة بعد استبعاد من تمّ إشغاله فنجدها عند 12 في الخلية B_2A_1 ، فيتم ملأ هذه الخلية بكمية مقدارها 10 وهي المتبقي من المتوفر في العمود الأول A_1 وبالتالي يتم إشباعه، ويتبقى لدينا مطلوب في السطر الثاني 120، بعد ذلك نبحث عن أقل تكلفة في المصفوفة بعد استبعاد من تمّ إشغاله فنجدها عند 15 في الخلية B_2A_2 فيتم ملئ هذه الخلية بكمية مقدارها 120، وهي تعادل المتبقي من المطلوب في السطر الثاني A_2 والمتوفر في العمود الثاني B_2 ، وذلك نكون قد أشغلنا السطر الثاني والعمود الثاني، وبذلك نكون قد حققنا التوازن بين الكميات المتوفرة والمطلوبة في المصفوفة.

وبالنظر إلى الجدول السابق نجد أن عدد الخلايا المليئة = 6 وبذلك يتحقق شرط الحل المبدئي القاعدي عدد الخلايا المليئة = $(n + m - 1)$

وستكون تكلفة النقل الإجمالية وفق هذه الطريقة (ونحسبها عن طريق ضرب الكميات في الخلايا المليئة بتكلفة نقل الوحدة في كل خلية) كما يلي:

$60 \times 6 + 10 \times 12 + 30 \times 4 + 50 \times 3 + 120 \times 15 + 80 \times 2 = 2710$

وهي تكلفة نقل أقل من الطرق الثلاث السابقة.

5/3/8- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method:

تعتمد هذه الطريقة على حساب الفرق بين أقل قيمتين للتكلفة في كل سطر وفي كل عمود، وذلك لمعرفة مدى الخسارة التي تلحق بتابع الهدف إذا لم نشبع العنصر ذات التكلفة الأقل، ويتم العمل بهذه الطريقة وفق الخطوات الآتية:

1- نقوم بحساب الفروقات بين أقل قيمتين للتكلفة في كل سطر ونضع هذه الفروقات في عمود إضافي مستقل، ثم نقوم بحساب الفروقات بين أقل قيمتين للتكلفة في كل عمود ونضعها في سطر إضافي مستقل.

2- نختار أكبر تلك الفروقات (في السطر والعمود معاً) ونعتبر السطر أو العمود المقابل لها هو السطر أو العمود الذي يجب أن نستخدمه قبل غيره، وعلينا أن نشبع العنصر ذات التكلفة الأقل فيه، وذلك ضمن شروط الكميات المتوفرة والمطلوبة المقابلة لها.

3- نهمل السطر أو العمود الذي يتم إشباعه، ونعدل أرقام الكميات المتوفرة والمطلوبة بطرح الكمية التي وضعناها في العنصر ذات التكلفة الأقل، ملاحظة (إذا وجد الفرق الأكبر في سطر وعمود معاً فنختار أحدهما بأسلوب كيفي ونطبق عملية التخصيص)، وإذا أشبع سطر وعمود معاً في آن واحد فأشطب بأسلوب كيفي أحدهما وأترك في الآخر صفراً بدون إشباع.

4- نعود إلى الخطوة (1) ونكرر العمل السابق نفسه، مع الأخذ بعين الاعتبار الأسطر والأعمدة المهملة سابقاً، حتى نحصل على حل قاعدي يتضمن $(n + m - 1)$ خلية مليئة.

5- إذا بقي سطر أو عمود واحد بعرض أو طلب موجب دون تشطيب أخصصه باستخدام طريقة التكلفة الأقل ولا داعي لحساب الفروقات من جديد.

وبتطبيق هذه الطريقة على مسألتنا الحالية نجد أنه إذا حسبنا الفروقات بين أقل قيمتين للتكلفة في كل سطر وعمود ووضعناها في العمود Δ_1 وفي السطر Δ'_1 ومن دراسة عناصر العمود Δ_1 والسطر Δ'_1 نجد أنّ أكبر عنصر فيهما هو (3) وهو المقابل للسطر الأول B_1 ، لذلك يجب علينا أن نشبع العنصر ذات التكلفة الأقل في هذا السطر قبل غيره من العناصر، فنضع في الخلية B_1A_3 كمية مقدارها 60 وهي كامل الكمية المطلوبة في السطر الأول، ثم نهمل السطر الأول الذي تمّ إشباعه، ويتبقى لدينا متوفر في العمود الثالث 20.

ثم نقوم بحساب الفروقات من جديد بعد إهمال السطر الأول B_1 الذي تمّ إشباعه، فنحصل على الأرقام المسجلة في العمود Δ_2 وفي السطر Δ'_2 الإضافيين.

ومن دراسة عناصر العمود Δ_2 والسطر Δ'_2 نجد أنّ أكبر عنصر فيهما هو (3) وهو المقابل للعمود الثالث A_3 ، ونقوم بإشباع العنصر ذي التكلفة الأقل في هذا العمود فنضع في الخلية B_3A_3 كمية مقدارها 20 ، وهي المتبقي من المتوفر في العمود الثالث A_3 وبذلك يكون العمود الثالث قد تمّ إشغاله، والسطر الثالث أصبح مطلوب له 90 بدلاً من 110 بعد طرح كمية 20 منه.

ثم نقوم بحساب الفروقات مع إهمال السطر الأول B1 والعمود الثالث A_3 فنحصل على الأرقام المسجلة في العمود Δ_3 وفي السطر Δ'_3 الإضافيين، ومن دراسة عناصر العمود Δ_3 والسطر Δ'_3 نجد أنّ أكبر عنصر فيهما هو (5) وهو المقابل للسطر الرابع B_4 نقوم بإشباع العنصر ذات التكلفة الأقل في هذا السطر فنضع في الخلية B_4A_1 كمية مقدارها 50، وهي المطلوب في السطر الرابع B_4 فيتم إشغاله، ويتبقى متوفر في العمود الأول مقدار100 بعد طرح 50 منه.

ثم نعود بحساب الفروقات مع إهمال السطر الأول B1 والعمود الثالث A_3 والسطر الرابع B_4 فنحصل على الأرقام المسجلة في العمود Δ_4 وفي السطر Δ'_4

الإضافيين، ومن دراسة عناصر العمود Δ_4 والسطر Δ'_4 نجد أنّ أكبر عنصر فيهما هو (8) وهو مكرر نختار أحدها وليكن المقابل للعمود الأول A_1 نقوم بإشباع العنصر ذات التكلفة الأقل في هذا العمود، فنضع في الخلية B_3A_1 كمية مقدارها 90 ، وهي المتبقي من المطلوب في السطر الثالث B_3 ونضع كمية مقدارها 10 في الخلية B_2A_1 ، وبذلك يكون العمود الأول قد تمّ إشغاله بكامل الكمية المتوفرة به وبالتالي يتم استبعاده. وأخيراً يتبقى لدينا العمود الثاني A_2 ويتوفر فيه كمية مقدارها 120 نضعها في الخلية B_2A_2 وبذلك نكون قد غطينا العمود الثاني A_2 وغطينا الباقي من المطلوب في السطر الثاني B_2 ، وبذلك نكون قد غطينا جميع الأسطر والأعمدة بما يحقق التوازن بين الكميات المتوفرة والمطلوبة لكافة الأعمدة والأسطر.

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك		A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة	الفروقات في الأسطر			
						Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
B_1		6	8	3 **60**	**60**	3	—	—	—
B_2		12 **10**	15 **120**	11	**130**	1	1	3	3
B_3		4 **90**	7	2 **20**	**110**	2	2	3	3
B_4		3 **50**	8	5	**50**	2	2	5	—
الكميات المتوفرة		**150**	**120**	**80**	350 / 350				
الفروقات في الأعمدة	Δ'_1	1	1	1					
	Δ'_2	1	1	3					
	Δ'_3	1	1	—					
	Δ'_4	8	8	—					

وبالنظر إلى الجدول السابق نجد أنّ عدد الخلايا المليئة = 6 وبذلك يتحقق شرط الحل المبدئي القاعدي عدد الخلايا المليئة = (n + m – 1)

وستكون تكلفة النقل الإجمالية وفق هذه الطريقة (ونحسبها عن طريق ضرب الكميات في الخلايا المليئة بتكلفة نقل الوحدة في كل خلية) كما يلي:

$10 \times 12 + 90 \times 4 + 50 \times 3 + 120 \times 15 + 60 \times 3 + 20 \times 2 = 2650$

وهي تكلفة نقل أقل من الطرق الأربعة السابقة.

6/3/8- طريقة رسل التقريبية Russel's Approximation Method:

هذه الطريقة أيضاً من الطرق التي تأخذ في اعتبارها تكلفة النقل عند إيجاد جدول الحل المبدئي، ولذلك سنجد أنّ الحل المبدئي الذي يتم إعداده وفقاً لهذه الطريقة سيقترب كثيراً من الحل الأمثل، أي ستكون خطوات أو جداول الحل للوصول إلى الحل الأمثل وفق هذه الطريقة أقل من غيرها من الطرق.

وتتلخص خطوات الحل وفق هذه الطريقة بما يلي:

1- حساب الفروق المطلقة لكل خلية من خلايا المصفوفة باستخدام المعادلة التالية:

الفروق المطلقة للخلية = تكلفة الخلية – أعلى تكلفة في سطر الخلية – أعلى تكلفة في عمود تلك الخلية.

2- بعد حساب الفروق المطلقة لكل خلايا المصفوفة يتم اختيار تلك الخلية ذات أكبر رقم بإشارة سالبة، وفي حالة إذا ما اتضح أنّ هناك أكثر من خلية تشترك في الرقم الأكبر، فإنّ الاختيار بينهما يتم جزافياً، أو يمكن الرجوع ثانية إلى التكاليف الأصلية لتلك الخلايا واختيار الأدنى في التكلفة الأصلية.

3- يتم شغل الخلية ذات أكبر رقم مطلق بإشارة سالبة بكمية سطرها أو كمية عمودها، أيهما أقل، والسطر أو العمود الذي يتم استيفاؤه بالكامل يتم استبعاده من الجولة التالية للحل.

4- يتم إعداد الجولة التالية للحل بعد عملية الاستبعاد هذه، ومع ملاحظة إجراء التعديلات الواجبة في الكميات المتوفرة والمطلوبة وفقاً للتخصيص الذي تمّ في الخطوات السابقة.

5- يتم السير في الخطوات السابقة وفي جولات متتالية حتى يتم استيفاء كافة الأعمدة والأسطر.

سنقوم بتطبيق هذه الطريقة على مسألتنا الحالية والتي كانت تأخذ الشكل التالي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6	8	3	60
B_2	12	15	11	130
B_3	4	7	2	110
B_4	3	8	5	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

في الجولة الأولى وتطبيقاً لخطوات طريقة رسل التقريبية يتم حساب الفروق المطلقة لكل خلية وفقاً للمعادلة السابق ذكرها في الخطوة الأولى، وفيما يلي حساب هذه الفروق سطراً سطراً:

السطر الأول:

فروق الخلية B_1A_1 : $6 - 8 - 12 = -14$

فروق الخلية B_1A_2 : $8 - 8 - 15 = -15$

فروق الخلية B_1A_3 : $3 - 8 - 11 = -16$

السطر الثاني:

فروق الخلية B_2A_1 : $12 - 15 - 12 = -15$

فروق الخلية B_2A_2 : $15 - 15 - 15 = -15$

فروق الخلية B_2A_3 : $11 - 15 - 11 = -15$

السطر الثالث:

فروق الخلية B_3A_1 : $4 - 7 - 12 = -15$

فروق الخلية B_3A_2 : $7 - 7 - 15 = -15$

فروق الخلية B_3A_3 : $2 - 7 - 11 = -16$

السطر الرابع:

فروق الخلية B_4A_1 : $3 - 8 - 12 = \mathbf{-17}$

فروق الخلية B_4A_2 : $8 - 8 - 15 = -15$

فروق الخلية B_4A_3 : $5 - 8 - 11 = -14$

يتضح من الخطوة الأولى أنّ الخلية B_4A_1 هي الخلية ذات أكبر قيمة فروق مطلقة بإشارة سالبة (17 –)، لذلك وفقاً لخطوات طريقة رسل التقريبية يتم شغل تلك الخلية بكمية سطرها (50) أو عمودها (150) أيهما أقل، أي سيتم شغل هذه الخلية بكمية مقدارها (50)، وبالتالي فإنّ السطر الرابع قد تمّ استيفاؤه بالكامل، ومن ثم يتم استبعاده من الجولة التالية للحل، كذلك يتم تعديل الكمية المتوفرة في العمود الأول A_1 لتصبح 100 بدلاً من 150. ثم بعد ذلك نعيد تصوير المصفوفة بعد إجراء هذه التعديلات، ونقوم بتكرار الخطوة السابقة:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6	8	3	60
B_2	12	15	11	130
B_3	4	7	2	110
الكميات المتوفرة	100	120	80	300 / 300

السطر الأول:

فروق الخلية B_1A_1 : $6 - 8 - 12 = -14$

فروق الخلية B_1A_2 : $8 - 8 - 15 = -15$

فروق الخلية B_1A_3 : $3 - 8 - 11 = \mathbf{-16}$

السطر الثاني:

فروق الخلية B_2A_1 : $12 - 15 - 12 = -15$

فروق الخلية B_2A_2 : $15 - 15 - 15 = -15$

فروق الخلية B_2A_3 : $11 - 15 - 11 = -15$

السطر الثالث:

فروق الخلية B_3A_1 : $4 - 7 - 12 = -15$

فروق الخلية B_3A_2 : $7 - 7 - 15 = -15$

فروق الخلية B_3A_3 : $2 - 7 - 11 = \mathbf{-16}$

يتضح من هذه الخطوة الثانية في حساب الفروق، أنّ هناك خليتين كل منهما يمثل أكبر قيمة فروق مطلقة بإشارة سالبة وهما الخليتان B_1A_3 وB_3A_3 والفروق المطلقة لكل منهما مقدارها (16–)، يمكن الاختيار من بينهما جزافياً، أو

يمكن أن نختار أيهما أقل تكلفة نقل في المصفوفة الأصلية، والتي يظهر منها أنّ تكلفة النقل للوحدة الواحدة في الخلية B_1A_3 هو (3)، وفي الخلية B_3A_3 هو (2) لذلك سنختار شغل الخلية الأقل تكلفة أيB_3A_3 ، ويتم شغلها بكمية تساوي كمية عمودها (80) لأنها الأقل من سطرها الذي يساوي (110)، وبالتالي فإنّ العمود الثالث قد تمّ استيفاؤه بالكامل ومن ثم يتم استبعاده من الجولة التالية للحل، كذلك يتم تعديل الكمية المطلوبة في السطر الثالث B_3لتصبح 30 بدلاً من 110.

ثم بعد ذلك نعيد تصوير المصفوفة بعد إجراء هذه التعديلات، ونقوم بتكرار الخطوة السابقة أي حساب الفروق المطلقة لخلاياها.

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	الكميات المطلوبة
B_1	6	8	60
B_2	12	15	130
B_3	4	7	30
الكميات المتوفرة	100	120	220 / 220

السطر الأول:

فروق الخلية B_1A_1 : $6 - 8 - 12 = -14$

فروق الخلية B_1A_2 : $8 - 8 - 15 = \mathbf{-15}$

السطر الثاني:

فروق الخلية B_2A_1 : $12 - 15 - 12 = \mathbf{-15}$

فروق الخلية B_2A_2 : $15 - 15 - 15 = \mathbf{-15}$

السطر الثالث:

فروق الخلية B_3A_1 : $4 - 7 - 12 = \mathbf{-15}$

فروق الخلية B_3A_2 : $7 - 7 - 15 = \mathbf{-15}$

يتضح من الخطوة الثالثة، أنّ هناك خمس خلايا لها الفرق نفسه، لذلك سنختار الخلية B_3A_1 لأنها الأقل تكلفة بينهن، لذلك وفقاً لخطوات طريقة رسل التقريبية يتم شغل تلك الخلية بكمية سطرها (30) أو عمودها (100) أيهما أقل، أي سيتم شغل هذه الخلية بكمية مقدارها (30) وبالتالي فإنّ السطر الثالث قد تمّ استيفاؤه بالكامل، ومن ثم يتم استبعاده من الجولة التالية للحل، كذلك يتم تعديل الكمية المتوفرة في العمود الأول A_1 لتصبح 70 بدلاً من 100.

ثم بعد ذلك نعيد تصوير المصفوفة بعد إجراء هذه التعديلات، ونقوم بتكرار الخطوة السابقة أي حساب الفروق المطلقة لخلاياها.

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	الكميات المطلوبة
B_1	6	8	60
B_2	12	15	130
الكميات المتوفرة	70	120	190 / 190

السطر الأول:

فروق الخلية B_1A_1 : $6 - 8 - 12 = -14$

فروق الخلية B_1A_2 : $8 - 8 - 15 = \mathbf{-15}$

السطر الثاني:

فروق الخلية B_2A_1 : $12 - 15 - 12 = \mathbf{-15}$

فروق الخلية B_2A_2 : $15 - 12 - 15 = -$ **15**

يتضح من الخطوة الرابعة، أنّ هناك ثلاث خلايا لها الفرق نفسه وهو (15–)، لذلك سنختار الخلية B_1A_2 لأنها الأقل تكلفة بينهن، لذلك وفقاً لخطوات طريقة رسل التقريبية يتم شغل تلك الخلية بكمية سطرها (60) أو عمودها (120) أيهما أقل، أي سيتم شغل هذه الخلية بكمية مقدارها (60)، وبالتالي فإنّ السطر الأول قد تمّ استيفاؤه بالكامل، ومن ثم يتم استبعاده من الجولة التالية للحل، كذلك يتم تعديل الكمية المتوفرة في العمود الثاني A_2 لتصبح 60 بدلاً من 120، ثم بعد ذلك نعيد تصوير المصفوفة بعد إجراء هذه التعديلات.

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	الكميات المطلوبة
B_2	12	15	130
الكميات المتوفرة	70	60	130 / 130

من الواضح من هذه المصفوفة أنه لا داعي أن نكرر حساب الفروق، حيث إنّ تخصصات الكميات واضحة ومحددة ولا تحتاج لأي عمليات حسابية، إذ سيتم شغل الخلية B_2A_1 بعدد (70) وحدة وشغل الخلية B_2A_2 بعدد (60) وحدة. وعلى ذلك فإنّ الجدول المبدئي الممكن وفقاً لطريقة رسل التقريبية سيكون كالآتي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6	8 **60**	3	60
B_2	12 **70**	15 **60**	11	130
B_3	4 **30**	7	2 **80**	110
B_4	3 **50**	8	5	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

وبالنظر إلى الجدول السابق نجد أنّ عدد الخلايا المليئة = 6 وبذلك يتحقق شرط الحل المبدئي القاعدي عدد الخلايا المليئة = $(n + m - 1)$

وستكون تكلفة النقل الإجمالية وفق هذه الطريقة (ونحسبها عن طريق ضرب الكميات في الخلايا المليئة بتكلفة نقل الوحدة في كل خلية) كما يلي:

$70 \times 12 + 30 \times 4 + 50 \times 3 + 60 \times 8 + 60 \times 15 + 80 \times 2 = 2650$

وهي تكلفة نقل أقل من الطرق الأربعة السابقة، وتعادل تكلفة النقل التي حصلنا عليها من طريقة فوجل التقريبية.

4/8- طرق إيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل

وفقاً لمنهج طريقة النقل، فإنّ إيجاد جدول الحل المبدئي الممكن يعدّ الخطوة الأولى من خطوات حل مشكلة النقل، وتكون الخطوة الثانية هي تحديد ما إذا كان جدول الحل المبدئي الذي تمّ التوصل إليه من الخطوة الأولى يمثل الحل الأمثل أم لا ؟ بمعنى اختبار مثالية الحل، فإذا ما اتضح أنّ الحل أمثل فقد توصلنا

إلى حل المشكلة، أما إذا تبين أنّ الحل غير أمثل فإنّ الأمر يتطلب الاستمرار في العمل نحو تحسينه من أجل الوصول للحل الأمثل.[1]

وأنّ اختبار المثالية لمشكلة النقل، هو في أساسه ومفهومه نفس الاختبار الذي سبق إتباعه في طريقة السمبلكس، أي أنه منهجياً يسير بالخطوات المتبعة في تحسين الحل المبدئي لطريقة السمبلكس نفسها، إنّ ذلك المدخل سيكون هو نفسه المدخل المتبع في تحديد أمثلية الحل لجولات مشكلة النقل، فالمتغيرات غير الأساسية في مشكلة النقل هي تلك الخلايا التي لم يتم شغلها بالجدول (الخلايا الفارغة)، ولذلك يتم مقارنة تكلفة النقل لكل خلية فارغة، وسنطلق عليها تكلفة النقل المباشرة، بصافي التغير بتكلفة الطرق الأخرى الذي سيحدث لو فكرنا بشغل تلك الخلية الفارغة، وسنطلق عليه اصطلاح التكاليف غير المباشرة، وسيكون الحل أمثلاً إذا كانت التكلفة المباشرة للخلايا الفارغة (متغيرات غير أساسية) تزيد عن صافي التخفيض في التكاليف غير المباشرة الناشئة من إعادة النقل عبر الخلايا الأخرى (الطرق الأخرى).

ويوجد عدة طرق لإيجاد الحل الأمثل ومن أهمها:

- **طريقة الدرج أو الحجر المتنقل:**

لتوضيح هذه الطريقة سنطبقها على مسألتنا الحالية:

بفرض أننا حصلنا على حل قاعدي أول بواسطة الأساليب السابقة وليكن بواسطة الزاوية الشمالية الغربية:

1- د. إسماعيل إبراهيم جمعة وآخرون، (2003) ، **بحوث العمليات في اتخاذ القرارات مع تطبيقات على الحاسب**، كلية التجارة- جامعة الإسكندرية، ص239.

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6 **60**	8	3	60
B_2	12 **90**	15 **40**	11	130
B_3	4	7 **80**	2 **30**	110
B_4	3	8	5 **50**	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

- حتى نحصل على حل قاعدي جديد يجب علينا أن نقوم بنقل أحد المتحولات غير القاعدية إلى المتحولات القاعدية، وهذا يعني أنه يجب علينا أن نشغل إحدى الخلايا الفارغة، ونفرغ إحدى الخلايا المشغولة في الجدول السابق.
- عن طريق تحديد مسار ننطلق من الخلية الفارغة والمسار مغلق، ويجب أن ينتهي بخلية مليئة ولا بد من العودة إلى الخلية نفسها.
- نبدأ بإشارة (+) للخلية الفارغة المطلوب إدخالها ثم إشارة (–) وبالتناوب.
- يجب أن يتم التغيير ضمن التوازنات المفروضة على الكميات المتوفرة والمطلوبة، كما يجب أن نحدد مقدار الوفر الذي سنحققه من جراء ذلك التبديل.
- لو أردنا أن ندخل المتغير x_{12} إلى القاعدة ونحدد المسار له:

$$\Delta_{12} = +8 - 15 + 12 - 6 = -1$$

هذا يعني أنه مقابل إضافة كل وحدة إلى الخلية B_1A_2 فإنّ التكلفة ستقل بمقدار (1–)، ومن هنا نستنتج أنّ من مصلحتنا أن ندخل المتغير x_{12} إلى القاعدة.

– لو أردنا أن ندخل المتغير x_{13} إلى القاعدة ونحدد المسار له:

$$\Delta_{13} = +3 - 2 + 7 - 15 + 12 - 6 = -1$$

هذا يعني كذلك أنه مقابل إضافة كل وحدة إلى الخلية B_1A_3 فإنّ التكلفة ستقل بمقدار (1–)، ومن هنا نستنتج أنّ من مصلحتنا أن ندخل المتغير x_{13} إلى القاعدة.

– لو أردنا أن ندخل المتغير x_{23} إلى القاعدة ونحدد المسار له:

$$\Delta_{23} = +11 - 2 + 7 - 15 = +1$$

هذا يعني أنّ التكلفة الإجمالية ستزداد بمقدار (1) مقابل إضافة كل وحدة إلى الخلية B_2A_3، لذلك نستنتج أنه ليس من مصلحتنا أن ندخل المتغير x_{23} إلى القاعدة لأنه سيزيد من التكلفة.

– لو أردنا أن ندخل المتغير x_{31} إلى القاعدة ونحدد المسار له:

$$\Delta_{31} = +4 - 7 + 15 - 12 = 0$$

هذا يعني أنّ زيادة x_{31} أو عدمها لا يؤثر على التكلفة، لأنها لا تزيد ولا تنقص من التكلفة الإجمالية للنقل.

– لو أردنا أن ندخل المتغير x_{41} إلى القاعدة ونحدد المسار له:

$$\Delta_{41} = +3 - 5 + 2 - 7 + 15 - 12 = -4$$

هذا يعني أنه مقابل إضافة كل وحدة إلى الخلية B_4A_1 فإنّ التكلفة ستقل بمقدار (4–)، أي أنّه من مصلحتنا أن ندخل المتغير x_{41} إلى القاعدة.

– لو أردنا أن ندخل المتغير x_{42} إلى القاعدة ونحدد المسار له:

$$\Delta_{42} = +8 - 5 + 2 - 7 = -2$$

هذا يعني أنه مقابل إضافة كل وحدة إلى الخلية B_4A_2 فإنّ التكلفة ستقل بمقدار (2–)، ومن هنا نستنتج أنّ من مصلحتنا أن ندخل المتغير x_{42} إلى القاعدة.

لذلك تنحصر مهمتنا في إدخال المتغيرات التي ساهمت في تخفيض التكلفة ونختار أصغرها.

$$\text{Min}\,(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{41}, \Delta_{42}) = \text{Min}\,(-1, -1, -4, -2) = -4$$

لذلك ندخل x_{41} إلى القاعدة، ونخرج منها المتحول الذي يقع على أحد الرؤوس السالبة، والذي تكون حمولته هي الحمولة الصغرى بينها، فلإدخال x_{41} إلى القاعدة علينا أن نخرج x_{43} من القاعدة لأنه ذات الحمولة الأقل بين الرؤوس السالبة للمسار (50, 80, 90)، بعد ذلك سنقوم بطرح الرقم الأقل في الكميات وهو (50) من الخلايا ذات الرؤوس السالبة، وسنضيفه للخلايا ذات الرؤوس الموجبة.

سيصبح الجدول بعد إجراء هذه التحويلات كما يلي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6 **60**	8	3	60
B_2	12 **40**	15 **90**	11	130
B_3	4	7 **30**	2 **80**	110
B_4	3 **50**	8	5	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

وهو يمثل حلاً قاعدياً أفضل من الحل السابق لأنّ تكلفة النقل عنده أصبحت تساوي:

$60 \times 6 + 40 \times 12 + 90 \times 15 + 30 \times 7 + 80 \times 2 + 50 \times 3 = 2710$

ولكن حتى نحكم عليه بأنه حل أمثل أم لا، سنقوم بحساب تغيرات التكلفة A_{ij} بالنسبة للمتحولات غير القاعدية (وهي المتحولات المقابلة للخلايا الفارغة)، ونجد أنّ المسارات المختلفة المقابلة لتلك المتحولات تعطينا:

$\Delta_{12} = +8 - 15 + 12 - 6 = -1$

$\Delta_{13} = +3 - 2 + 7 - 15 + 12 - 6 = -1$

$\Delta_{23} = +11 - 2 + 7 - 15 = +1$

$\Delta_{31} = +4 - 7 + 15 - 12 = 0$

$\Delta_{42} = +8 - 3 + 12 - 15 = +2$

$\Delta_{43} = +5 - 3 + 12 - 15 + 7 - 2 = +4$

نلاحظ من هذه النتائج أنّ هناك خليتين متساويتين في تحسين الحل هما $(\Delta_{12}, \Delta_{13})$، إذا تمّ اختيار الخلية Δ_{12} إلى الحل ستكون أقصى كمية يمكن نقلها هي 60 وحدة، وكذلك إذا تمّ اختيار الخلية Δ_{13} إلى الحل ستكون أقصى كمية يمكن نقلها هي 60 وحدة، أي أنهما متساويتان في كل المعايير هنا يتم الاختيار الجزافي بينهما وليكن اخترنا الخلية Δ_{13} .

لذلك ندخل x_{13} إلى القاعدة، ونخرج منها المتحول الذي يقع على أحد الرؤوس السالبة، والذي تكون حمولته هي الحمولة الصغرى بينها، فلإدخال x_{13} إلى القاعدة علينا أن نخرج x_{11} من القاعدة لأنه ذات الحمولة الأقل بين الرؤوس السالبة للمسار (60, 90, 80)، بعد ذلك سنقوم بطرح الرقم الأقل في الكميات وهو (60) من الخلايا ذات الرؤوس السالبة وسنضيفه للخلايا ذات الرؤوس الموجبة.

سيصبح الجدول بعد إجراء هذه التحويلات كما يلي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	الكميات المطلوبة
B_1	6	8	3 **60**	60
B_2	12 **100**	15 **30**	11	130
B_3	4	7 **90**	2 **20**	110
B_4	3 **50**	8	5	50
الكميات المتوفرة	150	120	80	350 / 350

وهو يمثل حلاً قاعدياً أفضل من الحل السابق لأنّ تكلفة النقل هنا تساوي:

$60 \times 3 + 100 \times 12 + 30 \times 15 + 90 \times 7 + 20 \times 2 + 50 \times 3 = 2650$

ولكن حتى نحكم عليه بأنه حل أمثل أم لا، سنقوم بحساب تغيرات التكلفة A_{ij} بالنسبة للمتحولات غير القاعدية (وهي المتحولات المقابلة للخلايا الفارغة)، ونجد أنّ المسارات المختلفة المقابلة لتلك المتحولات تعطينا:

$\Delta_{11} = + 6 - 3 + 2 - 7 + 15 - 12 = + 1$

$\Delta_{12} = + 8 - 3 + 2 - 7 = 0$

$\Delta_{23} = + 11 - 2 + 7 - 15 = + 1$

$\Delta_{31} = + 4 - 7 + 15 - 12 = 0$

$\Delta_{42} = + 8 - 3 + 12 - 15 = + 2$

$\Delta_{43} = + 5 - 3 + 12 - 15 + 7 - 2 = + 4$

من هنا يتبين أنّ الجدول السابق يمثل جدول الحل الأمثل لأنه لا توجد أية خلية فارغة تحسن الحل.

6/8- تدريبات

مسألة رقم (ا):

بفرض وجود شركة صناعية لديها أربعة مصانع رئيسة (مراكز الإنتاج)، ولديها ثلاثة مراكز لتوزيع إنتاجها (مراكز الإستهلاك)، وأنّ تكلفة نقل الوحدة والكميات المتوفرة والمطلوبة معطاة في الجدول التالي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة
B_1	2	1	3	2	90
B_2	2	3	3	1	70
B_3	3	3	2	1	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210 / 210

المطلوب إيجاد خطة النقل المناسبة للشركة والتي تحقق أقل قيمة للتكلفة وذلك باستخدام:

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2- طريقة التكلفة الأقل في السطر.

3- طريقة التكلفة الأقل في العمود.

4- طريقة التكلفة الأقل في المصفوفة.

5- طريقة فوجل التقريبية.

6- طريقة رسل التقريبية

ثم اختبر مثالية الحل الذي حصلت عليه باستخدام طريقة الدرج أو الحجر المتنقل.

مسألة رقم (2):

شركة لإنتاج الأسمدة الكيماوية لها خمسة مصانع (مراكز الإنتاج)، ولديها أربعة مراكز لتوزيع إنتاجها (مراكز الإستهلاك))، وأنّ تكلفة نقل الوحدة والكميات المتوفرة والمطلوبة معطاة في الجدول التالي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	الكميات المطلوبة
B_1	14	14	16	18	16	600
B_2	16	12	12	15	17	800
B_3	14	14	16	17	18	760
B_4	17	17	16	12	13	600
الكميات المتوفرة	500	700	640	700	500	2760 / 2760

المطلوب إيجاد خطة النقل المناسبة للشركة والتي تحقق أقل قيمة للتكلفة وذلك باستخدام:

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2- طريقة التكلفة الأقل في السطر.

3- طريقة التكلفة الأقل في العمود.

4- طريقة التكلفة الأقل في المصفوفة.

5- طريقة فوجل التقريبية.

6- طريقة رسل التقريبية

ثم اختبر مثالية الحل الذي حصلت عليه باستخدام طريقة الدرج أو الحجر المتنقل.

الفصل التاسع

طريقة التخصيص

محتويات الفصل التاسع

9/1 – مقدمة

9/2 – خصائص مشكلة التخصيص

9/3 – الصياغة العامة لمشكلة التخصيص

9/4 – طرق حل مسائل التخصيص

9/4/1 – الطريقة المجرية للتخصيص

9/4/2– طريقة الفرع والحد لحل مسائل التخصيص

5/9– معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص

9/5/1 – عدم تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف

9/5/2– حل مشكلة التخصيص ذات هدف التعظيم

9/6 – تدريبات

1/9- مقدمة:

يواجه متخذ القرار مجموعة من مشكلات التخصيص في الحياة العملية، التي تؤثر على تحقيق الأهداف والأرباح للمنظمات، لذلك فإنّ كفاءة التخصيص هي إحدى معايير تقويم الإدارة العليا، لما لها من آثار على تحقيق أهداف المنظمة بأقل التكاليف.

كما هو الحال بالنسبة لمشكلة النقل، فإنّ مشكلة التخصيص تُعدّ أيضاً حالة خاصة من مشكلات البرمجة الخطية، وإن كانت في حقيقة الأمر لا تخرج عن كونها حالة من الحالات الخاصة لمشكلة النقل.[1]

وتقوم مشكلة التخصيص على مفهوم يتلخص في العمل على تخصيص عدد من العناصر المفردة (أي ليست كميات ولكنها الوحدة الواحدة) على عدد من الأغراض أو الاستخدامات الفردية أيضاً، وهذا المفهوم هو الذي جعل مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشكلات النقل، إذ إنه في حين تتعامل مشكلة النقل مع إشباع احتياجات غرض معين بكميات معينة من مصدر أو عدة مصادر متاح بها تلك الكميات، فإنّ مشكلة التخصيص تعمل على تخصيص مورد مفرد معين بالذات لإشباع حاجة معينة بالذات.[2]

وتعتمد عملية التخصيص على مبدأ تكلفة الفرصة البديلة، حيث أنّ تكلفة اختيار قرار معين من مجموعة من البدائل يستوجب التضحية بالفرصة البديلة من جراء ذلك الاختيار.

وأنّ أهم استخدامات مشكلات التخصيص في الحياة العملية تتمثل في:

1- تخصيص المدراء على المشاريع.

2- تخصيص العمال على الآلات.

1- د. حلمي عبد الفتاح البشبيشي وآخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص295.

2- د. فريد عبد الفتاح زين الدين، **مرجع سبق ذكره**، ص517.

3- تخصيص رجال البيع على المناطق البيعية.

4- تخصيص سيارات الإسعاف لوحدات الطوارئ.

5- تخصيص المحامين والمحاسبين للعملاء.

6- تخصيص العقود للمقاولين.

7- تخصيص المخازن للبضائع.

8- تخصيص أعضاء هيئة التدريس للقاعات والطلاب.

9- تخصيص الباصات لنقل العاملين.

10- بالإضافة إلى استخدامات متعددة أخرى مدنية وعسكرية.

9/2- خصائص مشكلة التخصيص:

تتميز مشكلة التخصيص بالعديد من الخصائص والتي من أهمها[1]:

1- أنّ عدد الوسائل يساوي عدد المهام، وفي حالة تمثيل مشكلة التخصيص بمصفوفة فتكون المصفوفة مربعة أي أنّ $m = n$.

2- تخصيص كل وسيلة (فرد- عمل) لمهمة واحدة، أي أنه لا يمكن تكليف شخص واحد للقيام بأكثر من مهمة، أو تخصيص أكثر من مهمة لفرد واحد.[2]

3- تعتمد عملية التخصيص الأعداد الصحيحة.

4- تكون التكاليف محددة مسبقاً.

5- توافر شرط عدم السلبية.

1- د. حسين الطيف السامرائي، (1997)، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، الأردن- دار الهلال، ص348.

2 -W. J. Stevenson, (2002), **"Operations Management**", Seventh Edition, New York: McGraw- Hill/ Irwin. P.358.

3/9- الصياغة العامة لمشكلة التخصيص:

بهدف توضيح الصياغة العامة لمشكلة التخصيص، وطبيعة المشكلات التي تتعامل معها، والفرق بينها وبين مشكلة النقل سنأخذ المثال التالي:

بفرض أنّ أحد مكاتب الاستشارات الإدارية والبحوث قد تعاقد مع ثلاث من الشركات، كل منها يريد أن يتولى مكتب الاستشارات القيام بدراسة تسويقية لمنتجاته، ويريد مكتب الاستشارات أن يخصص مستشاراً علمياً لكل دراسة من الدراسات الثلاث، وبفرض وجود ثلاثة مستشارين متاحين فعلاً للقيام بمسؤولية دراسة معينة.

فالمستشارون المتاحون ثلاثة، والدراسات المطلوبة ثلاث، إذاً يمكن أن يتولى مستشار معين القيام بدراسة معينة، لو كان الأمر بهذه البساطة ما وجدت مشكلة، ولكن الأمر ذات بعد أهم وهدف ينبغي تحقيقه وليس مجرد توزيع أعمال.

إنّ توزيع العمل يتعين أن يستهدف ليس مجرد إسناد عمل لكل شخص، بل الهدف أن تكون عملية التوزيع هذه تهدف إلى الانتهاء من الأعمال على خير وجه، وهذا هو الفرق بين مجرد إنجاز العمل، وبين الرغبة في بلوغ الكفاءة في الإنجاز، ولذلك فإنّ إدارة المكتب الاستشاري، وبما لديها من خبرة وسابق معرفة بالمستشارين الثلاثة المتاحين حالياً تعرف وتدرك تماماً أنّ الوقت الذي سيستغرقه كل منهم في تنفيذ أي من تلك الدراسات الثلاث سيختلف من دراسة لأخرى وفقاً للخبرة والمقدرة التخصصية للمستشار الذي سيتم تكليفه لكل دراسة.

أي أنّ المشكلة التي تواجه إدارة المكتب الاستشاري هي الكيفية التي يتم بها تخصيص المستشارين الثلاثة المتاحين على تلك الدراسات الثلاث بشرط أن يكون مجموع الوقت المستغرق للانتهاء منها جميعاً أدنى حد ممكن.

وحتى يمكن تبسيط تلك المشكلة، فإنه من الأفضل أن نحدد أولاً كافة البدائل المتاحة أمام الإدارة، أي يجب أن نقف أولاً على كافة التخصيصات الممكنة

بشرط أن يخصص مستشار واحد فقط لتنفيذ دراسة واحدة فقط، وأن لا يقوم بالدراسة الواحدة أكثر من مستشار واحد.

حيث إنه يوجد ثلاثة مستشارين، وثلاثة بحوث فإنّ الحلول البديلة والممكنة للتخصيص هي ستة حلول ($3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$)

فإذا رمزنا للمستشارين بالرموز: A, B, C

ورمزنا للدراسات بالرموز: X, Y, Z

فإنّ كافة التخصيصات المحتملة يمكن حصرها كما يلي:

1- AX , BY, CZ
2- AX , BZ , CY
3- BX , AY, CZ
4- BX , AZ , CY
5- CX , AY, BZ
6- CX , AZ, BY

إنّ هذه الحلول هي بمثابة حصر شامل لكافة الحلول البديلة (التخصصات البديلة) لمشكلة مكتب الاستشارات الإدارية، ولكن التساؤل الهام هو على أساس يتم اختيار الحل الأمثل؟.

حيث إنّ الهدف في مثالنا الحالي هو تخفيض الزمن الكلي للانتهاء من الدراسات الثلاث، لذلك فإنه يتعين أن نتعرف على الزمن الذي يستغرقه كل مستشار في إنجاز كل دراسة.

وبفرض أنّ مكتب الاستشارات الإدارية قد أعد الجدول التالي للأزمنة المقدرة للانتهاء من كل دراسة إذا ما قام بها كل مستشار.

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)		
	X	Y	Z
A	20	30	18
B	18	36	10
C	12	28	6

يتضح من هذا الجدول أنه طالما أنّ الفترة الزمنية لإنجاز نفس الدراسة تختلف باختلاف من يؤديها، إذاً يتعين عند تخصيص هذه الدراسات أن يتم توزيعها بطريقة علمية تضمن لنا حسن التخصيص الأمثل.

لقد حددنا قبل ذلك حصراً شاملاً لكافة الحلول البديلة أو كافة التخصيصات البديلة، إذاً يتعين علينا الآن وبعد الوقوف على الأزمنة التقديرية الواردة بالجدول السابق أن نقوم بتقييم الحلول البديلة لاختيار الحل الأمثل الذي يعمل على الوصول بمجموع زمن الانتهاء من الدراسات الثلاث إلى الحد الأدنى. ويوضح الجدول التالي أزمنة الانتهاء من كل دراسة بالنسبة لكافة التخصيصات البديلة الممكنة.

المستشار	الحلول البديلة للتخصيص					
	البديل الأول	البديل الثاني	البديل الثالث	البديل الرابع	البديل الخامس	البديل السادس
A	X(20)	X(20)	Y(30)	Z(18)	Y(30)	Z(18)
B	Y(36)	Z(10)	X(18)	X(18)	Z(10)	Y(36)
C	Z(6)	Y(28)	Z(6)	Y(28)	X(12)	X(12)
مجموع الأزمنة	62	58	54	64	**52**	66

أدنى وقت ممكن

يتضح من هذا الجدول أنّ البديل الأمثل هو البديل الخامس، ووفقاً لهذا الحل يتم تخصيص المستشار (A) لتنفيذ الدراسة (Y)، ويُعهد للمستشار (B) القيام بالدراسة (Z)، أما الدراسة (X) فيخصص لها المستشار (C)، ويكون إجمالي الوقت المقدر للانتهاء من تلك الدراسات الثلاثة (52) يوماً.

إنّ المثال البسيط الذي عالجناه في الجزء السابق يوضح مفهوم مشكلة التخصيص وما تهدف إليه، إلا أنّ المدخل الذي استخدمناه في الحل والذي كان يستند إلى حصر كافة الحلول البديلة للتخصيص، ثم اختيار أفضلها قد يكون

مناسباً مع تلك المشكلات الصغيرة والبسيطة والتي لا تتجاوز كافة حلولها البديلة عن عدد قليل من الحلول فقط، إلا أنه يعتبر غير مناسب بل ومعقد عندما يستخدم أو نفكر في استخدامه للتعامل مع المشكلات الكبيرة، والتي هي السمة الغالبة في دنيا الأعمال في عصرنا الحالي.

فمثلاً إذا كانت المشكلة التي قمنا بحلها تتضمن أربعة مستشارين وأربعة أبحاث، ففي هذه الحالة تكون عدد الحلول البديلة الممكنة والواجب تقييمها لاختيار أفضلها 24 بديلاً، أما إذا كانت المشكلة هي تخصيص ثمانية مستشارين على ثمانية مهام سيكون لدينا 40320 حلاً ممكناً، وطبيعي أنه من غير العملي ومن غير المقبول أن نحاول حل مثل تلك المشكلات بهذه الطريقة، وإزاء تلك الصعوبات فقد تبلورت أساليب جديدة حديثة أسهل وأسرع لحل مشكلات التخصيص.

9/4- طرق حل مسائل التخصيص:

يوجد العديد من الطرق وسنتناول هنا أهم هذه الطرق والتي تتمثل في:

1- الطريقة المجرية للتخصيص.

2- طريقة الفرع والحد

وسنتناول هاتين الطريقتين مفصلاً فيما يلي:

9/4/1- الطريقة المجرية للتخصيص[1]:

تمتاز هذه الطريقة بأنها سريعة وفعّالة جداً في التعامل مع مشكلات التخصيص، وتسير الطريقة المجرية لحل مشكلات التخصيص في ثلاث خطوات رئيسة:

1- يرجع إلى:

- د. أحمد سرور محمد، **بحوث العمليات في الإدارة**، القاهرة- مكتبة عين شمس، بلا تاريخ نشر، ص247.

- د. إسماعيل إبراهيم جمعة وآخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص263.

الخطوة الأولى: إعداد جدول تكلفة الفرصة:

تقوم الطريقة المجرية للتخصيص على تطبيق مفهوم تكلفة الفرصة، وهذا المفهوم يعني بصورة إجمالية موجزة أنّ تكلفة أي قرار يتضمن حتماً تكلفة تلك الفرص التي تمّ التضحية بها عندما أخذنا ذلك الموقف أو أصدرنا ذلك القرار، ويلعب هذا المفهوم دوراً كبيراً عند التعامل مع العمليات الحسابية لحل مشكلات التخصيص.

أما كيفية استخدام تكلفة الفرصة في خطوات الحل بالطريقة المجرية للتخصيص، فإنه من المفيد أن نعرض مرة أخرى لجدول الأزمنة التقديرية لنفس المثال الذي تعرضنا له سابقاً، والخاص بمكتب الاستشارات الإدارية والتي كانت تأخذ الشكل التالي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)		
	X	Y	Z
A	20	30	18
B	18	36	10
C	12	28	6

بفرض قررنا أن يتولى المستشار (A) القيام بالدراسة (X)، فإنه يمكنه أن ينتهي منها في مدة مقدارها عشرون يوماً، ولكن بالنظر إلى عمود الدراسة (X) نجد أنّ المستشار (C) كان بإمكانه الانتهاء من الدراسة (X) في مدة أقل مقدارها 12 يوم فقط، لذلك يمكن القول إنّ تخصيص المستشار (A) للدراسة (X) قرار غير أمثل لأنه سيؤدي إلى التضحية بفرصة مقدارها (8) يوم، إذا ما خصص المستشار (A) على الدراسة(X)، وبتضحية مقدارها (6) يوم إذا ما خصص المستشار (B) نفس الدراسة.

أي أنه بالنسبة للعمود (X) فإنّ أفضل من يتولى هذه الدراسة هو المستشار (C). وعلى ذلك يمكن القول إننا لو قمنا بطرح أقل رقم في العمود (X) من جميع الأزمنة بذلك العمود، فإننا سنحصل على تكلفة الفرصة للدراسة (X) بالنسبة

للمستشارين الثلاثة، وبتكرار العمل نفسه على العمود (Y) والعمود (Z) نحصل على تكلفة الفرصة للدراسات الثلاث بالنسبة للمستشارين الثلاثة.

من ناحية أخرى، فكما كان لكل عمود تكلفة فرصة، فإنّ لكل سطر تكلفة فرصة أيضاً، فمثلاً يمكن للمستشار (A) أن يقوم بتنفيذ أي من الأبحاث والدراسات الثلاثة، إلا أنه بالنظر إلى صف المستشار (A)، نجد أنه من الأفضل قيامه بالدراسة (Z) لأنه سيستغرق زمناً مقداره (18) يوم، أما إذا خصصناه للقيام بالدراسة (X) فإننا بذلك نكون قد فقدنا فرصة مقدارها (2) يوم، وتكون تكلفة الفرصة (12) يوم إذا خصصناه على الدراسة (Y).

أي أنه إذا كانت تكلفة فرصة للأعمدة، فأيضاً هناك تكلفة فرصة للصفوف.

وحيث إنّ الخطوة الأولى في الطريقة المجرية، هي إعداد جدول تكلفة الفرصة، فإنه يتعين إذاً لتنفيذ هذه الخطوة أن نحسبها للصفوف والأعمدة، وهذا يستلزم أن تمر الخطوة الأولى بمرحلتين هما:

أ- طرح أقل رقم بكل صف من جميع أرقام ذلك الصف، وذلك بالنسبة لكل الصفوف الموجودة بالمسألة.

وبتطبيق هذه المرحلة على جدول المشكلة التي نعالجها تكون النتيجة بعد العمليات الحسابية كالآتي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)		
	X	Y	Z
A	2	12	0
B	8	26	0
C	6	22	0

ب- طرح أقل رقم بكل عمود (من الجدول الناتج من المرحلة السابقة وليس الجدول الأصلي) من أرقام ذلك العمود، وذلك بالنسبة لكل الأعمدة الموجودة بالجدول.

ويظهر الجدول الجديد بعد تلك العملية الحسابية على الصورة التالية:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)		
	X	Y	Z
A	0	0	0
B	6	14	0
C	4	10	0

وهذا الجدول الذي توصلنا بعد المرحلة الأولى والثانية يمثل جدول تكلفة الفرصة لكامل المشكلة.

وبطبيعة الحال فإننا نريد أن نصل إلى ذلك التخصيص الذي يصل بتكلفة الفرصة إلى صفر، لأنّ معنى ذلك أنّ هذا التخصيص هو الأمثل حيث تصل تكلفة الفرصة إلى حدها الأدنى وهو الصفر.

الخطوة الثانية: تغطية جميع القيم الصفرية بالمصفوفة:

تتعامل هذه الخطوة مع المصفوفة الناتجة من الخطوة الأولى، والتي تعبّر عن مصفوفة تكلفة الفرصة، وتتمثل الخطوة الثانية في تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة الأفقية أو الرأسية أو كلاهما معاً، (ممنوع الخطوط القطرية)، ونؤكد مرة أخرى أنّ التغطية بالخطوط المرسومة يتعين أن يتوافر فيها شرطان:

1- إنها خطوط أفقية أو رأسية أو كلاهما.

2- أن يتم التغطية بأقل عدد ممكن منها.

فإذا اتضح أنّ أقل عدد ممكن من تلك الخطوط والتي أمكن بها تغطية جميع القيم الصفرية، عددها يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة بالجدول، نكون بذلك قد وصلنا إلى الحل الأمثل، ويبقى فقط تحديده وتعيينه، أما إذا كان عدد تلك الخطوط أقل من عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، فإننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، ويتطلب الأمر أن نسير إلى الخطوة الثالثة من الحل.

وبتطبيق تلك الخطوة على مصفوفة تلك الفرصة، نجد أننا تمكنا من تغطية جميع القيم الصفرية بخطين فقط (كما هو مبين بالمصفوفة التالية)، وهذا يعني أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل حيث إنّ عدد الصفوف أو عدد الأعمدة ثلاثة.

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)		
	X	Y	Z
A	~~0~~	~~0~~	~~0~~
B	6	14	0
C	4	10	0

أمكن تغطية جميع الخلايا الصفرية بخطين فقط.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

تبين من خلال اختبار المثالية الذي أجريناه في الخطوة الثانية، أنّ مصفوفة الفرصة السابقة لا تمثل مصفوفة الحل الأمثل، لذلك سيتم في هذه الخطوة العمل على تحسين الحل والذي يتم في مراحل متتالية كما يلي:

1- تعيين أقل قيمة غير مغطاة في المصفوفة كلها، بالنظر إلى الجدول السابق يتبين أنّ أقل قيمة غير مغطاة هي الرقم (4).

2- يتم طرح أقل قيمة غير مغطاة من جميع القيم غير المغطاة.

3- إضافة أقل قيمة غير مغطاة (وهي الرقم 4)، إلى القيم الواقعة عند تقاطع الخطوط المرسومة (سنجد أنّ التقاطع فقط عند الخلية AZ) إذاً القيمة الصفرية الواقعة عند التقاطع بعد إضافة القيمة 4 إليها تصبح 4.

4- باقي القيم المغطاة وغير الواقعة عند تقاطعات لا يجرى عليها أي تعديل، بل تكتب في الجدول التالي كما هي دون تغيير، وبعد تطبيق العمليات الحسابية السابقة على المصفوفة الناتجة من الخطوة الثانية، ستظهر المصفوفة الجديدة على الصورة التالية:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)		
	X	Y	Z
A	0	0	4
B	2	10	0
C	0	6	0

وبعد إتمام تلك الخطوة نعود مرة أخرى لتكرار الخطوة الثانية، وهي خطوة اختبار المثالية، والتي تتضمن تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأسية، وفيما يلي إعادة تصوير المصفوفة بعد إجراء التغطية.

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)		
	X	Y	Z
A	0	0	4
B	2	10	0
C	0	6	0

وبالنظر إلى المصفوفة السابقة نجد أنه أمكن تغطية جميع القيم الصفرية بها بعدد ثلاثة خطوط وهو أقل عدد أمكن التغطية به.

وطبقاً لقاعدة المثالية، فحيث أنّ عدد الخطوط المرسومة تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، فإننا نكون قد وصلنا بذلك إلى مصفوفة الحل الأمثل، ويتبقى فقط تعيين ذلك الحل الأمثل (التخصيص الأمثل).

إنّ الحل الأمثل وفق هذه الطريقة هو ذلك الحل الذي يكون مجموع تكلفة الفرصة له صفراً من واقع مصفوفة الحل النهائية.

للتوصل إلى ذلك نبحث عن ذلك الصف الذي يوجد به صفر واحد فقط، فمثلاً الصف (A) يوجد به قيمتان صفريتان، إذاً نتركه وننتقل إلى الصف (B) فسنجد أنّ به قيمة صفرية واحدة وهي الواقعة عند الخلية (BZ)، إذاً يتم تخصيص المستشار (B) بالدراسة (Z).

ثم نعود مرة أخرى للبحث عن صف به صفر واحد فقط، سنجد أنّ الصف (A) يوجد به قيمتان صفريتان، والصف (B) قد تمّ تخصيصه وانتهى الأمر، والصف (C) يوجد به ظاهراً قيمتان صفريتان، بينما الحقيقة أنه توجد به قيمة صفرية واحدة لأنّ الدراسة (Z) قد تمّ تخصيصها للمستشار (B)، فكأنّ العمود (Z) حذف مع صف (B)، وباستبعادهما من المصفوفة يكون السطر (C) به قيمة صفرية واحدة وهي عند الخلية (CX)، لذلك يتم تخصيص المستشار (C) للدراسة (X)، ثم نعاود الكرة مرة أخرى لنبحث عن صف به قيمة صفرية واحدة، سنجد أنه لم يعد أمامنا إلا السطر (A)، وهو فعلاً به قيمة صفرية واحدة (وذلك بعد استبعاد العمود X والصف C)، وهو عند الخلية (AY) لذلك يتم تخصيص المستشار (A) للدراسة (Y).

وتلخيصاً للحل الأمثل تظهر المصفوفة التالية للتخصيص الأمثل وفقاً للخطوة الثالثة.

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء (باليوم)			التخصيص الأمثل	تكلفة الفرصة
	X	Y	Z		
A	0	**(0)**	4	AY	0
B	2	10	**(0)**	BZ	0
C	**(0)**	6	0	CX	0

ويكون الوقت المستغرق للانتهاء من الدراسات الثلاث أقل زمن ممكن وفقاً لهذا التخصيص، ولحساب ذلك الزمن يتطلب العودة إلى القيم الموجودة بالمصفوفة الأصلية لتحديد زمن كل تخصيص، ومن ثم الزمن الكلي للتخصيص الأمثل للمشكلة كلها، ويمكن حساب الزمن الكلي كالآتي:

AY = 30 يوم

BZ = 10 يوم

CX = 12 يوم

52 يوم

وهي النتيجة نفسها التي توصلنا إليها سابقاً عند تطبيق طريقة الحصر الشامل للحلول البديلة.

مسائل محلولة حول الطريقة المجرية للتخصيص:

مسألة رقم (1):

مطلوب تخصيص ثلاث مهام هي A, B, C للتشغيل على ثلاث آلات هي X, Y, Z، بحيث تخصص مهمة واحدة لكل آلة، ولا تقوم الآلة إلا بتشغيل مهمة واحدة فقط، علماً أنّ التكلفة التقديرية لتشغيل كل مهمة على كل آلة هي:

المهام	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	25	31	35
B	15	20	24
C	22	19	17

المطلوب إيجاد التخصيص الأمثل.

***1*- الحل بطريقة حصر كافة الحلول البديلة:**

حيث إنّ عدد المهام المطلوب تخصيصها على الآلات هي ثلاث مهام، وأنّ عدد الآلات المطلوب التخصيص عليها أيضاً ثلاث آلات، إذاً إنّ العدد الكلي لكافة الحلول البديلة الممكنة هو ($3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$) حلول بديلة، وهذه الحلول البديلة تكلفتها كالآتي:

المهام	الحلول البديلة للتخصيص					
	البديل الأول	البديل الثاني	البديل الثالث	البديل الرابع	البديل الخامس	البديل السادس
A	X(25)	X(25)	Y(31)	Z(35)	Y(35)	Z(31)
B	Y(20)	Z(24)	X(15)	X(15)	Z(20)	Y(24)
C	Z(17)	Y(19)	Z(17)	Y(19)	X(22)	X(22)
مجموع التكلفة	62	78	63	69	77	77

أي أنّ التخصيص الأمثل هو:

تخصيص المهمة (A) للتشغيل على الآلة (X) وبتكلفة قدرها 25.

تخصيص المهمة (B) للتشغيل على الآلة (Y) وبتكلفة قدرها 20.

تخصيص المهمة (C) للتشغيل على الآلة (Z) وبتكلفة قدرها 17.

تكلفة التخصيص الإجمالية = 62

2- الحل باستخدام الطريقة المجرية للتخصيص:

سنعيد فيما يلي تصوير المصفوفة الأصلية للمشكلة، تمهيداً لإجراء خطوات الحل عليها وفقاً للطريقة المجرية للتخصيص.

المهام	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	25	31	35
B	15	20	24
C	22	19	17

الخطوة الأولى: إعداد جدول تكلفة الفرصة:

ويتم إعداد الجدول على مرحلتين:

أ- طرح أقل قيمة في كل صف من أرقام الصف:

المهام	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	0	6	10
B	0	5	9
C	5	2	0

ب- طرح أقل قيمة في كل عمود من أرقام العمود (على المصفوفة السابقة):

المهام	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	0	4	10
B	0	3	9
C	5	0	0

الخطوة الثانية: اختبار المثالية:

وتتم عن طريق إيجاد أقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة (الأفقية أو الرأسية أو كلاهما)، واللازمة لتغطية كل القيم الصفرية بالمصفوفة السابقة.

المهام	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	0	4	10
B	0	3	9
C	5	0	0

يتبين من الخطوط المرسومة أنّ عددها اثنان فقط، في حين أنّ عدد الصفوف أو الأعمدة ثلاثة، وهذا يعني أنّ الحل غير أمثل ويحتاج إلى تحسين.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

1- تحديد أقل قيمة غير مغطاة في المصفوفة وهي الرقم (3).

2- طرح هذه القيمة من جميع القيم غير المغطاة.

3- إضافة هذه القيمة إلى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة.

4- باقي القيم المغطاة غير الواقعة في تقاطعات تنقل بدون تغيير.

بعد إجراء هذه العمليات الحسابية ستظهر المصفوفة على الشكل التالي:

المهام	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	0	1	7
B	0	0	6
C	8	0	0

الخطوة الرابعة: اختبار المثالية:

سيتم تغطية جميع القيم الصفرية بالمصفوفة السابقة، بأقل عدد ممكن من الخطوط ومن ثم ستظهر المصفوفة بعد التغطية كما يلي:

المهام	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	0	1	7
B	0	0	6
C	8	0	0

من هذه التغطية يتضح أننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أمكن تغطية جميع القيم الصفرية بعدد ثلاثة خطوط، وسيتم تحديده وتعيينه كما يلي:

1- البحث عن صف به صفر واحد فقط، سنجد أنه الصف (A)، إذاً سيتم تشغيل المهمة (A) على الآلة (X).

2- البحث عن صف آخر به صفر واحد فقط، سنجد أنه الصف (B)، وذلك بعد أن تمّ استبعاد العمود (X) لتخصيصه قبل ذلك، إذاً يتم تشغيل المهمة (B) على الآلة (Y).

3- الصفر الوحيد الأخير هو بالصف (C)، إذاً سيتم تشغيل المهمة (C) على الآلة (Z).

وتلخيصاً لما تقدم فإنّ التخصيص الأمثل وتكلفته كالآتي:

تخصيص المهمة (A) للتشغيل على الآلة (X) بتكلفة قدرها 25.

تخصيص المهمة (B) للتشغيل على الآلة (Y) بتكلفة قدرها 20.

تخصيص المهمة (C) للتشغيل على الآلة (Z) بتكلفة قدرها 17.

وتكون إجمالي تكلفة التخصيص الأمثل = 62.

وهذا التخصيص الأمثل هو نفسه الذي توصلنا إليه من تطبيق طريقة حصر كافة الحلول الممكنة.

مسألة رقم (2):

أعلنت محافظة اللاذقية عن مناقصة بين المقاولين الإنشائيين لتنفيذ أربعة مشاريع للمحافظة، وكانت سياسية المحافظة تقوم على عدم إسناد أكثر من مشروع للمقاول الواحد، وذلك للإسراع في الانتهاء من التنفيذ، وكذلك عدم تجزئة المشروع بين أكثر من مقاول تحديداً للمسؤولية، وقد تلقت المحافظة عروضاً للتنفيذ من أربعة مقاولين، وبعد تفريغ العروض المقدمة أمكن تلخيص كافة المعلومات في الجدول التالي:

(الأرقام بالمليون ليرة سورية)

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	20	36	31	17
B	24	34	40	12
C	22	40	38	18
D	36	39	35	16

المطلوب أن ترشد المسؤولين بالمحافظة إلى التخصيص الأمثل لتنفيذ المشاريع الأربعة على المقاولين الأربعة، والذي يعمل على تخفيض إجمالي تكاليف التنفيذ إلى أدنى حد ممكن، وبشرط التقيد بسياسات المحافظة المقررة في هذا الخصوص، وذلك باستخدام الطريقة المجرية للتخصيص.

خطوات الحل باستخدام الطريقة المجرية للتخصيص:

الخطوة الأولى: إعداد جدول تكلفة الفرصة:

يتم إعداد هذا الجدول على مرحلتين:

المرحلة الأولى: جدول تكلفة الفرصة للصفوف:

وذلك عن طريق طرح أصغر رقم من كل صف من جميع أرقام الصف، وبإجراء هذه العملية الحسابية يظهر جدول تكلفة الفرصة للصفوف كما يلي:

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	3	19	14	0
B	12	22	28	0
C	4	22	20	0
D	20	23	19	0

المرحلة الثانية: جدول تكلفة الفرصة للأعمدة:

وتتم ذلك عن طريق طرح أصغر رقم في كل عمود من جميع أرقام العمود، وذلك بالنسبة للمصفوفة التي وصلنا إليها في المرحلة الأولى، وبإجراء تلك العملية الحسابية ستظهر مصفوفة تكلفة الفرصة للصفوف والأعمدة كالآتي:

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	0	0	0	0
B	9	3	14	0
C	1	3	6	0
D	17	4	5	0

الخطوة الثانية: اختبار المثالية:

وتعني التأكد عما إذا كنا قد وصلنا للحل الأمثل أم لا ؟ وهذا يستلزم القيام بتغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة (الأفقية أو الرأسية أوكلاهما)، وستظهر المصفوفة بعد عملية التغطية على الشكل التالي:

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	0	0	0	0
B	9	3	14	0
C	1	3	6	0
D	17	4	5	0

يظهر من تلك المصفوفة أنه أمكن تغطية كافة القيم الصفرية بعدد خطين فقط، وحيث إنّ عدد الصفوف أو الأعمدة أربعة، إذاً وفقاً لقاعدة الأمثلية فإنّ المصفوفة الحالية لا تقدم الحل الأمثل، بل يتعين العمل على تحسين الحل ومواصلة إجراءات التحسين وصولاً للحل الأمثل.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

يتم طرح أصغر قيمة غير واقعة على أي من الخطوط المرسومة من كل قيمة بين قيم المصفوفة التي لم تغطيها الخطوط المرسومة، وإضافة تلك القيمة إلى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة، وتبقى باقي القيم الأخرى كما هي دون تغيير.

من المصفوفة السابقة يتضح لنا أنّ أصغر قيمة غير واقعة على أي من الخطوط المرسومة هي القيمة (1)، لذلك يتم طرح تلك القيمة من كل القيم الأخرى غير الواقعة على الخطوط، وإضافة القيمة (1) إلى القيمة (0) وهي القيمة الواقعة عند تقاطع الخطين المرسومين، وبانتهاء تلك الخطوة نكون قد وصلنا إلى المصفوفة التالية:

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	0	0	0	1
B	8	2	13	0
C	0	2	5	0
D	16	3	4	0

الخطوة الرابعة: اختبار المثالية:

وتعني التأكد عما إذا كنا قد وصلنا للحل الأمثل أم لا ؟ وهذا يستلزم القيام بتغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة (الأفقية أو الرأسية أوكلاهما)، وستظهر المصفوفة بعد عملية التغطية على الشكل التالي:

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	0	0	0	1
B	8	2	13	0
C	0	2	5	0
D	16	3	4	0

من هذه المصفوفة يتضح أنه أمكن تغطية كافة القيم الصفرية بعدد ثلاثة خطوط مستقيمة، وهو أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية تلك القيم الصفرية، ومعنى ذلك أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، لأنه المطلوب في هذه المشكلة أن تكون عدد الخطوط المستقيمة التي تغطي جميع الأصفار أربعة، لأنّ عدد الأعمدة أربعة وعدد الصفوف أربعة، وهذا يستوجب أن نكرر الخطوة الثالثة.

الخطوة الخامسة: تحسين الحل:

يتم طرح أصغر قيمة غير واقعة على أي من الخطوط المرسومة من كل قيمة بين قيم المصفوفة التي لم تغطيها الخطوط المرسومة، وإضافة تلك القيمة إلى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة، وتبقى باقي القيم الأخرى كما هي دون تغيير.

من المصفوفة السابقة يتضح لنا أنّ أصغر قيمة غير واقعة على أي من الخطوط المرسومة هي القيمة (2)، لذلك يتم طرح تلك القيمة من كل القيم الأخرى غير الواقعة على الخطوط، وإضافتها إلى القيم الواقعة عند تقاطع الخطوط المرسومة، وبانتهاء تلك الخطوة نكون قد وصلنا إلى المصفوفة التالية:

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	0	0	0	3
B	6	0	11	0
C	0	2	5	2
D	14	1	2	0

الخطوة السادسة: اختبار المثالية:

وتعني التأكد عما إذا كنا قد وصلنا للحل الأمثل أم لا ؟ وهذا يستلزم القيام بتغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة (الأفقية أو الرأسية أوكلاهما)، وستظهر المصفوفة بعد عملية التغطية على الشكل التالي:

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	~~0~~	~~0~~	~~0~~	3
B	~~6~~	~~0~~	~~11~~	~~0~~
C	~~0~~	2	5	2
D	14	1	2	~~0~~

من هذه المصفوفة يتضح أنه أمكن تغطية جميع القيم الصفرية بعدد أربعة خطوط، ومعنى ذلك أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، ويبقى فقط تعيين ذلك الحل:

- إيجاد الصف الذي توجد به قيمة صفرية واحدة وتخصيص المقاول على ذلك المشروع، وسنجد أنّ صف المقاول (D) هو الصف الذي توجد به قيمة صفرية واحدة، لذلك يتم تخصيص المقاول (D) لتنفيذ المشروع (Z).
- بتخصيص المقاول (D) للمشروع (Z) يكون العمود (Z) قد أغلق، ثم نبحث عن الصف الآخر الذي توجد به قيمة صفرية واحدة بعد إغلاق العمود (Z)، سنجد أنّ ذلك الصف هو صف (B)، والقيمة الصفرية الموجودة به عند تقاطعه مع العمود (X)، وذلك يعني أن يتم تخصيص المقاول (B) لتنفيذ المشروع (X).
- بعد إغلاق العمود (X) والعمود (Z) نبحث عن الصف الذي توجد فيه قيمة صفرية واحدة، نجد أنه الصف (C)، والقيمة الصفرية توجد عند تقاطعه مع العمود (W)، إذاً يتم تخصيص المقاول (C) لتنفيذ المشروع (W).

- بعد إغلاق العمود (W) والعمود (X) والعمود (Z)، لم يعد لدينا سوى مقاول واحد هو المقاول (A)، وسنجد أنّ نقطة التقاطع بين الصف (A) والعمود (Y) تساوي الصفر، إذاً يتم تخصيص المقاول (A) لتنفيذ المشروع (Y).

إذاً الحل الأمثل لتخصيص المقاولين على المشروعات هو:

- تخصيص المقاول (A) لتنفيذ المشروع (Y) بتكلفة مقدارها 31 مليون ل.س.
- تخصيص المقاول (B) لتنفيذ المشروع (X) بتكلفة مقدارها 34 مليون ل.س.
- تخصيص المقاول (C) لتنفيذ المشروع (W) بتكلفة مقدارها 22 مليون ل.س.
- تخصيص المقاول (D) لتنفيذ المشروع (Z) بتكلفة مقدارها 16 مليون ل.س.

وتكون إجمالي تكلفة تنفيذ المشروعات الأربعة = **103 مليون ل.س.**

2/4/9- طريقة الفرع والحد لحل مسائل التخصيص:

إنّ خطوات الحل وفق هذه الطريقة يمكن تلخيصها بما يلي[1]:

الخطوة الأولى: تكوين أقل حد للتكلفة بصرف النظر عن أنّ الحل الذي يمثل أقل حد للتكلفة حل ممكن أم لا، إذ العبرة بأنه سيكون بمثابة حل مبدئي أو نقطة بداية وانطلاق، ويتم تكوين أقل حد للتكلفة من خلال اختيار أقل تكلفة في كل عمود وذلك بالنسبة لكافة الأعمدة، ويكون أقل تكلفة في كل عمود للمصفوفة كلها بمثابة أقل حد للتكلفة.

الخطوة الثانية: سنعتبر أقل حد للتكلفة الذي حصلنا عليه من الخطوة الأولى هي نقطة البداية، ويتم وضعها في دائرة تشع منها عدد من الأسهم بعدد صفوف المصفوفة، كل سهم يعبّر عن تخصيص كل صف على العمود الأول، أي السهم

1- يرجع إلى:

- د. فريد عبد الفتاح زين الدين، **مرجع سبق ذكره**، ص542.
- د. أحمد حسين علي حسين ود. فتحي رزق السوافيري، (2003)، **بحوث العمليات في المحاسبة مدخل معاصر باستخدام الحاسب الآلي**، الإسكندرية – دار الجامعة الجديدة، ص289.

الأول يمثل تخصيص الصف الأول على العمود الأول، والسهم الثاني يمثل تخصيص الصف الثاني على العمود الأول،...، وهكذا.

ويتم حساب التكلفة لهذه الفروع، والعبرة أيضاً بأقل تكلفة بصرف النظر عن أنه حل ممكن أم لا، وأقل حد من التكاليف للأسهم المنبثقة من نقطة البداية، يتم وضعها في دائرة، وتكون هي نقطة الانطلاق إلى الخطوة الثالثة، ونؤكد مرة أخرى أنّ اختيار الحل معياره أنه أقل تكلفة وليس معياره إنه حل ممكن.

الخطوة الثالثة: نبدأ بالحد الذي انتهينا إليه في الخطوة الثانية، ونرسم منه أسهماً منبثقة بعدد الفروع التي يمكن أن تمثل حلولاً، ونطبق عليها العمليات الحسابية السابقة نفسها، ونستمر في ذلك العمل إلى أن نصل إلى حل ممكن، وفي الوقت نفسه أقل تكلفة ممكنة، عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

أي أنّ المفهوم الأساسي الذي يرتكز عليه هذا الأسلوب، هو أنه يعمل على تقسيم منطقة الحلول الممكنة إلى أجزاء أصغر فأصغر، إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الذي يعمل على تخفيض أو تعظيم دالة الهدف.

ولتوضيح كيفية حل مشكلات التخصيص باستخدام طريقة الفرع والحد سنأخذ المثالي التالي.

مسألة محلولة:

بفرض أنّ شركة الطيران العربية السورية ترغب في تخصيص أربع طائرات على أربعة خطوط، وأنّ تكلفة أداء كل طائرة على كل خط موضح بالجدول التالي:

الخطوط / الطائرة	1	2	3	4
A	90	5	48	73
B	69	14	83	86
C	57	93	2	79
D	7	77	75	23

المطلوب مساعدة شركة الطيران في الوصول إلى التخصيص الأمثل الذي يعمل على الوصول بتكلفة التخصيص إلى حدها الأدنى، (بشرط تخصيص طائرة واحدة لكل خط) وذلك باستخدام طريقة الفرع والحد.

خطوات الحل:

الخطوة الأولى:

سنوجد الحد الأدنى للتكلفة الإجمالية للتخصيص بصرف النظر عن كون تلك الحلول ممكنة، وعما إذا كان ذلك الحل ذو الحد الأدنى للتكلفة يقدم حلاً ممكناً أم لا، إنما الشرط الوحيد المطلوب مراعاته في تلك الخطوة أن نعين ذلك الحل ذا الحد الأدنى للتكلفة، والذي لا يمكن أن تهبط التكلفة عنه إطلاقاً، ومرة أخرى نقول إنّ التخصيص الذي يمثل يحقق الحد الأدنى للتكلفة ليس من الضروري أن يكون حلاً ممكناً، إذ ربما يتضمن هذا الحل تخصيص أكثر من طائرة على خط واحد، والحقيقة إنه عند هذه النقطة قد يتساءل القارئ وما أهمية تعيين ذلك طالما أنه غير ممكن ؟.

للإجابة على ذلك، نقول إنّ الغرض الوحيد من حساب أقل حد ممكن هو مجرد إيجاد أدنى مستوى للتكلفة لا يمكن أن تنخفض بعده، وهذا سيكون نقطة انطلاق لخطوات تالية، وأسرع وسيلة لإيجاد أقل تكلفة ممكنة، هي ببساطة جمع أقل تكلفة في كل عمود من أعمدة المصفوفة، وأيضاً بصرف النظر عن كون ذلك الحل ممكناً أم لا.

في العمود الأول نجد أنّ أقل تكلفة به هي 7 (تخصيص الطائرة D للخط رقم 1)
في العمود الثاني نجد أنّ أقل تكلفة به هي 5 (تخصيص الطائرة A للخط رقم 2)
في العمود الثالث نجد أنّ أقل تكلفة به هي 2 (تخصيص الطائرة C للخط رقم 3)
في العمود الرابع نجد أنّ أقل تكلفة هي 23 (تخصيص الطائرة D للخط رقم 4)

إذاً أقل تكلفة ممكنة = 37

ومرة أخرى فإنّ الحد الأدنى للتكلفة، ليس شرطاً أن ينتج عنه دائماً حل ممكن، إذا تبيّن أنّ أدنى تكلفة هنا (37) هل حل غير ممكن، لأنّ الطائرة D قد تمّ تخصيصها على خطين (4 ,1)، في حين إنّ الطائرة (B) لم يتم تخصيصها، ولذلك فإنّ الأمر يتطلب أن نواصل السير في الحل لنجد الحل الممكن ذا تكلفة أقل.

الخطوة الثانية:

في تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول، ويتم ذلك على أساس أن نفترض أننا سنخصص كل طائرة على التوالي على الخط رقم (1)، ونحسب الحد الأدنى لتكلفة التخصيص في كل حالة وعما إذا كان حلاً ممكناً أم لا.

الجدول التالي يوضح نتيجة إجراء تلك الخطوة.

الحد الأدنى لتكلفة التخصيص عند تخصيص كل طائرة على التوالي على الخط رقم (1):

التخصيص	الحد الأدنى للتكلفة	ملاحظات
الطائرة (A) تخصص على الخط 1	90 + 14 + 2 + 23 = 129	الحل ممكن
الطائرة (B) تخصص على الخط 1	69 + 5 + 2 + 23 = 99	الحل ممكن
الطائرة (C) تخصص على الخط 1	57 + 5 + 48 + 23 = 133	الحل غير ممكن
الطائرة (D) تخصص على الخط 1	7 + 5 + 2 + 73 = 87	الحل غير ممكن

وقد تمّ إعداد ذلك الجدول كالآتي:

1- حيث إننا افترضنا في الصف الأول أنّ الطائرة (A) سيتم تخصيصها على الخط رقم (1)، لذلك نبحث عن تكلفة التخصيص في المصفوفة الأصلية فنجدها (90)، وبما أننا افترضنا تخصيص الطائرة (A) على الخط رقم (1)، إذاً هي لن تخصص على أي من الخطوط الأخرى، أي أنّ الصف الأول بالمصفوفة الأولى قد أغلق، وحيث إنّ الخط (1) تمّ

تخصيصه على الطائرة (A)، أي أنّ العمود الأول من المصفوفة الأصلية قد أغلق كذلك.

2- يتم البحث عن أقل تكلفة في العمود الثاني، باستثناء الرقم الأول (لأنه يقع في الصف الأول الذي أغلق)، وسنجد أنّ أقل تكلفة هي 14 (أي تخصيص الطائرة B على الخط رقم (2).

3- يتم البحث عن أقل تكلفة في العمود الثالث باستثناء الرقم الأول، نجدها (2)، وهي تمثل تخصيص الطائرة (C) على الخط رقم (3).

4- يتم البحث عن أقل تكلفة في العمود الرابع باستثناء الرقم الأول، نجد أنّ أقل تكلفة بذلك العمود هي (23)، وهي تمثل تخصيص الطائرة (D) على الخط رقم (4).

وبجمع الحدود الدنيا للتكلفة بكل عمود، وذلك إذا ما تمّ تخصيص الطائرة (A) على الخط رقم (1) تكون 129، وهذا التخصيص سنجد أنه حل ممكن.

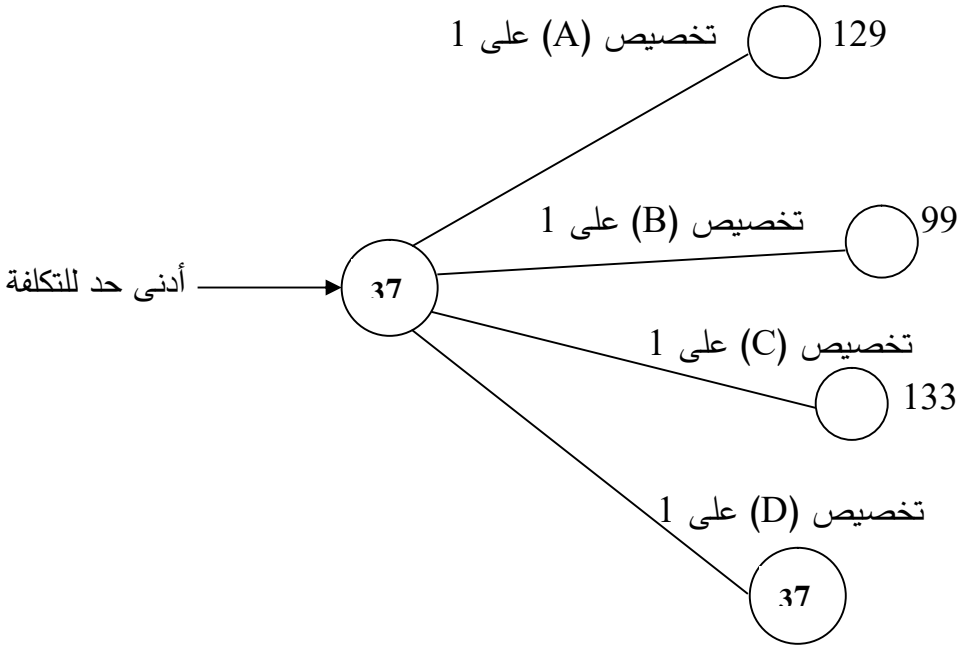
وبجمع الحدود الدنيا للتكلفة بكل عمود، وذلك إذا ما تمّ تخصيص الطائرة (B) على الخط رقم (1) تكون 99، وهذا التخصيص سنجد أنه حل ممكن.

وبجمع الحدود الدنيا للتكلفة بكل عمود، وذلك إذا ما تمّ تخصيص الطائرة (C) على الخط رقم (1) تكون 133، وهذا التخصيص سنجد أنه حل غير ممكن.

وبجمع الحدود الدنيا للتكلفة بكل عمود، وذلك إذا ما تمّ تخصيص الطائرة (D) على الخط رقم (1) تكون 87، وهذا التخصيص سنجد أنه حل غير ممكن.

ومرة أخرى نقول إنّ محور تركيزنا هو تحديد الحد الأدنى للتكلفة، بصرف النظر عن كون الحل ممكناً أو غير ممكن، لأننا سنواصل السير بعد ذلك لتحديد الحل الممكن والأمثل والذي يصل بالتكلفة إلى حدها الأدنى.

ويمكن تمثيل الخطوتين الأولى والثانية في صورة فروع شجرة كالآتي:



نلاحظ أنّ القيمة (37) بالدائرة في بداية الشجرة تمثل الحل الذي يصل بالتكلفة إلى أدنى حد لها، والذي تمّ التوصل إليه من الخطوة الأولى (نلاحظ أننا لم نأخذ به لأنه حل غير ممكن)، وكذلك فإنّ الحلول الأربعة التي تمّ التوصل إليها في الخطوة الثانية تمّ تمثيلها كفروع منبثقة من قيمة الحل بالخطوة الأولى، مع ملاحظة أننا وضعنا أصغر قيمة من تلك الحلول الأربعة داخل دائرة.

الخطوة الثالثة:

بالمنطق نفسه الذي أخذنا به في الخطوات السابقة، فإنّ تركيزنا سينصب على فرع الشجرة الأقل تكلفة والناتج من الخطوة السابقة مباشرة (الخطوة الثانية)، والذي يتمثل في تخصيص الطائرة (D) على الخط رقم 1، مع العلم أنّ هذا الفرع ذو أقل تكلفة لا يمثل تخصيصاً ممكناً، إلا أنّ ذلك لا يمنعنا من البحث عن حلول أخرى تكلفة أقل تنبثق من ذلك الفرع، وتكون ممكنة في الوقت نفسه.

تبدأ تلك الخطوة بالفرع الذي يعطي أقل تكلفة وهو (87)، والذي يمثل تخصيص الطائرة (D) على الخط رقم 1 من الخطوة الثانية.

وعلى ذلك في هذه الخطوة نقوم بتخصيص كل من الطائرات الثلاث (A, B, C) على الخط رقم (2) بالتناوب، ثم نقوم بجمع أقل تكلفة في كل من العمودين الآخرين بصرف النظر عما إذا كان التخصيص الناتج ممكناً أم لا.

الفرع الأول	أقل تكلفة
من الخطوة الثانية تمّ تخصيص الطائرة (D) على الخط 1	7
يتم التخصيص في الفرع الأول الطائرة (A) على الخط 2	5
تخصيص الطائرة (C) على الخط رقم 3 في العمود الثالث بعد استبعاد صف (D) وصف (A)	2
تخصيص الطائرة (C) على الخط رقم 4 في العمود الرابع بعد استبعاد صف (D) وصف (A)	79
إجمالي الحد الأدنى للتكلفة	93

أي أنّ إجمالي تكلفة التخصيص في الفرع الأول 93، ولكن يلاحظ أنه يمثل حلاً غير ممكن.

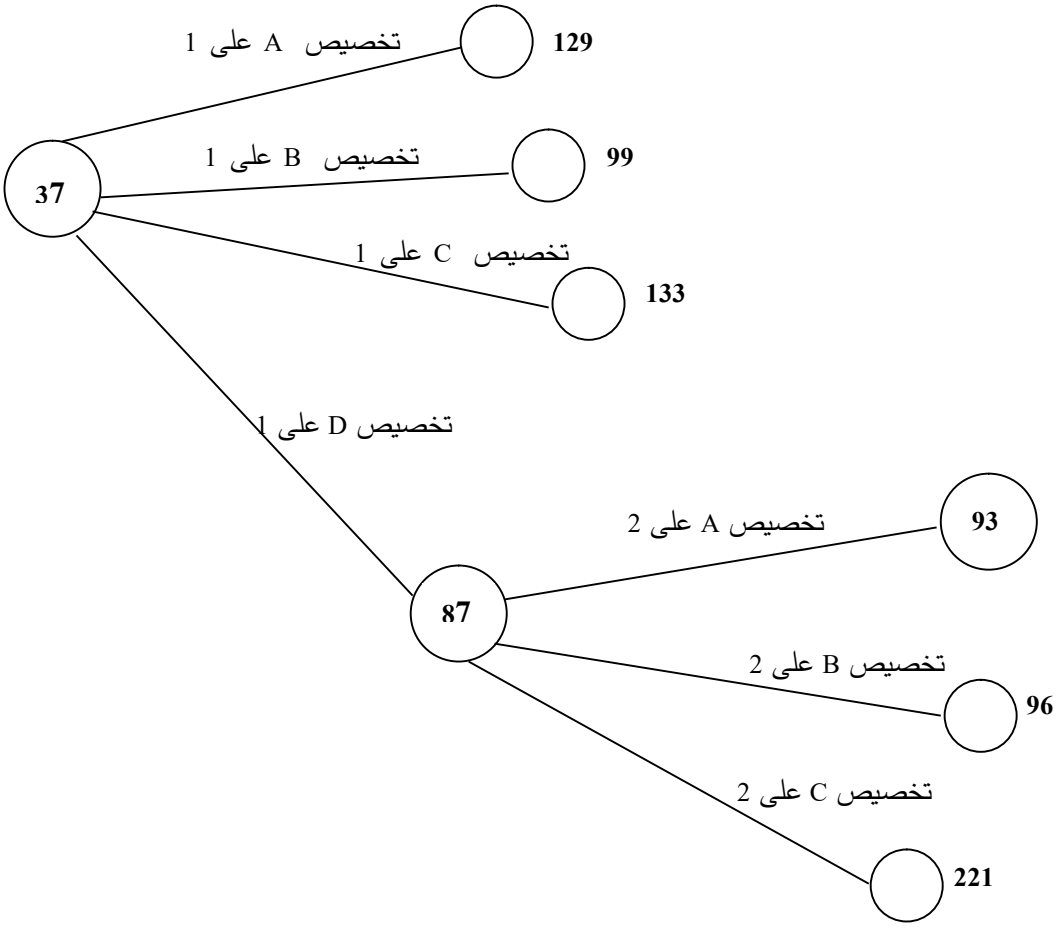
الفرع الثاني	أقل تكلفة
من الخطوة الثانية تمّ تخصيص الطائرة (D) على الخط 1	7
يتم التخصيص في الفرع الأول الطائرة (B) على الخط 2	14
تخصيص الطائرة (C) على الخط رقم 3 في العمود الثالث بعد استبعاد صف (D) وصف (B)	2
تخصيص الطائرة (A) على الخط رقم 4 في العمود الرابع بعد استبعاد صف (D) وصف (B)	73
إجمالي الحد الأدنى للتكلفة	96

أي أنّ إجمالي تكلفة التخصيص في الفرع الثاني 96، ولكن يلاحظ أنه يمثل حلاً ممكناً.

الفرع الثالث	أقل تكلفة
من الخطوة الثانية تمّ تخصيص الطائرة (D) على الخط 1	7
يتم التخصيص في الفرع الثالث الطائرة (C) على الخط 2	93
تخصيص الطائرة (A) على الخط رقم 3 في العمود الثالث بعد استبعاد صف (D) وصف (C)	48
تخصيص الطائرة (A) على الخط رقم 4 في العمود الرابع بعد استبعاد صف (D) وصف (C)	73
إجمالي الحد الأدنى للتكلفة	221

أي أنّ إجمالي تكلفة التخصيص في الفرع الثالث 221، ولكن يلاحظ أنه يمثل حلاً ممكناً.

الشجرة التالية توضح نتيجة العمليات الحسابية في الخطوات السابقة:



يتضح من تكلفة الفروع الناتجة من الخطوة الثالثة والمنبثقة من الحد (87)، أنّ أقل تكلفة ممكنة هي 93، ولذلك وضعناها في دائرة باعتبارها الحد الجديد الذي سننطلق منه للخطوة الرابعة.

إلا أنه قد يكون من المفيد وقبل أن ننتقل إلى الخطوة الرابعة، أن نوضح ونؤكد على أمر هام وهو أننا وجدنا من الخطوة السابقة أنّ الحد (87) كان أقل تكلفة فاخترناه، لننطلق منه بالرغم من أنه حل غير ممكن، ولكن لو نظرنا إلى الفروع المنبثقة من ذلك الحد لوجدنا أنّ إحداها يمثل حلاً ممكناً، أي أنه أمكن استخراج حل ممكن من حل غير ممكن، وهذه ميزة هامة من مزايا طريقة الفرع والحد.

الخطوة الرابعة:

سنركز أيضاً اهتمامنا في تلك الخطوة على ذلك الفرع الذي يمثل أقل تكلفة بالمقارنة بالفروع الأخرى التي نتجت من الخطوة الثالثة.

فقد تبين من الخطوة الثالثة أنّ تخصيص الطائرة D على الخط (1)، وتخصيص الطائرة A على الخط (2)، فإنّ أدنى تكلفة في هذه الحالة هي (93)، وهي لا تقدم تخصيصاً ممكناً، إلا أنّ ذلك لا يمنعنا من البحث عن حلول أخرى ممكنة أقل تكلفة وتنبثق في ذلك الوقت من هذا الحد.

ولذلك سنبدأ في تلك الخطوة بالوقوف على الفروع التي تنبثق من الحد 93، إنّ التخصيصين المحتملين عندما تكون الطائرة D على الخط رقم 1، والطائرة A على الخط رقم 2.

يمكن حسابهما كالآتي:

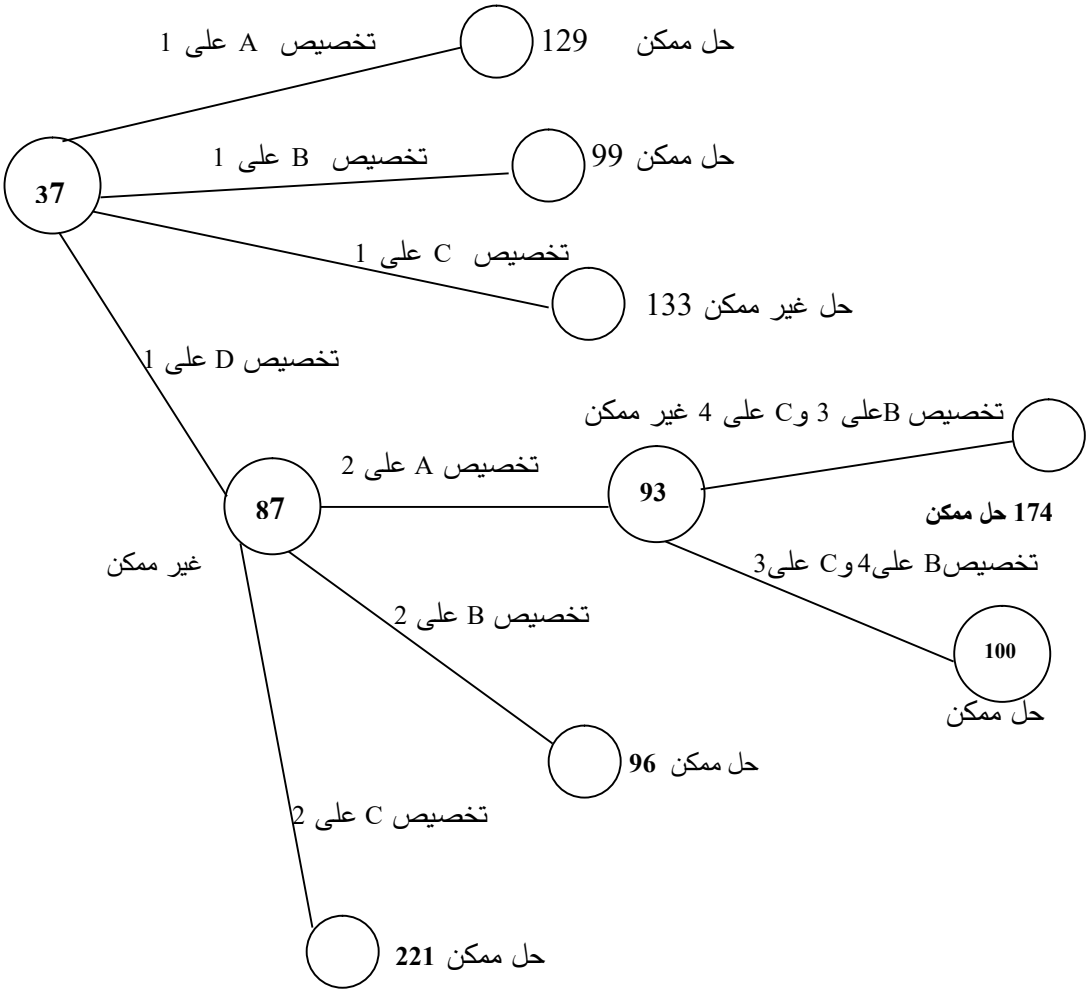
الفرع الأول	أقل تكلفة
بعد تخصيص (D) على الخط 1 وتخصيص (A) على 2 يتم تخصيص (B) على 3 وتخصيص (C) على الخط 4	7 + 5 = 12 83 + 79 = 162
إجمالي الحد الأدنى للتكلفة	**174**

وهذا الحل ممكن.

الفرع الثاني	أقل تكلفة
بعد تخصيص (D) على الخط 1 وتخصيص (A) على 2 يتم تخصيص (B) على 4 وتخصيص (C) على الخط 3	7 + 5 = 12 86 + 2 = 88
إجمالي الحد الأدنى للتكلفة	**100**

وهذا الحل ممكن أيضاً.

وبإضافة هذين الفرعين إلى فروع الشجرة السابقة تظهر خطوات الحل كالآتي:



حيث إنّ التخصيصين البديلين اللذين أوجدتهما الخطوة الرابعة أعلى تكلفة من الفرع 96 (تكلفة البديل الممكن في الخطوة الثالثة)، فإننا نهملهما ونعود إلى الحل الممكن الأقل تكلفة، وبذلك يكون التخصيص الأمثل للمشكلة هو الفرع 96 وهذا الفرع يمثل التخصيص التالي:

تخصيص الطائرة (D) على الخط رقم 1 بتكلفة مقدارها 7.

تخصيص الطائرة (B) على الخط رقم 2 بتكلفة مقدارها 14.

تخصيص الطائرة (C) على الخط رقم 3 بتكلفة مقدارها 2.

تخصيص الطائرة (A) على الخط رقم 4 بتكلفة مقدارها 73.

تكلفة الحل الأمثل = 96.

مسألة رقم (2):

سنعيد حل المسألة السابقة باستخدام طريقة الفرع والحد والتي كانت:

أعلنت محافظة اللاذقية عن مناقصة بين المقاولين الإنشائيين لتنفيذ عدد أربعة مشاريع للمحافظة، وكانت سياسية المحافظة تقوم على عدم إسناد أكثر من مشروع للمقاول الواحد وذلك للإسراع في الانتهاء من التنفيذ، وكذلك عدم تجزئة المشروع بين أكثر من مقاول تحديداً للمسؤولية، وقد تلقت المحافظة عروضاً للتنفيذ من أربعة مقاولين، وبعد تفريغ العروض المقدمة أمكن تلخيص كافة المعلومات في الجدول التالي:

(الأرقام بالمليون ليرة سورية)

المشاريع / المقاولون	W	X	Y	Z
A	20	36	31	17
B	24	34	40	12
C	22	40	38	18
D	36	39	35	16

المطلوب أن ترشد المسؤولين بالمحافظة إلى التخصيص الأمثل لتنفيذ المشاريع الأربعة على المقاولين الأربعة، والذي يعمل على تخفيض إجمالي تكاليف التنفيذ إلى أدنى حد ممكن، وبشرط التقيد بسياسات المحافظة المقررة في هذا الخصوص، وذلك باستخدام طريقة الفرع والحد.

خطوات الحل:

الخطوة الأولى:

إيجاد الحد الأدنى للتكلفة الإجمالية للتخصيص، وذلك عن طريق جمع أقل تكلفة في كل عمود من أعمدة المصفوفة، دون النظر ما إذا كان الحل ممكناً أم لا.

بإجراء هذه الخطوة سنجد أنّ الحد الأدنى للتكلفة كالآتي:

أقل تكلفة للعمود الأول (AW) 20 مليون ل.س.

أقل تكلفة للعمود الثاني (BX) 34 مليون ل.س.

أقل تكلفة للعمود الثالث (AY) 31 مليون ل.س.

أقل تكلفة للعمود الرابع (BZ) 12 مليون ل.س.

الحد الأدنى لتكلفة التخصيص = 97 مليون ل.س.

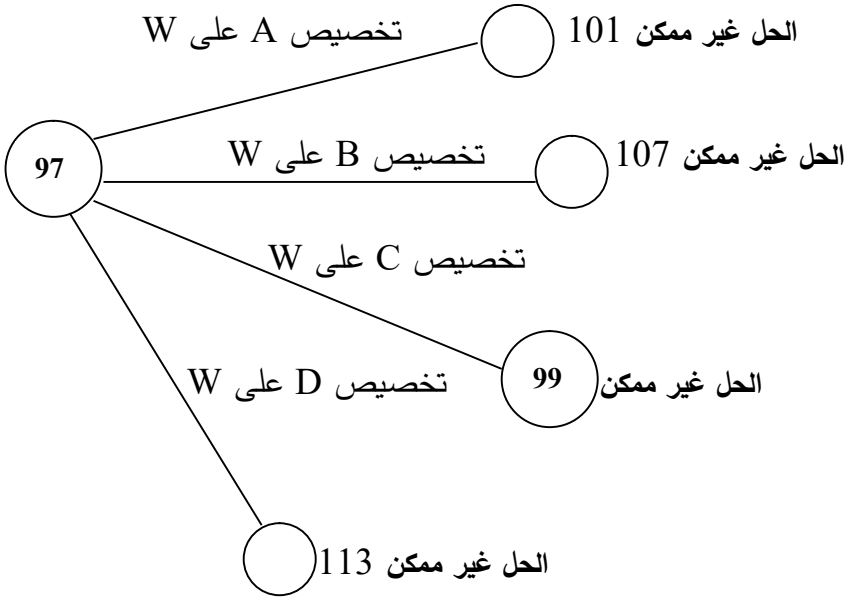
بالنظر إلى الحل الذي يسعى إلى الحد الأدنى للتخصيص نجد أنه حل غير ممكن، لأنه يخصص المقاول (A) للمشروعين (W,Y)، كذلك يخصص المقاول (B) للمشروعين (X, Z)، ولكن كما ذكرنا سابقاً أنه لا يهم أن يكون الحل ممكناً ولكنه يعتبر نقطة انطلاق للحل.

الخطوة الثانية:

في تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول، سنبدأ بالحد الأدنى للتكلفة الذي توصلنا إليه في الخطوة الأولى، ثم نحدد فروعاً من ذلك الحد، ويتم ذلك على أساس أن يكون هناك أربعة فروع، كل فرع يتم فيه تخصيص كل مقاول (A, B, C, D) على المشروع (W)، والعمليات الحسابية لتلك الخطوة:

التخصيص (الفروع)	الحد الأدنى للتكلفة	ملاحظات
المقاول A للمشروع W	20 + 34 + 35 + 12 = 101	الحل غير ممكن
المقاول B للمشروع W	24 + 36 + 31 + 16 = 107	الحل غير ممكن
المقاول C للمشروع W	22 + 34 + 31 + 12 = 99	الحل غير ممكن
المقاول D للمشروع W	36 + 34 + 31 + 12 = 113	الحل غير ممكن

الشجرة التالية توضح نتائج العمليات الحسابية والفروع التي توصلنا إليها من الخطوة الثانية:



الخطوة الثالثة:

يتضح من شجرة الفرع والحد التي توصلنا إليها من خلال الخطوة الثانية، أنّ كل الحلول التي توصلنا إليها هي حلول غير ممكنة، وأنّ أقل حد للتكلفة هو 99، لذلك سنسير نحو تحسين الحل، وتكون نقطة بدايتنا هو ذلك الحد الأقل تكلفة، وسنقوم بإنشاء فروع من ذلك الحد، وهذه الفروع تخصيص للمشروع X وعليه فإنّ الفروع ستكون كما يلي:

الفرع الأول: تخصيص المقاول (A) للمشروع (X)

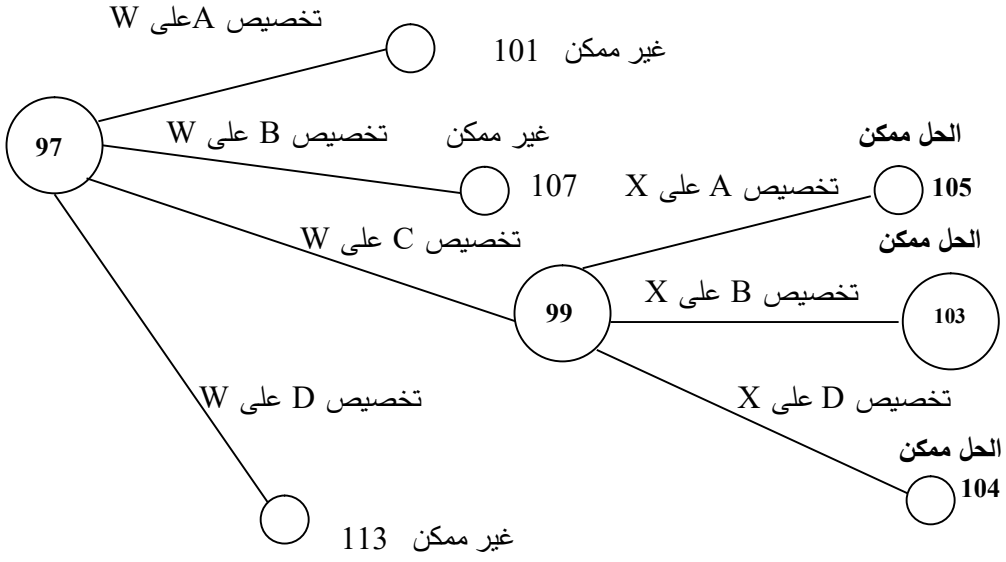
الفرع الثاني: تخصيص المقاول (B) للمشروع (X)

الفرع الثالث: تخصيص المقاول (D) للمشروع (X)

وستكون العمليات الحسابية المطلوبة لحساب تكلفة هذه الفروع كما هو موضح في الجدول التالي:

التخصيص (الفروع)	الحد الأدنى للتكلفة	ملاحظات
المقاول A للمشروع X (CW, AX, DY, BZ)	22 + 36 + 35 + 12 = 105	الحل ممكن
المقاول B للمشروع X (CW, BX, AY, DZ)	22 + 34 + 31 + 16 = 103	الحل ممكن
المقاول D للمشروع X (CW, DX, AY, BZ)	22 + 39 + 31 + 12 = 104	الحل ممكن

وستظهر شجرة الحل حتى الخطوة الثالثة كالآتي:



الخطوة الرابعة:

يمكن القول إنّ الخطوة الثالثة قد قادتنا بالفعل إلى تعيين الحل الأمثل لأنّ أقل تكلفة في التخصيص كانت حلاً ممكناً، حيث إنّ هذا الحل جاء نتيجة تخصيص المقاول (C) على المشروع (W)، والمقاول (B) على المشروع (X)، إذاً أنّ الحل النهائي هو أحد بديلين وهما:

CW, BX, AY, DZ
CW, BX, AZ, DY

تكلفة الحل الأول: 103 = 16 + 31 + 34 + 22

وتكلفة الحل الثاني: 108 = 35 + 17 + 34 + 22

وعلى ذلك فإنّ التخصيص الأمثل كالآتي:

المقاول A للمشروع Y

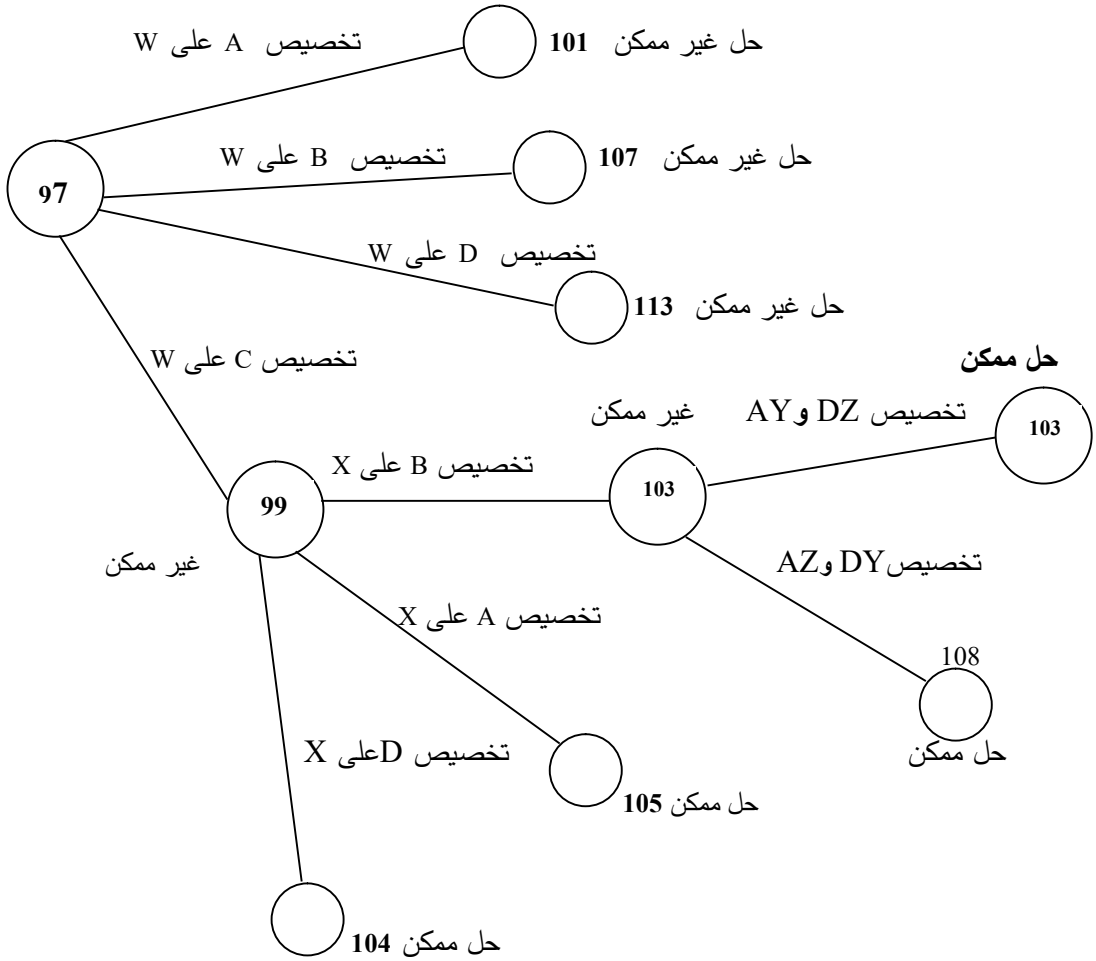
المقاول B للمشروع X

المقاول C للمشروع W

المقاول D للمشروع Z

وتكون تكلفة النقل عند حدها الأدنى وتبلغ 103 مليون ل.س.

وتكون الشجرة الكاملة للخطوات الأربعة السابقة كما يلي:


تخصيص A على W
101 حل غير ممكن
تخصيص B على W
107 حل غير ممكن
97
تخصيص D على W
113 حل غير ممكن
تخصيص C على W
حل ممكن
غير ممكن
تخصيص DZ وAY
103
تخصيص B على X
103
99
غير ممكن
تخصيصDY وAZ
تخصيص A على X
108
حل ممكن
تخصيص Dعلى X
105 حل ممكن
104 حل ممكن

5/9- معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص:

الجزء التالي يتعرض لبعض التعقيدات التي تنشأ من بعض الحالات الخاصة التي تواجهنا في الحياة العملية عند القيام بعملية التخصيص، أي أنّ بحث هذه الحالات الخاصة ودراستها هو من قبيل التجسيد لهذه الطريقة، إذ إنه توجد في الواقع العملي بعض الظروف التي تحتاج إلى إجراء بعض التحويرات حتى يمكن تطبيق الطرق السابقة في حلها، وأهم هذه الحالات:

1- عدم تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف.

2- مشكلة التخصيص ذات هدف التعظيم.

1/5/9- عدم تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف:

مما سبق كانت المصفوفات التي نتعامل معها كانت دائمة متماثلة في عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، أي أنّ الفرضية التي كانت سارية هي أنّ عدد الصفوف متساوٍ مع عدد الأعمدة، إلا أنه في الواقع العملي نشاهد الكثير من الحالات التي فيها عدم التعادل بين عدد الصفوف وعدد الأعمدة، والحقيقة أنّ معالجة تلك النوعية من المشكلات عملية سهلة ويسيرة، ولا تمثل مشكلة تحد من قيمة وفاعلية الطريقة المجرية للتخصيص، وسيظهر ذلك بوضوح من خلال حل المسألة التالية.

مسألة محلولة:

بفرض أنّ مكتب الاستشارات الإدارية والبحوث الذي وردت مسألته في بداية الفصل، كان لديه أربعة مستشارين علميين متاحين، في حين أنّ عدد الدراسات التي وردت إلى المكتب للدراسة كانت ثلاث دراسات فقط.

المطلوب التخصيص الأمثل على تلك الدراسات، علماً أنّ الزمن المتوقع لإتمام كل دراسة بالنسبة لكل مستشار كانت موضحة في الجدول التالي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)		
	X	Y	Z
A	20	30	18
B	18	36	10
C	12	28	6
D	16	32	12

خطوات الحل:

حيث إنّ الطريقة المجرية للتخصيص تتطلب أن يكون هناك تساوٍ بين عدد أعمدة وصفوف المصفوفة، لذلك فإنّ أمامنا أحد حلين لإيجاد هذا التساوي إما استبعاد الصف أو العمود (أو الصفوف والأعمدة) الزائدة، أو إضافة صف أو عمود (أو صفوف أو أعمدة)، إلى الصفوف أو الأعمدة الناقصة.

أما الحل بمحاولة استبعاد الزيادة صفوفاً أو أعمدة فإنّ ذلك شيء خطير ويدخل في آلية ومنطقية الحل، إذ أي الصفوف مثلاً من المسألة الحالية نستبعدها؟ إنّ ذلك يعتبر عملية تحكمية يجب أن لا نتدخل فيها، ولكن نترك عملية الاستبعاد هذه لتقررها العمليات الحسابية للحل، إذ يتعين أن تُتاح فرص متكافئة لكل مستشار في التخصيص على أي من هذه الدراسات الثلاثة، وعملية الاستبعاد هذه لا تحقق هذه الفرصة المتكافئة، إذاً سوف نتجه إلى الأسلوب الآخر، وهو زيادة عدد الأعمدة أو الصفوف الناقصة بعمود أو سطر (أو أعمدة وسطور إضافية) لإحداث هذا التعادل.

وحيث إنه لا يوجد لدينا دراسة رابعة حتى نضيفها، فإننا ببساطة نضيف عموداً وهمياً أو تخيلياً Dummy Column ، أو بمعنى آخر نضيف دراسة وهمية، حيث إنّ هذه الدراسة الوهمية غير موجودة فعلياً، فإنّ تخصيص مستشار عليها في التخصيص الأمثل هو في الحقيقة يعني عدم تخصيص مستشار من المستشارين الأربعة، لأنّ عدد المستشارين أربعة وعدد الدراسات ثلاثة فقط.

والتساؤل الآن إذا كنا سنضيف إلى هذه المصفوفة عموداً وهمياً لتكون المصفوفة متعادلة في عدد الصفوف والأعمدة، فما هي الأزمنة المتوقعة لإتمام تلك الدراسة التي ستمثل في العمود الوهمي الجديد.

الحقيقة أنّ أية قيمة جزافية تكون مقبولة طالما تمّ معاملة كافة المستشارين على قدم المساواة بالنسبة لهذا العمود الجديد، فطالما أنّ تخصيص الدراسة الوهمية ليس لها محل ولن تأخذ مكاناً، إذاً يتعين أن نضع قيمة تسهل وتيسر العمليات الحسابية لإتمام عملية التخصيص، وعليه فإنّ المنطق يفرض أن يكون وقت الانتهاء من تلك الدراسة ولكافة المستشارين هو قيمة صفرية، وعلى ذلك تصبح المصفوفة مكونة من أربعة أعمدة وأربعة صفوف، وتصبح مشكلة التخصيص بعد إجراء التعديلات عليها شكل المصفوفة التالية:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)			
	X	Y	Z	L وهمي
A	20	30	18	0
B	18	36	10	0
C	12	28	6	0
D	16	32	12	0

وبتطبيق خطوات الطريقة المجرية على المصفوفة تظهر خطوات الحل على الوجه التالي.

الخطوة الأولى:

أ- طرح أقل قيمة في كل صف من كافة أرقام الصف، وحيث إنّ أصغر قيمة في كل صف هي القيمة صفر (الخاصة بالعمود الوهمي)، فإنّ هذه الخطوة لن تؤثر على القيم الأصلية للمصفوفة، وستظهر المصفوفة بعد إجراء هذه الخطوة على صورتها الأصلية نفسا.

ب- طرح أقل قيمة في كل عمود من كافة أرقام العمود، وبإتمام تلك الخطوة نحصل على المصفوفة التالية:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)			
	X	Y	Z	L وهمي
A	8	2	12	0
B	6	8	4	0
C	0	0	0	0
D	4	4	6	0

الخطوة الثانية:

تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو الرأسية أو كلاهما معاً، وذلك بالنسبة للمصفوفة الناتجة من الخطوة الأولى، وستظهر المصفوفة بعد هذه الخطوة على الشكل التالي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)			
	X	Y	Z	L وهمي
A	8	2	12	0
B	6	8	4	0
C	0	0	0	0
D	4	4	6	0

يتضح من هذه المصفوفة أنّ أقل عدد ممكن من الخطوط المرسومة هو عدد اثنين فقط، وحيث إنّ المصفوفة مكونة من أربعة صفوف وأربعة أعمدة، إذاً وفقاً لقاعدة اختبار المثالية يكون الحل غير أمثل، ويتعين العمل على تحسينه ولهذا سنواصل الحل للخطوة التالية.

الخطوة الثالثة:

يتم فيها تعيين أقل قيمة غير مغطاة بالمصفوفة الناتجة من الخطوة الثانية وهي القيمة (2)، ويتم طرح تلك القيمة من جميع القيم غير المغطاة، وإضافة تلك القيمة إلى القيم الموجودة عند تقاطعات الخطوط المرسومة، وبإتمام تطبيق هذه العمليات الحسابية ستظهر المصفوفة على الشكل التالي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)			
	X	Y	Z	L وهمي
A	6	0	10	0
B	4	6	2	0
C	0	0	0	2
D	2	2	4	0

الخطوة الرابعة:

يتم فيها تكرار تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو الرأسية أو كلاهما معاً، وذلك بالنسبة للمصفوفة الناتجة من الخطوة السابقة، وستظهر المصفوفة بعد هذه الخطوة على الشكل التالي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)			
	X	Y	Z	L وهمي
A	6	0	10	0
B	4	6	2	0
C	0	0	0	2
D	2	2	4	0

يتضح من هذه المصفوفة أنّ أقل عدد ممكن من الخطوط المرسومة هو عدد ثلاثة فقط، وحيث إنّ المصفوفة مكونة من أربعة صفوف وأربعة أعمدة، إذاً وفقاً لقاعدة اختبار المثالية يكون الحل غير أمثل ويتعين العمل على تحسينه ولهذا سنواصل الحل للخطوة التالية.

الخطوة الخامسة:

يتم فيها تعيين أقل قيمة غير مغطاة بالمصفوفة الناتجة من الخطوة الرابعة وهي القيمة (2)، ويتم طرح تلك القيمة من جميع القيم غير المغطاة وإضافة تلك القيمة إلى القيم الموجودة عند تقاطعات الخطوط المرسومة، وبإتمام تطبيق هذه العمليات الحسابية ستظهر المصفوفة على الشكل التالي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)			
	X	Y	Z	L وهمي
A	4	0	8	0
B	2	6	0	0
C	0	2	0	4
D	0	2	2	0

الخطوة السادسة:

يتم فيها تكرار تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو الرأسية أو كلاهما معاً، وذلك بالنسبة للمصفوفة الناتجة من الخطوة السابقة، وستظهر المصفوفة بعد هذه الخطوة على الشكل التالي:

المستشار	الأزمنة التقديرية للانتهاء من الدراسة (باليوم)			
	X	Y	Z	L وهمي
A	~~4~~	~~0~~	~~8~~	~~0~~
B	~~2~~	~~6~~	~~0~~	~~0~~
C	~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~4~~
D	~~0~~	~~2~~	~~2~~	~~0~~

نلاحظ من الشكل السابق أنه أمكن تغطية جميع الأصفار بعدد أربعة خطوط، لذلك أنها تتضمن التخصيص الأمثل، ويتبقى تعيين ذلك الحل، ولغرض إيجاد هذا التعيين يتم الآتي:

1- البحث عن صف به صفر واحد فقط، سنجد أنه لا يوجد، وأنّ كل صف به عدد (2) صفر، وهذا يعني أنه سيحدث هناك تعدد في التخصيصات المثلى، بمعنى أنه سيوجد أكثر من تخصيص أمثل واحد.

2- البحث عن عمود به صفر واحد فقط، سنجد أنّ العمود Y به صفر واحد فقط، وعلى ذلك يتم تخصيصه.

3- إيجاد التخصيصات المثلى وسنجدها كالآتي:

التخصيص الأول	التخصيص الثاني
AY 30	AY 30
BZ 10	BL 0
CX 12	CZ 6
DL 0	DX 16
إجمالي التكلفة 52	**إجمالي التكلفة 52**

2/5/9- حل مشكلة التخصيص ذات هدف التعظيم:

لقد كانت كل المشكلات والمسائل التي تناولناها فيما سبق في هذا الفصل تتضمن مشكلات تخصيص ذات هدف تخفيض، مثل مشكلة التخصيص ذات هدف تخفيض الأزمنة الإجمالية للتنفيذ، وكذلك مشكلة المقاولين التي كانت تهدف إلى تخفيض إجمالي تكلفة تنفيذ المشاريع، وكذلك تخفيض تكلفة تخصيص الطائرات على الخطوط المختلفة، وهذا يوحي إلى أنّ طريقة التخصيص لا تتعامل إلا مع تلك النوعية من المشكلات، ولكن طريقة التخصيص تتناول أيضاً هدف التعظيم، وإن كان الأمر يحتاج لبعض التحوير في المصفوفة الأساسية حتى يمكن حلها بطريقة التخصيص السابق ذكرها.

مسألة محلولة:

استأجرت إحدى شركات التجزئة الكبرى مركزاً تجارياً جديداً، وتحاول هذه الشركة تحديد مواقع مختلف الأقسام داخل المركز التجاري، ومدير هذا المركز التجاري لديه أربعة مواقع لم يتم تخصيصها بعد، ومطلوب منه أن يستخدم تلك المواقع الأولية لتخصيص أربعة من الأقسام الخمسة التي يشتمل عليها المركز وهي (قسم المواد الغذائية – قسم المنظفات– قسم لعب الأطفال– قسم الأدوات المنزلية– قسم الأجهزة الكهربائية)، وحيث أنّ مدير المركز يرغب في التخصيص الأمثل لهذه الأقسام، لذلك قام بدراسة مستفيضة في ضوء خبرته الطويلة بمتاجر متشابهة، لذلك فإنه وضع تقديراً للأرباح السنوية المتوقعة لتخصيص كل قسم على كل موقع، وفيما يلي جدول يقدم ملخصاً لما تمّ التوصل إليه من تقديرات تلك

الأرباح السنوية المتوقعة لتخصيص كل قسم على كل موقع (بالمائة ألف ليرة سورية).

المواقع / الأقسام	A	B	C	D
قسم المواد الغذائية	10	6	12	8
قسم المنظفات	15	18	5	11
قسم لعب الأطفال	17	10	13	16
قسم الأدوات المنزلية	14	12	13	10
قسم الأجهزة الكهربائية	14	16	6	12

المطلوب مساعدة الشركة بالوصول إلى التخصيص الأمثل للأقسام على المواقع بهدف تعظيم الأرباح السنوية.

خطوات الحل:

إنّ المشكلة كما تمّ صياغتها بالشكل السابق لها سمة خصائص مشكلة التخصيص، ولكن ذات هدف تعظيم.

في البداية فإنه بالنظر إلى مصفوفة المشكلة نجد أنها تتضمن عدداً من الصفوف يزيد عن عدد الأعمدة، لذلك ينبغي أولاً أن نعالج هذا الوضع وذلك بأن نضيف عموداً وهمياً لإيجاد التساوي بين عدد الصفوف وعدد الأعمدة، وبإضافة عمود وهمي إلى المشكلة المدروسة تصبح مصفوفة المشكلة مكونة من خمسة صفوف وخمسة أعمدة، وتظهر على الشكل الآتي:

المواقع / الأقسام	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	10	6	12	8	0
قسم المنظفات	15	18	5	11	0
قسم لعب الأطفال	17	10	13	16	0
قسم الأدوات المنزلية	14	12	13	10	0
قسم الأجهزة الكهربائية	14	16	6	12	0

إنّ أحسن طريقة وأسرعها للتعامل مع مشكلات التخصيص ذات هدف التعظيم، أن نقوم بتحويلها إلى مشكلات تخصيص ذات هدف تخفيض، حتى نستخدم الخطوات نفسها التي استخدمناها في الطريقة المجرية للتخصيص، ولكن كيف تتم عملية التحويل ؟.

للإجابة على ذلك يمكننا أن نحصل من تلك المصفوفة على مصفوفة مقابلة معادلة تماماً تمثل مشكلة تخصيص مع هدف تخفيض، وذلك عن طريق تحويل جميع القيم الموجودة بالمصفوفة إلى قيم أخرى تمثل فرصاً ضائعة، وهذا التحويل يتم عن طريق طرح كل قيمة في كل عمود من أكبر قيمة في ذلك العمود، وعلى ذلك فإنّ المصفوفة الناتجة سيكون التخصيص الأمثل لها هو ذلك التخصيص الذي يعمل على تخفيض تلك الفرصة الضائعة (أي أنها أصبحت ذات هدف تخفيض).

وعلى ذلك يمكن القول بأنه يمكن تحويل مصفوفة التخصيص ذات هدف التعظيم إلى مشكلة تخصيص ذات هدف تخفيض عن طريق تحويل مصفوفة التخصيص إلى الشكل الذي تكون فيه جميع قيم المصفوفة تمثل فرصاً ضائعة.

سنقوم بتحويل مصفوفة التخصيص الأصلية (ذات هدف التعظيم) إلى مصفوفة تخصيص تمثل كل قيمة فيها فرصة ضائعة، وبعد هذا الإجراء ستظهر مصفوفة الفرص الضائعة على الشكل الآتي:

المواقع / الأقسام	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	7	12	1	8	0
قسم المنظفات	2	0	8	5	0
قسم لعب الأطفال	0	8	0	0	0
قسم الأدوات المنزلية	3	6	0	6	0
قسم الأجهزة الكهربائية	3	2	7	4	0

وبعد أن توصلنا إلى مصفوفة الفرص الضائعة، كما يوضحها الجدول السابق، يمكن أن نسير في الخطوات المعتادة للتخصيص حتى نصل إلى التخصيص الأمثل.

الخطوة الأولى:

أ- طرح أقل رقم في كل صف من أرقام الصف، إلا أننا لن نقوم بأداء هذه الخطوة، حيث إنّ إضافة عمود وهمي بقيم مقدارها صفر سيجعل أصغر قيمة في كل صف هي صفر، ومن ثم فلن تتغير القيم الحالية، لذلك لا داعي لإجراء هذه الخطوة.

ب- طرح أقل رقم في كل عمود من أرقام العمود، أيضاً لن نقوم بأداء هذه الخطوة، حيث إنّ الإجراء الذي اتبعناه لتحويل المشكلة إلى فرص ضائعة، جعلت أصغر قيمة في كل عمود هي صفر، لذلك فإنّ عملية الطرح لن تغيّر من قيم المصفوفة الأصلية.

الخطوة الثانية:

يتم فيها تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو الرأسية أو كلاهما، والجدول التالي يمثل عملية التغطية:

الأقسام \ المواقع	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	7	12	1	8	0
قسم المنظفات	2	0	8	5	0
قسم لعب الأطفال	0	8	0	0	0
قسم الأدوات المنزلية	3	6	0	6	0
قسم الأجهزة الكهربائية	3	2	7	4	0

يتضح من هذه المصفوفة أنّ أقل عدد ممكن من الخطوط المرسومة هو عدد أربعة فقط، وحيث إنّ المصفوفة مكونة من خمسة صفوف وخمسة أعمدة، إذاً وفقاً لقاعدة اختبار المثالية، يكون الحل غير أمثل ويتعين العمل على تحسينه ولهذا سنواصل الحل للخطوة التالية.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

ويتم ذلك عبر المراحل التالية:

1- تعيين أقل قيمة من القيم غير المغطاة في الجدول وهي الرقم (1).

2- طرح تلك القيمة (1) من جميع القيم غير المغطاة وإضافتها إلى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة.

3- باقي القيم المغطاة يتم وضعها في الجدول كما هي دون تعديل:

الأقسام \ المواقع	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	6	11	0	7	0
قسم المنظفات	2	0	8	5	1
قسم لعب الأطفال	0	8	0	0	1
قسم الأدوات المنزلية	3	6	0	6	1
قسم الأجهزة الكهربائية	2	1	6	3	0

الخطوة الرابعة:

يتم فيها تكرار تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو الرأسية أو كلاهما معاً، وذلك بالنسبة للمصفوفة الناتجة من الخطوة السابقة، وستظهر المصفوفة بعد هذه الخطوة على الشكل التالي:

المواقع / الأقسام	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	6	11	0	7	0
قسم المنظفات	2	0	8	5	1
قسم لعب الأطفال	0	8	0	0	1
قسم الأدوات المنزلية	3	6	0	6	1
قسم الأجهزة الكهربائية	2	1	6	3	0

يتضح من هذه المصفوفة أنّ أقل عدد ممكن من الخطوط المرسومة هو عدد أربعة فقط، وحيث أنّ المصفوفة مكونة من خمسة صفوف وخمسة أعمدة، إذاً وفقاً لقاعدة اختبار المثالية يكون الحل غير أمثل، ويتعين العمل على تحسينه ولهذا سنواصل الحل للخطوة التالية.

الخطوة الخامسة: تحسين الحل:

عن طريق تعيين أقل قيمة من القيم غير المغطاة في الجدول وهي الرقم (1)، نقوم بطرح تلك القيمة (1) من جميع القيم غير المغطاة وإضافتها إلى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة، وباقي القيم المغطاة يتم وضعها في الجدول كما هي دون تعديل:

المواقع / الأقسام	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	5	10	0	6	0
قسم المنظفات	2	0	9	5	2
قسم لعب الأطفال	0	8	1	0	2
قسم الأدوات المنزلية	2	5	0	5	1
قسم الأجهزة الكهربائية	1	0	6	2	0

الخطوة السادسة:

يتم فيها تكرار تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو الرأسية أو كلاهما معاً، وذلك بالنسبة للمصفوفة الناتجة من الخطوة السابقة، وستظهر المصفوفة بعد هذه الخطوة على الشكل التالي:

المواقع / الأقسام	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	5	10	0	6	0
قسم المنظفات	2	0	9	5	2
قسم لعب الأطفال	0	8	1	0	2
قسم الأدوات المنزلية	2	5	0	5	1
قسم الأجهزة الكهربائية	1	0	6	2	0

يتضح من هذه المصفوفة أنّ أقل عدد ممكن من الخطوط المرسومة هو عدد أربعة فقط، وحيث إنّ المصفوفة مكونة من خمسة صفوف وخمسة أعمدة، إذاً وفقاً لقاعدة اختبار المثالية يكون الحل غير أمثل، ويتعين العمل على تحسينه ولهذا سنواصل الحل للخطوة التالية.

الخطوة السابعة: تحسين الحل

عن طريق تعيين أقل قيمة من القيم غير المغطاة في الجدول وهي الرقم (1)، نقوم بطرح تلك القيمة (1) من جميع القيم غير المغطاة، وإضافتها إلى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة، وباقي القيم المغطاة يتم وضعها في الجدول كما هي دون تعديل:

المواقع / الأقسام	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	4	10	0	5	0
قسم المنظفات	1	0	9	4	2
قسم لعب الأطفال	0	9	2	0	3
قسم الأدوات المنزلية	1	5	0	4	1
قسم الأجهزة الكهربائية	0	0	6	2	0

الخطوة الثامنة:

يتم فيها تكرار تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو الرأسية أو كلاهما معاً، وذلك بالنسبة للمصفوفة الناتجة من الخطوة السابقة، وستظهر المصفوفة بعد هذه الخطوة على الشكل التالي:

المواقع / الأقسام	A	B	C	D	E
قسم المواد الغذائية	4	10	0	5	0
قسم المنظفات	1	0	9	4	2
قسم لعب الأطفال	0	9	2	0	3
قسم الأدوات المنزلية	1	5	0	4	1
قسم الأجهزة الكهربائية	0	0	6	2	0

من هذه المصفوفة يتضح أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، لأنّ عدد الخطوط المرسومة خمسة خطوط، وهي تعادل عدد الصفوف أو الأعمدة، وبتطبيق الطريقة المتبعة في تعيين التخصيص يظهر لنا التخصيص الأمثل كما يلي:

الجدول التالي يوضح الحل الأمثل ومقدار الأرباح المتوقعة لذلك التخصيص علماً أنّ الأرباح تمّ الحصول عليها من المصفوفة الأصلية.

القسم	الموقع المخصص	الأرباح المقدرة بالمائة ألف
قسم المواد الغذائية	E الموقع الوهمي	0
قسم المنظفات	B	18
قسم لعب الأطفال	D	16
قسم الأدوات المنزلية	C	13
قسم الأدوات الكهربائية	A	14
إجمالي الأرباح المتوقعة		61

نلاحظ من هذا الجدول أنه قد تمّ تخصيص قسم المواد الغذائية ليحتل الموقع الوهمي (E)، وهذا يعني أنّ هذا القسم لن يدخل ضمن تخطيط المتجر الجديد في ضوء الأرباح المتوقعة لكل قسم.

6/9- تدريبات

مسألة رقم (1):

بفرض أنّ إحدى الشركات الصناعية تريد تخصيص ثلاث عمليات لديها على ثلاث آلات، وأنّ كل آلة تؤدي عملية واحدة فقط ، وأنّ تكلفة تخصيص كل عملية على كل آلة موضّحة بالجدول التالي:

الآلات / العمليات	التكلفة التقديرية للتشغيل		
	X	Y	Z
A	20	30	40
B	38	24	32
C	24	28	22

المطلوب مساعدة الشركة بالوصول إلى التخصيص الأمثل للعمليات على الآلات والذي يؤدي إلى تخفيض إجمالي التكاليف أقل ما يمكن باستخدام الطريقة المجرية للتخصيص.

مسألة رقم (2):

يوجد بإحدى المنظمات ثلاث مهام غير مخصصة، وفي الوقت نفسه يوجد ثلاثة موظفين متاحين لديها حالياً للتخصيص على تلك المهام، والجدول التالي يوضح الأزمنة المقدرة بالساعات للانتهاء من كل مهمة بواسطة كل موظف.

المهمة / الموظف	الأزمنة المقدرة للانتهاء من المهمة		
	X	Y	Z
A	11	12	17
B	7	11	20
C	5	8	16

المطلوب مساعدة المنظمة بالوصول إلى التخصيص الأمثل للمهام على الموظفين والذي يؤدي إلى تخفيض إجمالي الوقت اللازم لتنفيذ المهام (مع العلم أنّ

كل موظف يتخصص على مهمة واحدة فقط)، وذلك باستخدام الطريقة الفرع والحد. للتخصيص.

مسألة رقم (3):

يوجد لدى إحدى الشركات الصناعية أربع آلات يمكن تشغيل ثلاثة أعمال عليها، وكل عمل يمكن تشغيله على آلة واحدة فقط، ويوضح الجدول التالي تكلفة التشغيل بالنسبة لكل عمل على كل آلة (الأرقام بالألف ليرة سورية).

الآلات / الأعمال	W	X	Y	Z
A	20	24	34	38
B	15	18	17	21
C	12	16	15	20

المطلوب مساعدة الشركة بالوصول إلى التخصيص الأمثل للآلات على الأعمال المختلفة بحيث تنخفض تكاليف تشغيل الآلات إلى أدنى حد ممكن.

مسألة رقم (4):

تقوم إحدى المنشآت التجارية بتسويق منتجاتها في أربع محافظات (دمشق – حلب– اللاذقية – الحسكة)، ولديها أربعة من رجال البيع (A, B, C, D)، وعلى ضوء تجارب الماضي ودراسة أداء رجال البيع في الفترات السابقة أمكن توفير البيانات التالية عن الأرباح أو الخسائر التي يتوقع أن يحققها كل رجل من رجال البيع في كل محافظة من محافظات التوزيع. (الأرباح أو الخسائر بالألف ليرة)

رجال البيع / مناطق التوزيع	A	B	C	D
محافظة دمشق	8	10	12	8
محافظة حلب	10	8	8	11
محافظة اللاذقية	12	–8	9	7
محافظة الحسكة	6	7	7	12

المطلوب مساعدة المنشأة التجارية بالوصول إلى التخصيص الأمثل لرجال البيع على المحافظات المختلفة بحيث يتحقق لها أقصى أرباح ممكنة.
(مع العلم بأنه يتم تخصيص رجل بيع واحد لكل منطقية بيعية).

مسألة رقم (5):

أعلنت شركة جود التجارية عن مسابقة لشغل خمس وظائف شاغرة لديها وهي (محاسب للرواتب، محاسب للمشتريات، أمين صندوق، محاسب للمبيعات، محاسب للشحن)، فتتقدم إليها عدد كبير من الأفراد، واستقر الرأي على سبعة منهم ممن تتوافر فيهم الشروط، وأجريت لهم اختبارات إضافية تتعلق بأنشطة ومهام الوظائف الشاغرة الخمسة، وذلك بغرض الاختيار من بينهم من ناحية، وتحديد أنسبهم لكل وظيفة من ناحية أخرى للتخصيص عليها، والجدول التالي يعطي الدرجات التي حصل كل منهم عليها في الاختبار (كل جزء من الاختبار من عشر درجات).

الوظائف / المتقدمون	محاسب للرواتب	محاسب للمشتريات	أمين صندوق	محاسب للمبيعات	محاسب للشحن
A	3	3	1	3	5
B	5	8	9	4	4
C	1	7	10	2	7
D	5	9	8	6	7
E	4	5	9	5	6
F	5	4	10	4	8
G	5	5	4	6	6

المطلوب مساعدة الشركة في تقرير من سيتم قبولهم للالتحاق بالعمل، ومن سترفض طلباتهم، وأي الأعمال ستسند إلى كل متقدم (مع العلم أنه سيتم تخصيص متقدم واحد لكل وظيفة).

الفصل العاشر

طبيعة عملية اتخاذ القرارات

1/10- مقدمة

2/10- مفهوم القرار

3/10- أنواع القرارات

4/10- طرق اتخاذ القرارات

5/10- خطوات تحليل القرار واتخاذه

6/10- البيئات المختلفة لاتخاذ القرار

1/6/10- النوع الأول اتخاذ القرار في ظل التأكد التام

2/6/10- النوع الثاني: اتخاذ القرار في حالة المخاطر

3/6/10- النوع الثالث: اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد

7/10- شجرة القرار

1/10- مقدمة:

تحظى عملية اتخاذ القرارات باهتمام الكثير من الدارسين والباحثين في مجال الإدارة، بل يعدّها البعض من الكتاب جوهر العملية الإدارية، وتعدّ عملية اتخاذ القرارات المحور الذي ترتكز عليه العمليات الإدارية الأخرى كالتخطيط والتنظيم والتنسيق والرقابة.[1]

الأمر الذي لا شك فيه أننا جميعاً نقوم باتخاذ العديد من القرارات ففي كل لحظة يتخذ الإنسان منا العديد من القرارات، التي منها تلك القرارات التي تحدد مدى نجاح الفرد أو فشله، وتحليل القرار هو عبارة عن مدخل منهجي لدراسة عملية اتخاذ القرارات الذي يستخدم عدداً من النماذج الرياضية لمساعدة المدير في اتخاذ القرارات بشكل أفضل، فأساسات تحليل القرار إذاً تقدم لنا نماذج كمية تساعد المدير في اتخاذه لأفضل القرارات الممكنة.

ويقصد باتخاذ القرار الإجراء الذي يتم من خلاله اختيار البديل الأمثل من بين بدائل عدّة، وتتوقف جودة القرار إلى حد كبير على نوعية البيانات المتوفرة لدى متخذ القرار، وهنا قد يقابل متخذ القرار أحد المواقف الثلاثة التالية:[2]

1- اتخاذ القرارات في ظل ظروف التأكد (Certainty)، وتكون البيانات محددة تماماً.
2- اتخاذ القرارات في ظل ظروف المخاطرة (Risk)، التي يمكن لمتخذ القرار فيها وصف التوزيع الاحتمالي للبيانات.

1- د. محمود محمد المنصوري، (1996)، **أساليب بحوث العمليات واستخداماتها في ترشيد عملية اتخاذ القرارات**، بنغازي- مركز بحوث العلوم الاقتصادية، ص214.

2- د. عايدة نخلة وآخرون، (2003)، **بحوث العمليات**، القاهرة – مكتبة عين شمس، ص58.

3- اتخاذ القرارات في ظل ظروف عدم التأكد (Uncertainty)، التي لا يمكن فيها إعطاء أوزان نسبية تمثل درجة الملائمة في اتخاذ القرار.

إذاً فما الفرق بين القرار الجيد والقرار السيئ ؟ إنّ القرار الجيد هو ذلك القرار المبني على المنطق، الذي يأخذ في حسبانه البيانات والمعلومات المتاحة كافة ، الذي يعطي لكل البدائل المتاحة اهتماماً، والذي يستخدم بعض الأساليب الكمية للمساعدة في تقييم هذه البدائل لاختيار البديل الأفضل.[1]

2/10 . مفهوم القرار:

يعرف (Harrison, 1974) أنّ عملية اتخاذ القرار هي إصدار حكم معين عما يجب أن يفعله الفرد في موقف ما، وذلك بعد الفحص الدقيق للبدائل المختلفة التي يمكن اتباعها، أو هو خطة اختيار بديل معين، من خلال تقييم بدائل مختلفة وفقاً لتوقعات معينة لمتخذ القرار.

فالمدير يجد نفسه في كثير من المواقف والأعمال في موقف اختيار بين بدائل عدة، فمثلاً:

- **زيادة رقم المبيعات:** هل تتم بتحسين الجودة ؟.

أو تتم بتخفيض الأسعار؟.

أو بتطوير الحملات الإعلانية وتدريب مندوبي المبيعات ؟.

أو بتغيير سياسات البيع ومنافذ التوزيع ؟.

1- Stephen Littelechild, and Maurice Shutler, **Op. Cit**, p.198.

- **اختيار موقع المصنع:** هل الأفضل أن يكون قريباً من العملاء ؟.

أو قريباً من مصادر المواد الأولية ؟.

أو قريباً من التجمعات السكانية والإدارات الحكومية ؟.

أو قريباً من المنطقة الصناعية ؟.

بناءً على ما تقدم نجد أنّ القرار في ماهيته هو اختيار بين بدائل مختلفة، وكذلك فإنّ عدم اتخاذ أي قرار إزاء حالة ما يعتبر قراراً بحد ذاته، وبمعنى أدق وفي ضوء آراء الكتاب والأخصائيين، يمكن القول إنّ اتخاذ القرارات عبارة عن عملية اختيار بديل بين مجموعة من البدائل لتحقيق هدف ما خلال فترة زمنية محددة في ضوء كل من البيئة الداخلية والخارجية المتاحة للمنظمة.

مما سبق نستنتج أنّ عملية اتخاذ القرارات تنطوي على عدد كبير من العناصر هي:

1 – الاختيار.
2 – توافر البدائل.
3 – الأهداف.
4 – الوقت.
5 – الموارد المتاحة.
6 – البيئة الداخلية للمنظمة.
7 – البيئة الخارجية (الظروف السياسية والاقتصادية والاجتماعية).

3/10– أنواع القرارات:

قدم المختصون في العلوم الإدارية أشكالاً متعددة لتصنيف القرارات، ولقد وجدنا أن التصنيف الأمثل والأقرب شمولاً هو التصنيف الذي قام بتقديمه الباحث (أنسوف، Ansoff) فقد اقترح التصنيف التالي:

1 . القرارات الاستراتيجية:

وهي التي تتعلق بمستقبل المنظمة كلها، وتؤثر تأثيراً طويل الأجل، ولا يمكن اتخاذها بشكل روتيني لأنها غير متكررة، كما أنها تحظى بدرجة عالية من المركزية في اتخاذها، ومن أمثلة القرارات الاستراتيجية ما يلي:

أ- قرارات اختيار مزيج السلعة – السوق.

ب- قرار ابتكار نوع جديد من السلع.

ج- هل يجب أن تزيد الشركة من الاقتراض طويل الأجل؟.

د- قرارات البدء في التوسع.

2 . القرارات التنظيمية أو الإدارية:

وهي القرارات التي تتصف بالتكرار إذا ما قورنت بالقرارات السابقة ومن أمثلتها:

أ- القرارات الخاصة بإجراء توزيع الموارد على استخداماتها البديلة.

ب- القرارات الخاصة بتنظيم الموارد وتنميتها.

ج- القرارات التنظيمية المرتبطة بتدفق المعلومات.

د- القرارات الخاصة باستبدال آلة قديمة بدل الاكتفاء بالإصلاح.

3. القرارات التشغيلية:

وهي التي تتصف بدرجة عالية من اللامركزية، كما أنّ هذه القرارات تتصف بالتكرار، أي أنها مبرمجة، ومن أمثلة هذه القرارات:

أ- توزيع الموارد المتاحة على الأنشطة الوظيفية الرئيسة.

ب- جدولة الإنتاج.

ج- أساليب الإشراف والرقابة على العمليات الإنتاجية.

د- تحديد حجم الإنتاج وحجم المخزون.

هـ- القرارات الخاصة بالتسعير.

4/10- طرق اتخاذ القرارات:

يمكن تقسيم طرق اتخاذ القرارات إلى طرق وصفية وطرق كمية، ولا يمكن القول إنّ الطرق الوصفية تفضل أو الطرق الكمية، ذلك لأنّ طبيعة المشكلة موضع القرار، ومدى قابليتها للقياس الكمي هي التي تحدد أساس المفاضلة.

1/4/10- الطرق الوصفية:

هناك العديد من الطرق سنوجزها بثلاث طرق رئيسة، هي طريقة الخطوات، وطريقة الحكم الصائب والفراسة، والطريقة العلمية، وتحاول هذه الطرق أن يكون الاختيار فيها على أسس موضوعية عن طريق الأوزان، إلا أنّ هذه الأوزان نسبية، كما هو الحال بالنسبة للمزايا والعيوب أو الصعاب.

أولاً- طريقة الخطوات:

يمكن حصر الخطوات المختلفة لاتخاذ القرارات فيما يلي:

1- إدراك عدم التوازن في الموقف:

لن يكون هناك حلاً فعّالاً لأية مشكلة إلا إذا كانت هناك مشكلة، وعلى ذلك فإنّ الخطوة الأولى في عملية اتخاذ القرارات تتمثل في إدراك المدير نفسه لعدم التوازن السائد في الموقف، بمعنى أنه لا بد وأن يكون هناك خطأ ما يحتاج إلى تصحيح، وعلى ذلك فقد يختلف اثنان من حيث تشخيصهم للموقف المعين، بحيث أنّ ما يبدو مشكلة للأول قد لا يبدو كذلك للآخر.

2- تشخيص المشكلة:

هنا يقوم المدير بالفحص الدقيق لجميع المعلومات المرتبطة بالموقف المعين، التي أدت إلى وجود عدم التوازن به، ويجب أن تتم عملية التشخيص بطريقة صريحة وواعية ومنظمة، وهنا يجب أن يتوافر في التشخيص الجيد عدة مقومات، يمكن إيجازها فيما يلي:

أ- يجب أن يُفرق التشخيص الجيد للموقف بين الحقائق واللغة المستخدمة في وصفها، حيث في كثير من الأحيان لا تعكس اللغة المستخدمة في وصف الموقف طبيعة الحقائق بهذا الموقف، وعليه يجب على المدير أن يكون واعياً لمدى تأثير اللغة في الحقيقة، ويرجع الفارق بين اللغة والحقيقة إلى عدة أسباب أهمها:

- إنّ اللغة التي يستخدمها شخص ما لسرد حقيقة، ما هي إلا تعبير عن الطريقة التي يدرك بها الفرد الحقيقة وليست الحقيقة ذاتها.
- عدم القدرة على استخدام اللغة بفصاحة لشرح الموقف (الحقيقة).
- اختلاف معنى الكلمة الواحدة من فرد لآخر.

ب- يجب أن يحدد التشخيص الجيد درجة دقة المعلومات أو الحقائق، أي أن نفرق بين الحقيقة والرأي، ويتطلب الأمر معرفة الرأي أولاً، ثم معرفة ما إذا كان هذا الرأي حقيقياً أم لا.

ج- يجب أن يحدد التشخيص الجيد أسباب المشكلة، وليس فقط من تسبب فيها.

د- يجب أن يحدد التشخيص الجيد العوامل المختلفة التي تسببت في حدوث المشكلة.

3- تعريف المشكلة:

عادة ما ينصرف اهتمام الأفراد إلى محاولة وضع حل أو حلول للمشكلة دون تعريفها بدقة، وهذا هو السبب في فشل الكثير من الحلول، وهناك عدة معايير يجب أخذها في الحسبان حين تعريف المشكلة، ومن أهمها ما يلي:

أ- كتابة المشكلة بطريقة واضحة.

ب- احتواء التعريف على التشخيص النهائي للمشكلة.

ج- تحديد المعايير التي تمت مخالفتها.

د- كتابة المشكلة بطريقة محددة وليس بطريقة عامة.

هـ- تجنب كتابة المشكلة كما لو كانت حلاً ضمنياً.

و- التفرقة بين المشكلات طويلة الأجل والمشكلات قصيرة الأجل.

ز- عدم كتابة المشكلة كلغز.

4- اختيار الحل:

إذا تمّ تشخيص المشكلة وتعريفها بدقة كما ذكرنا، فإنّ الحلول البديلة للمشكلة تظهر بطريقة شبه تلقائية، وهناك عدة معايير يجب على القائم بمهمة اتخاذ القرار الاستناد إليها لتقييم فاعلية كل حل بديل، التي من أهمها:

أ- ارتباط الحل بتحقيق أهداف التنظيم.

ب- قبول الحل من الأطراف المرتبطة به.

ج- التركيز على الحلول الحاضرة بدلاً من الخبرات السابقة.

د- درجة المخاطرة الخاصة بكل حل بديل.

هـ- الترتيب المنطقي للحلول.

5- التنفيذ:

هذه هي الخطوة الأخيرة في عملية اتخاذ القرارات، التي يجب أن تستند إلى عدة اعتبارات نوجزها في الآتي:

أ- بالرغم من أنّ الحل قد سبقت دراسته من وجهة نظر إمكان حل المشكلة القائمة حالياً، إلا أنه يجب تقدير احتمال إمكان تنفيذ الحل في المستقبل أيضاً.

ب- يجب أن يكون هناك تخطيطاً لكيفية التنفيذ وتوقيته، بمعنى آخر: يجب أن يشتمل التنفيذ على الأدوات التي يمكن استخدامها لإحداث التغيير، وكذلك الأوقات الزمنية التي يتم فيها استخدامها.

ج- يجب أن يسير التنفيذ بطريقة معينة، بحيث لا يبدأ تنفيذ مرحلة ما إلا بعد التأكد من تنفيذ المرحلة السابقة بنجاح، وهكذا بالنسبة لجميع المراحل، ويرجع السبب في ذلك إلى أنّ المعلومات المرتدة عن مراحل سابقة عادة

ما تؤدي إلى إعادة دراسة المشكلة وتعريفها من جديد، إذا ظهر من المشكلات ما يدعو إلى ذلك.

د- لا بد من وجود القيادات الفعّالة لضمان إمكان تنفيذ الحل المختار بنجاح.

ثانياً- طريقة الحكم الصائب والفراسة:

عادة ما نسمع من المديرين المحترفين، أنّ الحكم الصائب والفراسة هي الأساس الذي تُبنى عليه عملية اتخاذ القرارات السليمة، وهناك الكثير من الكتابات والبحوث التي تثبت صحة ذلك، فما الذي يفعله الشخص حين استخدامه للحكم الصائب والفراسة كأساس لاتخاذ قرار معين أمر غير واضح تماماً، لا شك أنّ الخبرة تزيد من قدرة الشخص على الحكم على الأمور، ولكن بغض النظر عن هذه الخبرة، فالعوامل التي تتداخل فيها ما زالت غير معروفة تماماً، وحيث إنّ الحكم على الأمور أمر غير واضح فإنه يصعب تدريسه أو نقله للغير، وإنّ كل ما يمكننا قوله لتنمية القدرة على الحكم على الأمور هو ممارستها عملياً.

وهناك البعض الذي يقلل من أهمية عاملي الحكم الصائب والفراسة كأساس لاتخاذ القرارات، وقد دلّت بعض الدراسات على أنّ القرارات التي يصل إليها المديرون المحترفون الذين يتشابهون من حيث الخبرة والتعلم تختلف كثيراً، مما يدل على عدم صلاحية عاملي الحكم والفراسة، إلا أنه من الناحية الأخرى فقد لا يكون ذلك بالضرورة صحيحاً، ذلك أنّ درجة التعليم ونوعيته وعدد سنوات العمل وحدها ليست مقياساً دقيقاً للخبرة.

على أية حال يرتبط بهذه الطريقة ما يسمى بالتفكير الخلاّق كأساس لاتخاذ القرارات الإدارية، وهناك الكثير من التعريفات المختلفة لهذا المفهوم، إلا أنّ هناك شبه إجماع على أنّ التفكير يعدّ خلاّقاً إذا تضمن أحد هذه الظروف أو بعضها:

أ- أن يكون الناتج النهائي لعمليات التفكير شيئاً جديداً له قيمته سواء للفرد أو المجتمع.

ب- أن يكون التفكير غير عادي بحيث يتطلب إما تعديل وإما رفض للآراء القديمة والمقبولة والمتعارف عليها.

ج- أن يتطلب التفكير دافعاً على العمل ومثابرة غير عادية.

د- أن تكون المشكلة في شكلها المبدئي غامضة، وأن ينتهي الأمر بإعادة تعريف المشكلة ذاتها بوضوح.

ثالثاً- الطريقة العلمية:

تنطوي الطريقة العلمية على خطوات عدة يمكن إجمالها فيما يلي:

1- ملاحظة مشكلة ما، وتحديد هدف معين يسعى الفرد لتحقيقه من وراء حلها.

2- بقاء الفروض التي تفسر العلاقة بين جميع العوامل المرتبطة بها من ناحية، وبين الهدف من ناحية أخرى.

3- اختبار صحة الفروض حتى تثبت صلاحيتها كنموذج صحيح للمشكلة.

4- إيضاح القاعدة التي يمكن على أساسها اتخاذ القرار.

5- تطبيق القاعدة المستخدمة في اتخاذ القرار.

وسميت بالطريقة العلمية نظراً لاستخدامها في البداية بواسطة العلماء، وخاصة في ميدان العلوم الطبيعية، حيث يتطلب تفسير الظواهر المختلفة ضرورة وجود معادلات وقواعد لاتخاذ القرارات، وهذه القواعد لا يمكن الإتيان بها إلا بعد عمل فروض معينة واختبارها والتحقق من صحتها.

وتعدّ الطريقة العلمية حالة خاصة من الطريقة العامة لاتخاذ القرارات بطريقة الخطوات، حيث يتم استخدامها فيما يتعلق بالمشكلات التي تتسم بكثرة الحلول البديلة التي يتعذر الاختيار من بينها، وفي مثل هذه الحالات فالطريقة المناسبة تتطلب عمل الفروض التي تصف العلاقات بين العوامل المختلفة المتعلقة بالمشكلة كما توجد في أحسن حل بديل واختبار دقتها، وبالتالي يمكن خفض عدد الحلول البديلة إلى عدد مناسب قبل الاختيار من بينها، وتقوم الطريقة العلمية

بالتركيز على التحليل الكمي للعوامل الداخلة في نطاق المشكلة، وذلك بعد عزل العوامل غير الكمية التي لا يتم استخدامها إلا في الخطوة الأخيرة، وهي خطوة تطبيق القاعدة المستخدمة في اتخاذ القرار.

2/4/10- الطرق الكمية في اتخاذ القرارات:

تعددت في السنوات الأخيرة المداخل الكمية، أو الرياضية، لتطوير المهارات الإدارية في اتخاذ القرارات، وقد ساعد على انتشار هذه المداخل وتنميتها دخول الحاسب إلى الحياة العملية في المجالات كافة، فالحاسب يوفر أداة جيدة وفعّالة لمواجهة ما تتطلبه الكميات الداخلة من عمليات حسابية ضخمة ومعقدة، ولعل من أهم هذه الطرق الكمية التي انتشر استخدامها في مجال اتخاذ القرارات ما يلي:

1- البرمجة الخطية.
2- أسلوب بيرت والمسار الحرج.
3- نظرية المباريات.
4- أسلوب صفوف الانتظار.
5- نماذج المخزون.
6- أسلوب النقل.
7- أسلوب التخصيص.
8- برمجة الأهداف.

وسوف تتناول هذه الطرق الكمية مفصلاً في فصول لاحقة.

5/10- خطوات تحليل القرار واتخاذه:

تتمثل الخطوات الرئيسية في تحليل أي قرار بصرف النظر عن درجة أهميته في ست خطوات رئيسية وهي:[1]

1- التحديد الواضح للمشكلة التي تواجه المنظمة.

2- تنمية البدائل الممكنة للتعامل مع المشكلة وتحديدها.

3- تحديد النتائج المحتملة للموقف والقرار.

4- ذكر الربح أو العوائد من كل بديل وكل نتيجة محتملة.

5- اختيار أحد نماذج نظرية القرار الرياضية.

6- تطبيق النموذج الذي تمّ اختياره واتخاذ القرار.

مثال على هذه الخطوات:

يُعدّ السيد أكرم هو المؤسس لشركة أكرم للمنتجات الهندسية منذ عام 1975، ويواجه السيد أكرم اليوم مشكلة اتخاذ قرار بشأن إنتاج منتج جديد، وهو الغسالات الأوتوماتيكية **(الخطوة الأولى)**، ويرى السيد أكرم أنّ أمام الشركة ثلاثة بدائل محتملة وهي: **(الخطوة الثانية).**

1- إقامة مصنع جديد كبير الحجم (ذي طاقة إنتاجية كبيرة) وذلك في مدينة حلب.

2- إقامة مصنع صغير الحجم (ذي طاقة إنتاجية محدودة) وذلك في مدينة اللاذقية.

3- عدم إقامة أي مصنع وعدم قيامه بإنتاج المنتج الجديد.

بالنسبة للموقف فإنّ النتائج المحتملة التي قررها السيد أكرم هي أنّ الناس سوف يفضلون المنتج الجديد ويقبلون على شرائه، أو أنهم لن يتقبلوه وبالتالي لن يوجد عليه أي طلب في السوق **(الخطوة الثالثة).**

1- د. أحمد حسين علي حسين ود. فتحي رزق السوافيري، (2002)، **بحوث العمليات في المحاسبة مدخل معاصر باستخدام الحاسب الآلي**، الإسكندرية – دار الجامعة الجديدة, ص7.

ويرغب السيد أكرم في تعظيم ربحه من وراء قراره، ويرى أنه إذا وجد سوقاً يفضل المنتج ومع إقامة مصنع كبير الحجم فإنّ صافي الربح يمكن أن يصل إلى 2000000 ليرة سورية، أما إذا كان السوق لا يفضل المنتج الجديد فإنّ الشركة يمكن أن تحقق خسارة قدرها 1800000 ليرة سورية كخسارة صافية في حالة بنائها المصنع كبير الحجم نفسه، أما إذا قررت الشركة بناء مصنع صغير الحجم وظهر أنّ السوق يفضل المنتج الجديد فسوف تحقق الشركة ربحاً صافياً قدره 1000000 ليرة سورية، وتحقق خسارة صافية قدرها 200000 ليرة سورية في حالة عدم تفضيل السوق للمنتج الجديد، وأخيراً فإنّ الشركة إذا قررت عدم إقامة أي مصنع فإنّ الربح والخسارة سيكون صفراً في حالتي السوق.

والقيم السابقة والتي يُطلق عليها اسم القيم الشرطية (يعود هذا المسمى إلى حقيقة أساسية وهي أنّ الشركة لا يمكنها أن تحقق ربحاً صافياً قدره 2000000 ليرة سورية إلا إذا أقامت مصنعاً كبير الحجم، وأيضاً كان السوق يفضل المنتج وهكذا بالنسبة لبقية القيم)، ويتم التعبير عنها في شكل جدول يطلق عليه اسم جدول القرار، وأحياناً يُطلق عليه جدول العوائد ويظهر ذلك في الجدول رقم (1-10) **(الخطوة الرابعة)**.

الجدول رقم (1-10)

جدول القرار مع وجود قيم شرطية لشركة أكرم للمنتجات الهندسية

البدائل	المواقف المحتملة	
	السوق يفضل المنتج	السوق لا يفضل المنتج
إقامة مصنع كبير الحجم	2000000	-1800000
إقامة مصنع صغير الحجم	1000000	-200000
عدم إقامة أي مصنع	0	0

أما الخطوة الخامسة والسادسة فهي قيام الإداري أو المستشار باختيار النموذج الخاص بنظرية القرار وتطبيقه على البيانات السابقة لمساعدته في عملية اتخاذ القرار الأفضل، وتتوقف عملية اختيار النموذج على تلك البيئة التي يتخذ فيها القرار، وعلى درجة المخاطرة وعدم التأكد المصاحبة لعملية اتخاذ القرار ذاته.

6/10- البيئات المختلفة لاتخاذ القرار:

إنّ نوع القرار الذي يتخذه متخذ القرار يتوقف عادة على حجم المعلومات وكميتها، والمعرفة التي لديه عن الموقف الذي يتخذ فيه القرار, ووفقاً لذلك يمكننا التمييز بين ثلاث من البيئات التي تتخذ فيها القرارات.

1/6/10- النوع الأول: اتخاذ القرار في ظل التأكد التام:

في ظل هذه البيئة يعرف متخذ القرار على وجه التحديد النتائج الخاصة بكل بديل من البدائل المطروحة أمامه، وعلى ذلك تستطيع الإدارة تحديد كل بديل من البدائل المعروضة والعائد من كل بديل، وبطبيعة الحال سيعمل متخذ القرار على اختيار ذلك البديل الأفضل الذي يعطي له أفضل النتائج الممكنة.[1]

مثال: إذا كنت تملك مبلغ 1000000 ليرة سورية وترغب في استثماره، والبدائل المتاحة أمامك هو استثمار هذا المبلغ في صورة وديعة بالبنك تعطي لك عائداً سنوياً قدره 8% ، والبديل الثاني هو استثماره في أذونات الخزانة الحكومية التي تعطي عائداً قدره 10% ، ولو أنّ كل بديل نتائجه مضمونة 100% فإنك بالقطع سوف تختار البديل الثاني حيث يعطي لك هذا البديل عائداً أكبر.

مثال آخر: أراد أحد المستثمرين اختيار أفضل فرصة استثمارية في إحدى الأسواق المالية وفقاً للمعلومات المؤكدة المتوفرة عن فرص الاستثمار كما يتضح في الجدول التالي:

1- د. محمد سليمان هدى، (2004)، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في قطاع النقل البحري**، القاهرة- الأكاديمية العربية للعلوم التكنولوجية والنقل البحري.، ص545.

الجدول رقم (2- 10)

عائد الاستثمارات

البدائل	نسبة العائد
بنوك	8%
صناعة	11%
تأمين	7%

ومن خلال نسبة العائد فإنه سوف يستثمر أمواله في أسهم الشركات الصناعية حيث تعطيه أكبر عائد 11%، وليس هناك ما يدفعه للاستثمار في أسهم القطاعات الأخرى. في حالة النتائج المضمونة فإنّ البديل الأفضل يمكن تحديده بسهولة ويسر.

2/6/10- النوع الثاني: اتخاذ القرار في حالة المخاطرة:

عندما يواجه متخذ القرار مشكلة تستلزم دراسة متغيرات بيئية عدة أو حالات طبيعية ممكنة، ويمكن تحديد احتمال حدوث كل منها فإنه يكون في مواقف اتخذ القرار في ظل المخاطرة.[1]

وفي هذه الحالة من بيئة القرار يكون متخذ القرار على معرفة باحتمالية حدوث أي حالة من حالات الطبيعة التي تواجه عملية اتخاذ القرار، وتقل هنا المعلومات المتاحة عن معلومات حالة التأكد حيث لا يمكن معرفة النتيجة التي سوف تتحقق من اختيار بديل معين بشكل قاطع، وإنما يمكن ربط النتائج الممكنة باحتمالات تحقق حالات الطبيعة المؤدية إليها. تمتاز هذه الحالة بتعدد حالات الطبيعة التي

1- د. جمال علي سعد مروان، (1996)، **بحوث العمليات في مجال صنع القرارات الإدارية في ظل أحوال عدم التأكد**، الزقازيق – مكتبة اليسر، ص24.

تواجهها باحتمالية مختلفة لكل حالة، مما يستوجب تبني القرار الذي يعطي أكبر قيمة متوقعة عند الأخذ بالاعتبار احتمالية حدوثها.

تقود هذه الحالة إلى استخدام معيار القيمة المتوقعة لتحديد البديل الأفضل أو استخدام شجرة القرارات في حالة تعدد البدائل وتعدد حالات الطبيعة، وتمتاز حالة المخاطرة بما يلي:[1]

أ- وجود عدة بدائل.

ب- وجود أكثر من عائد لكل بديل.

ج- وجود عدة احتمالات للطبيعة مع معرفة احتمالات وقوعها

***- معيار تعظيم القيمة الحالية المتوقعة:**

ويطلق عليه معيار تعظيم العائد المتوقع إذا كانت النتائج تعبّر عن أرباح أو إيرادات، ومعيار تدنية التكاليف المتوقعة إذا كانت تعبّر عن تكاليف.[2]

لو أنك حصلت على جدول العوائد الشرطية (مثل الجدول الخاص بشركة السيد أكرم)، وكذلك حصلت على احتمالات حدوث كل موقف محتمل فإنك سوف تستطيع ببساطة شديدة حساب القيمة المتوقعة لكل بديل من البدائل المتاحة أمامك، ونحسب القيمة المتوقعة عن طريق استخدام المعادلة التالية:

القيمة المتوقعة للبديل A = (العائد الشرطي المحقق في الموقف المحتمل الأول) × (احتمالات حدوث هذا الموقف) + (العائد الشرطي المحقق في الموقف المحتمل الثاني) × (احتمالات حدوث الموقف الثاني) +.... + (العائد الشرطي المحقق في الموقف المحتمل الأخير) × (احتمالات حدوث هذا الموقف)

1- حمدي طه ، تعريب د. أحمد حسين علي حسين، (1996)، **مقدمة في بحوث العمليات**، دار المريخ للنشر- المملكة العربية السعودية، ص535.

2 - V. Lotfi, and C. Carl Pegels, (1996), **"Decision Support Systems for Operations Management & Management Science**", Third Edition, USA: McGraw- Hill Companies, Inc, p.44.

فإذا قمنا بتطبيق هذه المعادلة على حالة شركة السيد أكرم، بفرض أنّ السيد أكرم يعتقد أنّ موقف حدوث تفضيل للمنتج في السوق له هو احتمال حدوث الموقف الثاني نفسه وهو عدم وجود تفضيل للمنتج في السوق، بمعنى أنّ احتمالات حدوث أي من الموقفين يتساوى أي يصبح كل منهما مقداره 50% ، فما قرار السيد فرح إذا استخدم أعلى قيمة حالية متوقعة في اتخاذه للقرار:

* القيمة المتوقعة للمصنع الكبير:

(2000000) (0.50) + (–1800000) (0.50) = 100000 ليرة سورية

* القيمة المتوقعة للمصنع الصغير:

(1000000) (0.50) + (–200000) (0.50) = 400000 ليرة سورية

* القيمة المتوقعة لعدم وجود مصنع:

(0) (0.50) + (0) (0.50) = 0

يلاحظ أنّ أعلى قيمة حالية متوقعة هي 400000 ليرة سورية، التي تنتج عن اختيار البديل الثاني، ويعني ذلك أنّ على السيد أكرم أن يقوم ببناء مصنع ذي طاقة إنتاجية محدودة في مدينة اللاذقية، ويمكن التعبير عن نتائج الحسابات السابقة للقيمة الحالية المتوقعة في صورة جدول، كما يظهر الجدول (3–10).

الجدول رقم (3– 10)

جدول القرار مع احتمالات حدوث المواقف المحتملة والقيمة الحالية المتوقعة لشركة أكرم للصناعات الهندسية

البدائل	المواقف المحتملة		القيمة الحالية المتوقعة
	السوق يفضل المنتج	السوق لا يفضل المنتج	
إقامة مصنع كبير الحجم	2000000	-1800000	100000
إقامة مصنع صغير الحجم	1000000	-200000	400000
عدم إقامة أي مصنع	0	0	0
الاحتمالات	50%	50%	

وتمثل القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة الحد الأقصى الذي يمكن دفعه ثمناً للمعلومات الكاملة، وسنقوم باستخدام الجدول رقم (1– 10) في حساب المفهومين السابقين ونحدد بعدها القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة.

1– حساب القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة:

إذا نظرنا إلى الجدول رقم (3– 10) فسنجد أنّ أفضل بديل في الموقف المحتمل الأول هو إقامة مصنع كبير في ظل وجود تأييد السوق للمنتج الجديد وقبوله، أما بالنسبة للموقف المحتمل الثاني فإنّ أفضل بديل في هذا الموقف هو صفر ومن هنا فإنّ القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة تساوي:

2000000 (0.50) + 0 (0.50) = 1000000

ومعنى ذلك أننا لو اتخذنا القرار في ظل المعلومات الكاملة لحصلنا على مبلغ 1000000 ليرة سورية كمتوسط إذا تمّ تكرار هذا القرار مرات عدة، أو أنّ هذه القيمة هي التي نحصل عليها إذا تمّ اتخاذ القرار في ظل المعلومات الكاملة.

2- حساب الحد الأقصى للقيمة الحالية المتوقعة:

يتضح من الجدول رقم (3- 10) أنّ الحد الأقصى للقيمة المتوقعة هو 400000 ليرة سورية، وهو يمثل الحد الأقصى للعائد المتوقع عند اتخاذ القرار في ظل عدم وجود معلومات كاملة.

3- حساب القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة:

1000000 – 400000 = 600000

ومن هنا فإنّ الحد الأقصى الذي يمكن للسيد أكرم أن يدفعه ثمناً للمعلومات الكاملة هو 600000 ليرة سورية، ويلاحظ أنّ ذلك لازال متوقفاً على أن يكون احتمال حدوث كل موقف من الموقفين هو 50%.

مثال: سنقوم كذلك بحساب القيمة الحالية المتوقعة الخاصة بأحد المستثمرين في سوق الأوراق المالية:

يمكن توضيح ذلك من خلال استعراض الجدول التالي:

الجدول رقم (4-10)

العوائد للقرارات المختلفة

	حالات الطبيعة			
الاحتمالات	0.30	0.40	0.30	**القيمة الحالية المتوقعة**
البدائل	S1	S2	S3	
A1 أسهم البنوك	20	30	15	22.5
A2 أسهم الصناعة	10	40	30	28
A3 أسهم التأمين	40	15	20	24

لإيجاد القيمة الحالية المتوقعة لكل بديل نقوم بضرب قيمة كل بديل باحتمالاته ثم نجمع حاصل الضرب لتحديد البديل ذي أعلى قيمة حالية متوقعة، وذلك كما يلي:

A1= 20 (0.30) + 30(0.40) + 15(0.30) = 22.5

A2 = 10(0.30) + 40(0.40) + 30(0.30) = 28

A3 = 40(0.30) + 15(0.40) + 20(0.30) = 24

وتأسيساً على ما سبق فإنّ المستثمر سيفضل الاستثمار في أسهم الشركات الصناعية حيث إنّ القيمة الحالية المتوقعة هي 28 وهي أكبر قيمة بين القيم الموجودة.

وحساب القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة هي حاصل الفرق بين القيمة المتوقعة في حالة التأكد التام مطروحاً منها القيمة المتوقعة في حالة المخاطرة، وكما يتضح من هذا المثال فإنّ أعلى عائد تحت S1 هو 40 وأعلى عائد تحت S2 هو 40 وأعلى عائد تحت S3 هو 30 ، لذلك فإنّ القيمة المتوقعة في ظروف التأكد التام هي:

$$40(0.30) + 40(0.40) + 30(0.30) = 37$$

ولما كانت القيمة المتوقعة في حالة المخاطرة هي 28 فإنّ القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة تساوي: $37 - 28 = 9$

*** - خسارة الفرصة البديلة:**

إنّ أحد الطرق البديلة لحساب الحد الأقصى للقيمة الحالية المتوقعة هو القيام بحساب الحد الأدنى لخسارة الفرصة البديلة المتوقعة.

وخسارة الفرصة البديلة التي أحياناً يطلق عليها اسم الندم، تشير إلى الفرق بين الربح أو العائد الأمثل، والعائد والربح الذي تمّ الحصول عليه بالفعل، وبمعنى آخر هي المقدار من الأموال الذي تمّ خسارته نتيجة لضياع الفرصة الناشئة عن عدم القيام باختيار البديل الأمثل.

ويمكن التوصل إلى قيمة الحد الأدنى لخسارة الفرصة البديلة المتوقعة عن طريق عمل جدول يعرف باسم جدول الخسارة، ومن خلاله يتم حساب خسارة الفرصة البديلة المتوقعة لكل بديل، دعنا ننظر إلى هذه العملية الحسابية.

الخطوة رقم (1):

إنّ الخطوة الأولى في حساب الحد الأدنى لخسارة الفرصة البديلة المتوقعة هي القيام بإعداد جدول الخسارة، ويتم عمل هذا الجدول عن طريق حساب خسارة الفرصة البديلة، الناشئة عن عدم اختيار أفضل بديل متاح في كل موقف من المواقف المحتمل وجودها أمام الشركة، ويمكن حساب خسارة الفرصة البديلة لكل موقف من المواقف المحتملة عن طريق طرح النتائج المتوقعة في العمود الذي يمثل الموقف المحتمل من أعلى نتيجة موجودة في هذا العمود نفسه.

ففي مثالنا الخاص بشركة السيد أكرم نجد أنّ أفضل نتيجة في ظل الموقف المحتمل الأول وهو سوق يفضل المنتج الجديد هي 2000000 ليرة سورية، وذلك في حالة الأخذ بالبديل الخاص ببناء مصنع جديد كبير الحجم في محافظة حلب، أما بالنسبة للموقف المحتمل الثاني وهو عدم تفضيل السوق للمنتج الجديد فإنّ أفضل نتيجة هي صفر وذلك في حالة اختيار البديل الخاص بعدم القيام بأي تصرف بالمرة، ويوضح الجدول رقم (5– 10) حساب خسارة الفرصة البديلة لشركة السيد أكرم.

الجدول رقم (5– 10)

حساب خسارة الفرصة البديلة لشركة السيد أكرم

السوق يفضل المنتج	السوق لا يفضل المنتج
2000000 – 2000000 = 0	0 – (–1800000) = 1800000
2000000 – 1000000 = 1000000	0 – (–200000) = 200000
2000000 – 0 = 2000000	0 – 0 = 0

من هذا الجدول يمكن تحديد جدول خسارة الفرصة البديلة لشركة السيد أكرم والتي تظهر في الجدول رقم (6- 10).

الجدول رقم (6- 10)

جدول خسارة الفرصة البديلة لشركة السيد أكرم

البدائل	المواقف المحتملة	
	السوق يفضل المنتج	السوق لا يفضل المنتج
إقامة مصنع كبير الحجم	0	1800000
إقامة مصنع صغير الحجم	1000000	200000
عدم إقامة أي مصنع	2000000	0
الاحتمالات	50%	50%

الخطوة رقم (2):

القيام بحساب القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة عن طريق ضرب الاحتمالات الخاصة بكل موقف محتمل في قيمة الخسارة الموجودة في جدول خسارة الفرصة البديلة لكل بديل على حدة، وبالتطبيق على شركة السيد أكرم يمكن حساب القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة كما يلي:

- خسارة الفرصة البديلة المتوقعة للبديل الأول =

(0.50) (0) + (0.50) (1800000) = 900000 ليرة سورية

- خسارة الفرصة البديلة المتوقعة للبديل الثاني =

(0.50) (1000000) + (0.50) (200000) = 600000 ليرة سورية

- خسارة الفرصة البديلة المتوقعة للبديل الثالث =

(0.50) (2000000) + (0.50) (0) = 1000000 ليرة سورية

وباختيار الحد الأدنى لقيمة خسارة الفرصة البديلة المتوقعة وهي 600000 ليرة سورية فإنّ البديل الأفضل في هذه الحالة يصبح هو القيام ببناء مصنع صغير في

مدينة اللاذقية، ويلاحظ أنه القرار (البديل) نفسه الذي توصلنا إليه باستخدام مفهوم القيمة الحالية المتوقعة، دائماً يتم الوصول إلى البديل نفسه في حالة استخدام أي من المفهومين، كذلك فإنّ القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة دائماً تساوي الحد الأدنى للقيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة، يلاحظ أنّ القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة كانت 600000 ليرة سورية تماماً مثل الحد الأدنى للقيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة.

3/6/10- النوع الثالث: اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد:

تظهر حالة عدم التأكد في عملية اتخاذ القرار عندما لا تتوفر أية معلومات عن احتمالية حدوث حالات الطبيعة المؤثرة في القرار، وكذلك عندما لا يستطيع متخذ القرار التنبؤ بأية قيم احتمالية، يمكن أن تدرس القرارات في حالة عدم التأكد من دون قيم احتمالية من خلال مجموعة من المعايير، حيث يمكن لمتخذ القرار أن يعتمد على معيار واحد أو أكثر منها، حيث إنّ لطبيعة المنظمة أثراً في اتخاذ القرار في هذه الحالة.[1]

والمعايير المتبعة في اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد:

1- معيار أكبر قيمة للحدود القصوى.
2- معيار أكبر قيمة للحدود الدنيا.
3- معيار الأسف.
4- معيار الاحتمالات المتساوية.
5- معيار الواقعية.

1- د. إسماعيل إبراهيم جمعة وآخرون، (2003) ، **بحوث العمليات في اتخاذ القرارات مع تطبيقات على الحاسب**، كلية التجارة- جامعة الإسكندرية.، ص363.

مثال: تريد شركة بردى للصناعات الهندسية إجراء توسعات في طاقتها الإنتاجية لمقابلة الطلب على منتجاتها، وقد كان هناك أمام الشركة ثلاثة بدائل لإجراء هذه التوسعات (توسعات صغيرة، أو متوسطة، أو كبيرة)، وكانت حالات الطبيعة التي تواجه عملية اتخاذ القرار تتعلق بمدى الطلب على منتجات الشركة، وقد يكون الطلب منخفضاً، أو متوسطاً أو مرتفعاً، والجدول رقم (7– 10) يوضح مصفوفة القرار كما يلي:

الجدول رقم (7– 10)

مصفوفة القرار

بدائل القرار	**حالات الطبيعة (الطلب)**		
	منخفض S1	متوسط S2	مرتفع S3
توسع صغير d1	40	40	20
توسع متوسط d2	10	30	60
توسع كبير d3	-30	30	90

سيتم تطبيق جميع المعايير باستخدام مصفوفة القرار أعلاه:

1– معيار أقصى الأقصى Maximax:

يسمى هذا المعيار بمعيار التفاؤل ومن تسميته أقصى الأقصى، حيث يتم تحديد أقصى عائد لكل بديل، ومن هذه المعايير القصوى يتم اختيار البديل الذي يقابل أقصى عائد ممكن، وباستخدام مصفوفة القرار السابقة يمكن تحديد أقصى عائد ممكن كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول رقم (8- 10)

أقصى الأقصى

بدائل القرار	حالات الطبيعة			المعيار
	S1	S2	S3	أقصى الأقصى
توسع صغير d1	40	40	20	40
توسع متوسط d2	10	30	60	60
توسع كبير d3	-30	30	90	(90)

يتضح من هذا الجدول أنّ أقصى عائد في كل صف هو في الصف الأول 40، وفي الصف الثاني هو 60، وفي الصف الثالث هو 90، مما يستوجب اختيار البديل الثالث d3، وأنّ عملية توسيع الطاقة الإنتاجية يجب أن تكون كبيرة، حيث إنّ هذا المعيار يهمل جميع المعلومات ويركز فقط على أعلى مردود.

2- معيار أقصى الأدنى Maximin:

هو معيار يقوم على اختيار أقصى الأدنى وهو من النوع التشاؤمي في النظر إلى حالات الطبيعة، ويقوم هذا المعيار على افتراض أنّ أسوأ حالات الطبيعة سوف تحدث، ويتخذ القرار بعد أن يتم تحديد أدنى عائد لكل بديل ثم يتم اختيار أعلى الأدنى، وإذا كان العائد يعبر عن الخسارة بدلاً من الأرباح فإنّ المعيار يكون اختيار أقل الأعلى، حيث يتم تحديد أقصى خسارة لكل بديل ومن ثم يتم اختيار أدنى هذه الخسائر.

الجدول رقم (9- 10)

أقصى الأدنى

بدائل القرار	حالات الطبيعة			المعيار
	S1	S2	S3	أقصى الأدنى
توسع صغير d1	40	40	20	(20)
توسع متوسط d2	10	30	60	10
توسع كبير d3	-30	30	90	-30

يوضح عمود أعلى الأدنى أنّ d1 = 20, d2 = 10 , d3 = -30 ولذلك بناء عليه فإنّ أعلى عائد من بين أسوأ ناتج يكون 20 مما يستوجب تبني سياسة توسيع محدودة في الطلقة الإنتاجية d1 .

3- معيار الأسف Minimax Regret:

هذا المعيار يحول العوائد الشرطية إلى جدول أسف ثم يتم تطبيق معيار أدنى الأعلى، والأسف هو شعور بالخسارة ناتج عن الفرق بين العائد الذي حصل عليه متخذ القرار وبين ما يجب أن يحصل عليه لو اختار أفضل البدائل، وأحسن حالات الأسف عندما يتم افتراض حالات الطبيعة التي يكون معها الأسف يساوي صفراً، ومعيار الأسف يستخدم معيار أدنى الأعلى في جدول الفرص الضائعة.

الجدول رقم (10-10)

مصفوفة القرار

بدائل القرار	**حالات الطبيعة (الطلب)**		
	منخفض S1	متوسط S2	مرتفع S3
توسع صغير d1	40	40	20
توسع متوسط d2	10	30	60
توسع كبير d3	-30	30	90

يتضح من مصفوفة القرار أنّ أحسن قرار هو اختيار d3 بعائد مقداره 90 وفي هذه الحالة يكون الأسف صفراً، أما في حالة اختيار d2 بعائد مقداره 60 الذي يجب أن يكون 90 فهناك أسف عن عائد مقداره 30، والجدول التالي يوضح مصفوفة الأسف.

الجدول رقم (11-10)

معيار الأسف

بدائل القرار	حالات الطبيعة			المعيار
	S1	S2	S3	معيار الأسف
توسع صغير d1	0	0	70	70
توسع متوسط d2	30	10	30	(30)
توسع كبير d3	70	10	0	70

بعد أن يتم تحديد جدول الأسف يتم استخدام معيار أدنى الأعلى لاختيار البديل الذي هو أحسن الأسوأ في خسارة الفرصة، وأسوأ أسف مع d1 هو 70، ومع d2 هو 30، ومع d3 هو 70، لذلك فإنّ d2 يمثل أدنى الأعلى من بين الأسف الأعلى.

4- معيار الاحتمالات المتساوية Equal Likely:

يستند هذا المعيار على سبب عدم الكفاية، إذا لم يكن هناك سبب لترجيح حالة من حالات الطبيعة على غيرها حيث يفترض أن تكون حالات الطبيعة متساوية، وهذا الافتراض قاد إلى افتراض قيم احتمالية متساوية إلى جميع حالات الطبيعة.

لاستخدام هذا المعيار يتم إيجاد القيمة المتوقعة لكل بديل ثم يتم اختيار البديل الأفضل الذي يمثل أعلى قيمة متوقعة، وبتطبيق هذا المعيار على مثالنا يقود إلى افتراض قيمة احتمالية لكل حالة طبيعة، ولما كانت هناك ثلاث حالات طبيعية فإنّ احتمالية كل منها تساوي 1/3.

إذاً القيمة الاحتمالية المتوقعة (EMV) لجميع البدائل تكون:

EMV (d1) = 40(1/3) + 40(1/3) + 20(1/3) = 33.4
EMV (d2) = 10(1/3) + 30(1/3) + 60(1/3) = 33.4
EMV (d3) = -30(1/3) + 30(1/3) + 90(1/3) = 30

بعد أن يتم إيجاد القيمة الاحتمالية المتوقعة (EMV) لجميع البدائل يتم اختيار البديل ذي القيمة المتوقعة الأعلى في مثالنا يتبين أنّ: d1 = d2 = 33.4 مما يعني تعدد الحلول أي يمكن اختيار d1 أو d2.

5- معيار الواقعية : Criterion Realism

عادة ما يُطلق على هذا المعيار اسم الوسط المرجح، حيث إنّ هذا المعيار يوفق بين المدخل المتفائل والمدخل المتشائم في اتخاذ القرار، وبفرض استخدام هذا المعيار فإنّ أول خطوة تتمثل في اختيار معيار للواقعية يُعبّر عنه بمعامل α، ويكون هذا المعامل عبارة عن قيمة تتراوح بين صفر، 1.

وعندما يكون المعامل α قريباً من القيمة 1 فإنّ متخذ القرار يكون متفائلاً في قراره حول المستقبل، أما إذا كان المعامل قريباً من القيمة صفر فإنّ متخذ القرار يكون متشائماً فيما يتعلق بالمستقبل، والميزة التي يقدمها لنا هذا المعيار هو أنه يمكّن متخذ القرار من أن يعكس رؤيته وإحساسه الشخصي حول قضية التفاؤل والتشاؤم في القرار.

ويتم حساب قيمة معيار الواقعية عن طريق المعادلة التالية:

قيمة المعيار = α (القيمة القصوى في الصف) – (1- α) (القيمة الدنيا في الصف)

بفرض أنّ معامل الواقعية α عند 0.7، فلنقم بتطبيق هذا المعيار على مثالنا الحالي:

- بالنسبة لتوسع صغير: 40(0.70) – 20 (0.30) = 22
- بالنسبة لتوسع متوسط: 60(0.70) – 10(0.30) = 39
- بالنسبة لتوسع كبير: 90(0.70) – (-30)(0.30) = 72

في النهاية نقوم باختيار أكبر قيمة من هذه المتوسطات المرجحة وهي 72، ويعني ذلك أنه يفضل القيام بالتوسعات الكبيرة.

7/10- شجرة القرار:

المشكلات البسيطة التي تحتوي على عدد قليل من البدائل وحالات الطبيعة يمكن تحليلها وحلها باستخدام مصفوفة القرار، وكلما تعقدت المشكلة تطلب ذلك استخدام أساليب أكثر كفاءة لتحليل هذه المشكلات، ويأتي أسلوب شجرة القرارات كأحد الأساليب المستخدمة في تحليل المشكلات المعقدة ذات القيم الاحتمالية، حيث إنّ مكونات شجرة القرار يمكن أن تتسع إلى عدد أكبر من هذه المكونات (الاحتمالات، والعائد، وحالات الطبيعة).[1]

وإنّ شجرة القرار عبارة عن تمثيل تصويري للعناصر والعلاقات التي تتكون منها مشكلة القرار، وتستخدم لتمثيل حالة القرار في ظل المخاطرة بسهولة ونظامية، حيث يمكن ترتيب العناصر الرئيسة لمشكلة القرار عن طريق نقاط القرار، ويعبّر عنها بالعقد وتأخذ بالرسم الرمز □ ، وفروع يُعبّر عنها بمتجهة لتمثل العلاقة بين نقاط القرار، ونقاط حالات الطبيعة أو عقدها وتأخذ الرمز ○ الذي يعبر عن حالة طبيعية واحدة.

عندما يتم الانتهاء من تمثيل المشكلة بشجرة قرار تتبعها عملية جمع المعلومات وتحديد المردودات والاحتمالات على العلاقات، تجري بعد ذلك تقييم البدائل التي تقود في النهاية إلى اختيار البديل الأفضل، الذي يمثل أعلى قيمة متوقعة (EMV)، وتجري هذه العمليات في شجرة القرار باستخدام المرور التراجعي الذي يعبر عنها.

إنّ المرور التراجعي يؤدي إلى أن يتخذ القرار الأخير أولاً حيث تتواصل عملية اتخاذ القرار من قرار فرعي إلى قرار فرعي إلى أن يتم اتخاذ القرار الأول، وتتم عملية الاختيار من بين فروع القرار عند كل عقدة قرار، وفروع القرارات التي لا يتم

1- د. محمد أسعد عبد الوهاب النيداني، (1998)، **مقدمة في بحوث العمليات**, الإسكندرية- مكتبة ومطبعة الإشعاع الفنية، ص337.

اختيارها تهمل، ويعبّر عنها بالرسم بالعلاقة (///)، أما المسارات التي لا تستبعد والتي تمثل فروع شجرة القرار فهي القرارات المفضلة التي سوف يتم اختيار إحداها كأفضل قرار.

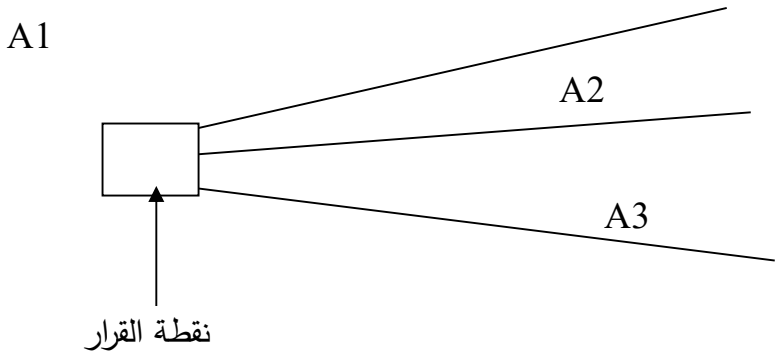
*** - خطوات رسم شجرة القرار وتحليلها:**

بعد أن يتم تحديد المشكلة يمكن اتباع الخطوات التالية لتمثيل المشكلة بأسلوب شجرة القرار.[1]

1- تحديد نقطة القرار وتحديد البدائل المتاحة.
2- تحديد حالة الطبيعة.
3- وضع المعلومات والاحتمالات.
4- تحديد العائد لكل بديل وفقاً لحالات الطبيعة المختلفة.

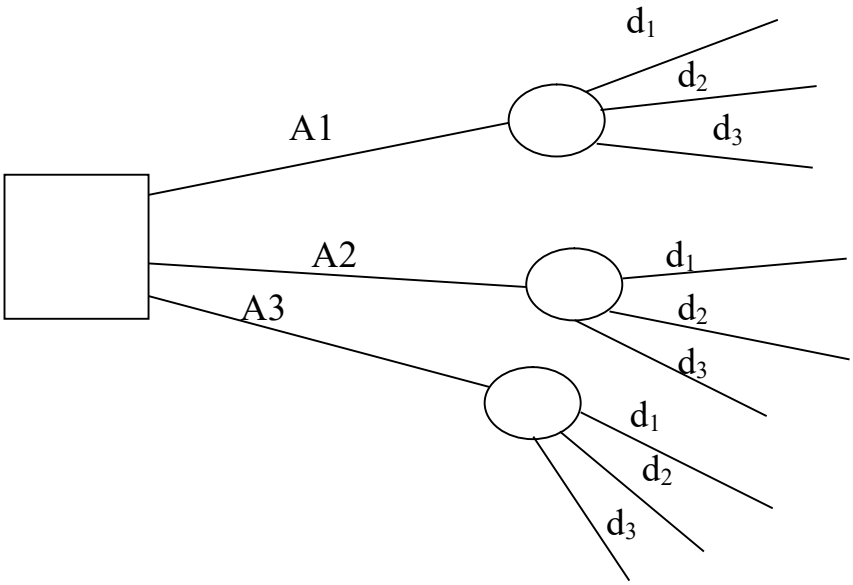
وسنقوم بتطبيق المعلومات المعطاة في مثالنا السابق الخاص بأحد المستثمرين في الأوراق المالية لتمثيل شجرة القرار الخاصة بها:

الخطوة الأولى: يبدأ رسم شجرة القرار من نقطة القرار، ومن ثم يمكن رسم البدائل المتاحة والتي هي A1, A2, A3 كما يتضح فيما يلي:



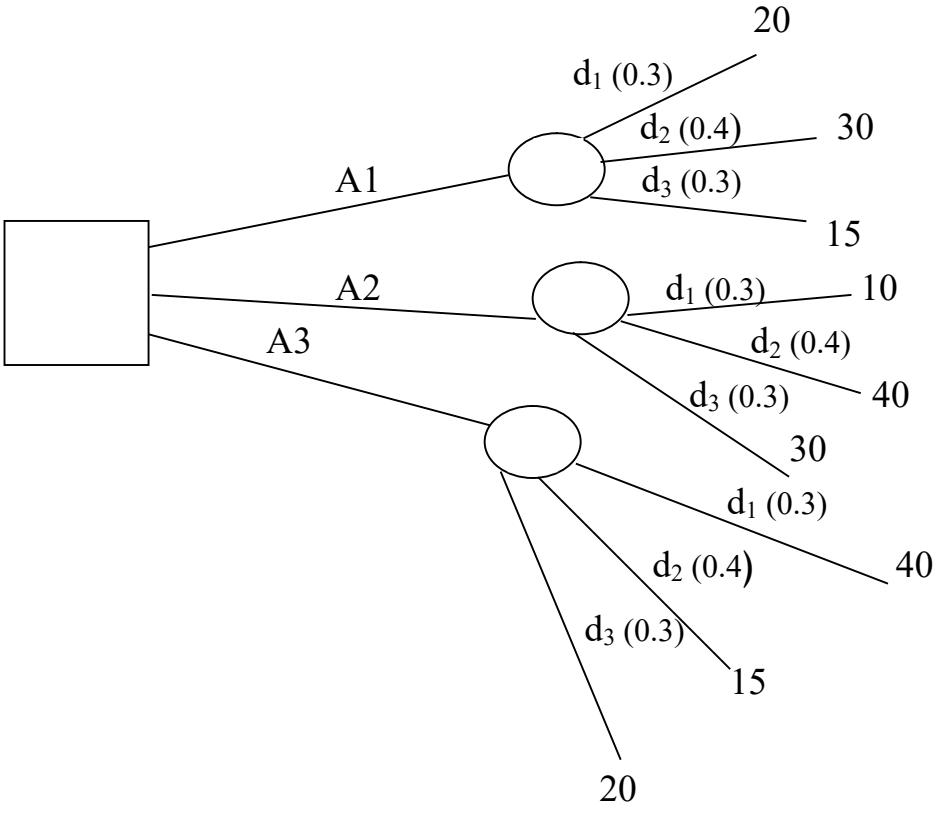
1 - Kweku Muata and Osei Bryson, (2004), Evaluation of Decision Trees, A Multi Criteria Approach, **Computers & Operations Research**, Vol.3, Issue.11, p. 1935.

الخطوة الثانية: تحديد حالة الطبيعة في نهاية كل بديل، وهناك ثلاث حالات طبيعية يعبر عنها بدوائر ○، يمكن أن يتفرع من كل منها عدد من الفروع هي d_1, d_2, d_3، كما يتضح في الشكل التالي:



الخطوة الثالثة:

تثبيت البيانات على شجرة القرار كما في الشكل التالي لنحصل على شجرة قرار كاملة.

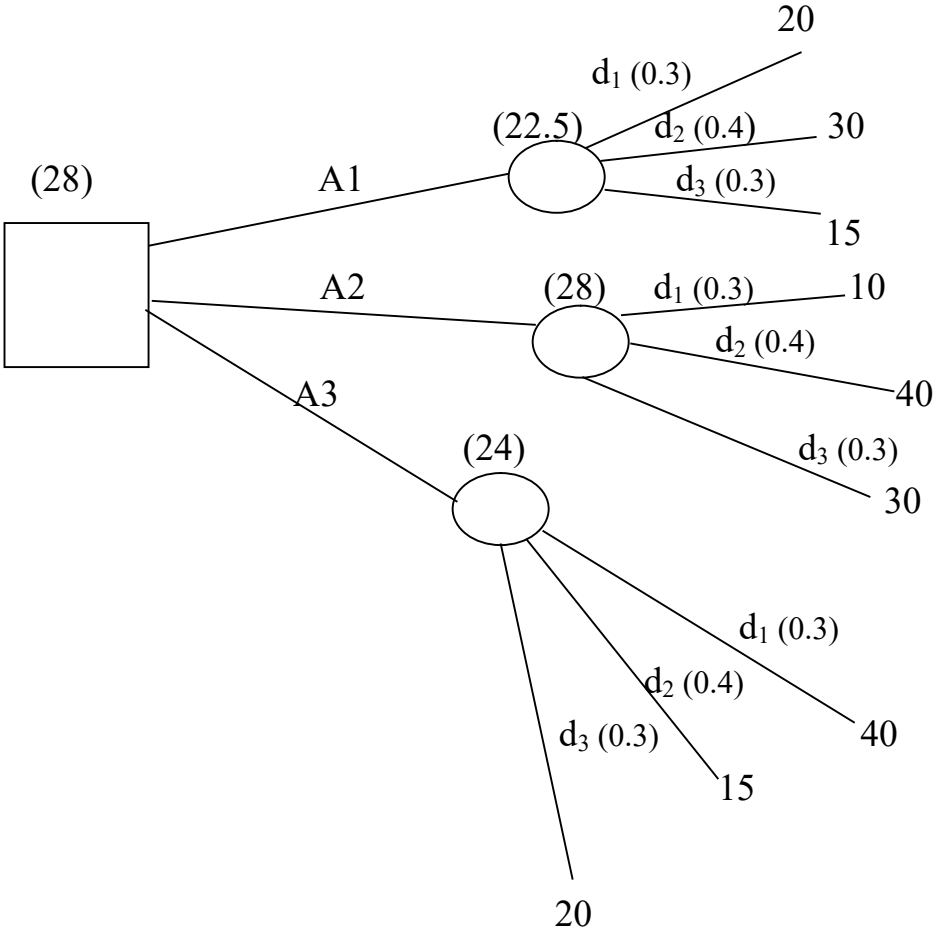


الخطوة الرابعة:

تجري عملية تقييم البدائل وذلك بتحديد قيمة كل بديل، حيث يمثل كل فرع في شجرة القرار عائداً محتملاً نتيجة اتخاذ أي قرار.

القيمة المتوقعة إلى كل حالة طبيعة تأتي من ضرب كل عائد بالاحتمالية ولجميع الفروع الخارجة من أي حالة طبيعية يتم جمعها، واستخدام المرور التراجعي يؤدي إلى إيجاد القيمة الحالية المتوقعة لجميع حالات الطبيعة.

البدائل الثلاثة تأخذ القيم المتوقعة التالية (22.5, 28, 24) ، ثم يتم اختيار البديل الذي يمثل أعلى قيمة حالية متوقعة وهي 28 ، وأنّ قيمة شجرة القرار هي 28 ، والشكل التالي يمثل جميع النتائج المتوقعة.



الوحدة الحادي عشر

إدارة المشروعات

1/11- مقدمة

2/11- تعاريف ومصطلحات

3/11- القواعد العامة لبناء شبكة الأعمال

4/11- طريقة المسار الحرج وأسلوب بيرت

5/11- استخدام نموذج بيرت في تخفيض التكلفة

6/11- تدريبات

1/11- مقدمة:

إنّ إدارة المشروعات Project Management من العلوم التي بدأت تحوز على اهتمام الكثير من الشركات، سواء شركات القطاع العام أو الخاص، سواء الشركات التي تهدف إلى تحقيق الربح أو تلك التي لا تهدف إلى تحقيق الربح، وتزداد أهمية إدارة المشروعات في الشركات التي يأخذ جزءاً هاماً وكبيراً من عملها شكل المشروع.

يقصد بالمشروع مجموعة الأنشطة والعمليات التي تتميز بأنّ لها نقطة بداية محددة ونقطة نهاية محددة، ومن أمثلة ذلك الحصول على درجة البكالوريوس، والقيام ببحث علمي، والاشتراك أو الإعداد لبرنامج تدريبي، ورصف طريق، وبناء جسر، وغير ذلك من المشروعات التي تتميز كلها بأنّ لها نقطة بداية محددة ونقطة نهاية محددة.[1]

وأنّ مدير المشروع يتحمل كامل المسؤولية عن نجاح المشروع أو فشله، وأنّ أهم مهامه أو مسؤولياته ما يلي[2]:

1- الرقابة على العمل.
2- تخصيص الموارد البشرية وتوجيهها.
3- المسؤولية عن الجودة.
4- الرقابة على الوقت.
5- الرقابة على التكاليف.
6- الرقابة على الاتصالات.

وتختلف أساليب إدارة المشروعات عن أساليب الإدارة العادية في نقطتين رئيسيتين، أولاهما أنّ المشروع المطلوب إدارته له عمر محدد، بينما أساليب الإدارة

1- د. محمد أسعد عبد الوهاب النيداني، **مرجع سبق ذكره**، ص262.

2- د. محمد عبد العزيز أبو العينين، (1998)، **إدارة الإنتاج والعمليات بين النظرية والتطبيق**، بلا ناشر، ص364.

العادية تتعلق بإدارة الشركة وأقسامها التي ليس لها عمر محدد، والاختلاف الثاني يأتي كنتيجة حتمية للاختلاف الأول وهو أنّ المشروعات تستخدم موارد مؤقتة، أي أنّ الاحتياج إلى الموارد مؤقت وبانتهاء عمر المشروع تنتهي الحاجة إلى هذه الموارد، بينما يفترض أنّ الاحتياج إلى الموارد في الشركات هو احتياج مستمر بلا نهاية محددة.

نتيجة لهذين الاختلافين ظهرت صعوبات كبيرة في إدارة المشروعات من قبل المديرين غير المدربين على إدارة المشروعات، إذ إنّ تطبيق النظريات والخبرات العلمية التي لدى المدير على المشروع قد ينتج عنها فشله في تحقيق الهدف، فعلى سبيل المثال قرار شراء الآلات أو تأجيرها يختلف تقييمه في حالة المشروع عن الشركة، إذ إنه في المشروع يجب أن تخصص هذه الآلات لفترة زمنية محددة، وبعدها إذا لم يكن هناك استخدام لهذه الآلات فإنّ تكاليف الاستخدام التي ستحمل على المشروع ستكون كبيرة جداً، أما في حالة الشركة فإنّ الأمر يختلف، فإنّ قرار الشراء أو التأجير أسهل في التقييم، إذ إنه يمكن استخدام الآلة طوال عمرها الاقتصادي، إذاً فإنّ المشكلات التي تواجه مدير المشروع أكبر بكثير من تلك التي تواجه المدير الاعتيادي.

2/11- تعاريف ومصطلحات:

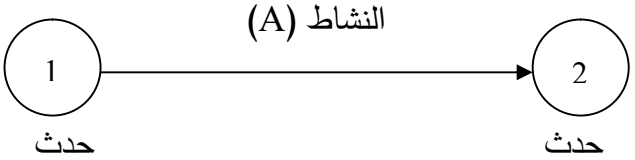
1- الحدث Event:

هو نقطة على شبكة الأعمال تعبّر عن بداية نشاط لاحق (أو أكثر)، أو نهاية نشاط سابق (أو أكثر)، أو عن نهاية نشاط سابق وبداية نشاط لاحق معاً، فحدث بداية المشروع ليس له أنشطة سابقة ويعبّر عن بداية الأنشطة الأولى لتنفيذ المشروع، وحدث نهاية المشروع ليس له أنشطة لاحقة ويعبّر عن نهاية الأنشطة الأخيرة لتنفيذ المشروع، والأنشطة الأخرى الواقعة بين هذين الحدثين كل منها يمثل نهاية نشاط سابق أو أنشطة سابقة، وبداية نشاط لاحق أو أنشطة لاحقة معاً.

2- النشاط Activity:

يمثل النشاط القيام الفعلي بالمهمة، ويحتاج إلى وقت ويستنفذ موارد، ويحدث النشاط عادة بين حدثين، ويتم تمثيل النشاط في شبكة الأعمال بسهم يتجه من اليسار إلى اليمين(في حالة استخدام الأرقام أو الحروف الإنكليزية)، ولا يجوز أن يكون اتجاه السهم عكسياً.[1]

ويوضح الشكل التالي تمثيل أحد الأنشطة.



ويتم التعبير عن النشاط إما باستخدام حروف أبجدية، وإما يتم تمييز النشاط برقمي الحدثين الذي يربط بينهما، وفي الشكل السابق يمكن التعبير عن النشاط بأنه النشاط (A) أو النشاط (2-1).

3- قاعدة الأسبقية:

وهي القاعدة التي يتم تنظيم الأحداث وتنفيذها حسبها، وتتضمن قاعدة الأسبقية ما يلي: لا يمكن تحقيق أي حدث ما لم تكن الأنشطة السابقة له قد أُنجزت تماماً، وأنّ تحقيق أي حدث يسمح بالانتقال إلى تنفيذ الأنشطة اللاحقة به مباشرة، ولا يمكن البدء في تنفيذ أي نشاط ما لم يكن حدث بدايته قد تحقق تماماً.[2]

4- النشاط الوهمي Dummy Activity:

هو نشاط افتراضي أو تخيلي لا يستغرق وقتاً ولا تكلفة، ويتم وضعه على الشبكة بغرض تسهيل رسم الشبكة والبعد بها عن التعقيد أو التكرار.

1- د. هالة عبد الله الخولي، (2000)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر، ص376.

2- د. إبراهيم محمد العلي، (2004)، **مدخل إلى بحوث العمليات**، جامعة تشرين- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، ص368.

5- شبكة الأعمال Network:

هي رسم بياني يوضح العلاقة بين الأحداث والأنشطة التي تربط بينها وفقاً لتتابعها المنطقي، ويطلق على شبكة الأعمال أحياناً أسلوب التعبير البياني السهمي، وتسمى كل مجموعة متتالية من الأنشطة بالمسار.

3/11- القواعد العامة لبناء شبكة الأعمال:

يجب مراعاة القواعد التالية عند بناء شبكة الأعمال:[1]

1- يجب ترتيب تسلسل الأنشطة، أي تحديد الأنشطة التي تسبق النشاط، والأنشطة التي تتم في الوقت نفسه، والأنشطة اللاحقة للنشاط.

2- يتم التعبير عن الأحداث بشكل دوائر، ويحدد لكل حدث رقم مع مراعاة تسلسل الأحداث، فلا يمكن أن نضع الحدث رقم (5) قبل الحدث رقم (3) مثلاً، ولا يمكن أن تكون أحداث نهاية الأنشطة أصغر من أحداث بداية الأنشطة، ويجب التأكد من أنّ رقم الحدث لا يتكرر أكثر من مرة.

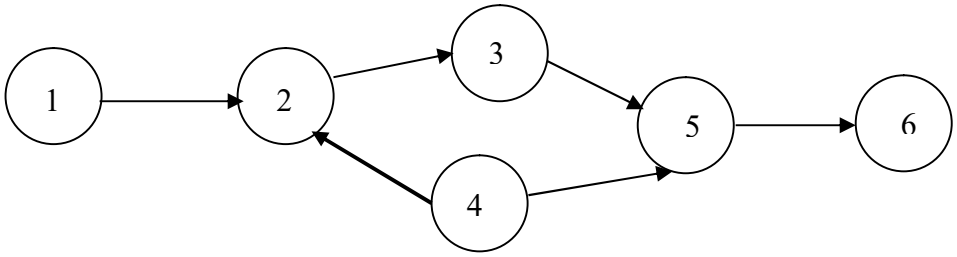
3- يُعبّر عن الأنشطة بأسهم، ويرمز لها بحروف أبجدية، ويبدأ النشاط بحدث أصغر، وينتهي بحدث أكبر.

4- يلاحظ أنّ كل حدث في الشبكة هو نهاية نشاط سابق، وبداية نشاط لاحق، وقد يكون للحدث أكثر من نشاط سابق، وكذلك أكثر من نشاط لاحق، فيما عدا الحدثين الأول والأخير، فالحدث الأول ليس له نشاط سابق، والحدث الأخير ليس له نشاط لاحق.

5- لا يجوز أن يتبع أي حدث أنشطة تالية تعود ثانية إلى الحدث نفسه الذي بدأت منه، حيث تكون هذه الأنشطة سلبية وفي اتجاه عكسي، ويكون المسار غير منته، والعلاقة بين الأحداث غير واضحة، ويظهر ذلك في الشكل التالي:

---

1 - د. صلاح سيخ ديب، (2008)، **بحوث العمليات (2)**، جامعة تشرين- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، ص ص 71-72.

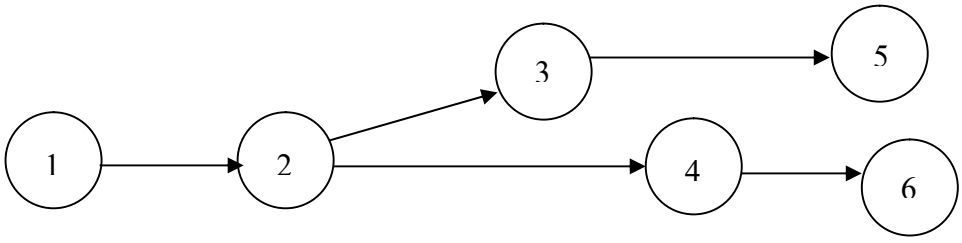


يلاحظ من الشكل السابق أنّ الحدث رقم (2) لا يمكن أن يقع إلا إذا تمّ الحدث رقم (4)، كما أنّ الحدث رقم (4) لا يمكن أن يقع إلا إذا تمّ الحدث رقم (2)، وهذا الوضع غير منطقي ويستحيل حدوثه، حيث يجب أن تكون الأحداث متتابعة في تسلسل منطقي.

6- عندما ينتهي أكثر من سهم واحد عند حدث واحد فإنّ هذا الحدث يمثل انتهاء كل الأنشطة التي تنتهي بهذا الحدث.

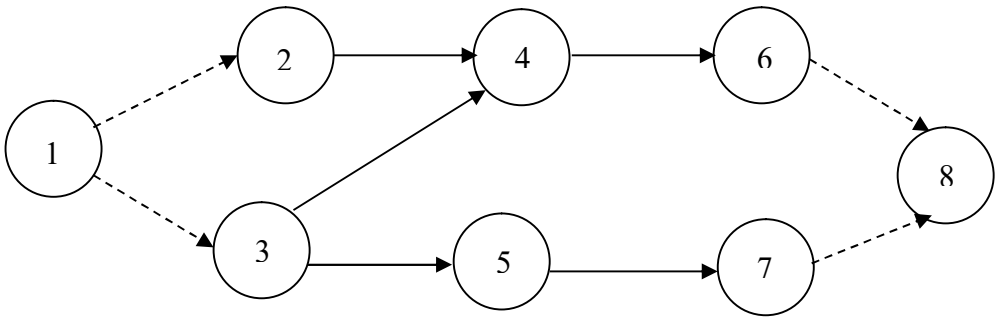
7- يفضل أن يكون لشبكة الأعمال بداية واحدة، ونهاية واحدة.

8- يجب التأكد عند رسم شبكة الأعمال عدم وجود أنشطة معلقة كما في الشكل التالي:

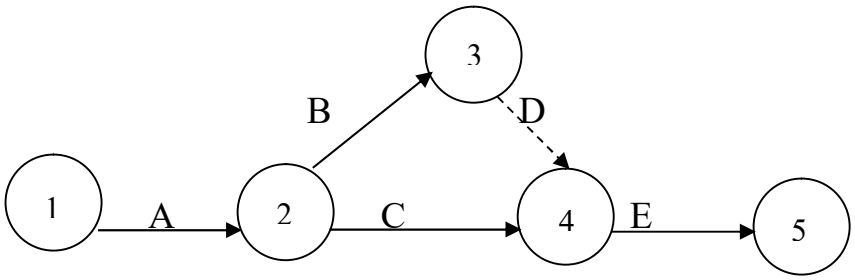


9- الأنشطة الوهمية: إنّ تطبيق القواعد السابقة لبناء شبكات الأعمال يتطلب في بعض الأحيان افتراض وجود أنشطة وهمية لا تستغرق وقتاً، أو موارد، ويعّبر عن النشاط الوهمي بسهم متقطع يبدأ بحدث أصغر وينتهي عند حدث أكبر، ويستخدم النشاط الوهمي في الحالات التالية:

أ- إذا كان هناك أكثر من بداية أو أكثر من نهاية للمشروع، يمكن استخدام الأنشطة الوهمية لتحديد نقطة بداية، أو نقطة نهاية واحدة للمشروع، كما يتضح في الشكل التالي:



ب- في حالة وجود أنشطة معلقة، أو غير متصلة على شبكة الأعمال، يجب وضع أنشطة وهمية للمحافظة على ترابط الشبكة:



4/11- طريقة المسار الحرج وأسلوب بيرت:

من أجل تطبيق بيرت، والمسار الحرج، هناك ست خطوات يجب اتباعها، وهي تتضمن الآتي:[1]

1- تحديد المشروع، وجميع الأنشطة اللازمة له.

1 - د. عمر وصفي عقيلي، وآخرون، (2004)، **مبادئ الإدارة**، جامعة حلب- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، ص 275.

2- تحديد العلاقات بين الأنشطة، بما في ذلك تحديد أي الأنشطة التي يجب أن يتم البدء بها أولاً، وتسلسل الأنشطة فيما بينها.

3- رسم شبكة يتم في ضوئها ربط جميع الأنشطة مع بعضها البعض.

4- تحديد الوقت، والتكلفة المقدرة لكل نشاط.

5- حساب الوقت اللازم للمسار الأطول في الشبكة، والذي يمثل المسار الحرج.

6- استخدام الشبكة للمساعدة في وضع الخطة، والجدولة، والتوجيه، والرقابة على المشروع.

وهناك تشابه كبير في طريقة المسار الحرج، وطريقة بيرت، سواء من حيث الأهداف، أو الأنشطة والأحداث داخل المشروع، إلا أنّ الاختلاف الرئيس بينهما هو أنّ شبكة بيرت تستخدم ثلاثة أوقات محتملة لكل نشاط، وكل تقدير يكون باحتمالية معينة، وفي ضوء ذلك يتم حساب الوقت المتوقع لإنجاز كل نشاط، أما في طريقة المسار الحرج فإنها تفترض وقتاً واحداً معروفاً لتنفيذ النشاط.

وأنّ الأزمنة الثلاثة في أسلوب بيرت هي:

1- الزمن التفاؤلي لأداء النشاط ويرمز له بالرمز (ف).

2- الزمن التشاؤمي لأداء النشاط ويرمز له بالرمز (ش).

3- الزمن الأكثر احتمالاً: ويرمز له بالرمز (ح).

وتستخدم تقديرات هذه الأوقات الثلاثة لحساب الوقت المتوقع للإنجاز (م)، حساب الوقت المتوقع لإنجاز النشاط (م) تتمثل في:

$$\text{الوقت المتوقع} = \frac{\text{الوقت المتفائل} + 4 \times \text{الوقت الأكثر احتمالاً} + \text{الوقت المتشائم}}{6}$$

ويمثل المعامل (4) وزن الترجيح للوقت الأكثر احتمالاً، وإذا استخدمنا الرموز للتعبير عن هذه العلاقة:

م = الوقت المتوقع.

ف = الوقت المتفائل.

ش = الوقت المتشائم.

ح = الوقت الأكثر احتمالاً.

$$م = \frac{ف + 4ح + ش}{6}$$

1/4/11- مثال على طريقة المسار الحرج:

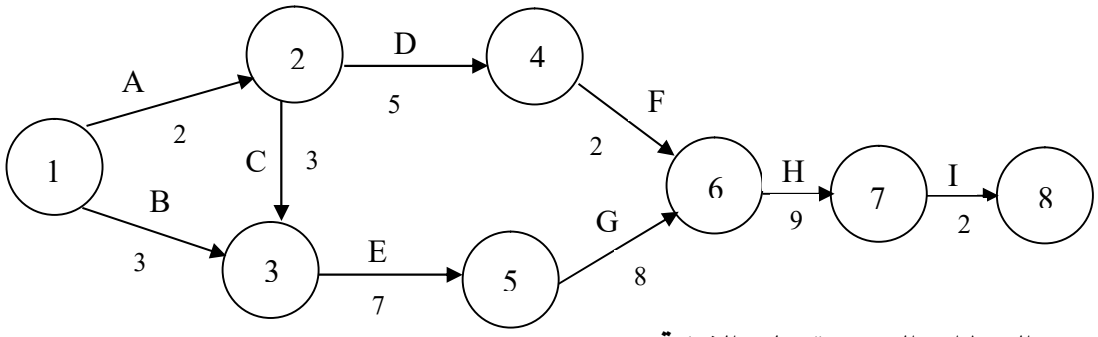
البيانات التالية تمثل الأنشطة اللازمة لإنجاز أحد المشروعات الصناعية، والوقت المطلوب لتنفيذها (بالشهر):

رمز النشاط	مسار النشاط	الوقت اللازم للنشاط (بالشهر)
A	(1-2)	2
B	(1-3)	3
C	(2-3)	3
D	(2-4)	5
E	(3-5)	7
F	(4-6)	2
G	(5-6)	8
H	(6-7)	9
I	(7-8)	2

المطلوب:

1- رسم شبكة الأعمال الخاص بهذا المشروع.

2- تحديد المسارات الموجودة على الشبكة، ثم تحديد المسار الحرج.



المسارات الموجودة على الشبكة:

المسار الأول: (A- D- F- H- I)

زمنه: (2 + 5+ 2 + 9 + 2 = 20)

المسار الثاني: (A- C- E- G- H- I)

زمنه: (2 + 3+ 7 + 8 + 9 + 2 = 31)

المسار الثالث: (B- E- G- H- I)

زمنه: (3+ 7 + 8 + 9 + 2 = 29)

وبناء عليه فإنّ المسار الحرج هو المسار الثاني والذي يمثل أطول مسار موجود على شبكة الأعمال، وأنّ زمنه يساوي 31 شهراً.

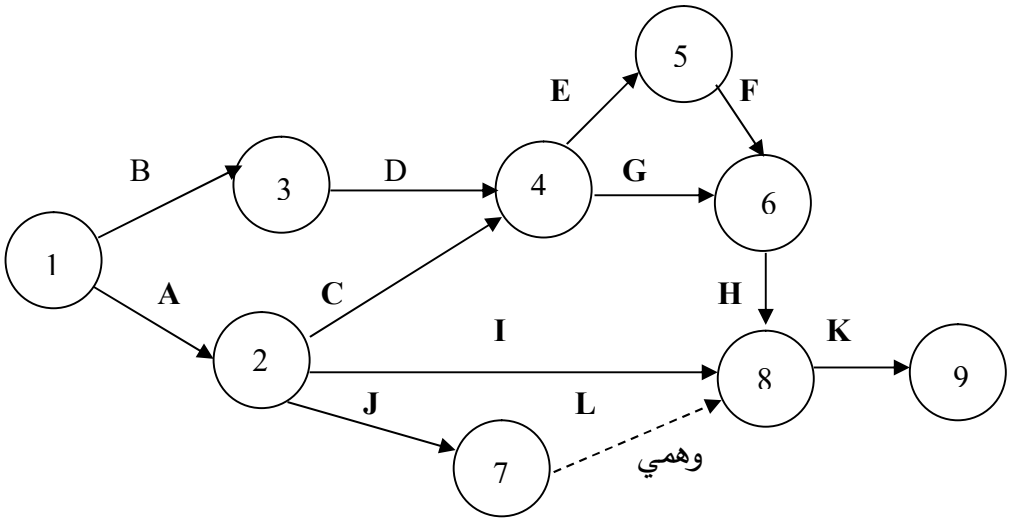
2/4/11- مثال على أسلوب بيرت:

ترغب جامعة تشرين في بناء مبنى جديد لكلية الاقتصاد، والجدول التالي يوضح مراحل تنفيذ هذا المشروع، وقد استخدمت أسلوب بيرت في التخطيط من أجل تنفيذ المشروع، وكانت البيانات الخاصة بالأنشطة اللازمة للمشروع كما يلي:

الرمز	النشاط	مسار النشاط	أنشطة سابقة	أنشطة لاحقة
A	اختيار الموقع	(1-2)	بداية النشاط	C, I, J
B	تحديد مصدر التمويل	(1-3)	بداية النشاط	D
C	إعداد الدراسات الفنية اللازمة	(2-4)	A	E, G
D	تجهيز الموقع	(3-4)	B	E, G
E	بناء الطابق الأرضي	(4-5)	C, D	F
F	بناء الطابق الأول	(5-6)	E	H
G	بناء الطابق الثاني	(4-6)	C, D	H
H	بناء الطابق الثالث	(6-8)	F,G	K
I	تجهيز المبنى بالمعدات اللازمة	(2-8)	A	K
J	فرش الأثاث	(2-7)	A	K
K	تحديد عدد العاملين الجدد	(8-9)	H, I, J	نهاية المشروع

المطلوب: رسم شبكة الأعمال:

يمكن رسم شبكة الأعمال لهذه الشركة كما يلي:



وبفرض في المثال السابق أنه قد تمّ تحديد الوقت اللازم لكل نشاط كما يلي:

الرمز	النشاط	الوقت اللازم للنشاط بالشهر		
		ف	ح	ش
A	اختيار الموقع	3	5	7
B	تحديد مصدر التمويل	2	3	4
C	إعداد الدراسات الفنية اللازمة	6	8	16
D	تجهيز الموقع	6	7	8
E	بناء الطابق الأرضي	4	5	12
F	بناء الطابق الأول	2	3	4
G	بناء الطابق الثاني	12	14	22
H	بناء الطابق الثالث	8	12	16
I	تجهيز المبنى بالمعدات اللازمة	19	37	43
J	فرش الأثاث	20	23	32
K	تحديد عدد العاملين الجدد	15	17	25

المطلوب ما يلي:

1- حساب الزمن المتوقع لكل نشاط.

2- تحديد المسارات الموجودة على شبكة الأعمال، ومن ثم تحديد المسار الحرج.

3- حساب الأزمنة المبكرة لأحداث بداية ونهاية الأنشطة ومن ثم تحديد المسار الحرج.

4- حساب احتمال إنجاز المشروع خلال خمس سنوات (60 شهراً).

ويمكن حساب الوقت المتوقع لكل نشاط وفقاً للمعادلة التالية:

$$م = \frac{ف + 4ح + ش}{6}$$

النشاط	الوقت المتوقع (م)
A	5
B	3
C	9
D	7
E	6
F	3
G	15
H	12
I	35
J	24
K	18

***- تحديد الوقت المبكر لحدث بداية النشاط:**

الحدث	البيان	الوقت المبكر
1	حدث بداية المشروع	0
2	لا يمكن أن يبدأ الحدث (2) إلا بعد انتهاء النشاط A الذي يحتاج إلى 5 شهور.	5
3	لا يمكن أن يبدأ الحدث (3) إلا بعد انتهاء النشاط B الذي يحتاج إلى 3 شهور.	3
4	ينتهي عند هذا الحدث النشاطان C, D، ولذلك فإنّ الوقت المبكر لبداية الحدث (4) يتمثل في أطول المسارات التي تنتهي عند هذا الحدث. المسار الأول B, D ويحتاج إلى 10 شهور. المسار الثاني A, C ويحتاج إلى 14 شهراً.	14

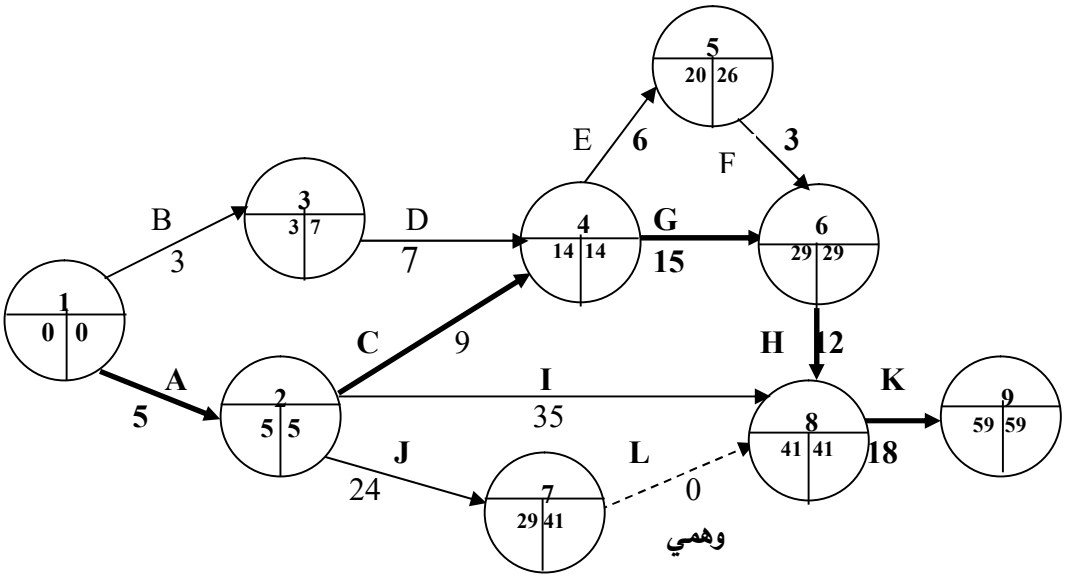
الحدث	البيان	الوقت المبكر
5	لا يمكن أن يبدأ الحدث (5) إلا بعد انتهاء النشاط E الذي يستغرق 6 شهور	20
6	ينتهي عند الحدث (6) النشاطان F,G ولذلك يحسب الوقت المبكر للانتهاء منهما، ويؤخذ الوقت المبكر الأكبر. النشاط F = 20 + 3 = 23 النشاط G = 14 + 15 = 29	29
7	يبدأ الحدث (7) بعد انتهاء النشاط J. الوقت المبكر = الوقت المبكر للحدث (2) + الوقت اللازم للنشاط J. = 5 + 24 = 29	29
8	ينتهي عند الحدث (8) النشاطان H, I والنشاط الوهمي L. الوقت المبكر لانتهاء النشاط H = الوقت المبكر للحدث 6 + الوقت اللازم للنشاط H. = 12 + 29 = 41 الوقت المبكر لانتهاء النشاط I = الوقت المبكر للحدث 2 + الوقت اللازم للنشاط I. = 5 + 35 = 40 الوقت المبكر لانتهاء النشاط الوهمي L = 29 + 0 = 29	41
9	ينتهي عند الحدث (9) النشاط K الوقت المبكر = الوقت المبكر للحدث (8) + الوقت اللازم للنشاط K = 41 + 18 = 59	59

تحديد الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط:

الحدث	البيان	الوقت المتأخر
9	حدث نهاية المشروع، لذلك فإنّ الوقت المتأخر = الوقت المبكر.	59
8	الوقت المتأخر = الوقت المتأخر للحدث التالي (9) – الوقت اللازم للنشاط K. = 59 – 18 = 41	41
7	الوقت المتأخر = الوقت المتأخر للحدث (8) نظراً لأنّ النشاط L وهمي لا يستغرق وقتاً.	41
6	الوقت المتأخر = الوقت المتأخر للحدث 8 – الوقت اللازم للنشاط H. = 41 – 12 = 29	29
5	الوقت المتأخر = الوقت المتأخر للحدث 6 – الوقت اللازم للنشاط F. = 29 – 3 = 26	26
4	يبدأ عند الحدث (4) نشاطان هما E, G لذلك فإنّ الوقت المتأخر يحسب كما يلي. الوقت المتأخر للحدث 5 – الوقت اللازم للنشاط E = 26 – 6 = 20 الوقت المتأخر للحدث 6 – الوقت اللازم للنشاط G = 29 – 15 = 14	14
3	الوقت المتأخر = الوقت المتأخر للحدث (4) – الوقت اللازم للنشاط D. = 14 – 7 = 7	7
2	يبدأ عند الحدث (2) ثلاثة أنشطة هي C, I, J لذلك يحسب الوقت المتأخر لبداية الحدث 2 كما يلي: الوقت المتأخر للحدث 8 – الوقت اللازم للنشاط I. = 41 – 35 = 6	5

الحدث	البيان	الوقت المتأخر
	الوقت المتأخر للحدث 7 – الوقت اللازم للنشاط J. = 41 – 24 = 17 الوقت المتأخر للحدث 4 – الوقت اللازم للنشاط C. = 14 – 9 = 5	
1	يبدأ عند الحدث (1) نشاطان هما A, B لذلك يحسب الوقت المتأخر لبداية الحدث 1 كما يلي: الوقت المتأخر للحدث 3 – الوقت اللازم للنشاط B = 7 – 3 = 4 الوقت المتأخر للحدث 2 – الوقت اللازم للنشاط A = 5 – 5 = 0	0

ويمكن بناء على ذلك تصوير شبكة الأعمال موضحاً بها الوقت اللازم لإتمام كل نشاط، والوقت المبكر والوقت المتأخر كما يتضح من الشكل التالي.



تحديد المسارات الموجودة على الشبكة:

المسار	الوقت اللازم لأنشطة المسار (بالشهر)
1- (A- C- E- F- H- K)	5 + 9 + 6 + 3 + 12 + 18 = 53
2- (A- C- G- H- K)	**5 + 9 + 15 + 12 + 18 = 59**
3- (A- I- K)	5 + 35 + 18 = 58
4- (A- J- L- K)	5 + 24 + 0 + 18 = 47
5- (B- D- E- F- H- K)	3 + 7 + 6 + 3 +12 + 18 = 49
6- (B- D- G- H- K)	3 + 7 + 15 +12 + 18 = 52

نلاحظ أن المسار الثاني هو المسار الحرج والذي يمثل أطول مسار موجود على شبكة الأعمال، وأن زمنه يساوي (59 شهراً).

حساب الوقت الراكد أو الفائض:

الوقت الراكد الكلي: ويمثل الفترة التي يجوز تأخير تنفيذ النشاط في حدودها، دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير تنفيذ المشروع، ويحسب كما يلي:

الوقت الراكد الكلي = الوقت المتأخر لحدث بداية النشاط – الوقت المبكر لحدث بداية النشاط.

أو الوقت الراكد الكلي = الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط – الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط.

وفقاً لما هو موضح في الجدول التالي:

النشاط	مسار النشاط	الوقت المتوقع للنشاط	الوقت المبكر لحدث بداية النشاط	الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط	الوقت المتأخر لحدث بداية النشاط	الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط	الوقت الراكد أو الفائض
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
A	(1-2)	5	0	5	0	5	**0**
B	(1-3)	3	0	3	4	7	4
C	(2-4)	9	5	14	5	14	**0**
D	(3-4)	7	3	10	7	14	4
E	(4-5)	6	14	20	20	26	6
F	(5-6)	3	20	23	26	29	6
G	(4-6)	15	14	29	14	29	**0**
H	(6-8)	12	29	41	29	41	**0**
I	(2-8)	35	5	40	6	41	1
J	(2-7)	24	5	29	17	41	12
K	(8-9)	18	41	59	41	59	0

هذا الجدول قد تمّ استيفاء بياناته كما يلي:

1- يؤخذ الوقت المتوقع (عمود رقم 3)، والوقت المبكر لبداية النشاط (عمود رقم 4) من شبكة الأعمال.

2- يحسب الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط (عمود رقم 5) بإضافة الوقت المتوقع (عمود رقم 3) إلى الوقت المبكر لبداية النشاط (عمود رقم 4).

3- يحسب الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط (عمود رقم 7) من واقع شبكة الأعمال.

4- يحسب الوقت المتأخر لحدث بداية النشاط (عمود رقم 6) بطرح الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط (عمود رقم 7) من الوقت المتوقع للنشاط (عمود رقم 3).

5- يحسب الوقت الراكد الكلي (عمود رقم 8) باستخدام إحدى المعادلتين التاليتين:

الوقت المتأخر لحدث بداية النشاط – الوقت المبكر لحدث بداية النشاط

(عمود رقم 6) – (عمود رقم 4)

الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط – الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط

(عمود رقم 7) – (عمود رقم 5)

ويلاحظ من الجدول السابق بأنّ الوقت الراكد للأنشطة الواقعة على المسار الحرج تساوي الصفر.

***- دراسة احتمال تنفيذ المشروع طبقاً لشبكة بيرت:**

يمثل الوقت المتوقع لكل نشاط، متوسطاً إحصائياً طبقاً لتوزيع بيتا، وقد يتفق التنفيذ الفعلي، أو لا يتفق مع هذه المتوسطات، لذلك من الضروري دراسة احتمال إتمام المشروع طبقاً للأوقات المخططة، وتأتي أهمية هذه الدراسة لما يترتب عليه تأخير تنفيذ المشروع من نتائج كغرامات التأخير، أو زيادة في التكاليف أو ضياع فرص بديلة أو غير ذلك، وإذا اعتبرنا وقت إتمام المشروع متغيراً عشوائياً يأخذ شكل التوزيع الطبيعي، فإنّ لهذا المتغير متوسطاً يتمثل في طول المسار الحرج، والتباين، ويمكن حساب تباين وقت إتمام المشروع بإيجاد مجموع تباين الأنشطة الواقعة على المسار الحرج، ويمكن حساب تباين كل نشاط كما يلي:

$$\text{تباين النشاط} = \left(\frac{\text{الوقت المتشائم} - \text{الوقت المتفائل}}{6} \right)^2$$

ويمكن حساب تباين وقت المشروع ككل σ^2 بإيجاد مجموع تباين المسار الحرج، كما يمكن حساب الانحراف المعياري لوقت المشروع ككل بإيجاد الجذر التربيعي للتباين، أي أنّ:

الانحراف المعياري لوقت المشروع الكلي = $\sqrt{\text{مجموع تباين أنشطة المسار الحرج}}$

احتمال إتمام المشروع خلال فترة زمنية معينة فيمكن حسابه وفقاً للخطوات التالية:

1- حساب الدرجة المعيارية (ص) كما يلي:

$$\text{ص} = \frac{\text{الوقت المستهدف لإتمام المشروع} - \text{وقت المسار الحرج}}{\text{الانحراف المعياري لوقت المشروع ككل}}$$

2- استخراج الرقم المقابل لـ (ص) من جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي، وهو يمثل احتمال تنفيذ المشروع خلال الوقت المستهدف.

وبفرض في المثال السابق أنّ الوقت المستهدف لإتمام المشروع هو خمس سنوات (60 شهراً) ما احتمال إتمام المشروع في الوقت المستهدف ؟.

يتطلب حساب احتمال إتمام المشروع في الوقت المستهدف حساب تباين كل نشاط من أنشطة المسار الحرج، ثم حساب التباين، والانحراف المعياري لوقت المشروع ككل، وبالتالي يلزم ذلك إتباع الخطوات التالية:

1- حساب تباين أنشطة المسار الحرج:

النشاط	ش	ف	$\frac{\text{ش} - \text{ف}}{6}$	$\left(\frac{\text{ش} - \text{ف}}{6}\right)^2$
A	7	3	2/3	4/9
C	16	6	5/3	25/9
G	22	12	5/3	25/9
H	16	8	4/3	16/9
K	25	15	5/3	25/9

2- تباين المشروع ككل: 95/9 = 25/9 + 16/9 + 25/9 + 4/9

3- الانحراف المعياري للمشروع ككل = $\sqrt{95/9}$ = 3.249

4- حساب الدرجة المعيارية (ص):

$$\text{ص} = \frac{60 - 59}{3.249} = 0.31$$

5- بالبحث في جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي نجد أنّ الرقم المقابل لـ (ص) = 0.31 هو 0.6217، وهذا يعني أنّ احتمال تنفيذ المشروع في (60 شهراً) هو = 62%.

مثال عام:

ترغب إحدى الشركات السورية في تطوير نظام المعلومات الحالي، وقد قامت في هذا الإطار بتحليل هذا النظام، وانتهت عملية التحليل بضرورة إدخال نظام جديد للمعلومات، وقد قام فريق العمل المكلف بتطوير نظام المعلومات بتصميم نظام جديد للمعلومات، وقد قررت الشركة أن تبدأ مرحلة تنفيذ النظام في بداية عام 2012، ومن المتوقع أن تستغرق مدة عام، وفيما يلي الأنشطة المختلفة اللازمة لمرحلة تنفيذ النظام، وكذلك الوقت اللازم لكل نشاط.

الرمز	النشاط	مســـــار النشاط	الوقت اللازم للنشاط (بالأسبوع)		
			ف	ح	ش
A	إعداد التصميم التفصيلي للنظام	(1-2)	4	2	6
B	اختيار العاملين	(1-3)	3	1	5
C	إعداد الموقع	(1-4)	4	11	12
D	الأجزاء الآلية وغير الآلية تحت الطلب	(1-7)	11	15	25
E	وضع معايير النظام	(2-5)	2	3	10
F	إعداد البرنامج	(2-6)	12	14	28
G	تدريب العاملين	(3-10)	5	13	15
H	تركيب الأجهزة	(7-8)	4	5	6
I	اختبار البرامج	(6-9)	12	15	30
J	اختبار النظم	(9-10)	7	8	9
K	تحويل الملفات	(8-10)	10	11	18
L	توثيق النظام	(5-11)	6	15	18
M	التشغيل المتوازي للنظام	(10-11)	6	7	14

المطلوب ما يلي:

1- رسم شبكة الأعمال.

2- تحديد الوقت المبكر والمتأخر والراكد الكلي لكل نشاط.

3- تحديد المسار الحرج.

4- حساب احتمال إتمام المشروع في 54 أسبوعاً.

5- إذا فرض أنّ تكلفة الموارد اللازمة لتنفيذ المشروع هي 50000 ليرة سورية أسبوعياً، فاحسب احتمال إتمام المشروع بتكلفة قدرها 3000000 ليرة سورية.

خطوات الحل:

1- حساب الوقت المتوقع لكل نشاط:

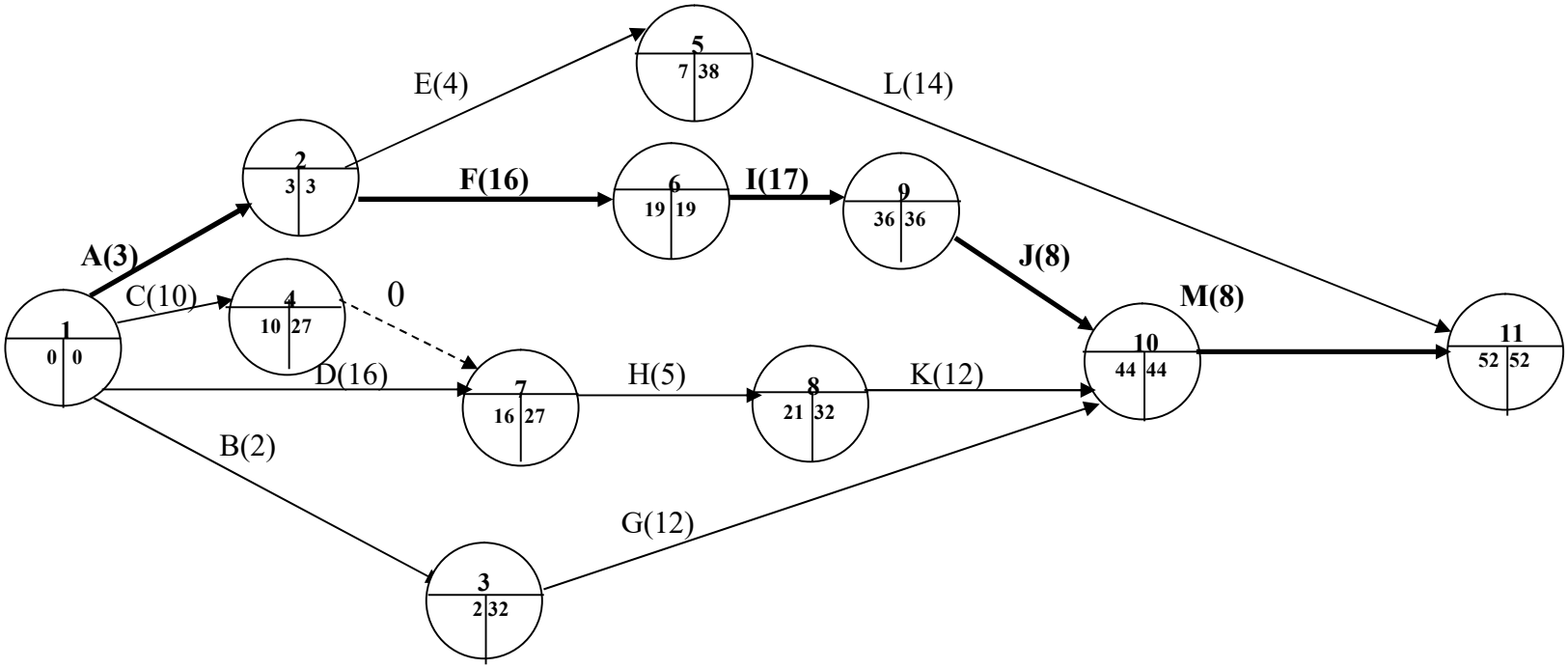
يستخدم في حساب الوقت المتوقع لكل نشاط المعادلة التالية:

$$م = \frac{ف + 4ح + ش}{6}$$

ويوضح الجدول التالي الوقت المتوقع لكل نشاط:

النشاط	الوقت المقدر لتنفيذ النشاط بالأسبوع			الوقت المتوقع بالأسبوع
	المتفائل ف	الأكثر احتمالاً ح	المتشائم ش	
A	4	2	6	3
B	3	1	5	2
C	4	11	12	10
D	11	15	25	16
E	2	3	10	4
F	12	14	28	16
G	5	13	15	12
H	4	5	6	5
I	12	15	30	17
J	7	8	9	8
K	10	11	18	12
L	6	15	18	14
M	6	7	14	8

2- رسم شبكة الأعمال كما موضح في الشكل التالي:



3- **تحديد الوقت المبكر والمتأخر والراكد الكلي لكل نشاط:**

يمكن تحديدها من خلال الجدول التالي:

النشاط	مسار النشاط	الوقت المتوقع للنشاط	الوقت المبكر لحدث بداية النشاط	الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط	الوقت المتأخر لحدث بداية النشاط	الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط	الوقت الراكد الكلي
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
A	(1-2)	3	0	3	0	3	0
B	(1-3)	2	0	2	30	32	30
C	(1-4)	10	0	10	17	27	17
D	(1-7)	16	0	16	11	27	11
E	(2-5)	4	3	7	34	38	31
F	(2-6)	16	3	19	3	19	0
G	(3-10)	12	2	14	32	44	30
H	(7-8)	5	16	21	27	32	11
I	(6-9)	17	19	36	19	36	0
J	(9-10)	8	36	44	36	44	0
K	(8-10)	12	21	33	32	44	11
L	(5-11)	14	7	21	38	52	31
M	(10-11)	8	44	52	44	52	0
طريقة الحساب			**من الشبكة**	**عمود 3 + 4**	**عمود 7– 3**	**من الشبكة**	**إما عمود 6– 4 5–7**

4- المسار الحرج:

يتمثل المسار الحرج في أطول المسارات، ويتضح من شبكة الأعمال السابقة، أنّ المسار الحرج يتمثل في الأنشطة التالية (A, F, I, J, M)، والوقت الراكد الكلي لهذه الأنشطة يساوي الصفر، كما يتضح من الجدول السابق، ويحتاج إتمام تنفيذ المشروع وفقاً لطول المسار الحرج إلى 52 أسبوعاً.

5- حساب احتمال إتمام المشروع في 54 أسبوعاً:

أ- حساب تباين أنشطة المسار الحرج:

النشاط	ش	ف	$\frac{ش - ف}{6}$	$\left[\frac{ش - ف}{6}\right]^2$
A	6	4	1/3	1/9
F	28	12	8/3	64/9
I	30	12	9/3	81/9
J	9	7	1/3	1/9
M	14	6	4/3	16/9

ب- تباين وقت المشروع ككل σ^2 :

وهو يساوي مجموع مربعات تباين أنشطة المسار الحرج.

$= 1/9 + 64/9 + 81/9 + 1/9 + 16/9 = 163/9 = 18.111$

ج- الانحراف المعياري لوقت المشروع ككل

$$= \sqrt{18.111} = 4.26$$

د- احتمال تنفيذ المشروع في 54 أسبوعاً. (ص)

$$ص = \frac{54 - 52}{4.26} = 0.47$$

بالبحث في جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي نجد أنّ الرقم المقابل للدرجة المعيارية ص= 0.47 هو يساوي 0.68، وهذا يعني أنّ احتمال تنفيذ المشروع في 54 أسبوعاً = 68٪.

6- حساب احتمال إتمام المشروع:

بتكلفة مقدارها 3000000 ل.س، إذا كان متوسط تكلفة الأسبوع الواحد = 50000 ل.س، فإنّ الفترة المستهدفة لإتمام المشروع بتكلفة مقدارها 3000000 ل.س تكون:

$$= \frac{3000000}{50000} = 60 \text{ أسبوعاً.}$$

ويمكن حساب احتمال تنفيذ المشروع في 60 أسبوعاً كما يلي:

$$\text{ص} = \frac{52 - 60}{4.26} = 1.88$$

وبالبحث في جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي، نجد أنّ الرقم المقابل ل ص = 1.88 هو 0.97، وهذا يعني أنّ احتمال إتمام المشروع بتكلفة قدرها 3000000 هو 97% .

5/11- استخدام نموذج بيرت في تخفيض التكلفة:

1/5/11- مقدمة:

ناقشنا في الجزء السابق من هذا الفصل استخدام نموذج بيرت في أغراض التخطيط والرقابة على الوقت اللازم لتنفيذ المشروعات، وفي هذا الجزء سنتناول استخدام نموذج بيرت في تخفيض تكاليف تنفيذ المشروعات، وتُعدّ تكلفة أي مشروع من العوامل الرئيسة في تخطيط المشروع، وتوجد علاقة كبيرة بين الوقت اللازم لإتمام المشروع وتكلفة تنفيذ النشاط، إنه كلما حاولت إدارة المشروع توفير الوقت زادت التكلفة نتيجة استخدام عدد أكبر من العمال، أو دفع أجور إضافية أعلى من الأجور العادية، أو شراء خامات بأسعار أعلى للرغبة في الحصول عليها بشكل أسرع، ومن ناحية أخرى فقد تفضل إدارة المشروع زيادة الوقت اللازم للنشاط إذا كان من الممكن تخفيض التكلفة.

ويعتمد نموذج بيرت/ التكلفة على مبادلة الوقت بالتكلفة، بمعنى أنه يمكن تخفيض وقت إتمام المشروع على حساب زيادة التكاليف.

وتحتاج إدارة المشروع إلى تخفيض الوقت اللازم لتنفيذ المشروع نتيجة لمجموعة من الأسباب والعوامل من أهمها:

1- قد يتضمن العقد مزايا أو مكافآت في حالة إنجاز المشروع في وقت مبكر.
2- قد يكون الوقت المقدر لتنفيذ المشروع أطول من الوقت المحدد في العقد، مع وجود غرامات تأخير.
3- يمكن استخدام الآلات والمعدات المستخدمة في المشروع في مشروعات أخرى مربحة.
4- يمكن تخفيض الوقت العاطل للمعدات والآلات في الأنشطة غير الحرجة.
5- تحسين شهرة الشركة ومركزها التنافسي.

2/5/11- العلاقة بين الوقت والتكلفة:

إذا درسنا العلاقة بين الوقت والتكلفة يمكن تحديد نوعين من الوقت والتكلفة لكل نشاط هما:

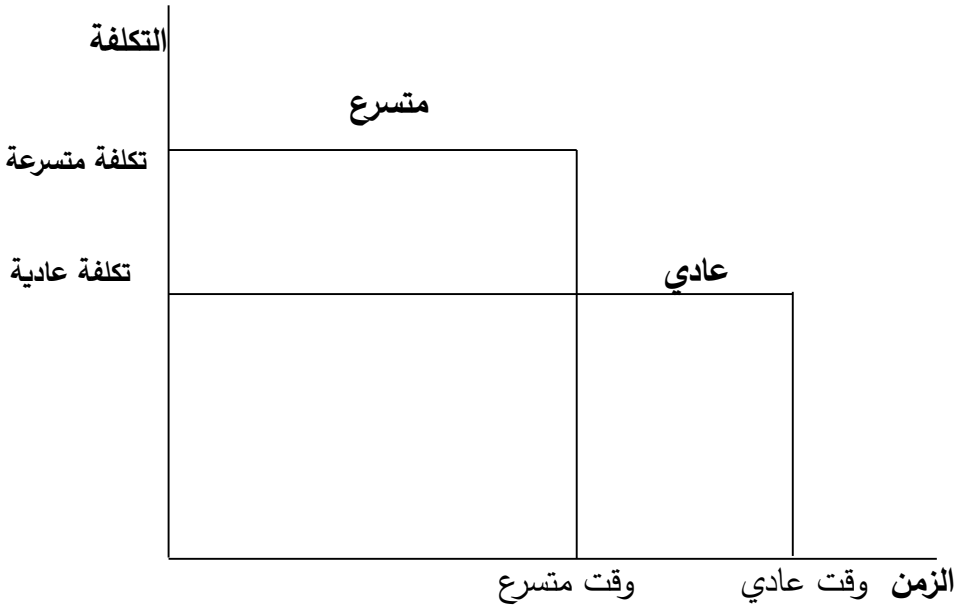
1- الوقت العادي والتكلفة العادية: ويمثل الوقت العادي، الوقت المتوقع للنشاط في الظروف العادية، وتمثل التكلفة العادية تكلفة تنفيذ النشاط من خلال الوقت العادي.

2- الوقت والتكلفة المتسرعة: وهو الوقت والتكلفة اللازمان لتنفيذ النشاط في وقت أسرع.

ويمكن أن تأخذ العلاقة بين الوقت والتكلفة صوراً متعددة، كما يوضح الشكل رقم (1-11).

الشكل رقم (1-11)

العلاقة بين الوقت والتكلفة



يتضح من هذا الشكل أنه إذا أمكننا تمثيل العلاقة بين الوقت والتكلفة في صورة خط مستقيم، فإنّ ذلك يعني أنّ كل وحدة انخفاض في الوقت يقابلها زيادة

متساوية في التكلفة، بمعنى آخر يفترض ثبات ميل الخط المستقيم، وعلى ذلك يمكن حساب ميل التكلفة باستخدام المعادلة التالية:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسرعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسرع}}$$

3/5/11- خطوات تطبيق نموذج بيرت/ تكلفة في تخفيض وقت إتمام المشروع:

عند تخفيض الوقت اللازم للمشروع ترتفع بعض عناصر التكاليف (التكاليف المتغيرة) مثل الأجور الإضافية وأسعار شراء الخامات وغيرها، بينما تنخفض بعض عناصر التكاليف الزمنية مثل إيجار المعدات والعقارات، أو تكاليف الحراسة والأمن، ولما كان من الصعب تحديد علاقة ثابتة بين الوقت ومجموع التكلفة، كان من الأفضل معرفة البدائل المختلفة الممكنة لتخفيض الوقت وما يقابلها من تكلفة واختيار أفضل هذه البدائل، ويهدف نموذج بيرت تكلفة إلى تحديد هذه البدائل واختيار أفضلها من خلال الخطوات التالية:

1- رسم شبكة أعمال المشروع باستخدام القواعد السابقة نفسها، من خلال تحديد الوقت المتوقع لكل نشاط، والوقت المبكر والمتأخر لكل نشاط، والمسار الحرج وهو أطول المسارات على شبكة الأعمال، ويتم رسم شبكة الأعمال على أساس الوقت والتكلفة العادية لإتمام المشروع.
2- دراسة البدائل المختلفة لتنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع، ويحدد لكل بديل الوقت والتكلفة اللازمة لتنفيذ النشاط، وتتمثل هذه البدائل في التخفيضات الممكنة في وقت تنفيذ النشاط، وما يقابلها من زيادة في التكلفة.
3- تحسب فترة التخفيض لكل نشاط، وهي تساوي الفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع لكل نشاط، ولا يمكن تخفيض وقت النشاط بأكثر من هذه الفترة، وبالتالي تمثل فترة التخفيض حدود التخفيض الممكنة لكل نشاط.

يحسب ميل التكلفة لكل نشاط، ويتمثل في الزيادة في التكلفة المترتبة على تخفيض وقت النشاط بوحدة زمنية، وعلى ذلك يمكن حساب ميل التكلفة لكل نشاط كما يلي:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسرعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسرع}}$$

4- يتم تخفيض أنشطة المسار الحرج فقط، حيث إنّ أي تخفيض في الوقت اللازم لهذه الأنشطة يؤدي إلى تخفيض الوقت اللازم لإتمام المشروع، وإنّ أي تخفيض في وقت الأنشطة غير الحرجة لن يؤثر في الوقت اللازم لإتمام المشروع، وهذا يعني تحمل تكلفة إضافية من دون عائد لها.

5- يتم ترتيب أنشطة المسار الحرج حسب ميل التكلفة لكل نشاط، ويتم البدء بتخفيض النشاط ذي أقل ميل تكلفة، ثم الذي يليه وهكذا، مع مراعاة حدود التخفيض لكل نشاط.

6- لا يعني تخفيض نشاط من أنشطة المسار الحرج فترة زمنية معينة، انخفاض فترة تنفيذ المشروع بالقدر نفسه، ويرجع ذلك إلى احتمال تحول المسار الحرج إلى مسار آخر، ولذلك يجب مراعاة القواعد التالية عند تخفيض أنشطة المسار الحرج:

أ- حساب الفترة الزمنية المطلوب تخفيض أنشطة المسار الحرج في حدودها، وتتمثل في الفرق بين الوقت المستهدف لإتمام المشروع ووقت المسار الحرج.

ب- يتم تحديد النشاط الحرج ذي أقل ميل تكلفة، وفترة التخفيض الممكنة لهذا النشاط (التي تمّ تحديدها في الخطوة 3).

ج- حساب الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة (ويلاحظ أنّ وقت الراكد الحر للأنشطة الحرجة يساوي الصفر)، وتحديد أقل راكد حر.

د- يتم تخفيض النشاط الحرج ذي أقل ميل تكلفة بالفترة الزمنية الأقل من بين الفترات المحسوبة في (أ، ب، ج).

7- في حالة ظهور أكثر من مسار حرج، يجب تخفيض وقت المسارات الحرجة في الوقت نفسه، وفي هذه الحالة تكون فترة التخفيض في الأنشطة الحرجة ذات أقل ميل للتكلفة، وهي أقل فترة تخفيض مسموح فيها، وعلى سبيل المثال إذا كان النشاط الحرج ذا أقل ميل تكلفة في المسار الأول يمكن تخفيضه في حدود ثلاثة أسابيع، بينما يمكن تخفيض النشاط الحرج ذي أقل ميل تكلفة في المسار الثاني بأسبوعين فقط، حيث إنّ تخفيض المسار الأول بثلاثة أسابيع لن يؤدي إلى تخفيض وقت إتمام المشروع إلا بأسبوعين فقط.

8- قد يكون نشاط مشترك في مسارين حرجين (أو أكثر)، وعلى الرغم من أنّ هذا النشاط المشترك قد لا يكون ذا أقل ميل تكلفة، إلا أنّ ميل تكلفته أقل من مجموع ميل التكلفة لنشاطين كل منهما على مسار حرج مختلف، وفي هذه الحالة يتم تخفيض النشاط المشترك أولاً.

9- يتم تخفيض وقت المشروع باستخدام الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلى الوقت المستهدف لإتمام المشروع.

ويمكن توضيح الخطوات السابقة بالأمثلة التالية:

مثال (1):

شركة لديها مصنعان تريد إغلاق أحدهما لإجراء تجديد شامل له، وقد استخدمت نموذج بيرت/ تكلفة في التخطيط لتنفيذ ذلك، وكانت البيانات الخاصة بهذا المشروع كما يلي:

الرمز	النشاط	التنفيذ في الوقت العادي		التنفيذ في الوقت المتسرع	
		وقت بالشهر	تكلفة مليون ليرة	وقت بالشهر	تكلفة مليون ليرة
A	رفع الآلات القديمة	5	5	4	10
B	التعاقد على شراء الآلات جديدة	5	21	2	24
C	ترميم المباني	8	12	6	18
D	تركيب آلات جديدة	4	13	3	15

فإذا كان المصنع يحقق ربحاً صافياً قدره 4 مليون ليرة سورية شهرياً.

فالمطلوب: تحديد الوقت الأمثل لإتمام عملية التجديد.

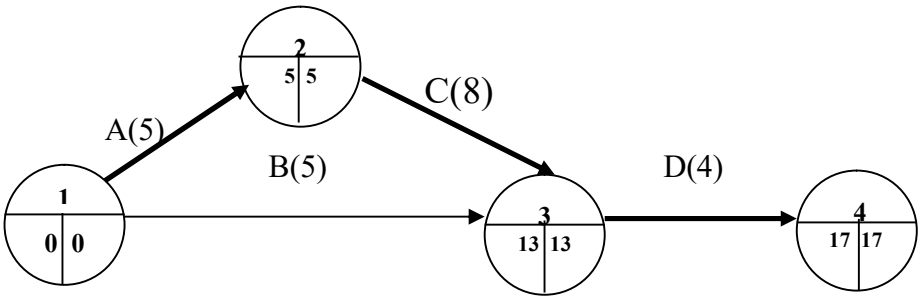
خطوات الحل:

1- رسم شبكة الأعمال:

يمكن تحديد التتابع التالي للأنشطة:

النشاط	النشاط السابق
A	بداية المشروع
B	بداية المشروع
C	A
D	B, C

على ذلك يمكن رسم شبكة الأعمال كما يلي:



ويتضح أنّ المسار الحرج يشمل الأنشطة A, C, D وطول المسار الحرج هو 17 شهراً، وأنّ طول المسار الآخر B, D هو 9 أشهر.

2- حساب ميل التكلفة وفترة التخفيض لكل نشاط:

النشاط	ميل التكلفة	حدود فترة التخفيض
A	$\frac{10-5}{5-4} = 5$	1 شهر
B	$\frac{24-21}{5-2} = 1$	3 أشهر
C	$\frac{18-12}{8-6} = 3$	2 شهر
D	$\frac{15-13}{4-3} = 2$	1 شهر

ويلاحظ من الجدول أنّ حدود التخفيض لأنشطة المسار الحرج = 4 أشهر، طالما أنّ طول المسار الآخر (غير الحرج) = 9 أشهر، أي أنه يقل عن المسار الحرج ب 8 أشهر، لذلك فلن نواجه في هذا المثال مشكلة تحول المسار الحرج أو ظهور مسارات حرجة جديدة.

3- تحديد بدائل تخفيض الوقت:

يكون ترتيب بدائل تخفيض الوقت حسب ميل التكلفة لأنشطة المسار الحرج كما يلي:

بديل (1): تخفيض وقت النشاط (D) بشهر مع زيادة في التكلفة قدرها 2 مليون ليرة سورية شهرياً.

بديل (2): تخفيض وقت النشاط (C) بشهرين مع زيادة في التكلفة قدرها 3 مليون ليرة سورية شهرياً.

بديل (3): تخفيض وقت النشاط (A) بشهر مع زيادة في التكلفة قدرها 5 مليون ليرة سورية شهرياً.

وطالما أنّ المصنع يحقق ربحاً صافياً قدره 4 مليون ليرة شهرياً، فإنّ ذلك يعني أنّ البديل (3) غير مربح، حيث إنّ الزيادة في التكلفة المترتبة على هذا البديل تزيد عن المنافع المتوقعة منه.

ويمكن إظهار هذه التعديلات في وقت تنفيذ المشروع وتكلفته في الجدول التالي:

بيان	الأنشطة								مجموع	
أطول وقت	A		B		C		D			
أقل تكلفة	وقت	تكلفة	وقت	تكلفة	وقت	تكلفة	وقت	تكلفة	وقت	تكلفة
التخفيض الأول	5	5	5	21	8	12	4 −1	13 +2	17 −1	51 +2
التخفيض الثاني	5	5	5	21	8 −2	12 +6	4	13	16 −2	53 +6
	5	5	5	21	8	12	4	13	14	59

يتضح من الجدول أنّ الوقت الأمثل لإجراء عملية التجديد الشامل للمصنع يتمثل في:

النشاط	الوقت	التكلفة
A	5	5
B	5	21
C	6	18
D	3	15
مجموع التكلفة		59

وهذا يعني أنّ وقت المسار الحرج انخفض من 17 شهراً إلى 14 شهراً، بزيادة بالتكلفة من 51 مليون ليرة سورية، إلى 59 مليون ليرة سورية.

مثال (2):

ليكن لدينا البيانات الخاصة بالأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات:

الرمز	مسار النشاط	التنفيذ في الوقت العادي		التنفيذ في الوقت المتسرع	
		وقت بالشهر	تكلفة مليون ليرة	وقت بالشهر	تكلفة مليون ليرة
A	(1-2)	3	20	1	40
B	(2-3)	5	150	2	270
C	(2-4)	6	100	4	140
D	(2-5)	9	250	4	400
E	(3-5)	6	100	3	160
F	(5-6)	5	160	3	240
مجموع التكلفة			780		1250

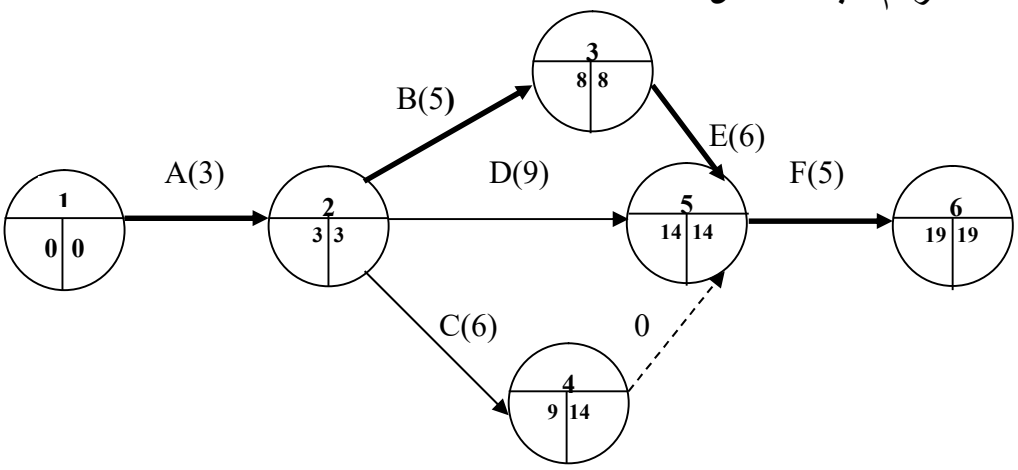
المطلوب:

1- رسم شبكة الأعمال.

2- تحديد الوقت الأمثل لتنفيذ المشروع، إذا كانت الوفورات المترتبة على تخفيض الوقت تقدر ب 60 مليون ليرة شهرياً.

خطوات الحل:

1- رسم شبكة الأعمال



يتضح أنّ المسار الحرج يشمل الأنشطة A, B, E, F وطول المسار الحرج هو 19 شهراً.

2- حساب ميل التكلفة وفترة التخفيض لكل نشاط

النشاط	ميل التكلفة	حدود فترة التخفيض
A	$\frac{40 - 20}{3 - 1} = 10$	2 شهر
B	$\frac{270 - 150}{5 - 2} = 40$	3 أشهر
C	$\frac{140 - 100}{6 - 4} = 20$	2 شهر
D	$\frac{400 - 250}{9 - 4} = 30$	5 أشهر
E	$\frac{160 - 100}{6 - 3} = 20$	3 أشهر

النشاط	ميل التكلفة	حدود فترة التخفيض
F	$\frac{240 - 160}{5 - 3} = 40$	2 شهر

3- حساب الوقت الراكد الحر للأنشطة:

النشاط	الوقت المبكر لبداية النشاط	الوقت المبكر لنهاية النشاط	وقت النشاط	الراكد الحر
A	0	3	3	0
B	3	8	5	0
C	3	9	6	5
D	3	12	9	2
E	8	14	6	0
F	14	19	5	0

4- خطة تخفيض الوقت:

يمكن اتباع الخطوات التالية:

أ- تحديد النشاط الحرج ذي أقل ميل تكلفة، وهو في مثالنا النشاط (2-1) A وأنّ ميل التكلفة له تساوي 10 مليون ليرة شهرياً.

ب- مقارنة التكلفة الإضافية المترتبة على تخفيض النشاط (A) 10 مليون ليرة، بالمنافع الإضافية المترتبة على تخفيض الوقت والمقدرة ب 60 مليون ليرة، فإذا كانت المنافع الإضافية تزيد عن التكاليف الإضافية، يتم تخفيض وقت النشاط ذي أقل ميل تكلفة (النشاط A).

ج- يتم تخفيض وقت النشاط في حدود فترة التخفيض للنشاط (2 شهر) ولن يؤدي هذا التخفيض إلى ظهور مسارات حرجة جديدة، نظراً لأنّ هذا النشاط هو نشاط مشترك في كل المسارات.

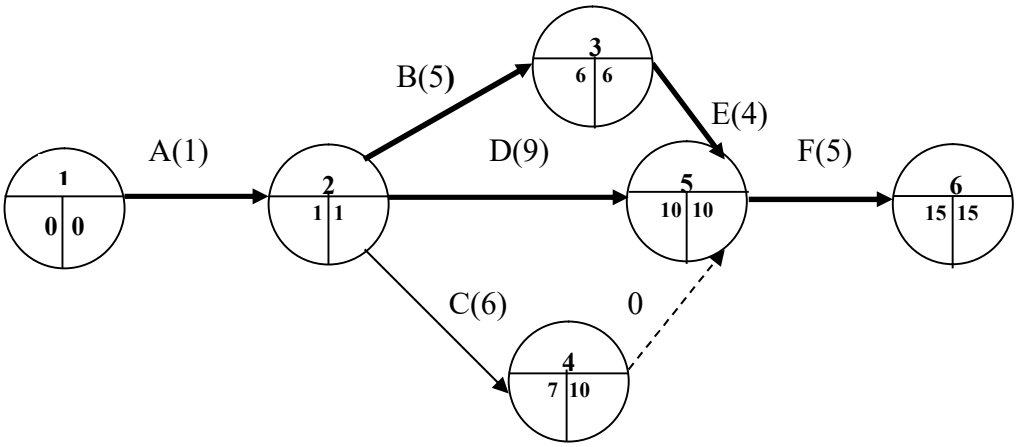
وإذا طبقنا القواعد السابقة، فسنجد أنّ النشاط الحرج التالي في أولويات التخفيض ذي ميل التكلفة الأقل التالي للنشاط (A) هو النشاط E (5-3)، وأنّ التكلفة الإضافية المترتبة على تخفيض هذا النشاط تساوي 20 مليون ليرة شهرياً، وهي أقل من الوفورات الإضافية المترتبة على تخفيض النشاط (60 مليون ليرة)، وحدود التخفيض الممكنة لهذا النشاط = 3 أشهر، بينما أقل وقت راكد على شبكة الأعمال = 2 شهر، لذلك فإنّ التخفيض الثاني هو تخفيض وقت النشاط E بـ 2 شهر.

بعد تخفيض النشاط E بـ 2 شهر يصبح طول المسار الحرج 15 شهراً، وهو طول المسار الثاني A, D, F نفسه، أي أنه يصبح لدينا مساران حرجان:

المسار الأول: A, B, E, F

المسار الثاني: A, D, F

ويوضح الشكل التالي شبكة الأعمال بعد إجراء التخفيض الثاني:



ويعني وجود مسارين حرجين في الشبكة ضرورة تخفيضهما معاً، وفي آن واحد، وتكون بدائل التخفيض كما يلي:

البديل الأول: تخفيض النشاط المشترك (5-6) F، وأنّ ميل التكلفة هو 40 مليون ليرة شهرياً، وحدود التخفيض = 2 شهر.

البديل الثاني: تخفيض النشاط (3-5) E على المسار الأول، وأنّ ميل التكلفة له يساوي 20 مليون ليرة شهرياً، وحدود التخفيض = 1 شهر، وتخفيض النشاط D (2-5) على المسار الثاني، وأنّ ميل التكلفة له يساوي 30 مليون شهرياً، وحدود التخفيض = 5 أشهر، وبالتالي يمكن تخفيض النشاطان D, E في حدود فترة التخفيض الأقل، وهي شهر واحد فقط وبتكلفة قدرها 50 مليون ليرة سورية.

البديل الثالث: تخفيض النشاط (3-2) B على المسار الأول، وميل التكلفة له يساوي 40 مليون، وميل التكلفة = 3 أشهر، وتخفيض النشاط (5-2) D على المسار الثاني، وميل التكلفة له يساوي 30 مليون ليرة، وحدود التخفيض = 5 أشهر، وبالتالي يمكن تخفيض النشاطان B, D في حدود ثلاثة أشهر (فترة التخفيض الأقل للنشاطين) وبتكلفة قدرها 70 مليون ليرة شهرياً.

ومن دراسة البدائل الثلاثة السابقة، يتضح أنّ البديل الأول هو الأفضل، ولذلك يتمثل التخفيض الثالث في تخفيض النشاط المشترك (F) لمدة شهرين، وهي تمثل حدود فترة التخفيض للنشاط، وعلى الرغم من أنّ ميل التكلفة للنشاط F تساوي 40 مليون شهرياً، وهو يزيد عن ميل التكلفة لكل من النشاط E (20 مليون ليرة)، والنشاط D (30 مليون ليرة)، ولكن نظراً لأنّ النشاط F هو نشاط مشترك، لذلك فإنّ التكلفة الإضافية المترتبة على تخفيض هذا النشاط (40 مليون ليرة شهرياً)، تقل عن التكلفة الإضافية المترتبة على تخفيض النشاطين D, E معاً (50 مليون ليرة شهرياً).

ويتمثل التخفيض الرابع في تخفيض النشاطين D, E معاً لمدة شهر، وبتكلفة إضافية قدرها 50 مليون ليرة سورية.

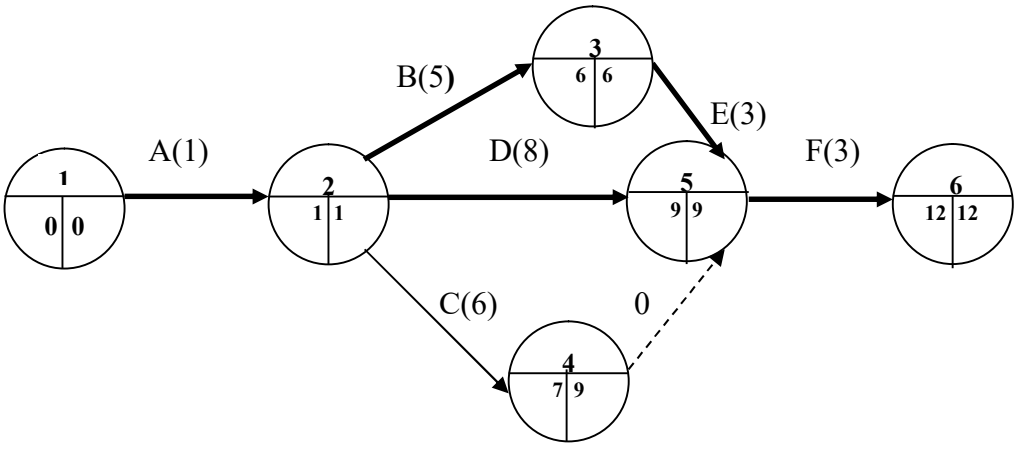
أما البديل الثالث فيتمثل في تخفيض النشاطين B, D وبتكلفة إضافية قدرها 70 مليون شهرياً، وهي تزيد عن المنافع الإضافية المترتبة على تخفيض الوقت (60 مليون ليرة شهرياً)، لذلك لا داعي لإجراء هذا التخفيض.

ويمكن تلخيص التخفيضات الموضحة سابقاً في جدول كما يلي:

بيان	النشاط	ميل التكلفة	فترة التخفيض	الزيادة في التكلفة
التخفيض الأول	A (1-2)	10 مليون	2 شهر	20 مليون
التخفيض الثاني	E (3-5)	20 مليون	2 شهر	40 مليون
التخفيض الثالث	F (5-6)	40 مليون	2 شهر	80 مليون
التخفيض الرابع	E (3-5) D (5-6)	50 مليون	1 شهر	50 مليون
مجموع			7	190 مليون

إجمالي الوفورات المترتبة على تخفيض وقت المشروع = 420 = 60 × 7 مليون ليرة سورية، وأنّ إجمالي التكاليف الإضافية المترتبة على تخفيض وقت المشروع تساوي 190 مليون، وأنّ صافي الوفورات المترتبة على تخفيض وقت المشروع هي: 230 = 190 – 420 مليون ليرة سورية.

ويوضح الشكل التالي شبكة الأعمال النهائية للمشروع:



كما يوضح الجدول التالي التخفيضات السابقة في وقت المشروع، والوقت الأمثل وتكلفة تنفيذ المشروع.

بيان	الأنشطة												الإجمالي	
	A		B		C		D		E		F			
أطول وقت أقل تكلفة	و	ت	و	ت	و	ت	و	ت	و	ت	و	ت	و	ت
التخفيض الأول	3 2	20 20	5	150	6	100	9	250	6	100	5	160	19 2	780 20
التخفيض الثاني	1 2	40 20	5	150	6	100	9	250	6 2	100 40	5	160	17 2	800 40
التخفيض الثالث	1	40	5	150	6	100	9	250	4	140	5 2	160 80	15 2	840 80
التخفيض الرابع	1	40	5	150	6	100	9 1	250 30	4 1	140 20	3	240	13 1	920 50
الخطـــــة النهائية	1	40	5	150	6	100	8	280	3	160	3	240	12	970

في الجدول رمز بـ (و) كرمز للوقت، وبـ (ت) كرمز للتكلفة.

ويتضح من الجدول السابق، أنّ الخطة النهائية لتنفيذ المشروع تحتاج إلى 12 شهراً، وبتكلفة إجمالية قدرها 970 مليون ليرة سورية، ويؤدي ذلك إلى زيادة إجمالي التكلفة بمبلغ (190 مليون ليرة)، مع تحقيق صافي وفورات قدره (230 مليون ليرة) (230 = 190 – 420)، ويلاحظ أنه لا يمكن إجراء أي تخفيضات أخرى في وقت الأنشطة الحرجة، حيث يؤدي ذلك إلى زيادة في التكاليف قدرها (70 مليون ليرة شهرياً)، وهي تفوق الوفورات المقدرة بـ (60 مليون ليرة سورية شهرياً)، كما أنه لا توجد جدوى من تخفيض أنشطة غير حرجة(النشاط C)، حيث لن يؤدي ذلك إلى أي تخفيض في الوقت اللازم لإتمام المشروع، بل على العكس

من ذلك يمكن تحقيق وفورات في التكاليف في حالة إطالة وقت هذا النشاط ب 2 شهر (الوقت الراكد للنشاط C) بتخصيص عمالة أو آلات أقل كفاءة، وعلى الرغم من أنّ الموارد الأقل كفاءة قد تؤدي إلى إطالة وقت النشاط إلا أنها ستؤدي إلى وفورات في التكلفة.

6/11- تدريبات

مسألة رقم (1):

احسب الزمن المبكر والمتأخر لكل نشاط، وحدد المسار أو المسارات الحرجة، والزمن المطلوب لإنهاء المشروع، واحسب الزمن المبكر لبداية كل نشاط ونهايته، والزمن المتأخر لبداية ونهاية كل نشاط.

النشاط	مسار النشاط	الزمن (بالأسبوع)
A	(1-2)	5
B	(1-3)	7
C	(1-4)	13
D	(1-5)	7
E	(2-8)	8
F	(3-4)	2
G	(3-7)	4
H	(4-6)	3
I	(5-7)	6
J	(6-8)	12
K	(7-8)	15

مسألة رقم (2):

ترغب إحدى الشركات السورية في تطوير إحدى المصانع التابعة لها، وقد قامت في هذا الإطار بتحليل مكونات هذا المصنع، وانتهت عملية التحليل بضرورة إدخال نظام تصنيعي حديث، وقد قام فريق العمل المكلف بتطوير المصنع بتصميم نظام تصنيعي جديد، وقد قررت الشركة أن تبدأ مرحلة تشغيل المصنع المحدث في بداية عام 2012، ومن المتوقع أن تستغرق مدة عام، وفيما يلي الأنشطة المختلفة اللازمة لمرحلة تنفيذ النظام، وكذلك الوقت اللازم لكل نشاط.

النشاط	مسار النشاط	الوقت اللازم للنشاط (بالأسبوع)		
		ف	ح	ش
A	(1-2)	3	4	6
B	(1-3)	1	3	4
C	(2-4)	3	6	9
D	(3-4)	2	6	10
E	(4-5)	1	2	4
F	(4-6)	2	3	6
G	(4-7)	2	6	7
H	(5-8)	3	8	12
I	(5-9)	4	10	12
J	(6-5)	1	2	3
K	(6-7)	2	2	2
L	(6-9)	1	3	4
M	(7-9)	4	5	8
N	(7-10)	2	3	9
O	(8-11)	1	1	1
P	(9-11)	5	8	9
Q	(10-11)	2	3	4

المطلوب ما يلي:

1- رسم شبكة الأعمال.

2- تحديد الوقت المبكر والمتأخر والراكد الكلي لكل نشاط.

3- تحديد المسار الحرج.

4- حساب احتمال إتمام المشروع في 54 أسبوعاً.

5- إذا فرض أن تكلفة الموارد اللازمة لتنفيذ المشروع هي 50000 ليرة سورية أسبوعياً، فاحسب احتمال إتمام المشروع بتكلفة قدرها 3000000 ليرة سورية.

مسألة رقم (3):

تعاقد مقاول مع عميل له على تنفيذ مشروع في 17 يوماً، على أن يدفع غرامة تأخير قدرها 1500 ل.س في اليوم، ولتشجيع المقاول على إنهاء المشروع في الزمن المحدد، قدم العميل عرضاً بدفع 1000 ل.س مكافأة عن كل يوم يمكن إنهاء المشروع فيه قبل الموعد المحدد، والجدول التالي يوضح البيانات التالية:

النشاط	مسار النشاط	التنفيذ في الوقت العادي		التنفيذ في الوقت المتسرع	
		الوقت باليوم	تكلفة ل.س	الوقت باليوم	تكلفة ل.س
A	(1-2)	1	1000	1	1000
B	(1-3)	3	1000	2	3000
C	(2-4)	4	3000	2	5000
D	(3-2)	2	2000	2	2000
E	(3-5)	4	1000	1	4000
F	(3-6)	2	2000	2	2000
G	(4-7)	2	5000	1	10000
H	(5-7)	1	3000	1	3000
I	(6-7)	2	2000	1	3000
J	(7-8)	5	3000	4	5000
K	(7-9)	6	1000	2	9000
L	(8-10)	2	1500	2	1500
M	(9-10)	3	2000	1	3000
مجموع التكلفة			27500		51500

المطلوب:

1- رسم شبكة الأعمال.

2- تحديد الوقت الأمثل لتنفيذ المشروع.

مسألة رقم (4):

يوضح الجدول التالي بيانات عن الأنشطة اللازمة لإنتاج منتج جديد في إحدى الشركات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت العادي (أسبوع)	الوقت المتسرع (أسبوع)	التكلفة العادية (ل.س)	التكلفة المتسرعة (ل.س)	ميل التكلفة ليرة/ أسبوع
A	(1-2)	1	1	5000	5000	غير قابل للتعديل
B	(2-3)	3	2	5000	12000	7000
C	(2-4)	4	2	13000	17000	2000
D	(3-4)	5	3	10000	12000	1000
E	(3-5)	7	5	8500	12500	2000
F	(4-5)	4	2	8500	16500	4000
G	(5-6)	1	1	5000	5000	غير قابل للتعديل
				55000	80000	

المطلوب:

1- رسم شبكة الأعمال وفقاً للوقت العادي وتحديد المسار الحرج.

2- رسم شبكة الأعمال وفقاً للوقت المتسرع وتحديد المسار الحرج.

3- استخدام أسلوب بيرت/تكلفة في تخطيط عملية تخفيض الوقت بأقل زيادة ممكنة في التكاليف.

الفصل الثاني عشر

نظرية صفوف الانتظار

1/12- مقدمة

2/12- الخصائص المميزة لنظرية الانتظار

3/12- نماذج صفوف الانتظار

4/12- النماذج الرياضية لتحليل صفوف الانتظار

5/12- تخفيض التكاليف

6/12- تدريبات

1/12- مقدمة:

تُعدّ صفوف الانتظار أكثر الظواهر انتشاراً في حياتنا اليومية، ويرجع السبب في ذلك إلى أنّ أغلب المرافق الاقتصادية والخدمية تدير أنظمتها على أساس عدد ثابت من الموارد.[1]

وتتلخص هذه الظاهرة في وصول عدد كبير من طالبي خدمة معينة في الوقت نفسه أو متتابعين، فإذا وجدوا محطة الخدمة أو ما يطلق عليه أحياناً قناة الخدمة مشغولة يقفون أمامها في صف انتظار، فمثلاً يمكن ملاحظة صفوف انتظار العملاء في مراكز تسليم المبيعات، وصفوف الجمهور أو المشاهدين أمام شباك تذاكر السينما أو المسرح، وصفوف انتظار السيارات في محطات الوقود، وصفوف العملاء أمام شباك السحب أو الإيداع في البنوك، وصفوف الآلات في أقسام الورش من أجل الصيانة والإصلاح، وصفوف الأجزاء الصناعية في مركز التجميع في الصناعات التجميعية، والطائرات في المطار عند ممرات الهبوط، والسفن في الميناء عند تفريغ حمولتها.

هذه الأمثلة ذكرت على سبيل المثال لا الحصر حيث توجد مجالات أخرى كثيرة لتطبيق نظرية صفوف الانتظار، والتي تنشأ لأنّ محطات الخدمة بطاقتها الحالية غير قادرة على تقديم الخدمة بمعدل الطلب عليها.[2]

سنعالج في هذا الفصل الحالات المختلفة لنماذج صفوف الانتظار والمداخل الرياضية المستخدمة في تحليل بعض هذه الحالات في محاولة لوضع الأسس والمفاهيم لهذه النظرية.

---

1 - Hamdy, T. A., (1976), "**Operations Research**", Second Edition, USA: Macmillan Publishing Company, p.249.

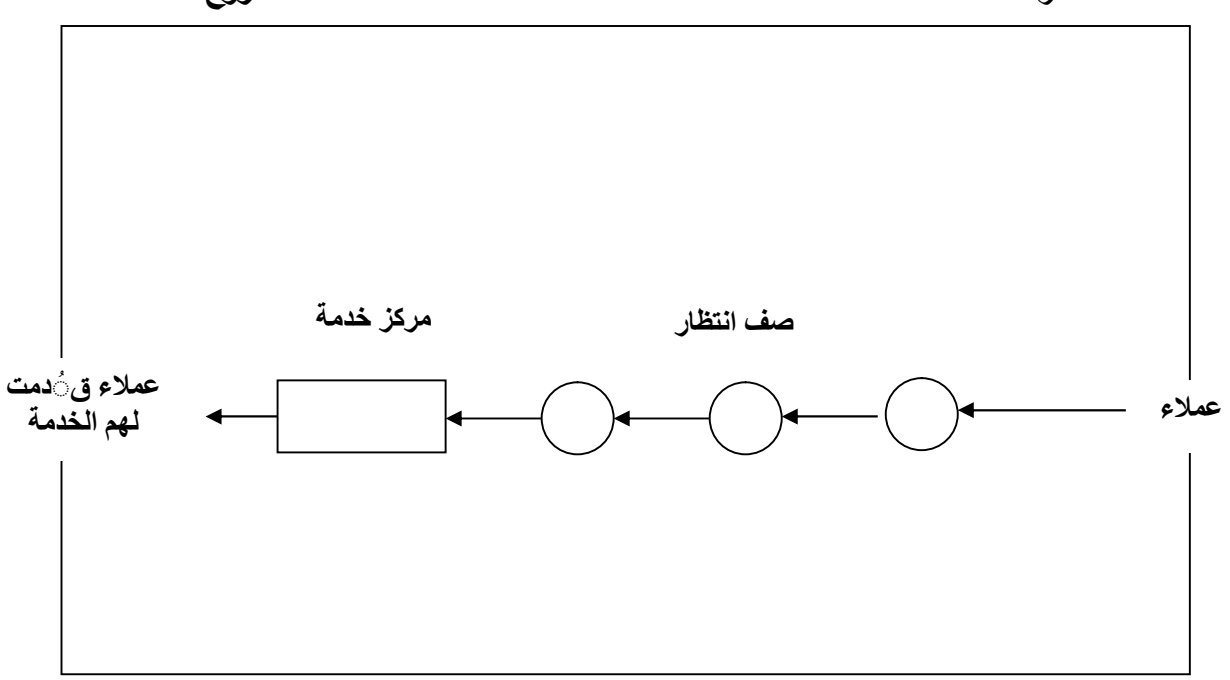
2 - Zhe G- Zhang and Naishuo Tizn, (2004),An Analysis of Queuing Systems With Multi – Task Servers, **European Journal of Operational Research**, No.156, p.375.

2/12- الخصائص المميزة لنظرية الانتظار:

يمكن تمثيل نظام الانتظار في أبسط صورة له في الشكل رقم (1-12)

الشكل رقم (1-12)

شكل يمثل نظام الانتظار مركز خدمة واحد مع إتمام الخدمة في مرحلة واحدة



يتبين من الشكل السابق أنّ العملاء يصلون إلى مركز الخدمة، ثم ينتظرون في صف الانتظار إذا اقتضت الضرورة ذلك، ثم يتلقون الخدمة المطلوبة ويغادرون مركز الخدمة، وتستخدم النماذج الرياضية عدداً من المفاهيم والمصطلحات الخاصة لوصف سلوك نظام الانتظار نوردها فيما يلي:

1- مصدر مدخلات النظام (Input Source):

يقصد بمصدر المدخلات في نظام الانتظار أي مجموعة من الأفراد، أو الأجزاء، أو المنتجات التي تصل مركز الخدمة لتلقي خدمة معينة، ويطلق على هذه المدخلات تعبير العملاء أو العينات.

2- نمط الوصول (Arrival Pattern):

قد يكون نمط الوصول لتلقي الخدمة بمعدل ثابت، أو قد يكون الوصول يحدث عشوائياً من عدد لا نهائي من طالبي الخدمة (عدد من العملاء خلال فترة زمنية معينة). حيث نجد على سبيل المثال أنّ معدل الوصول بالنسبة للمنتجات التي تتحرك وفقاً لنظام الإنتاج المستمر على خط تجميع الإنتاج ربما يكون ثابتاً، بينما نجد أنّ معدل حدوث المكالمات الهاتفية أو وصولها يحدث عشوائياً، ويطابق غالباً التوزيع الاحتمالي الذي يُطلق عليه توزيع بواسون.[1]

ويعدّ توزيع بواسون من الأنماط الشائعة للوصول عندما يكون الوصول عشوائياً، وذلك لأنّ توزيع بواسون يصف عمليات الوصول عندما تكون مستقلة على أساس عدد الأفراد في كل فترة زمنية، وعندما يكون معدل الوصول يمكن وصفه باستخدام توزيع بواسون فإنّ الوقت بين طالب خدمة وآخر يمكن عده متغيراً عشوائياً يطابق التوزيع الآسي.

3- أسلوب تقديم الخدمة (Service Discipline):

نعني بذلك الطريقة المتبعة في تحديد الأولوية فيما يتعلق بتقديم الخدمة، ويتم تقديم الخدمة في أغلب حالات الانتظار على أساس (من يحضر أولاً يتلقّ الخدمة أولاً) بالإضافة إلى مبدأ الأول في الوصول هو الأول في الخدمة، هناك سياسات أخرى تحكم عملية الدخول إلى مركز الخدمة كالمبدأ المتبع في تقديم بعض الخدمات الصحية في المستشفيات.

4- طول صف الانتظار (Queue Length):

تختلف صفوف الانتظار وفقاً للطاقة المتاحة لمركز الخدمة، فعندما تكون الطاقة المتاحة بمركز الخدمة محدودة فإنّ الوصول في هذه الحالة يحدث من عدد

1 - Peter Kochel., (2004), Finite Queuing Systems Structural Investigation and Optimal Design, **International Journal of Production Economics**, Vol.88, Issue.2, p.158.

معروف من طالبي الخدمة، وفي حالات أخرى قد يكون الوصول يحدث من عدد لا نهائي من طالبي الخدمة، وفي جميع الحالات قد يكون هناك مركز خدمة واحد أو مراكز خدمات عدّة.

5- معدل الخدمة (Service Rate):

يقصد بمعدل الخدمة الوقت اللازم لتقديم الخدمة إلى العميل، وقد يكون وقت الخدمة ثابتاً كما هو الحال في خط الإنتاج، وفي كثير من الأحيان فإنّ وقت الخدمة يكون متغيراً عشوائياً عندما يكون وقت الخدمة موزعاً توزيعاً حيث يتبع في الغالب ما يعرف بالتوزيع الآسي، وإذا كان وقت الخدمة موزعاً توزيعاً آسياً فإنّ معدل الخدمة (وحدات/ساعة) يتبع في الغالب توزيع بواسون.

بعد هذا العرض السريع للعناصر والخصائص الأساس في نظام الانتظار يمكننا الآن تلخيص هذه الخصائص والعناصر مع الافتراضات الشائعة التي تصاحب هذه العناصر كما يتضح في الجدول رقم (1-12).

الجدول رقم (1-12)

خصائص نظام الانتظار

خصائص نظام الانتظار	الفرضيات الشائعة
مصدر عناصر المدخلات	محدود أو غير محدود
نمط الوصول	توزيع بواسون لمعدل الوصول التوزيع الآسي لوقت الوصول
طول صف الانتظار	محدود أو غير محدود
أسلوب تقديم الخدمة	الأول في الوصول الأول في الخدمة
نمط تقديم الخدمة	توزيع بواسون لمعدل الخدمة التوزيع الآسي لوقت الخدمة

هذه الفرضيات تمثل أكثر الفرضيات شيوعاً في نماذج صفوف الانتظار لأهميتها في تبسيط عملية التحليل.

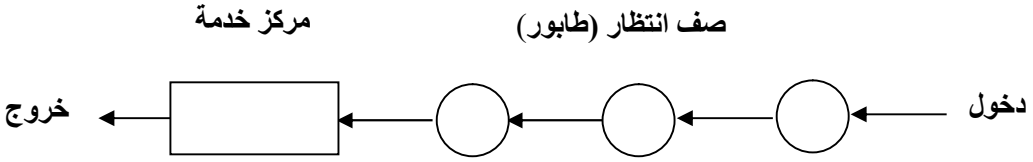
3/12- نماذج صفوف الانتظار:

هناك حالات عدّة لنماذج صفوف الانتظار، ومن أهمها أربعة هياكل لنماذج صفوف الانتظار تتمثل فيما يلي:

1- القناة الواحدة / المرحلة الواحدة:

تمثل هذه الحالة أبسط صورة لنظام الانتظار، والمقصود بمصطلح القناة الواحدة / المرحلة الواحدة، هو وجود مركز خدمة واحد يقدم الخدمة على مرحلة واحدة، ومن الأمثلة الشائعة على هذا النوع من حالات الانتظار:

- الآلات أمام وحدة صيانة واحدة.
- المستهلكون في سوق صغير أمام بائع واحد.
- العملاء في محل حلاقة بحلاق واحد.
- السيارات أمام محطة الوقود بأنبوبة ضخ واحدة.

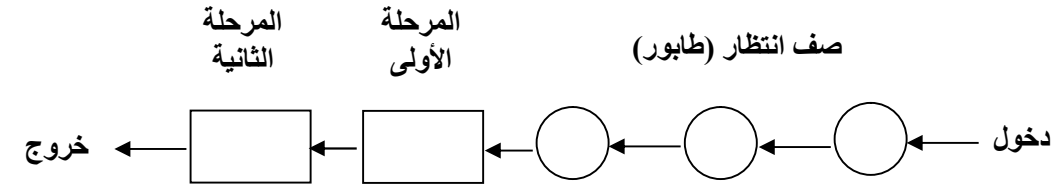


القناة الواحدة / المرحلة الواحدة

2- القناة الواحدة / المراحل المتعددة:

في هذه الحالة يتم تقديم الخدمة على مراحل متتابعة، حيث توجد قناة واحدة يمر من خلالها طلاب الخدمة، ويتم تقديم الخدمة من خلال عدد من مراكز الخدمة في تسلسل تتابعي، ومن الأمثلة على هذا النوع من النماذج:

- خطوط الإنتاج.
- إجراءات الجمارك في المطارات والموانئ.
- إجراءات تسجيل الطلاب في الجامعات.

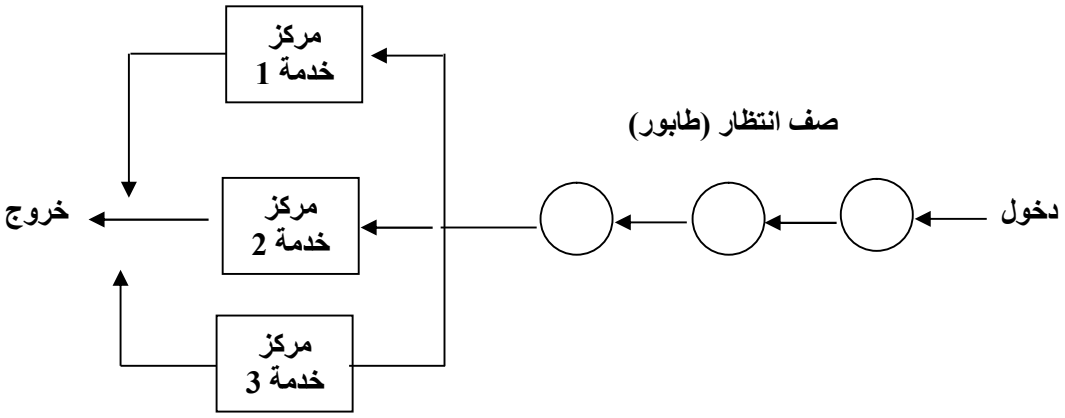


القناة الواحدة / المراحل المتعددة

3- القنوات المتعددة / المرحلة الواحدة:

في هذه الحالة يكون هناك أكثر من مركز خدمة واحد، حيث تكون هذه المراكز متشابهة في تقديم الخدمة، وتقدم على مرحلة واحدة، أما صف الانتظار فيكون صفاً واحداً ومن الأمثلة على هذا النوع من النماذج:

- الآلات العاطلة أمام ورشة بها أكثر من وحدة واحدة للصيانة والإصلاح.
- العملاء أمام نوافذ الصرف والإيداع بالمصارف.
- السيارات في محطة وقود فيها العديد من المضخات.

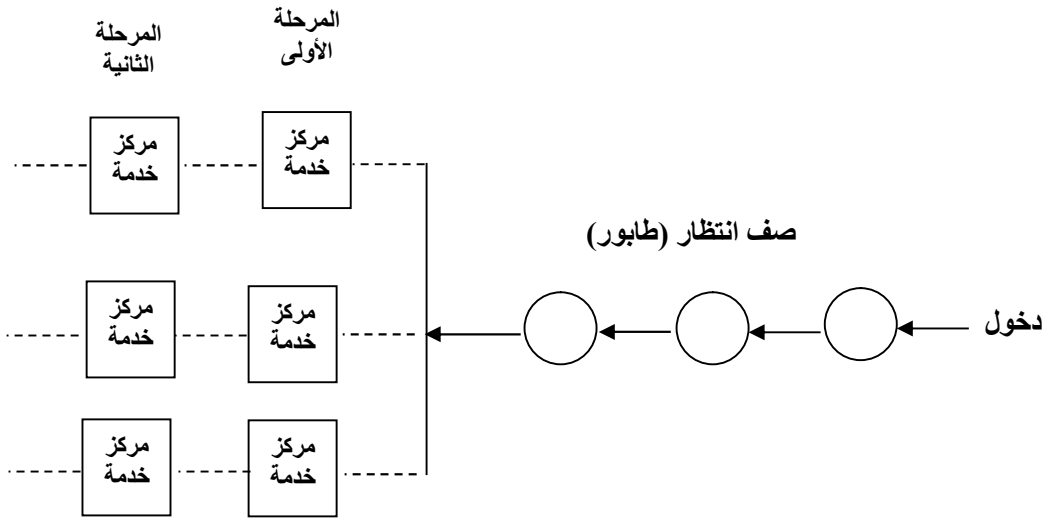


القنوات المتعددة / المرحلة الواحدة

4- القنوات المتعددة / المراحل المتعددة:

في هذه الحالة يتشكل صف الانتظار أمام مراكز خدمة متعددة، يتم فيها تقديم الخدمة على مراحل متعددة، ومن الأمثلة على هذا النوع من النماذج:

- خطوط التجميع المتوازية في بعض الصناعات.
- إجراءات التسجيل في الجامعات.
- قبول المرضى في المستشفيات.



القنوات المتعددة / المراحل المتعددة

4/12- النماذج الرياضية لتحليل صفوف الانتظار:

تمكن الباحثون من بناء بعض النماذج الرياضية لحل مشكلات صفوف الانتظار، حيث تهتم أغلب هذه النماذج الرياضية بالعمليات التي تتميز بالوصول العشوائي، أي أنّ الوصول يكون على فواصل زمنية عشوائية، كما تفترض هذه النماذج أيضاً أنّ خدمة العميل عملية عشوائية، فإذا افترضنا أنه يمكن تحديد التكلفة غير المباشرة المرتبطة بالانتظار في الصف، فإنّ هناك تكلفة أخرى ناشئة عن تقديم الخدمة، لذلك فإنّ نماذج صفوف الانتظار تهدف إلى تخفيض مجموع تكلفة الانتظار وتكلفة تقديم الخدمة إلى أدنى حد ممكن، هذه التكاليف يمكن تحديدها على أساس مقاييس معينة كعدد الأفراد المنتظرين في الصف، ومتوسط وقت الانتظار، وذلك في محاولة للتوصل إلى العدد الأمثل من مراكز الخدمة في الأنظمة المختلفة.

وسنتناول في هذا الفصل النماذج الرياضية في الحالات التالية:

- القناة الواحدة / المرحلة الواحدة.
- القنوات المتعددة / المرحلة الواحدة.

1/4/12- القناة الواحدة / المرحلة الواحدة:

ولتبسيط عملية التحليل نفترض الآتي:

1- عملية الوصول تتم عشوائياً وفقاً لتوزيع بواسون.
2- معدل الخدمة يطابق توزيع بواسون.
3- هناك مركز خدمة واحد.
4- عدد طالبي الخدمة وطول صف الانتظار غير محدود.
5- تقديم الخدمة على أساس مبدأ من يحضر أولاً يتلقّ الخدمة أولاً.

على افتراض أنّ الرموز التالية:

ل = متوسط معدل الوصول أو متوسط عدد طالبي الخدمة الذين يصلون خلال وحدة زمنية واحدة.

م = متوسط معدل الخدمة، أو متوسط عدد طالبي الخدمة الذين يمكن لمركز الخدمة خدمتهم في وحدة زمنية واحدة.

نر = عدد الأفراد أو الوحدات في النظام، ويشمل هذا العدد الأفراد أو الوحدات المنتظرة والحاصلة على الخدمة.

نص = طول صف الانتظار (العدد في الصف لا يتضمن الوحدة التي تقدم لها خدمة في لحظة معينة.

$ح_0$ = احتمال عدم وجود أي عدد من الوحدات في النظام (بقاء مركز الخدمة عاطل).

$ح_ن$ = احتمال وجود عدد (ن) من الوحدات في النظام.

ز = متوسط الوقت الذي يجب أن يقضيه طالب الخدمة في صف الانتظار.

زَ = متوسط الوقت الذي يجب أن يقضيه طالب الخدمة في النظام.

ب = معامل الاستخدام بالنسبة لكل مركز.

بناءً على الافتراضات السابقة فإنّ نموذج القناة الواحدة / المرحلة الواحدة تمثله المعادلات التالية:

العدد المتوقع في صف الانتظار (نص) = $\frac{ل^2}{م\ (م - ل)}$ (1)

العدد المتوقع في النظام (نر) = $\frac{ل}{م - ل}$ (2)

متوسط زمن الانتظار في الصف (ز) = $\frac{ل}{م\ (م - ل)}$ (3)

متوسط زمن الانتظار في النظام (زَ) = $\frac{1}{م - ل}$ (4)

احتمال عدم وجود أي عدد من الوحدات في النظام ($ح_0$) = $1 - \frac{ل}{م}$ (5)

احتمال وجود عدد (ن) من الوحدات في النظام ($ح_ن$) = $(1 - (ل \div م)) (ل \div م)^ن$ (6)

معامل استخدام مركز الخدمة (ب) = (ل ÷ م)

المعادلات السابقة يمكن تطبيقها عندما يكون (ل ÷ م) < 1

أمثلة محلولة:

مثال (1):

إذا كان وصول المرضى إلى غرفة المركز الصحي بإحدى العيادات يتم بطريقة عشوائية، حيث قُدّر معدل الوصول بمتوسط يعادل 4 مرضى في كل ساعة، كما قُدّر معدل الخدمة بهذه الغرفة على أساس 5 مرضى في المتوسط في كل ساعة.

والمطلوب تحديد ما يلي:

1- عدد المرضى المتوقع في صالة الانتظار.

2- عدد المرضى المتوقع بالصالة وبغرفة الفحص.

3- متوسط زمن الانتظار في صالة الانتظار.

4- متوسط زمن الانتظار في حالة ارتفاع معدل الخدمة إلى 6 مرضى في الساعة.

خطوات الحل:

ل = 4 : م = 5

يمكن استخدام المعادلات السابقة للوصول إلى العلاقات التالية:

1- عدد المرضى المتوقع في صالة الانتظار (نص) = $\frac{\text{ل}^2}{\text{م (م – ل)}}$

= $\frac{(4)^2}{5(5 - 4)}$ = (16 ÷ 5) = 3.2

بمعنى سيكون هناك 3 مرضى في المتوسط بصالة الانتظار.

2- عدد المرضى المتوقع بالصالة وبغرفة الفحص (نر) = $\frac{\text{ل}}{\text{م – ل}}$

= $\frac{4}{5 - 4}$ = 4

بمعنى أنه سيكون هناك 4 مرضى في المتوسط بصالة الانتظار وغرفة الفحص.

3- متوسط زمن الانتظار في الصالة (ز) = $\frac{\text{ل}}{\text{م (م – ل)}}$

= $\frac{4}{5\ (5 - 4)}$ = 0.80

بمعنى أنّ متوسط زمن انتظار المريض بالصالة هو 0.8 من الساعة (أي 48 دقيقة).

4- متوسط زمن الانتظار في حالة رفع معدل الخدمة (ز) = $\frac{\text{ل}}{\text{م (م – ل)}}$

$$= \frac{4}{6\ (6 - 4)} = 0.33$$

بمعنى أنّ متوسط زمن انتظار المريض بالصالة هو 0.33 من الساعة.

مثال (2):

تواجه إدارة فروع إحدى البنوك مشكلة طول خط الانتظار في أثناء ساعات العمل بالفترة المسائية المخصصة لعمليات الصرف والإيداع فقط، حيث تقدم عدد من عملاء هذا الفرع بشكوى إلى إدارة الفرع بسبب طول فترة الانتظار، مما جعل إدارة الفرع تشعر بأنه ما لم تتخذ إجراءات عملية لحل المشكلة فإنّ عملاء هذا الفرع سيفكرون في الانتقال إلى بنك آخر أقل ازدحاماً، وبالتالي نقص عملاء هذا البنك، وتبين أيضاً أنّ عملاء هذا الفرع يصلون إلى شباك الصرف والإيداع الذي يشغله موظف واحد طوال الفترة المسائية بنمط مماثل لتوزيع بواسون.

حيث قدر متوسط معدل الوصول إلى شباك الصرف والإيداع بما يعادل 50 عميلاً في الساعة، أما موظف الصرف والإيداع فقد تبين أنه يستغرق في المتوسط دقيقة واحدة مع كل عميل لإنهاء إجراءات الصرف والإيداع، حيث وجد أنّ نمط وقت الخدمة يتبع ما يعرف بالتوزيع الآسي.

المطلوب إيجاد ما يلي:

1- معامل الاستخدام بالنسبة لشباك الصرف والإيداع.

2- متوسط عدد العملاء في صف الانتظار.

3- متوسط عدد العملاء في الفرع.

4- متوسط فترة الانتظار في الصف.

5- متوسط فترة الانتظار في الفرع.

6- احتمال وجود أكثر من عميل واحد في الفرع، وأكثر من 4 عملاء في الفرع.

الحل:

إذا كانت ل = 50، م = 60 فإنّ:

$$\text{1- معامل الاستخدام} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{50}{60} = 0.8333$$

بمعنى أنّ موظف الصرف والإيداع سيكون مشغولاً 83.33٪ من الوقت.

$$\text{2- متوسط عدد العملاء في صف الانتظار} = \frac{\text{ل}^2}{\text{م (م – ل)}}$$

$$= \frac{(50)^2}{60\ (60 - 50)} = 4.1667 \text{ عميلاً.}$$

$$\text{3- متوسط عدد العملاء في الفرع} = \frac{\text{ل}}{\text{م – ل}}$$

$$= \frac{50}{60 - 50} = 5 \text{ عملاء.}$$

4- متوسط فترة الانتظار في الصف = $\frac{\text{ل}}{\text{م (م – ل)}}$

= $\frac{50}{60\ (60 - 50)}$ = 0.083 ساعة أو كل 5 دقائق.

5- متوسط فترة الانتظار في الفرع = $\frac{1}{\text{م – ل}}$

= $\frac{1}{60 - 50}$ = 0.1 ساعة أو كل 6 دقائق.

6- ح (ن > 1) = 1 – [$ح_0$ + $ح_1$]

ح (ن > 4) = 1 – [$ح_0$ + $ح_1$ + $ح_2$ + $ح_3$ + $ح_4$]

حيث أنّ: ($ح_ن$) = (1 – (ل ÷ م)) (ل ÷ م)^ن

$ح_{(0)}$ = (1 – (0.8333)) (0.8333)^0 = 0.1667

$ح_{(1)}$ = (1 – (0.8333)) (0.8333)^1 = 0.1389

$ح_{(2)}$ = (1 – (0.8333)) (0.8333)^2 = 0.1158

$ح_{(3)}$ = (1 – (0.8333)) (0.8333)^3 = 0.0965

$ح_{(4)}$ = (1 – (0.8333)) (0.8333)^4 = 0.0804

= **0.5983**

ح (ن > 1) = 1 – [0.1389 + 0.1667] = 0.6944

ح (ن > 4) = 1 – [0.5983] = 0.4017

2/4/12- القنوات المتعددة / المرحلة الواحدة:

سنفترض في هذا النموذج أنّ هناك عدداً من مراكز الخدمة، وأنّ هناك خط انتظار واحداً، هذا ويقوم النموذج الرياضي المستخدم في وصف سلوك نظام الانتظار في مثل هذه الحالة على الفرضيات التالية:

1- نمط الوصول إلى مركز الخدمة يتبع توزيع بواسون.

2- معدل الخدمة مساوٍ في جميع مراكز الخدمة ومطابق لتوزيع بواسون.

3- مصدر مدخلات هذا النوع من الأنظمة غير محدود.

4- طول خط الانتظار غير محدود.

5- عدد مراكز الخدمة يساوي (ك).

باستخدام الرموز السابقة نفسها المستخدمة في النموذج السابق فإنّ معادلات هذا النموذج يمكن صياغتها على النحو التالي:

احتمال عدم وجود أي عناصر في النظام:

$$(ح_0) = \frac{1}{\left| \sum_{ن=0}^{ك-1} \frac{(ل \div م)^ن}{ن!} + \frac{(ل \div م)^ك}{ك!\ (1 - ل \div ك\ م)} \right|}$$

احتمال وجود (ن) من العناصر أو الوحدات في النظام:

$$ح_ن = \frac{(ل \div م)^ن}{ن!}\ ح_0 \quad \text{عندما تكون } ن < ك$$

$$ح_{ن} = \frac{(ل \div م)^{ن}}{ن - ك \quad ك!\ ك} \quad \text{عندما تكون } ن > ك$$

$$\text{عدد المنتظرين في الصف } (ن_{ص}) = \frac{(ل \div م)^{ك}\ (ل \div م\ ك)}{ك!\ (1 - ل \div م\ ك)^{2}}\ ح_{0}$$

العدد المزمع في النظام $(ن_{ع}) = ن_{ص} + (ل \div م)$

متوسط زمن الانتظار في الصف $(ز) = (ن_{ص} \div ل)$

متوسط الانتظار في النظام $(زَ) = ز + (1 \div م)$

معامل الاستخدام $(ب) = (ل \div ك\ م)$

مثال:

يستخدم مكتب الخطوط الجوية العربية السورية ثلاثة موظفي حجز طوال الوقت، حيث يتولى هؤلاء الإجابة عن الاتصالات الهاتفية المتصلة بمواعيد إقلاع الطائرات والقيام بالحجز، وتستغرق كل مكالمة مع أي موظف حجز في المتوسط فترة 0.5 دقيقة، وذلك لأنّ وقت تقديم الخدمة موزع طبقاً للتوزيع الآسي، كما تبين أيضاً أنّ مكتب الحجز يتقبل خلال ثماني ساعات عمل 1750 مكالمة (أو 218.75 مكالمة في الساعة)، حيث يتبع معدل وصول هذه المكالمات الهاتفية توزيع بواسون.

المطلوب:

1- تحديد معدل الخدمة في الساعة.

2- معامل استخدام موظفي الحجز.

3- احتمال عدم استقبال أية مكالمات هاتفية.

4- متوسط عدد المكالمات التي تنتظر تحويلها إلى موظف الحجز.

5- متوسط عدد المكالمات المنتظرة والمحولة إلى موظفي الحجز.

6- متوسط الزمن الذي ينتظره طالب المكالمة قبل تحويل مكالمته إلى موظف الحجز.

7- متوسط الزمن الذي يستغرقه طالب المكالمة لإنهاء إجراءات الحجز.

خطوات الحل:

1- معدل الخدمة في الساعة (م):

= 2 × 60 = 120 عميل.

2- معامل الاستخدام لموظفي الحجز (ب):

معامل الاستخدام (ب) = (ل ÷ ك م) = (218.75 ÷ 3 × 120) = 0.6076

3- احتمال عدم استقبال أية مكالمات هاتفية:

$$(ح_0) = \frac{1}{\left| \sum_{ن=0}^{ك=1} \frac{(ل \div م)^{ن}}{ن!} + \frac{(ل \div م)^{ك}}{ك!\,(1 - ل \div ك م)} \right|}$$

$$ح_0 = \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{120 \div 218.75}{1!} + \frac{(120 \div 218.75)^2}{2!} + \frac{(120 \div 218.75)^3}{3!\,(1 - \frac{218.75}{120 \times 3})}}$$

$$0.1417 = \frac{1}{2.5728 + 1.6615 + 108229 + 1} =$$

4- متوسط عدد المكالمات التي تنتظر تحويلها إلى موظف الحجز:

$$\text{عدد المنتظرين في الصف } (\text{ن}_{\text{ص}}) = \frac{(\text{ل} \div \text{م})^{\text{ك}} \ (\text{ل} \div \text{م ك})}{\text{ك!} \ (1 - \text{ل} \div \text{م ك})^2} \ \text{ح}_0$$

$$= 0.1417 \times \frac{(120 \div 218.75)^3 \ (3 \times 120 \div 218.75)}{3! \ (1 - 3 \times 120 \div 218.75)^2} =$$

= 3.985 × 0.1417 = 0.5647 مكالمة.

5- متوسط عدد المكالمات المنتظرة والمحولة إلى موظفي الحجز (ن$_{\text{ع}}$).

(ن$_{\text{ع}}$) = ن$_{\text{ص}}$ + (ل ÷ م)

= 0.5647 + (218.75 + 120) = 2.3876 مكالمة.

6- متوسط الزمن المنتظر من قبل طالب المكالمة (ز):

(ز) = (ن$_{\text{ص}}$ ÷ ل)

= 0.5647 ÷ 218.75 = 0.0025 ساعة.

7- متوسط الزمن الذي يستغرقه طالب المكالمة لإنهاء الحجز (زَ):

(زَ) = ز + (1 ÷ م)

= 0.0025 + (1 ÷ 120) = 0.0108 ساعة = 38.88 ثانية.

5/12- تخفيض التكاليف

عندما نتمكن من تحديد التكلفة غير المباشرة والمرتبطة بظاهرة الانتظار وقياسها، والتكلفة المباشرة المرتبطة بتقديم الخدمة، فإنّ الهدف الأساس يكون في الغالب هو تخفيض مجموع عنصري التكلفة (تكلفة الانتظار، وتكلفة تقديم الخدمة).

1/5/12- تكلفة الانتظار:

عندما تكون الطاقة الحالية لمراكز الخدمة غير قادرة على تقديم الخدمة بسبب عدم كفايتها، فإنّ التكلفة الناشئة عن انتظار طالبي الخدمة قد تكون كبيرة، هذا النوع من التكلفة قد يشمل تكلفة تعطل العاملين، فقدان جزء من المبيعات أو العملاء.

وفي كثير من الحالات يصعب قياس هذا النوع من التكلفة إلا في الحالات التي يكون المنتظر فيها جزءاً من النظام، كما هو الحال في حالة انتظار العاملين في وحدة صناعية لاستلام معدات العمل، إلا أنه يمكن استخدام المعادلة التالية للتعبير عن هذه التكلفة:

$$ت_{ظ} = ن_{ر} \times ق_{ظ}$$

حيث إنّ:

$ت_{ظ}$ = التكلفة الكلية المتوقعة الناجمة عن الانتظار.

$ن_{ر}$ = العدد المتوقع في النظام.

$ق_{ظ}$ = التكلفة عن كل وحدة زمنية لكل منتظر.

2/5/12- تكلفة تقديم الخدمة:

رغم أنّ التكلفة الناشئة عن الانتظار يمكن تخفيضها عن طريق توظيف مراكز خدمة أخرى، إلا أنّ ذلك سيؤدي أيضاً إلى ارتفاع التكلفة المصاحبة لتقديم

الخدمة، وعلى افتراض أنّ ذلك سيؤدي إلى ارتفاع التكلفة المصاحبة لتقديم الخدمة، وعلى افتراض أنّ تكلفة تقديم الخدمة هي دالة خطية، لذلك يمكن حساب التكلفة الكلية المتوقعة والناشئة عن تقديم الخدمة في كل وحدة زمنية على النحو التالي:

$$ت_{خ} = ج \times ق_{خ}$$

حيث إنّ:

$ت_{خ}$ = التكلفة الكلية المتوقعة الناجمة عن تقديم الخدمة.

ج= معدل تقديم الخدمة بالوحدات في كل فترة زمنية.

$ق_{خ}$ = التكلفة الناشئة عن تقديم الخدمة لوحدة واحدة.

وأنّ معادلة التكلفة الإجمالية يمكن صياغتها على النحو التالي:

$$ت_{ك} = ت_{ظ} + ت_{خ}$$

$$= ن_{ر} \times ق_{ظ} + ج \times ق_{خ}$$

7/12- تدريبات

س1- وضح الخصائص المميزة لنظرية الانتظار.

س2- اشرح نماذج صفوف الانتظار المختلفة موضحاً ذلك بالرسم.

س3- مسألة:

يصل المرضى المصابون إلى وحدة الإسعاف السريع بإحدى المستشفيات لتلقي الإسعافات الأولية، وتتكون وحدة الإسعاف الملحقة بالمستشفى من غرفة الكشف والعلاج وصالة الانتظار، وتحقق إحصائياً تطابق ظاهرة الوصول إلى وحدة الإسعاف السريع مع توزيع بواسون بمعدل 2.1 مريض في الساعة، وأنّ التوزيع الاحتمالي المطابق لنمط الخدمة الطبية هو التوزيع الآسي بمعدل 0.4 ساعة لكل حالة، أو 2.5 حالة في الساعة.

لنفترض أيضاً أنّ جميع حالات الإصابة أو المرض يتم التعامل معها من خلال طبيب مناوب واحد في وحدة الإسعاف، حيث يتم تقديم الخدمة الطبية وفقاً لمبدأ القادم أولاً يُسعف أولاً، وإذا افترضنا أنّ إدارة المستشفى قررت القيام بدراسة استطلاعية لغرض تحسين العمليات الخدمية بوحدة الإسعاف من خلال تطبيق نموذج القناة الواحدة / المرحلة الواحدة لنظام الإنتظار، على اعتبار صحة الفروض المتصلة بتطبيق مثل هذا النموذج.

المطلوب:

استخدام النموذج الرياضي لنظام الانتظار السابق في الإجابة على الأسئلة التالية:

1- نسبة الوقت الذي تكون فيه وحدة الإسعاف مشغولة (حدوث ظاهرة الانتظار لتلقي الخدمة.

2- عدد الحالات (المرضى) في وحدة الإسعاف السريع.

3- عدد الحالات (المرضى) في غرفة الانتظار.

4- مدى حساسية النموذج المقترح للتغيرات في متوسط الخدمة (م)، أو بمعنى آخر حساسية الخصائص التشغيلية للنظام في ظل التغيرات في قيمة متوسط (أو معدل) الخدمة (م).

س4- مسألة:

يصل المرضى إلى المركز الصحي التابع لإحدى المدن بطريقة عشوائية طبقاً لتوزيع بواسون، بمعدل 4 مرضى في الساعة، يقوم المركز الصحي من خلال موظفيه باتخاذ الإجراءات المطلوبة حيال حالات المرضى على أساس متوسط 5 حالات في الساعة، وتتخذ الإجراءات الإدارية والمالية المطلوبة وفقاً لنمط مماثل لتوزيع بواسون أيضاً، علماً بأنّ المركز الصحي مفتوح خلال الأربع والعشرين ساعة.

المطلوب:

1- تحديد معدل الاستخدام في المركز الصحي.

2- تحديد عدد المرضى المتواجدين في المركز الصحي.

3- تحديد عدد المرضى في الانتظار.

4- إذا افترضنا أنّ إدارة المركز الصحي بإمكانها رفع معدل الخدمة بطريقة معينة ليصبح 6 مرضى في الساعة، فما الأثر الناجم عن هذا التعديل ؟.

س5- مسألة:

نستمر في تحليل خصائص العملية الخدمية المشار إليها في المسألة السابقة (المركز الصحي)، ونفترض أنّ إدارة المركز تفكر في إضافة مكتب آخر للنظر في حالات المرضى، لذلك فإنّ عناصر النموذج في هذه الحالة ستكون على النحو التالي:

ل = 4

م = 5

ك = 2

والمطلوب:

1- تحديد الاحتمال المقرون بعدم تواجد طالبي الخدمة في النظام.

2- العدد المتوقع من المرضى في صف الانتظار.

3- العدد المتوقع من الأفراد في المركز الصحي (النظام).

4- العدد المتوقع للانتظار في الصف.

5- قياس الوفورات في التكاليف الناشئة عن الانتظار عند إضافة المكتب الثاني، واقتراح البديل المناسب.

س6- مسألة:

تصل الطائرات إلى الممر الوحيد للهبوط بإحدى المطارات عشوائياً طبقاً لتوزيع بواسون، وذلك بمعدل 9 طائرات في الساعة، تبين أيضاً أنّ الزمن المستغرق في تقديم الخدمات والتسهيلات المطلوبة كافة في حالة الهبوط يطابق التوزيع الإحصائي نفسه ، وبمعدل 12 طائرة في الساعة.

المطلوب:

1- متوسط عدد الطائرة المنتظرة للبدء في عمليات الهبوط.

2- متوسط عدد الطائرات المنتظرة والموجودة في الممر في أثناء تقديم الخدمة.

3- متوسط وقت الانتظار قبل الهبوط.

4- متوسط الوقت المستغرق في الانتظار والهبوط وتقديم الخدمة.

5- نسبة الوقت غير المستغل من قبل برج المراقبة.

6- احتمال وجود طائرتين في الممر.

س7- مسألة:

يوجد حالياً صرّاف واحد بشباك صرف الصكوك الخاصة بالشركات بالخزينة في المصرف التجاري، يصل العملاء الممثلون للشركات يومياً بطريقة عشوائية، وبمعدل متوسط 10 عملاء في الساعة، تقدم الخدمة المصرفية في هذا الشباك على أساس 12 عميلاً في الساعة.

المطلوب:

1- ما احتمال بقاء شباك الخزينة بدون عمل ؟.

2- ما العدد المتوقع من العملاء أمام شباك الخزينة (بما في ذلك من تقدم لهم الخدمة) ؟.

3- ما احتمال وجود عميل واحد على الأقل في الانتظار ؟.

4- ما متوسط الزمن المنتظر من قبل العميل ؟.

5- ما الأثر الناجم عن إضافة شباك آخر في الخزينة ؟، وهل سيكون إضافة شباك آخر إجراءً مقبولاً لتطوير مستوى الخدمة المصرفية وتحسينه.

الفصل الثالث عشر

نظرية المباراة

1/13- مقدمة

2/13- شروط استخدام نظرية المباراة

3/13- بعض المبادئ لعملية اتخاذ القرار في نظرية المباراة

4/13- تصنيف بيئة القرار لنظرية المباراة

5/13- تدريبات

1/13- مقدمة:

تواجه الإدارة في أغلب المنظمات بمشكلة اتخاذ القرار في ظروف التنافس والصراع والتعارض في المصالح بين أطراف عديدة، ولا يتوقف ناتج القرار في مثل هذه الظروف على ظروف القرار فقط، بل يتوقف على قرارات الأطراف المتنافسة، ولذلك يستوجب الأمر أن تتنبأ الإدارة بالإستراتجيات المحتملة للمنافسين حتى يمكنها أن تختار أمثلها لتحقيق الأهداف المرجوة.

وتعتمد الإدارة في تنبؤاتها بسلوك المنافسين واستراتيجياتهم على خبرتها وممارستها لوظائفها في هذا الإطار، ولذلك يجب عليها أن تعظم منفعتها بعد أخذ استراتيجيات المنافسين في اعتبارها، وعادة ما يتعذر ويصعب على الإدارة التنبؤ باستراتيجيات المنافسين نظراً لأنّ كلاً منهم يسعى إلى تعظيم منفعته على حساب الآخر، ولذلك يلجأ الأطراف المتنافسون إلى التخمين والتوقع بإستراتيجيات الخصوم.

وتنطوي بعض حالات اتخاذ القرار على قدر من التنافس والتباري والصراع والتعارض في المصالح بين اثنين أو أكثر من متخذي القرار، ويحاول كل منهم أن يحسم الصراع والمنافسة وينهي ويكسب المنافسة لصالحه، ويوجد في حالة المباراة اثنان أو أكثر من المتبارين أو الخصوم الذين يفترض أنهم على درجة عالية من الذكاء، وكل منهم يحاول أن يعظم عائد قراره على حساب خصومه أو منافسيه.[1] ويستخدم الأطراف المشتركون (اللاعبون أو الخصوم) في المباراة قواعد المنطق والرياضيات لتطوير استراتيجيات لكسب المباراة وإعدادها على حساب منافسيه (خصومه)، وتُعدّ عملية تحديد الاستراتيجيات المثلى لحالات اتخاذ القرارات لب نظرية المباراة وجوهرها.

---

1 - K. G. Murty., (1995), "**Operations Research Deterministic Optimization Models**", USA: Prentice- Hall, Inc, p. 225.

وتهتم نظرية المباراة بدراسة كيفية وضع الاستراتيجيات في حالة الصراع، وتأسيساً على ذلك يمكن الاستنتاج بأنّ بيئة الصراع دائماً معقدة وذات أبعاد متعددة مما يستوجب أن يعتمد طرفا الصراع على مجموعة عوامل تتمثل في (عدد المتنافسين، مستوى الصراع، والعوامل النفسية للأطراف المتنافسة، والقوة التي يمكن أن يفرضها من قبل أحد الأطراف " في حالة عدم تكافؤ الأطراف " توقيت اختيار الفعل، مستوى الاتصال بين الأطراف، والإمكانية والرغبة في المصالحة، وتوفر المعلومات، وعقلانية متخذ القرار).

وتبقى عملية اتخاذ القرار في البيئة التنافسية من أكثر المواضيع شيوعاً وأهمية، وتبقى المساهمة الحقيقية لنظرية المباراة في تقديم إطار مفهومي لصياغة المشكلات، وتحليلها بأسلوب مبسط، لذلك فإنّ هذه النظرية تستخدم لتبسيط الحالات المعقدة وتحويلها إلى نماذج مبسطة والنتائج المحققة يمكن تعميمها على الحالات العملية للمساعدة في اتخاذ القرارات بمختلف أشكالها بشكل سليم.

2/13- شروط استخدام نظرية المباراة[1]

1- ضرورة توافر اثنين أو أكثر من المتنافسين (اللاعبين أو الخصوم)، وعادة ما يُطلق على الخصم أو المتنافس مصطلح لاعب.

2- إنّ لكل متنافس عدداً من الاستراتيجيات التي تمكّنه الاختيار من بينها، ولا يلزم أن تكون هذه الاستراتيجيات مماثلة ومطابقة للاعب الآخر.

3- يفترض أنّ كل متنافس على علم ومعرفة بالتحركات المرتقبة المتاحة لباقي المتنافسين مقدماً، إلا أنه ليس متأكداً بالاستراتيجية التي سيختارها المتنافس إلا بعد أن يختارها، وعندما يختار هذا المتنافس أحد هذه الاستراتيجيات فإنه بذلك يكون قد أدى أو لعب المباراة.

---

1 - D. R .Anderson., D. J. Sweeney, and T. A.Williams, (2000), "**An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making**", New York: South- Western College Publishing. P.325.

4- تتوقف نتيجة المباراة (عائد المباراة أو مكسبها) التي يحققها أحد المتنافسين على الإستراتيجيات التي يختارها باقي المتنافسين، كما تتوقف على الاستراتيجيات التي يختارها هذا المتنافس.

5- تؤدي كل مجموعة من الاستراتيجيات التي يختارها المتنافسون (بواقع استراتيجية لكل واحد منهم) إلى تحقيق نتيجة أو حصيلة معروفة محددة تسمى حصيلة المباراة.

6- إمكانية تقدير جميع النتائج المحتملة لكل استراتيجية، وتعبّر قيمة المباراة عن متوسط العائد الذي يمكن أن يحققه أحد الخصوم (المتنافسون) إذا اختار المتنافسون الآخرون أفضل استراتيجياتهم.

7- تمثل الاستراتيجية التي يختارها أحد المتنافسين قاعدة القرار التي يستخدمها المتنافس عند إقراره للإجراء الذي يتخذه، ويوجد نوعان من الاستراتيجيات الأول ويعرف بالاستراتيجية المطلقة وهي التي تنطوي على تحرك واحد محدد، أما الثاني فهو الاستراتيجية المختلطة التي تتضمن عدة تحركات يستخدم كل منها بنسبة معينة لفترة من الزمن.

3/13- بعض المبادئ لعملية اتخاذ القرار في نظرية المباراة:

تتخذ القرارات إما في حالة التأكد، وإما في حالة المخاطرة، وإما في ظروف عدم التأكد، يتخذ القرار في حالة التأكد عندما تكون جميع البدائل تقود إلى نتائج ثابتة ومحددة، البرمجة الخطية خير وسيلة للقرارات في حالة التأكد.

والقرارات التي تتخذ في ظروف المخاطرة هي القرارات التي لا يمكن للبدائل أن تؤدي إلى نتائج محددة ووحيدة، وإنما لمجموعة من النتائج الممكنة وكل عائد يحدث مع احتمالية محددة ومعروفة لمتخذ القرار، أما القرارات التي تتخذ في ظروف عدم التأكد فهي القرارات التي تقود فيها البدائل إلى مجموعة من النتائج الممكنة إلا أنّ احتمالية حدوث هذه العوائد غير معروفة.

وعلى العموم فإنّ نظرية المباراة تقع ضمن هذه الفئة لأنّ كل لاعب في المباراة يتجاهل حركة خصمه، لذلك فإنّ الهدف هو تقليل حالة عدم التأكد عن طريق التنبؤ ببدائل الخصم.

ونوضح حالة عدم التأكد من خلال المباراة التي كانت مصفوفة العائد لها كما يلي:

	B1	B2
A1	0	3
A2	7	– 7
A3	– 4	4

حيث يلاحظ أنّ اللاعب A يمتلك ثلاث استراتيجيات بينما الخصم B يمتلك استراتيجيتين، والسؤال الآن ما هي الاستراتيجية التي سيلعبها اللاعب A لتعظيم أرباحه؟ هناك ثلاث استراتيجيات ولكن النتائج المتوقعة في كل منها غير مؤكدة وتعتمد على الخصم B.

على سبيل المثال في حالة لعب الاستراتيجية A2 فإنّ اللاعب إما أن يربح وإما أن يخسر 7 بالاعتماد على ما سوف يلعبه الخصم إما استراتيجية B1 وإما B2، فإذا تمّ إغراء الخصم للعب الاستراتيجية B1 فإنّ A2 ستكون الاستراتيجية المفضلة للاعب A، أما إذا كان المتوقع أنّ الخصم سيلعب الاستراتيجية B2 فإنّ A3 هي الأفضل للاعب A لتعظيم العائد.

في حالة لعب الاستراتيجية الأولى A1 فهنالك ضمان عدم الخسارة أو إمكانية تحقيق ربح 3، ولكن لا يمكن دائرة الجدل هذه أن تقود إلى أي جدوى مما يستوجب تحديد بعض المبادئ المعقولة والمقبولة التي طالما تمّ اتباعها لتساعد في بعض الأحيان على التنبؤ بما سيلعبه الخصم واقتراح ما يجب أن نلعب.

4/13- تصنيف بيئة القرار لنظرية المباراة:

يمكن تصنيف بيئة القرار لنظرية المباراة حسب عدد الأفراد المتنافسين ومستوى التنافس، وبناء على هذا التصنيف هناك نوعان من بيئة القرار:

أولاً: المباراة بين شخصين:

أ- المباراة ذات المجموع الصفري.

ب- المباراة ذات المجموع غير الصفري.

ثانياً: المباراة في حالة تعدد الأفراد:

أ- المباراة ذات المجموع الصفري.

ب- المباراة ذات المجموع غير الصفري.

ويمكن توضيح التقسيمات للنوعين كليهما كما يلي:

- **المباراة بين شخصين:** هي تلك المباراة التي تقع بين طرفين فقط، أما الثانية (المباراة في حالة تعدد الأفراد)، فهي المباراة التي تتعدد فيها الأطراف، وتكون دائماً بين أكثر من اثنين.
- أما **المباراة ذات المجموع الصفري:** فهي المباراة أو اللعبة التي يكون حاصل مجموعها صفراً، أي في حالة ربح الطرف الأول 100000 ليرة سورية، فإنّ الطرف الثاني لا بد أن يخسر 100000 ليرة سورية.

1/4/13- مباراة الشخصين ذات المجموع الصفري:

يمتاز هذا النوع من المباريات بأنّ هناك فريقين: إذا ما ربح الأول خسر الثاني بمقدار ربح الأول، على أن تكون قيمة هذه المباراة ذات مجموع صفري. أي هي المباراة التي تقوم بين فريقين بحيث يكون فيها مقدار ما يكسبه أحد الطرفين نتيجة كل خطوة مساوياً إلى مقدار ما يخسره الطرف الآخر.

وذلك بفرض عدم وجود طرف ثالث يستفيد من هذه المباراة، فإذا كان ما يكسبه الطرف A هو a وما يخسره الطرف B هو b:

فإنّ: $a + b = 0$

$a = - b$

وهكذا فإذا علمنا ما يمكن أن يربحه أحد الأطراف يمكننا استنتاج ما يخسره الطرف الآخر.

الحل الأمثل لمباراة الطرفين ذات المجموع الصفري:

لإيجاد الحل الأمثل في هذا النوع من المباريات يتم استخدام المعيارين التاليين:

1- قاعدة أعلى الأقل Maximin:

وتعني تبني استراتيجية أكبر قيمة من بين أصغر قيم الصفوف، وهي استراتيجية متحفظة يتبناها كل لاعب، وتقوم على مبدأ تبني سياسة أحسن الأسوأ من النتائج الممكنة.

مثال:

		الإدارة			Maximin
		B1	B2	B3	
العمال	A1	5	6	8	**(5)**
	A2	2	3	1	**1**
	A3	4	5	2	**2**

وفقاً لهذه الطريقة عندما يختار A الاستراتيجية الأولى يمكنه أن يربح (5, 6, 8) بالاعتماد على طبيعة الاستراتيجية التي يتبناها B، ولكن باستطاعة اللاعب A أن يضمن على الأقل ربحاً مقداره 5 بغض النظر عن طبيعة الاستراتيجية التي يعتمدها B، أما في حالة تبني الاستراتيجية A2 فإنّ اللاعب A يمكنه أن يحقق ربح على الأقل (1, 2, 3) = 1 ، ويمكن أن يضمن على الأقل ربح مقداره (4, 5, 2) = 2 في حالة تبنيه الاستراتيجية A3، هذه أقل القيم في كل صف تمثل أقل ما يمكن أن يحققه اللاعب A من ربح إذا لعب الاستراتيجية الصافية.

هذه الأرباح يمكن توضيحها في المصفوفة بواسطة أقل قيمة في الصفوف، وعلى هذا الأساس فإنّ اللاعب A سيقوم باختيار الاستراتيجية التي تقابل أعلى قيمة من أصغر القيم وهي تساوي (5)، وهي الاستراتيجية الأولى A1، وهذه الاستراتيجية تسمى إستراتيجية أعلى الأقل.

2- قاعدة أقل الأعلى Minimax:

وهي عملية تبني استراتيجية أصغر قيمة من بين أكبر قيم الأعمدة، وهي استراتيجية يتبناها اللاعب B لتقليل خسارته إلى أقل ما يمكن.

تقوم فلسفة هذه الاستراتيجية على أنّ اللاعب B يعتقد أنّ اللاعب A يريد أن يحقق أكبر ربح ممكن، لذلك فإنّ اللاعب B سيقوم بتحديد أكبر قيمة في كل عمود من الاستراتيجيات لأنّ تلك القيم هي هدف اللاعب A .

من المثال السابق:

		الإدارة		
		B1	**B2**	**B3**
العمال	**A1**	5	6	8
	A2	2	3	1
	A3	4	5	2
Minimax		**(5)**	**6**	**8**

وفقاً لهذه الاستراتيجية سيدرك اللاعب B أنّ تبني الإستراتيجية B1 سيقود إلى خسارة متوقعة لا تزيد عن (4, 2, 5) = 5 ، وفي حالة تبني الاستراتيجية B2 فإنّ خسارته المتوقعة لاتزيد عن (5, 3, 6) = 6 ، أما في حالة تبني الاستراتيجية B3 فإنّ خسارته المتوقعة لا تزيد عن (2, 1, 8) = 8 .

هذه الخسائر تمّ توضيحها في أكبر قيمة في الأعمدة، وبعدها يقوم اللاعب B باختيار الاستراتيجية التي تقلل خسائره من بين أقل قيمة من ضمن أعلى القيم من الأعمدة المختلفة وهي تتمثل في (5, 6, 8) = 5. وهذا يتمثل في الاستراتيجية

الأولى B1، ويسمى اختيار اللاعب B استراتيجية أقل الأعلى، وقيمة الخسارة المقابلة تدعى القيمة العليا للمباراة.

3- حالة التوازن والنقطة السرجية:

يتحقق الحل الأمثل للمباراة عندما لا يجد أي من الطرفين أي فائدة من تغيير استراتيجياتهم الممكنة، وفي هذه الحالة تكون المباراة مستقرة في حالة توازن، وتسمى (A, B) ثنائياً متوازناً من الاستراتيجيات، إذا كان اللاعب الأول يتوقع الاستراتيجية التي سيلعبها خصمه اللاعب الثاني وهي الاستراتيجية B ، التي يكون فيها من غير ذي جدوى من منع اللاعب الأول من تبني استراتيجية A، وكذلك الخصم يتوقع الاستراتيجية A التي سيلعبها اللاعب الأول التي ليس هنالك أي عائد جراء منع اللاعب الأول من لعبها.

ويتحقق التوازن عندما يكون:

Maximin = Minimax

نقطة سرجية ↖		الإدارة			Maximin
		B1	B2	B3	
العمال	A1	**(5)**	6	8	**(5)**
	A2	2	3	1	**1**
	A3	4	5	2	**2**
Minimax		**(5)**	**6**	**8**	

إنّ الاستراتيجيات المعتمدة في هذه الحالة تسمى استراتيجيات الحل الأمثل وإنّ للمباراة نقطة سرجية، وإنّ قيمة المباراة هي القيمة الأكبر في العمود والأصغر في الصف، وهي نجدها الرقم 5 وهنا نجد أنه يوجد لمصفوفة العائد نقطة سرجية كذلك، وهي تمثل أقل قيمة في الصف الأول، وأعلى قيمة في العمود الأول وعندها يتحقق التوازن.

إنّ معيار الأمثلية هو عدم ميل أي من الطرفين المتنازعين على تغيير استراتيجيته المستقرة، وإذا حاول أحد الأطراف تغييرها فإنّ عملية التغيير ستزيد من خسارته مما يضطره إلى التراجع والعودة إلى الاستراتيجية المستقرة.

1/1/4/13- أنواع الاستراتيجيات:

يمكن تقسيم الاستراتيجيات المتبعة من قبل أحد الأطراف المتنافسة إلى نوعين من الاستراتيجيات:

1- الاستراتيجية الصافية:

يمكن تعريف الاستراتيجية الصافية على أنها الاستراتيجية التي يتبعها أحد الطرفين مهما تغيرت استراتيجية الطرف المنافس، ولا يمكن تغييرها من دون خسائر، وإذا كان لكل طرف استراتيجية صافية ففي هذه الحالة تظهر ما يسمى بالاستراتيجيات الثنائية المتوازنة.

في حالة استخدام الاستراتيجية الصافية فإنّ المباراة تكون لها نقطة سرجية، إنّ قيمة المباراة تساوي النقطة السرجية، وقيمة المباراة هي عبارة عن معدل العائد المتحقق جراء لعب مباراة معينة لأحد الأطراف إذا ما تكررت هذه المباراة لمرات عدة.

تُعدّ الاستراتيجية A1 هي الاستراتيجية المعتمدة من قبل الطرف A وهي تساوي (5) وهي القيمة الدنيا للمباراة، بينما الاستراتيجية B1 هي الاستراتيجية المعتمدة من الطرف (B) وتساوي (5)، لذا نجد أنّ أي تغير في تبديل هذه الاستراتيجية سيعود بالخسائر على كل الأطراف، فالاستراتيجية التي لا يمكن تغييرها إلا بتضحية معينة تسمى استراتيجية صافية.

2- الاستراتيجية المختلطة:

عندما يكون من غير الممكن تبني استراتيجية صافية فإنّ الموقف يقود إلى تبني خليط من الاستراتيجيات في آن واحد وفق احتمالية معينة.

فإنّ الاستراتيجية المختلطة للطرف A تكون $(X_1, X_2,\ldots, Xm)$ وهي قيم حقيقية غير سالبة بحيث تكون:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_m = 1$$

وكذلك الحال للطرف B، حيث يقود تبني استراتيجية مختلطة من قبل أحد الأطراف إلى ضرورة تبني الطرف المقابل استراتيجية مختلطة، وأنّ نوع الاستراتيجية تحددها جملة عوامل ذاتية موضوعية.

ويمكن توضيح الاستراتيجيات المختلطة باستخدام المثال التالي:

شركتان تتبنيان سياسة ترويج مبيعاتهما، وكل شركة لها استراتيجيتين، وأنّ كفاءة كل إستراتيجية تقاس بمدى القدرة على زيادة حصتها السوقية.

مصفوفة العائد التالية توضح استراتيجيات الشركتين:

	B	
A	**B1**	**B2**
A1	4	-1
A2	-1	1

إنّ القيمة المتوقعة لأي طرف هي عبارة عن الناتج aij الذي سوف يحدث باحتمالية X_iY_j حيث هذه هي احتمالية اللاعب A عندما يلعب استراتيجية X_i واللاعب B الذي يلعب Yj، ولذلك فإنّ القيمة المتوقعة للمباراة هي مجموع الناتج $X_ia_{ij}Y_j$ الذي هو:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_i a_{ij} y_j$$

الخطوات المتبعة في إيجاد قيمة المباراة:

يمكن اتباع الخطوات التالية في إيجاد قيمة المباراة في حالة استخدام الاستراتيجيات المختلطة:

1- تحديد Maximin و Minimax للمباراة:

		B		Maximin
		B1	B2	
A	A1	4	–1	**(–1)**
	A2	–1	1	**– 1**
Minimax		**4**	**(1)**	

طالما أنّ Maximin لا تساوي Minimax فإنه ليس هناك نقطة سرجية ولا توجد استراتيجية صافية، أي لا بدّ من استخدام استراتيجية مختلطة لكل لاعب، تعتمد عملية تقدير الاستراتيجيات المختلطة للطرف الآخر على الحدس والتقدير والتخيلات جراء الخبرة وفق أسلوب احتمالي.

عندما تكون المباراة تستوجب استخدام الاستراتيجيات المختلطة فإنّ مهمة نظرية المباراة تكون في المساهمة في تحديد الاحتمالات التي يستخدم بها كلا الطرفين استراتيجياتهم المتاحة، أي ما احتمال استخدام كل إستراتيجية ؟.

فإذا كان احتمال لعب الاستراتيجية A1 = p فإنّ احتمال لعب الإستراتيجية A2 = 1– p، والجدول التالي يوضح ذلك بالنسبة للطرف A، والاحتمالات المختلفة له للعب الاستراتيجيات.

الاحتمالات الاستراتيجية	اللاعب	
P	A1	A
1– p	A2	

بالنسبة للطرف الثاني: الاحتمالات المختلفة له للعب الاستراتيجيات تكون:

الاحتمالات الاستراتيجية	اللاعب	
q	B1	B
1– q	B2	

الهدف الرئيس لكل طرف هو تحديد الجزء من الوقت الذي يستغرقه بتبني كل استراتيجية للحصول على أعلى فائدة، وأنّ الفوائد المتوقعة من أي خليط من الاستراتيجيات هو عبارة عن المعدل الموزون للنتائج الممكنة، حيث كل استراتيجية تقيم وفق احتمالية حدوثها.

1- يمكن إيجاد الحل لهذه المباراة وذلك بمساواة العوائد المتوقعة لأحد الأطراف من استراتيجيات الخصم إلى الأرباح المتوقعة من الاستراتيجيات الأخرى للخصم.

2- إيجاد أفضل استراتيجية للطرف A، وذلك بضرب القيم الاحتمالية p, 1– p في أرقام نتائج اللعبة المناسبة، ثم يتم إيجاد قيمة p, 1– p وذلك بجعل الصف الأول مساوياً إلى الصف الثاني كما يلي:

الصف الأول: $4p - (1 - p)$

الصف الثاني: $- p + (1 - p)$

$$4p - 1 + p = - p + 1 - p$$
$$5p - 1 = 1 - 2p$$

3- إيجاد قيمة p:

$$5p + 2p = 2$$
$$7p = 2$$
$$P = 2/7$$

لما كانت الاستراتيجية A1 تلعب باحتمالية p فإنّ:

$$A1 = 2/7$$

وعليه فإنّ: $A2 = 1 - 2/7 = 5/7$

وهذا يعني أنّ الطرف الأول A يلعب استراتيجيات مختلطة هي A1 وA2 باحتمالية 2/7 و5/7 على التوالي لتعظيم عوائده، وهذا لا يعني أنّ الطرف A يجب أن يلعب A1 بمقدار 2/7 ثم A2 بمقدار 5/7 ، ولكن خلال المباراة يجب أن يلعب الطرف A الاستراتيجية A1 باحتمالية 2/7 ويلعب الاستراتيجية A2 باحتمالية 5/7 .

ولإيجاد أفضل مزيج من الاستراتيجيات للطرف B واحتمالاتها يتم إتباع نفس الخطوات السابقة بحيث يكون العمود الأول مساوياً إلى العمود الثاني في اللعبة:

العمود الأول: $4q - (1 - q)$

العمود الثاني: $-q + (1 - q)$

$$4q - 1 + q = -p + 1 - p$$
$$5q - 1 = 1 - 2q$$

- إيجاد قيمة q:

$$5q + 2q = 2$$
$$7q = 2$$
$$q = 2/7$$

لما كانت الاستراتيجية B1 تلعب باحتمالية q كانت:

$$B1 = 2/7$$

وعليه فإنّ: $B2 = 1 - 2/7 = 5/7$

ثم يتم إيجاد قيمة المباراة كما يلي:

		q B1 = 2/7	1– q B2 = 5/7
P	A1 = 2/7	4	–1
1 – p	A2 = 5/7	–1	1

Payoff	p	q	القيمة
		4 × 2/7 × 2/7	= 0.336
		–1 × 2/7 × 5/7	= – 0.205
		–1 × 5/7 × 2/7	= – 0.205
		1 × 5/7 × 5/7	= 0.504
			0.430

2/1/4/13- الهيمنة Dominance:

يمكن توضيح الهيمنة على أنها درجة الأفضلية التي تمتاز بها استراتيجية اللاعب A أو خصمه B على غيرها من الاستراتيجيات للاعب نفسه في كل حالة استخدام، أما الاستراتيجيات المهيمن عليها فهي الاستراتيجية التي لا يمكن أن يستخدمها اللاعب مهما كانت الاستراتيجية التي يلعبها الخصم، ويتم الاستفادة من هذه الخاصية في تقليص حجم مصفوفة العائد وذلك بحذفها.

قواعد الهيمنة:

1- إذا كانت جميع العناصر (a_{ij}) في أحد الأعمدة أكبر من أو يساوي ($\geq$) للعناصر المقابلة لها في عمود آخر فإنّ ذلك العمود مهيمن عليه، فإذا رمزنا للعمود K ورمزنا للعمود المقارن به J تكون $a_{ik} \geq a_{ij}$ عندما $1 \leq i \leq m$

2- إذا كانت جميع العناصر (a_{ij}) في أحد الصفوف أصغر من أو يساوي ($\leq$) للعناصر المقابلة لها في أي صف فإنّ ذلك الصف مهيمن عليه حيث يكون الصف h مهيمناً عليه بالصف I إذا كانت $a_{hj} \leq a_{ij}$.

3- يمكن حذف الصف أو العمود أو كلا المهيمن عليهما لتقليص حجم المصفوفة، ويمكن أن يكون هنالك أكثر من عمود وأكثر من صف مهيمن عليه، ويمكن توضيح خاصية الهيمنة من خلال المثال التالي:

شركتان متنافستان في مجال تقديم الخدمات الإعلانية حيث لكل شركة ثلاث استراتيجيات كما موضح في مصفوفة Payoff:

		B			**Maximin**
		B1	B2	B3	
A	A1	–3	7	4	–3
	A2	–2	–2	5	–2
	A3	3	–2	7	–2
Minimax		3	7	7	

ليس للمباراة نقطة سرجية، وعليه لا بد من العمل على تقليص حجم المصفوفة عن طريق استبعاد الاستراتيجيات التي لا يمكن استخدامها.

ا- مقارنة استراتيجيات اللاعب B:

عند إجراء مقارنة بين جميع قيم الاستراتيجية B1 وهي (3 ,2- ,3-)، مع الاستراتيجية B3 وهي (4, 5, 7)، يتضح أنّ الاستراتيجية B3 لا يمكن للاعب B أن يلعبها مهما كانت الاستراتيجية التي يلعبها الخصم A ، كما أنه لا يوجد للاعب A أي حافز لاستخدام الاستراتيجية B3، وعليه فإنّ المصفوفة يمكن اختصارها إلى ما يلي:

		B	
		B1	B2
A	A1	3 –	7
	A2	2–	2–
	A3	3	2–

2- إجراء عملية المفاضلة لاستراتيجيات اللاعب A لتحديد فيما إذا كان هنالك استراتيجية مُهيمن عليها، ولتكن المفاضلة بين الاستراتيجية A2 والاستراتيجية A3 حيث يمكن مقارنة كل عنصر إلى أي عنصر آخر في كلا الاستراتيجيتين، حيث يتبين من المقارنة أنّ قيم A2 أصغر أو مساوٍ لقيم A3 وعليه فإنّ الاستراتيجية A2 استراتيجية مهيمن عليها من قبل A3 حيث إنّ اللاعب A يفضل لعب الاستراتيجية A3 على A2 مهما كانت الاستراتيجية التي يلعبها الخصم B والاستراتيجية A2 ، وليصبح جدول Payoff كما يلي، وعندها نبدأ من جديد بالبحث عن النقطة السرجية.

		B	
		B1	B2
A	A1	3 –	7
	A3	3	2–

2/4/13- المباراة ذات المجموع غير الصفري:

None Zero Sum Games

المباراة بين فريقين ذات المجموع غير الصفري، هي المباراة بين خصمين لا يكون مجموع العائد المتحقق لكلا الطرفين من خلال مجموعة من النتائج المختلفة للمباراة مساوياً إلى الصفر.[1]

استخدام هذا النمط من المباراة يعود إلى اختلاف الأطراف المتنافسة في نظرتها إلى الربح أو الخسارة، الربح الحقيقي لأحد الأطراف قد لا يكون الخسارة الحقيقية للطرف الآخر، الربح غير النقدي قد يكون ذا مغزى وأهمية إلى أحد الأطراف، بينما قد لا يكون ذا جدوى للطرف الآخر، وهذا يعكس أنّ بعض المواقف التنافسية تتضمن جوانب غير تنافسية تساهم بمردودات إيجابية أو سلبية إلى كلا الفريقين المتنافسين، على سبيل المثال، سياسة البيع لشركتين متنافستين تؤثر ليس فقط في الحصة السوقية لكل شركة، وإنما تتعدى ذلك إلى حجم السوق الكلي للمنتجات المتنافسة.

يصنف هذا النمط من المباراة على أساس درجة التعاون بين الأطراف المتنافسة، أو على أساس عدم التعاون عندما لا يكون هناك اتصال مسبق بين الأطراف المتنافسة قبل بدء المباراة.

في نموذج المباراة التعاونية تكون هناك اتفاقات ومناقشات قبل بدء المباراة، وأنّ نقض الاتفاق مسموح به، أمثال المواقف التنافسية في العلاقات التجارية بين الدول، أو المساومات بين العمال والإدارة، أما في حالة أن يكون هناك أكثر من فريقين فإنّ المباراة التعاونية تسمح لبعض الأطراف أو كلهم بإجراء عملية الائتلاف أو المصالحة.

الهدف من دراسة هذا الموضوع هو توضيح الصعوبات التي تظهر جراء صياغة نموذج رياضي للمواقف الصعبة، طالما يواجه هذا النمط من المباراة متخذ

---

[1]- د. محمود محمد المنصوري، **مرجع سبق ذكره**، ص217.

القرار بكثرة في الحياة العملية، ومن صعوبات استخدام هذا الأسلوب أنه لا يقود إلى حل مرض وسهل خاصة إذا أراد أحد الأطراف خرق القواعد بالاتصال المباشر مما يترتب عليه حل جديد مختلف تماماً عما كان عليه.

تكون مصفوفة المدفوعات Payoffs Matrix عبارة عن قيم زوجية Pairs يمثل العنصر الأول عائد الفريق الأول، بينما يمثل العنصر الثاني عائد الفريق الثاني. يمكن أن تكون الاستراتيجيات المستخدمة في هذا النمط من المباراة من نوع الاستراتيجيات الصافية.

تبين مصفوفة المدفوعات Payoffs Matrix التالية أنّ لكلا الفريقين استراتيجية صافية يفضل استخدامها دون غيرها.

مباراة رقم (1):

		B
	Y_1	**Y_2**
X_1	(0,0)	(8,–8)
X_2	(–8,8)	(4,4)

A

يتبين من هذا الجدول أنّ الاستراتيجية $X_1(0, 8)$ للاعب A مهيمنة على الإستراتيجية $X_2(-8, 4)$، وأنّ الاستراتيجية $Y_1(0, 8)$ للاعب B مهيمنة على الاستراتيجية $Y_2(-8, 4)$، إذا استخدم اللاعب A الاستراتيجية X_2 فإنّ اللاعب B سيستخدم الاستراتيجية Y_1 مما يجعل اللاعب A يخسر 8 بينما اللاعب B يربح 8.

يمكن ملاحظة أنّ الاستراتيجية $(X_2, Y_2) = (4, 4)$ هي فقط التي يكون عندها عائد المباراة يساوي الصفر، في هذه المباراة يمكن للطرفين الاستفادة من خلال التنسيق فيما بينهم.

وأنّ الاتصال المسبق والتعاون أضاف متغيراً جديداً إلى هذا النمط من المباراة كما نلاحظ من خلال مصفوفة المدفوعات التالية:

مباراة رقم (2):

		B	
		Y_1	**Y_2**
A	**X_1**	(0,0)	(2,2)
	X_2	(2,2)	(0,0)

في هذه الحالة ليس هناك سبب لأي طرف اختيار أي استراتيجية إلا إذا كان هناك اتصال مسبق، تسمح هذه الاتصالات المسبقة للأطراف المختلفة من تبني الاستراتيجيات التي تضمن لها عوائد (2, 2) لكليهما، يمكن تحقيق التعاون إما عن طريق الاتصال المسبق وإما عن طريق تكرار تبني الاستراتيجيات المختلفة، والتي تقود في النهاية إلى حالة التعاون والتنسيق.

لكن دون حل للمشكلات المتأصلة في هذا النمط من المباراة كما في مصفوفة المدفوعات التالية:

مباراة رقم (3):

		B	
		Y_1	**Y_2**
A	**X_1**	(8,1)	(3,3)
	X_2	(3,3)	(1,8)

يفضل هنا اللاعب A الاستراتيجية $(X_1, Y_1) = (8, 1)$، ويفضل اللاعب B الاستراتيجية $(X_2, Y_2) = (1, 8)$، اعتماداً على هذه الأفضلية كلا الطرفين يقود إلى تحقيق العائد (3, 3) إذا تمّ لعب المباراة لمرتين، ربما يتفق الطرفان على

استخدام الاستراتيجيات (X_1, Y_1) للمرة الأولى، و(X_2, Y_2) للمرة الثانية، في هذه الحالة يحصل كل من اللاعبين على 9 ، إلا أنه بعد أن تمّ استخدام الاستراتيجية (X_1,Y_1) ما الذي يمنع اللاعب A من نقض الاتفاق مع اللاعب B وذلك باستخدام الاستراتيجية (X_1, Y_2) التي تحقق له عائد مقداره 11 من هذا الخيار.

يقود الاتصال السابق إلى مشكلات أخرى، ولكنها في بعض الجوانب لم تكن مرغوبة، كما في مصفوفة المدفوعات التالية:

مباراة رقم (4):

		B	
		Y_1	**Y_2**
A	**X_1**	(1,8)	(8,1)
	X_2	(0,–8)	(0,–7)

في هذه المباراة يفضل اللاعب A الاستراتيجية (1 ,8) بينما يفضل اللاعب B الاستراتيجية (8 ,1) من دون مناقشات مسبقة، لأنّ اللاعب A ليس لديه أية منفعة لاستخدام X_2 ، حيث إنّ الناتج المتحقق ربما يكون (8 ,1) تبعاً لاستخدام (X_1,Y_1)، ربما يطلب اللاعب A من اللاعب B استخدام Y_2 مستخدماً أسلوب التهديد والضغط باستخدام X_2 إذا لم يوافق اللاعب B على طلبه، يتبين أنّ اللاعب A يحاول بالاتصال المسبق إجبار اللاعب B إلى لعب الاستراتيجية Y_2 لتحقيق العائد (1 ,8).

ومن العوامل التي يمكن أن تأخذ بالاعتبار في هذا النمط من المباراة إمكانية تبادل المنفعة، أو عدم إمكانية تبادل المنفعة بأسلوب الدفع الجانبي إلى الخصم بعد نهاية المباراة كما في مصفوفة المدفوعات التالية:

مباراة رقم (5):

		B	
		Y_1	Y_2
A	X_1	(40,0)	(1,4)
	X_2	(1,0)	(1,4)

إذا كان الدفع الجانبي غير ممكن، فإنّ اللاعب B يجب أن يلعب Y_2 التي تقود إلى عائد (4 ,1)، أما إذا كان الطرفان يمكنهما الاتصال ببعضهما ونقل المنفعة فإنّ اللاعب A قد يعرض المشاركة بالعائد 40 مع اللاعب B بطريقة معينة يتفق عليها الطرفان بشرط أنّ اللاعب B يعود ويستخدم Y_1، يتم ذلك على افتراض أنّ المنفعة يمكن تقسيمها ونقلها، وأنّ معيار المنفعة يمكن مقارنته.

في الحقيقة أنّ مقارنة المنفعة بين الأطراف المتنافسة تقود إلى مجموعة أسئلة منها: هل يهتم أحد الأطراف بما يحصل عليه الطرف الآخر وليس بما يحصل هو عليه؟ أو للتأكد أنّ ما يحصل عليه الطرف الآخر يجب أن يكون أقل ما يمكن؟ هل العوائد السلبية Negative Payoffs دائماً غير مرغوب فيها، وأنّ العوائد الإيجابية Positive Payoffs دائماً مرغوب فيها ؟، في أية مباراة جميع هذه الأسئلة يجب أن تأخذ بالاعتبار.

مباراة رقم (6):

مهما كانت درجة المنافسة بسيطة أو معقدة بين الأطراف، ومهما كانت الاتصالات المسبقة والمناقشات وسياسة الدفع الجانبي فإنّ الدقة غير مضمونة في تحقيق الحل الأمثل، كما في مصفوفة المدفوعات التالية:

		B	
		Y_1	Y_2
A	X_1	(0,0)	(80,30)
	X_2	(30,80)	(40,40)

لكل من الفريقين استراتيجيات مختلطة لانعدام عامل الهيمنة بين استراتيجيات كل لاعب، وعلى افتراض أنّ هذه المباراة تلعب كل صباح ولفترة عدة أشهر، فإنّ هناك سلوكيات تنافسية سوف تظهر للحصول على عائد 80 فإنّ اللاعب A يلعب X_1 الذي يقود اللاعب B إلى الخيارات التالية:

		B	
		Y_1	Y_2
A	X_1	0	30

وإنّ اللاعب B سيضطر إلى اختيار Y_2 ليحصل على 30 بدلاً من 0، اللاعب A سوف يرضى مع هذا الحل ويستمر باستخدام X_1، في هذه الحالة تكون النتائج اليومية كما يلي:

	Strategy	Payoff
A	X_1	80
B	Y_2	30

يدرك اللاعب B أنه في شرك، وليس طويلاً حتى يكتشف أنه له فرصة اللاعب A نفسها، يبدأ اللاعب B في لعب Y_1 في محاولة منه لتحسين العائد، في حالة استخدامه Y_1 فإنّ واحداً من عدة احتمالات يمكن أن يحدث:

أولاً– إذا لم يغير أحد اللاعبين فرصته في الحصول على عائد 80 فإنّ كلاً منهما ربما يستمر في لعب (X_1, Y1)، وفقاً لما يلي:

	Strategy	Payoff
A	X_1	0
B	Y_1	0

ثانياً– بعد فترة طويلة من عدم الحصول على عائد اللاعب B يغير وبسرعة لاستخدام Y_2 ليصبح العائد وفقاً لما يلي:

	Strategy	Payoff
A	X_1	80
B	Y_2	30

ثالثا– ربما يضعف اللاعب A ويلعب X_2 :

	Strategy	Payoff
A	X_2	30
B	Y_1	80

في النهاية أية واحدة من هذه الاستراتيجيات ممكنة، وتعتمد على قوة الخصم وتصميمه وصبره، وبعد أن يبقى كلا اللاعبين يستخدمان (X_1, Y_1) لفترة طويلة وبعائد مقداره 0، يقود ذلك إلى تبني استراتيجيات أخرى ربما أكثر فائدة لكليهما، كأن يتجه الخصمان إلى تبني أسلوب المصالحة أو التسوية، ويتبنيان استخدام (X_2, Y_2)، وقد ينتقلان إلى تبني هذه الاستراتيجية في آن واحد بعد أن نفذ صبرهما وزاد تذمرهما من عدم تحقيق عائد.

قد يفكر أحد الأطراف بالاتصال بالطرف الآخر، على سبيل المثال، اللاعب A ربما ينتقل بشكل مفاجئ من X_1 إلى X_2 إلى أن يدرك اللاعب B هذه الخدعة وينتقل إلى تبني Y_2:

	Strategy	Payoff
A	X_2	40
B	Y_2	40

إنّ طول التأمل والتفكير في الحصول على 80 ثم الحصول على 0، ربما يدفع أحد الطرفين إلى إيجاد صيغة حل تعاوني، يمكن من خلاله تحقيق أعلى عائد

مشترك، وأنّ أحد هذه الحلول التعاونية هو تبني استراتيجية (X_2, Y2) مع عائد 40 لكلا الطرفين.

إنّ أفضل خيار للاعبين هو الانتقال من (X_1, Y_2) إلى (X_2, Y_1):

	Strategy	Payoff	Average
A	X_1, X_2	30.80	55
B	Y_2, Y_1	80.30	55

فالمناوبة بشكل مستمر بين الاستراتيجية الأولى والثانية يعطي لكل لاعب فرصة الحصول على عائد يساوي 55.

1/2/4/13- مباراة بين طرفين متنافسين:

يُفترض في هذا النوع من المباراة أنه ليس هناك اتصال أو تعاون بين الأطراف المتنافسة في المباراة، على سبيل المثال التنافس التسويقي بين الشركات الكبرى. إنّ دراسة هذا النوع من المباراة يقوم على مبدأين: تعظيم مستويات الأمان، والميل نحو الاستراتيجيات المتوازنة.

لتحديد الاستراتيجيات المتوازنة ومستويات الأمان إلى المباراة ذات المجموع غير الصفري يستوجب تجزئة مصفوفة المدفوعات الأصلية إلى مصفوفتين، إحداهما إلى اللاعب A والثانية إلى اللاعب B.

اعتماد قيم المصفوفة A من نوع ($m \times n$) كمصفوفة مدفوعات للاعب A، واعتماد قيم المصفوفة B من نوع ($n \times m$) كمصفوفة مدفوعات للاعب B.

لتحديد مستويات الأمان للاعب A يتم اعتماد نظرية المباراة ذات المجموع الصفري، أما تحديد مستويات الأمان للاعب B فإنه يحتاج إلى بعض التعديلات، حيث إنّ مستوى الأمان يحدد على أساس مقلوب مصفوفة المدفوعات B لتصبح B^{-1} ، وتتم عملية تحويل المصفوفة B إلى B^{-1} عن طريق القلب الداخلي لتصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفاً كما في مصفوفة المدفوعات التالية:

		B	
		Y_1	Y_2
A	X_1	(1,8)	(8,1)
	X_2	(0,–8)	(0,–7)

تتم عملية تجزئة مصفوفة المدفوعات هذه إلى مصفوفتين إحداهما للاعب A والأخرى للاعب B وفقاً لما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ , B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}\ \text{and } B^{-1}= \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

المصفوفة A لها نقطة سرجية مقدارها (1)، أي أنّ مستوى الأمان للاعب A يساوي (1)، وأنّ الاستراتيجيات المثلى للاعب A $(X_1,\ X_2) = (0,\ 1)$.
وأنّ المصفوفة B^{-1} لها نقطة سرجية مقدارها 7– مع استراتيجية مثلى مقدارها $(Y_1,\ Y_2) = (0,\ 1)$، إنّ الاستراتيجيات (x^*, Y^*) ليست في حالة توازن، إذا استخدم اللاعب A الاستراتيجية X_1 فإنّ اللاعب B يزيد من عائده ويلعب Y_1 فقط.

2/2/4/13– مباراة طرفين متعاونين:

يُفترض في هذا النوع من المباريات أنّ طرفي المباراة يمكن أن يجريا اتصالاً ومناقشة مسبقين، ويلتزما بالاتفاقيات، هذه المواقف يمكن أن تواجه على سبيل المثال المفاوضات بين العمال والإدارة على عقود العمل، وبين الدول على أساس الاتفاقيات التجارية، ويمكن لأحد الأطراف أو لكليهما من توسيع تعدد احتمال العوائد الممكنة للمباراة أو زيادتها جراء التعاون والاتصالات المسبقة مع الطرف الآخر، وتوضح مصفوفة المدفوعات التالية هذه الحالة:

		B	
		Y_1	Y_2
A	X_1	(10,1)	(0,0)
	X_2	(0,0)	(1,10)

يحصل اللاعب A على أكبر فائدة من (10, 1)، بينما يحصل اللاعب B على أكبر فائدة من (1, 10)، ويمكن لأحد الأطراف أو كليهما من توسيع أو زيادة تعدد احتمال العوائد الممكنة للمباراة جراء التعاون أو الاتصالات المسبقة مع الطرف الآخر.

إذا اتفق الطرفان على استعمال الاستراتيجيتين (X_1, Y_1) ثم (X_2, Y_2) لنصف الوقت أي باحتمالية تساوي 1/2 لكل زوج، فإنّ القيمة المتوقعة تكون (11/2, 11/2) وإذا أراد كل طرف استخدام الاستراتيجية المختلطة وفق الاحتمالية $X^* = Y^* = 1/2$ فإنّ القيمة المتوقعة تكون (11/4, 11/4)، كما يمكن لأطراف الصراع إمكانية المناقشة والاتصال مقدماً وتوحيد جهودهما، فإنّ السؤال الواجب الإجابة عليه هو ما العوائد المتبادلة لكل منهما التي يجب أن يُتفق عليها ؟، هذا يستوجب أولاً تحديد العوائد الممكنة جراء عملية التعاون.

إذا كانت المباراة من نوع $(m \times n)$ فإنّ العائد هو في النقطة R^2 التي يمكن الحصول عليها من التنسيق باستخدام زوج الاستراتيجيات (X_i , Y_j) عندما يكون $1 \le i \le m$ ، $1 \le j \le n$ ، وإنّ لكل زوج من الاستراتيجيات (X_i , Y_j) هناك عائد (a_{ij}, b_{ij}) عندما تكون a_{ij} هي قيم مصفوفة المدفوعات للاعب A وتكون b_{ij} هي قيم مصفوفة المدفوعات للاعب B على التوالي.

إذا اتفق اللاعبان على استعمال كل زوج (X_i, Y_j) مع احتمالية أو تكرار r_{ij} عندما تكون $0 \le r_{ij} \le 1$ فإنّ القيمة المتوقعة تكون:

Expected Payoff = $\sum r_{ij} (a_{ij}, b_{ij})$

وإنّ مجموعة العوائد الممكنة المعبّر عنها بـ M تكون كما يلي:

$$M = \{\sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} r_{ij} (a_{ij}, b_{ij}), 0 \le r_{ij} \le 1, \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} r_{ij} = 1\}$$

M= منطقة الحلول الممكنة.

a_{ij} = قيم مصفوفة المدفوعات للاعب A.

b_{ij} = قيم مصفوفة المدفوعات للاعب B.

r_{ij} = الاحتمالات.

مجموعة M التي سوف تُدعى مجموعة المدفوعات التعاونية Cooperative Payoff Set هي أصغر محدب يحتوي على جميع القيم من a_{ij}, b_{ij} وتكون حدودها هي أجزاء الخطوط للنقاط المنتهية من هذه المجموعة.

5/13- تدريبات

س1- عرف المباراة، وما هي تصنيفات بيئة القرار ؟.

س2- ما هي شروط استخدام نظرية المباراة ؟.

س3- ماذا تعني الاستراتيجية الصافية، والاستراتيجية المختلطة، والنقطة السرجية ؟.

س4- اشرح مفهوم الهيمنة موضحاً ذلك بمثال عددي.

س5- احسب قيمة المباراة التالية:

	B	
A	**B1**	**B2**
A1	4	-3
A2	**7**	11

س6- أرادت دولتان تجديد الاتفاق التجاري بينهما، الطرف الأول يتبنى مزيجاً من الاستراتيجيات (رفع الأسعار، وزيادة المساعدات)، والطرف الثاني يتبنى استراتيجيات (زيادة الطلب، وزيادة التمويل بالآجل)، وكان جدول المدفوعات لهذه المباراة كما يلي:

	B	
A	**B1**	**B2**
A1	8	2
A2	-3	4

المطلوب: إيجاد قيمة المباراة.

س7- وضح مفهوم الهيمنة لهذه المباراة، ثم احسب قيمة المباراة.

A	B		
	B1	**B2**	**B3**
A1	12	10	8
A2	7	6	6
A3	5	9	4

س8- ما الطرف الذي يتمتع بالمركز الأفضل في المباراة التالية:

A	B	
	B1	**B2**
A1	(0, 10)	(–2, 2)
A2	(2, –2)	(10, 0)

س9- كانت مفاوضات إحدى الدول المصدرة للبترول مع إحدى الشركات العالمية تدور حول تحديد الأسعار للفترة المستقبلية، وكانت مصفوفة المدفوعات المعبّرة عن هذه المفاوضات كما يلي:

A	B	
	B1	**B2**
A1	(3, 5)	(–6, –2)
A2	(1, –2)	(5, 3)

1- ما الطرف الذي يتمتع بالمركز الأفضل ؟.

2- احسب مستوى الأمان.

س10- مصفوفة المدفوعات التالية تمثل طبيعة المفاوضات بين دولتين لتحديد أسعار الحديد، ما مجموعات التفاوض المناسبة لهذه المباراة ؟.

A	B	
	B1	**B2**
A1	(1, 1)	(9, –9)
A2	(–9, 9)	(4, 4)

الفصل الرابع عشر

نماذج المحاكاة

1/14- تعريف المحاكاة

2/14- خطوات تطبيق أسلوب المحاكاة أو نموذجها

3/14- مجالات تطبيق المحاكاة

4/14- مزايا المحاكاة وعيوبها

5/14- المحاكاة باستخدام أسلوب (مونت كارلو)

6/14- استخدام المحاكاة في حل مشكلات نظرية صفوف الانتظار

7/14- استخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون

8/14- تدريبات

1/14- تعريف المحاكاة:

تعرف المحاكاة بأنها محاولة لتطبيق خصائص النظم المختلفة ومظاهرها في شكل نماذج تقترب بشدة من الواقع، وتعطي تصوراً دقيقاً للواقع ومشكلاته، ومن ثم يمكن تصميم ودراسة ووضع حلول للمشكلات المرتبطة بالنظم في الواقع العملي.[1]

وفي تعريف آخر: المحاكاة هي عملية بناء، واختبار، وتشغيل نماذج تحاكي ظواهر أو أنظمة معقدة باستخدام نماذج رياضية محددة، لذلك فإنّ المحاكاة تعدّ الفرع التجريبي لبحوث العمليات، ولقد أصبحت من أقوى الأساليب في معالجة المشكلات الإدارية، وخاصة بعد تطور الحواسيب وتزايد سرعة المعالجة فيها وتوسع قدرات التخزين في ذواكرها.[2]

ويمكن القول إنّ المحاكاة أصبحت الأداة العصرية لحل الكثير من المسائل المعقدة، ويتطلب وضع نموذج لمحاكاة ظاهرة أو نظام ما أن يتم وضع فرضيات دقيقة لعمل النظام، وصياغتها بواسطة تعابير رياضية أو منطقية تربط عناصر ومكونات النظام ببعضها البعض، وتحديد الأهداف التي يرغب في تحقيقها وصياغتها على شكل مؤشرات كمية أو نوعية، ثم يتم السماح لنموذج المحاكاة للعمل وفق هذه الفرضيات لفترة من الزمن، وبعدها يتم قياس المؤشرات المستخرجة ومقارنتها مع الأهداف المطلوبة لإجراء التعديلات اللازمة عليها إذا اقتضى الأمر.

ويمكن تمثيل الشكل العام لنموذج المحاكاة على الشكل التالي:

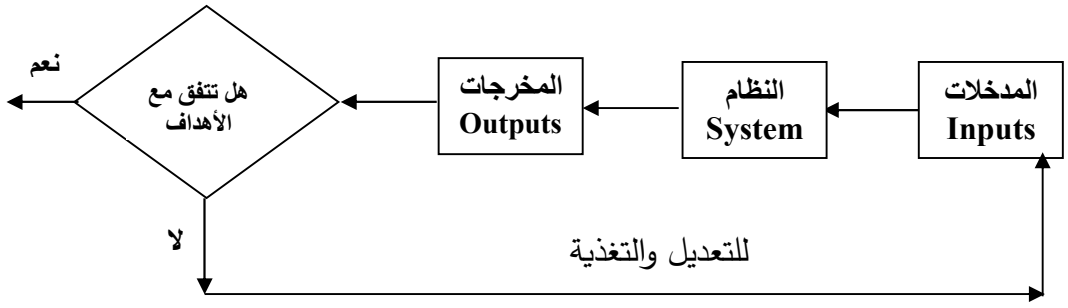
---

[1]- د. جلال إبراهيم العبد، **مرجع سيق ذكره**، ص455.

[2]- د. إبراهيم محمد العلي، **مرجع سبق ذكره**، ص 573.

الشكل رقم (1-14)

نموذج المحاكاة



2/14- خطوات تطبيق أسلوب المحاكاة أو نموذجها:

لكي يمكن استخدام أسلوب المحاكاة يجب اتباع الخطوات التالية:[1]

1- تعريف المشكلة وتحديدها.

2- تحديد المتغيرات الهامة المرتبطة بالمشكلة.

3- القيام ببناء نموذج كمي أو رياضي.

4- تحديد القيم المختلفة للاختبار.

5- القيام بتجربة النموذج واختباره.

6- استخدام النتائج في تعديل النموذج.

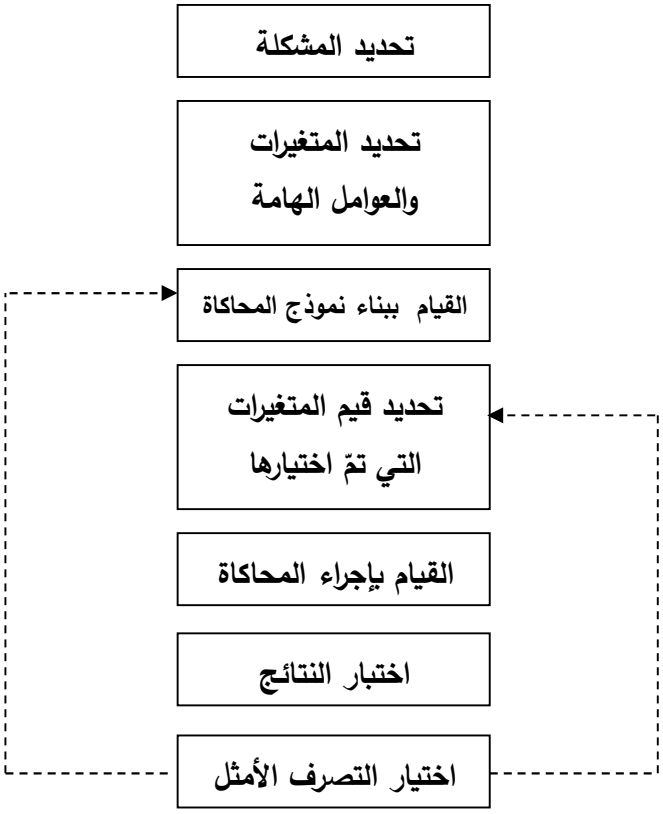
7- تحديد أفضل التصرفات الممكن الاعتماد عليها واستخداماتها.

ويحدد الشكل التالي خطوات أسلوب المحاكاة.

1 - Wan- Kai Pany, and et. al., (2004), A Simulation Based Approach to the Parameter Estimation For the Three Parameter Gamma Distribution, **European Journal of Operational Research**, No.155, pp.675-682.

الشكل رقم (2- 14)

خطوات عملية المحاكاة



3/14- مجالات تطبيق المحاكاة:

يستخدم أسلوب المحاكاة في تحليل نوعين مميزين من المشكلات هما:[1]

1- المشكلات النظرية في مجالات العلوم الرئيسة مثل الرياضيات، والطبيعة، والكيمياء.

2- مشكلات عملية في كل نواحي الحياة، مثل:

---

[1]- حمدي طه، **مرجع سبق ذكره**، ص 860.

أ- محاكاة المشكلات الصناعية (مثل تصميم العمليات الكيميائية، وجدولة الصيانة، وجدولة أعمال الورش، وتصميم نظم التوزيع، تصميم نظم الانتظار، وتصميم نظم الاتصال).

ب- محاكاة مشكلات الأعمال والاقتصاد (مثل عمليات الشركة ككل، وسلوك المستهلك، وتقييم المشروعات الاستثمارية، وتحديد الأسعار، وعمليات السوق، ودراسة الاقتصاد القومي في ظل مشكلات الكساد والتضخم، ووضع خطط ميزان المدفوعات وسياساتها في اقتصاديات الدول النامية، والتنبؤ الاقتصادي.

ج- المشكلات السلوكية والاجتماعية (مثل حركة السكان، وسلوك الفرد والجماعة).

د- محاكاة النظم الطبيعية الحيوية (مثل توازن السوائل، والتوزيع العصبي في جسم الإنسان، ووضع نموذج للمخ البشري، وتكاثر خلايا الدم).

هـ- محاكاة استراتيجيات وتكتيكات الحرب.

ويُعدّ الأسلوب المستخدم في حل المشكلات النظرية لفترة طويلة من طريقة مونت كارلو Monte Carlo Method، وهو يعتمد على الفكرة العامة لاستخدام المعاينة الإحصائية لتقدير النتيجة المطلوبة، وتتطلب عملية المعاينة الإحصائية وصف المشكلة تحت الفحص باستخدام التوزيع الإحصائي المناسب للمجتمع الذي سحبت منه العينة.

وقد بدأ الاندفاع المتزايد نحو استخدام طريقة مونت كارلو في حل المشكلات النظرية في الفتور في أواخر الستينات من القرن الماضي، ومنذ ذلك الحين زاد الاتجاه نحو تحليل المشكلات العملية المعقدة باستخدام المحاكاة، وتقوم المحاكاة مثل طريقة مونت كارلو على تقدير مخرجات النظام من خلال المعاينة الإحصائية، وقد ظهرت العديد من الأفكار التي استخدمت في تطبيق المحاكاة مثل استخدام الأرقام العشوائية للحصول على عينات من التوزيع الاحتمالي بالإضافة إلى ظهور أساليب لتخفيض حجم العينة المطلوبة لتقدير النتيجة المطلوبة.

ويرجع النجاح الحالي لأسلوب المحاكاة في وضع نماذج للنظم المعقدة إلى التقدم الكبير في قدرات الحاسوب الرقمي وقوته، فلا يمكن تصور إمكانية أن يصل أسلوب المحاكاة إلى هذا المستوى من النجاح من دون الحاسوب الرقمي، لسبب بسيط، وهو أنّ المحاكاة تتطلب عمليات حسابية تحتاج إلى وقت طويل جداً على الرغم من بساطتها.

4/14- مزايا المحاكاة وعيوبها:

المحاكاة تُعدّ أداة تلقى قبولاً من المديرين في المنظمات المختلفة للعديد من الأسباب من أهمها:[1]

1- المحاكاة أسلوب يتصف بأنه مباشر ومرن.
2- تستخدم المحاكاة لتحليل كثير من الحالات المعقدة في الواقع العملي، التي يصعب حلها باستخدام النماذج الرياضية.
3- يمكن من خلال المحاكاة استخدام أية توزيعات احتمالية يمكن للمستخدم تحديدها، وليس من الضروري الاقتصار على توزيعات محددة.
4- اختصار الوقت، فمن خلال الحاسبات الآلية يمكن إجراء المحاكاة، واختصار الوقت بشكل كبير.
5- تسمح المحاكاة بإثارة التساؤلات من النوع ماذا يحدث لو ؟ مما يساعد المدير في الاختيارات الأكثر جاذبية وقبولاً.
6- تسمح المحاكاة بتحديد ودراسة الآثار المتبادلة للمكونات أو المتغيرات، ودراستها بالشكل الذي يسمح بتحديد أكثرها أهمية للنظام.

وعلى الرغم من المزايا السابقة، وقبول المحاكاة كأداة لدراسة المشكلات وتطوير حلول متقدمة لها، **فإنها لا تخلو من جوانب قصور عديدة أهمها:**

1- د. جلال إبراهيم العبد، **مرجع سبق ذكره**، ص 458.

1- تتطلب نماذج المحاكاة الجيدة تكاليف مرتفعة، وقد تستغرق سنوات لتصميمها وبنائها.
2- لا تقدم المحاكاة حلولاً مثلى للمشكلات مثل أسلوب البرمجة الخطية مثلاً، إذ إنها أسلوب يقوم على التجربة والخطأ، ومن ثم يتولد لدعم المحاكاة حلول عدة مع كل محاولة.
3- نماذج المحاكاة لا تولد حلولاً من ذاتها، بل على المدير أن يحدد الظروف والقيود التي يرغب في اختبارها.
4- يمثل كل نموذج للمحاكاة أسلوباً منفرداً، ومن ثم لا يمكن تحويل الحلول والاستدلالات من نموذج تصميم لمشكلة معينة إلى مشكلة أخرى، أي لا يمكن تعميم نتائج المحاكاة.

5/14- المحاكاة باستخدام أسلوب (مونت كارلو):

يستخدم أسلوب مونت كارلو عندما يتضمن النظام عناصر واضحة لها فرصة للتأثير في سلوك النظام، وهذا يشير في الواقع إلى أسلوب مونت كارلو، وهو أسلوب احتمالي يقوم على تجربة الفرص المحتملة من خلال معاينة عشوائية، ويمكن تقسيم أسلوب مونت كارلو إلى خمس خطوات أساس:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغيرات الهامة في النظام.
2- تحديد التوزيع الاحتمالي لكل متغير.
3- تحديد مدى من الأرقام العشوائية لكل متغير.
4- توليد الأرقام العشوائية.
5- القيام بالمحاكاة لسلسلة من المحاولات.

وسوف نتناول الخطوات السابقة بشيء من التفصيل:

أولاً- تحديد التوزيع الاحتمالي: تقوم الفكرة الأساس لأسلوب مونت كارلو على توليد قيم لمتغيرات النموذج التي سيتم دراستها، ويوجد العديد من المتغيرات التي تأخذ الصفة الاحتمالية في الواقع العملي، مثل:

- الطلب اليومي أو الأسبوعي من المخزون.
- الزمن المنقضي بين الأعطال التي تتعرض لها آلة معينة.
- أوقات أداء الخدمة.
- الأوقات اللازمة لإنجاز أنشطة مشروع معين.
- عدد العمال الذين يتغيبون عن العمل في كل يوم.

والأسلوب الأمثل لتحديد التوزيع الاحتمالي لمتغير معين، يتمثل في اختبار سلسلة القيم التاريخية لهذا المتغير، حيث يتم تحديد الاحتمال أو التكرار النسبي، وذلك بقسمة عدد التكرارات أو الملاحظات على إجمالي عدد المشاهدات أو التكرارات.

والآن دعنا نوضح فكرة المحاكاة من خلال مثال بسيط للتنبؤ بالطلب لإحدى الشركات.

مثال (1):

ظهرت بيانات الطلب الفعلي خلال الأيام العشرة الماضية لإحدى شركات المنسوجات القطنية، وفقاً لما يوضحه الجدول التالي رقم (1-14).

الجدول رقم (1-14)

بيانات الطلب الفعلي لإحدى شركات المنسوجات

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الطلب	3	3	4	4	5	5	2	3	5	5

من خلال البيانات السابقة يمكن القول إنّ الطلب المتوقع يعادل:

$$\frac{3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 2 + 3 + 5 + 5}{10} = 3.9 \text{ وحدة}$$

ويمكن استخدام أسلوب المحاكاة في شكله البسيط للتنبؤ بحجم الطلب المتوقع أيضاً، وذلك بتحديد مجموعة الأرقام العشوائية، ويتم اختيار 10 أرقام عشوائية من جداول الأرقام العشوائية، ثم يتم بعد ذلك تحويلها إلى احتمالات أو

أوزان نسبية، حيث يتم استخدامها في تحديد الطلب المتوقع، ويلاحظ أنه يجب استخدام عدد كبير من المحاولات لتقدير الطلب المتوقع، حيث إنه كلما زاد عدد المحاولات زادت دقة النتائج التي نتوصل إليها، ولنقم الآن بتوضيح كيفية إجراء عمليات محاكاة بسيطة للتنبؤ بحجم الطلب المتوقع في المثال السابق.

المحاولة الأولى:

الجدول رقم (2-14)

المحاولة الأولى لتوليد الأرقام العشوائية

الأيام	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	86	0.185	0.555
2	3	76	0.163	0.489
3	4	20	0.044	0.176
4	4	6	0.013	0.052
5	5	42	0.091	0.455
6	5	50	0.107	0.535
7	2	31	0.067	0.134
8	3	77	0.168	0.504
9	5	33	0.073	0.365
10	5	41	0.089	0.445
		462	1	3.71

المحاولة الثانية:

الجدول رقم (3- 14)

المحاولة الثانية لتوليد الأرقام العشوائية

الأيام	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	81	0.136	0.408
2	3	57	0.096	0.288
3	4	19	0.033	0.132
4	4	91	0.152	0.608

0.75	0.150	90	5	5
0.335	0.067	40	5	6
0.02	0.01	7	2	7
0.384	0.128	77	3	8
0.615	0.123	74	5	9
0.525	0.105	62	5	10
4.065	1	598		

المحاولة الثالثة:

الجدول رقم (4-14)

المحاولة الثالثة لتوليد الأرقام العشوائية

الأيام	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	14	0.027	0.081
2	3	86	0.166	0.498
3	4	88	0.169	0.676
4	4	30	0.058	0.232
5	5	50	0.097	0.485
6	5	32	0.062	0.310
7	2	83	0.161	0.322
8	3	50	0.097	0.291
9	5	72	0.139	0.695
10	5	12	0.024	0.120
		517	1	3.71

من خلال المحاولات الثلاثة السابقة، فإنّ متوسط الطلب المتوقع يبلغ:

$$3.83 = \frac{3.71 + 4.065 + 3.71}{3}$$

ولا شك أنّ هذا الرقم يقترب من متوسط الطلب البالغ 3.9 وحدة، وأنه أيضاً مع زيادة عدد المحاولات للمحاكاة ستؤدي على دقة أعلى في رقم الطلب المتوقع.

مثال (2):

يوضح الجدول التالي رقم (5-14) الطلب اليومي على إطارات السيارات لإحدى الشركات خلال (200) يوم ماضية، ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد احتمالات حدوث كل مستوى من مستويات الطلب، والاحتمالات المتجمعة كما يوضحه الجدول التالي:

الجدول رقم (5-14)

الطلب على الإطارات لإحدى الشركات خلال 200 يوم

الطلب على الإطارات	تكرار الطلب	احتمالات الحدوث	الاحتمال المتجمع
0	10	10 ÷ 200 = 0.05	0.05
1	20	20 ÷ 200 = 0.10	0.15
2	40	40 ÷ 200 = 0.20	0.035
3	60	60 ÷ 200 = 0.30	0.65
4	40	40 ÷ 200 = 0.20	0.85
5	30	30 ÷ 200 = 0.15	1.00
	200 يوم	1	

تحديد التوزيع الاحتمالي لكل متغير:

يتم تحديد الاحتمال المتجمع كما يوضحه الجدول السابق، عن طريق إضافة الاحتمالات الحالية للاحتمالات السابقة باستمرار.

تحديد مدى للأرقام العشوائية:

بمجرد تحديد الاحتمالات المتجمعة لكل متغير، فإنه يجب تخصيص مجموعة من الأرقام لتمثل كل قيمة من القيم الممكنة للمتغير، والتي يشار إليها بالمدى من الأرقام العشوائية.

ولتوضيح فكرة تحديد مدى من الأرقام العشوائية، دعنا نفترض أنّ هناك فرصة 5% لأن يكون الطلب صفراً في عدد ما من الأيام، كما يوضح الجدول السابق، فمعنى ذلك أننا نرغب في تحديد 5% من الأرقام العشوائية المتاحة لتكون

مناظرة لطلب مقداره صفراً، فإذا ما كان مجموع 100 رقم مكون من عددين هو المستخدم في توليد الأرقام العشوائية، فإنه يمكن اختيار أول خمسة أرقام عشوائية لتناظر احتمال أن يبلغ الطلب صفراً في أحد الأيام،....، وهكذا ويشير الجدول (6-14) المدى بين الأرقام العشوائية المناظرة لكل مستوى من الاحتمالات المتجمعة.

الجدول رقم (6-14)

المدى بين الأرقام العشوائية المناظرة للاحتمالات المتجمعة

الطلب اليومي	الاحتمال	الاحتمال المتجمع	المدى من الأرقام العشوائية
0	0.05	0.05	1 إلى 5
1	0.10	0.15	6 إلى 15
2	0.20	0.35	16 إلى 35
3	0.30	0.65	36 إلى 65
4	0.20	0.85	66 إلى 85
5	0.15	1.00	86 إلى 100

توليد الأرقام العشوائية:

الأرقام العشوائية هي جميع الأرقام يتم سحبها من الأرقام الأساس وهي من صفر حتى 9، وبحيث يكون هناك فرصة متساوية لكل منها، وعادة ما يتم الاستعانة ببرامج الحاسب الآلي لتوليد هذه الأرقام خاصة إذا كنا في حاجة لتوليد حجم كبير من الأرقام العشوائية.[1]

1 - Faizul Huq, and et al., (2004),A Simulation Analysis of Factor Influencing the Flow Time and Through- Put Performance of Functional and Cellular Layouts, **International Journal of Production Economics**, Vol.83, Issue.2, p.116.

محاكاة التجربة:

يمكن القيام بمحاكاة نواتج التجربة عن طريق أرقام عشوائية من جداول الأرقام العشوائية[1]، وذلك بالبدء من أي موقع في جدول الأرقام العشوائية، فمثلاً إذا كان الرقم العشوائي الذي تمّ اختياره هو 81، وكان المدى بالنسبة للطلب اليومي على أربعة إطارات هو 65 إلى 85، فمعنى ذلك أننا سوف نختار أو نتوقع أنّ الطلب اليومي على الإطارات هو أربعة إطارات.

لنفرض أننا نرغب في محاكاة الطلب عدة أيام لشركة إطارات السيارات، وقد قمنا باختيار الأرقام العشوائية من الجدول رقم (6–14) حيث بدأنا اختيار الأرقام العشوائية في هذه الحالة.

يلاحظ ظهور الطلب المتوقع خلال عشرة الأيام السابقة كما يوضحه الجدول (7–14)، ويلاحظ أنّ الطلب اليومي على إطارات السيارات باستخدام المحاكاة هو 39 ÷ 10 = 3.9 إطاراً.

1 - B. Render, and R. M. Stair, (2000), "**Quantitative Analysis For Management**", Seven Edition, USA: Prentice- Hall, Inc, P. 489.

الجدول رقم (7-14)

الطلب المتوقع خلال عشرة أيام لاحقة

عدد الأيام	محاكاة الطلب اليومي	ملاحظات
1	3	
2	3	الرقم العشوائي هو 52 يقع في المدى من 36 إلى 65 والذي يناظر مبيعات تبلغ 3 وحدات.
3	4	
4	4	
5	5	
6	5	الرقم العشوائي هو 98 يقع في المدى من 86 إلى 100 والذي يناظر 5 وحدات.
7	2	
8	3	
9	5	
10	5	
المجموع	**39**	

ومن المهم أن نلاحظ أنّ متوسط الطلب اليومي باستخدام المحاكاة لعشرة أيام يختلف عن الطلب اليومي المتوقع، الذي يمكن حسابه كما يلي:

الطلب اليومي المتوقع

= 0.05 × صفر = صفر

+ 0.10 × 1 = 0.1

+ 0.20 × 2 = 0.4

+ 0.30 × 3 = 0.9

+ 0.20 × 4 = 0.8

+ 0.15 × 5 = 0.75

= 2.95

ومن ثم فإذا قمنا بإجراء المحاكاة لمئات (أو آلاف) المرات فإنّ متوسط الطلب باستخدام المحاكاة سوف يقترب كثيراً من الطلب اليومي المتوقع.

ويوضح الجدول رقم (8–14) محاولات لمحاكاة الطلب، حيث أظهرت النتائج انخفاض متوسط الطلب 3.9 وحدة (باستخدام محاولة محاكاة واحدة) إلى 2.8 (باستخدام 7 محاولات للمحاكاة)، وهو ما يشير إلى إجراء المحاكاة لعدد كبير من المحاولات يضمن إلى رقم قريب للطلب المتوقع.[1]

1 - Fatemi Ghomi and B. Ashjari, (2002), A Simulation Model For Multi- Project Resource Allocation, **International Journal of Project Management**, Vol.20, Issue.2, pp.127-130.

الجدول رقم (8-14)

محاولات لمحاكاة الطلب

الأيام	المحاولة (1)		المحاولة (2)		المحاولة (3)		المحاولة (4)		المحاولة (5)		المحاولة (6)		المحاولة (7)	
	الرقم العشوائي	**الطلب**	**الرقم العشوائي**	**الطلب**	**الرقم العشوائي**	**الطلب**	**الرقم العشوائي**	**الطلب**	**الرقم العشوائي**	**الطلب**	**الرقم العشوائي**	**الطلب**	**الرقم العشوائي**	**الطلب**
1	92	5	12	1	1	0	2	0	0	0	44	3	85	4
2	91	5	80	4	27	2	5	3	11	1	37	3	61	3
3	59	3	2	0	1	0	90	5	10	1	50	3	90	5
4	11	1	36	3	97	5	78	4	58	3	17	2	60	3
5	54	3	95	5	89	5	20	2	59	3	67	4	57	3
6	72	1	86	5	23	2	22	2	70	4	38	3	47	3
7	87	5	42	3	23	2	77	4	81	4	24	2	40	3
8	15	1	40	3	67	4	23	2	3	0	39	3	14	1
9	24	2	20	2	12	1	32	2	66	4	17	2	23	2
10	87	5	62	3	81	4	95	5	19	2	9	1	10	1
المجموع		31		29		25		29		22		26		28
المتوسط		3.1		2.9		2.5		2.9		2.2		2.6		2.8

وقد تمّ إجراء المحاكاة باستخدام الحاسب الآلي للمشكلة السابقة، حيث تمّ إجراء 300 محاولة[1]، توصلنا بعدها إلى الطلب المتوقع.

ويوضح الشكل رقم (3-14) مخرجات الحاسب الآلي، والتي توضح أنّ الطلب المتوقع بعد 300 محاولة بلغ 2.99 وحدة.

الشكل رقم (3-14)

المحاكاة باستخدام الحاسب الآلي

Program: Simulation
****** Input Data Simulation******
Monte Carlo Simulation

Category Distribution

Value	Probability
0.00	0.05
1.00	0.10
2.00	0.20
3.00	0.30
4.00	0.20
5.00	0.15

Number of Simulation Runs: 300
****** Program Output ******
Average Value After 300 Runs : 2.99

*- لم يستغرق إجراء المحاكاة على الحاسب الآلي بضع ثوان باستخدام برنامج Manager.

[1]- لم يستغرق ذلك على الحاسب الآلي بضع ثوان، وقد تمّ استخدام برنامج Manager لهذا الغرض.

6/14- استخدام المحاكاة في حل مشكلات نظرية صفوف الانتظار:

تمثل صفوف الانتظار أحد مجالات إدارة العمليات التي يمكن استخدام أسلوب المحاكاة في حل مشكلاتها وتطبيقاتها، بل وقد تعتبر المحاكاة الأسلوب الوحيد الذي يمكن من خلاله تحليل صفوف الانتظار في الواقع العملي بعيداً عن القيود التي تتطلبها النماذج الرياضية لصفوف الانتظار، ولتوضيح كيفية استخدام المحاكاة في حل مشكلات صفوف الانتظار سوف نتناول المثال التالي:

مثال: يستقبل أحد الفنادق الذي يقع على ضفاف النيل في محافظة أسوان المصرية زواره ليلاً من القادمين عبر النيل من محافظات أخرى لقضاء سهرات ليلية صيفية، وقد قدر مدير التسويق في الفندق عدد الزوار القادمين واحتمالات ذلك لكل ليلة من ليالي شهر تموز، كما يوضحه الجدول التالي:

الجدول رقم (9-14)

عدد المراكب والاحتمالات المقابلة لهم

عدد المراكب	الاحتمال	الاحتمال المتجمع	مدى الأرقام العشوائية
0	0.13	0.13	من 1 إلى 13
1	0.17	0.30	من 14 إلى 30
2	0.15	0.45	من 31 إلى 45
3	0. 25	0.70	من 46 إلى 70
4	0.20	0.90	من 71 إلى 90
5	0.10	1	من 91 إلى 100
	1		

وتشير طبيعة العمل أنّ عدد مراكب الرحلات غير كاملة العدد تختلف من يوم لآخر، وبالتالي سوف ينتظر المركب غير كامل العدد في يوم معين إلى اليوم التالي لكي يكتمل عدد النزلاء، وقد أمكن تحديد احتمالات عدم اكتمال مراكب الرحلات كما يوضح ذلك الجدول التالي:

الجدول رقم (10-14)

احتمالات عدم اكتمال مراكب الرحلات

عدد المراكب غير المكتملة العدد	الاحتمال	الاحتمال المتجمع	مدى الأرقام العشوائية
1	0.05	0.05	من 1 إلى 5
2	0.15	0.20	من 6 إلى 20
3	0. 50	0.70	من 21 إلى 70
4	0.20	0.90	من 71 إلى 90
5	0.10	1	من 91 إلى 100
	1		

وقد قرر مدير التسويق قبل أن تغادر مراكب الرحلات مرسى الأقصر متجهة إلى أسوان بإجراء محاكاة للمسافة يوم القادمة، واقتصر في المرحلة الأولى من التحليل على الخمسة عشر يوماً القادمة، وقد تمّ تحديد الأرقام العشوائية من جدول الأرقام العشوائية، حيث أمكن تحديد معدلات الوصول اليومية، ومن ثم معدلات عدم التحميل الكامل، كما يوضح ذلك الجدول رقم (11-14).

الجدول رقم (11-14)

عدد التأخيرات اليومية والمراكب غير المكتملة

اليوم	عدد المراكب في اليوم السابق	الأرقام العشوائية	عدد المراكب	مجموع المراكب	الأرقام العشوائية	عدد المركب غير المكتملة
1	-	52	3	3	37	3
2	0	6	0	0	63	صفر
3	0	50	3	3	28	3
4	0	88	4	4	2	1
5	3	53	3	6	74	4
6	2	30	1	3	35	3
7	0	10	0	0	24	صفر
8	0	47	3	3	3	1
9	2	99	5	7	29	3
10	4	37	2	6	60	3
11	3	66	3	6	74	4
12	2	91	5	7	85	4
13	3	35	2	5	90	4
14	1	32	2	3	70	3
15	0	95	5	5	59	3
المجموع	20		41			39

من خلال بيانات الجدول السابق فإنّ مدير التسويق والمراقبين لحركة المراكب والركاب سوف يهتمون بالمعلومات التالية:

1- متوسط عدد المراكب المتأخرة لليوم التالي= 20 تأخير / 15 يوم

= 1.33 مركب تتأخر لكل يوم.

2- متوسط عدد المركب التي تصل في اليوم = 41 مركب وصول / 15 يوم

= 2.73 مركب يصل كل ليلة.

3- متوسط عدد المراكب غير مكتملة العدد لكل يوم = 39 مركب غير مكتمل / 15 يوم

= 2.6 مركب كل يوم.

ولا شك في أنّ تحليل النتائج السابقة يساعد في تحديد القرارات المناسبة فيما يتعلق بتكاليف التأخير، وتكاليف استئجار مراكب إضافية في بعض الأيام.

7/7- استخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون:

تفترض نماذج المخزون في ظل ظروف التأكد، أنّ كلاً من الطلب على المنتج، والوقت اللازم لإعادة الطلب محدد وثابت، على الرغم من أنّ الواقع العملي يشير إلى غير ذلك، ومن ثم يصبح تحليل المحاكاة لمثل هذا الموقف هاماً للغاية، وفي هذا الجزء سنعرض إحدى مشكلات المخزون في أحد مخازن التجزئة، حيث يرغب المدير في تحديد حجم الطلبية ونقطة إعادة الطلب لأحد المنتجات، الذي يتصف الطلب اليومي عليه بأنه غير مؤكد، ويرغب مدير المخازن في إجراء عدد من محاولات المحاكاة لكل من حجم الطلبية ونقطة إعادة الطلب، وذلك بهدف تدنية التكلفة الكلية للمخزون لهذا المنتج، ولقد استطاع مدير المخازن من خلال متابعة المبيعات من المنتج خلال 300 يوم أن يتعرف على نمط المبيعات كما يظهر ذلك الجدول رقم (12-14)، كذلك استطاع مدير المخازن تحويل التكرارات إلى احتمالات كما يوضح الجدول نفسه.

الجدول رقم (12-14)

الطلب على المنتج والتكرارات

الطلب على المنتج	التكرارات	الاحتمال	الاحتمالات المجمعة	مدى الأرقام العشوائية
0	15	0.05	0.05	من 1 إلى 5
1	30	0.10	0.15	من 6 إلى 15
2	60	0.20	0.35	من 16 إلى 35
3	120	0.40	0.75	من 36 إلى 75
4	45	0.15	0.90	من 76 إلى 90
5	30	0.10	1	من 91 إلى 100
	300	**1**		

يشير الواقع أيضاً إلى أنّ طلبات كميات أخرى من المنتج تحتاج بين يوم واحد وثلاثة أيام لكي تصل إلى المخازن، ويوضح الجدول رقم (13-14) الاحتمالات والمدى من الأرقام العشوائية لإعادة الطلب والأزمنة اللازمة لذلك.

الجدول رقم (13-14)

الاحتمالات والمدى من الأرقام العشوائية لإعادة الطلب

الطلب على المنتج	التكرارات	الاحتمال	الاحتمالات المجمعة	مدى الأرقام العشوائية
1	10	0.20	0.20	من 1 إلى 20
2	25	0.50	0.70	من 21 إلى 70
3	15	0.30	1	من 71 إلى 100
	50 أمر	**1**		

والآن إذا ما رغب مدير المخازن في محاكاة حجم طلبية يقدر ب 10 وحدات، وبنقطة إعادة طلب تبلغ 5 وحدات، فمعنى ذلك أنه إذا بلغ حجم المخزون من المنتج في يوم ما 5 وحدات أو أقل، فإنّ المدير سيطلب من المورد طلبية جديدة قدرها 10 وحدات، فإذا كان الوقت اللازم لوصول الطلبية يبلغ يوماً واحداً، فمعنى ذلك أنّ الطلبية الجديدة لن تصل صبح اليوم التالي، بل ستصل الطلبية في صباح بعد اليوم التالي،....، وهكذا.

ويوضح الشكل (4-14) المنطق من وراء عملية المحاكاة من خلال خريطة التدفق Flow Chart التي تفيد عند تصميم برنامج على الحاسب لهذه المشكلة. والتي تشير إلى أنّ عملية محاكاة رصيد المخزون وحجم الطلبية ونقطة إعادة الطلب يمكن أن تمر بالخطوات التالية:

1- ابدأ المحاكاة كل يوم بالتأكد من أنّ الكمية المطلوبة قد وصلت بالفعل، فإذا كان صحيحاً، فأضف الكمية المطلوبة إلى رصيد المخزون (افترض أنها 10 وحدات في مثالنا الحالي).

2- قم بتحديد الطلب اليومي وذلك باختيار رقم عشوائي.

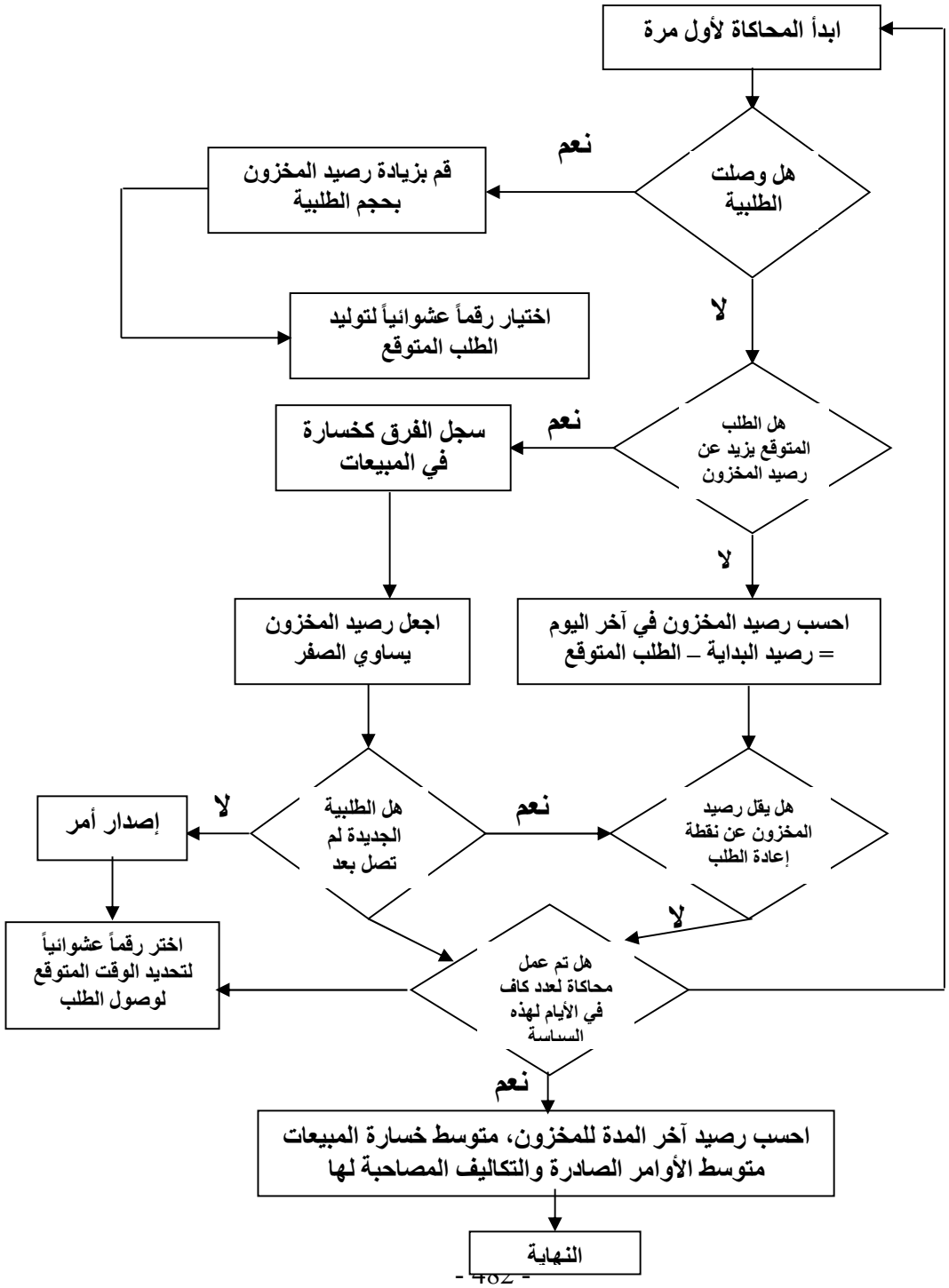
3- احسب مخزون آخر الفترة (آخر اليوم) الذي يعادل رصيد المخزون في البداية (بداية اليوم) – الطلب اليومي، فإذا كان المخزون المتاح غير كافٍ لمواجهة الطلب، فحاول مقابلة الطلب قدر الإمكان، ثم احسب مقدار المبيعات الضائعة أو المفقودة نتيجة عدم كفاية الرصيد.

4- حدد الوقت الذي يصل فيه مستوى المخزون إلى نقطة إعادة الطلب (5 وحدات في مثالنا الحالي)، فإذا ما كان رصيد المخزون قد وصل إلى نقطة إعادة الطلب أو أقل منها فقم بإصدار أمر بطلبية جديدة، ثم قم بمحاكاة الوقت اللازم لوصول الطلبية الجديدة وذلك باختيار رقم عشوائي.

ويشير تطبيق الخطوات السابقة إلى النتائج الواردة بالجدول رقم (14-14).

الشكل رقم (4-14)

خريطة التدفق لمحاكاة المخزون من أحد المنتجات



الجدول رقم (14-14)

المحاولة الأولى للمحاكاة لحجم طلبية يبلغ 10 وحدات

ونقطة إعادة طلب تبلغ 5 وحدات

الأيام	الوحدات التي تم استلامها	رصيد المخزون في البداية	الأرقام العشوائية	الطلب	مخزون آخر المدة	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرقم العشوائي	الوقت اللازم لوصول الطلبية
1	-	10	6	1	9	0	لا		
2	0	9	63	3	6	0	لا		
3	0	6	57	3	3	0	نعم	2	1
4	0	3	94	5	0	2	نعم	33	2
5	10	0	52	3	7	0	لا		
6	0	7	69	3	4	0	نعم	4	1
7	10	4	32	2	12	0	لا		
8	10	12	30	2	20	0	لا		
9	0	20	48	3	17	0	لا		
10	0	17	88	4	13	0	لا		
					91	**2**			

يوضح الجدول السابق بعض النتائج الهامة لمتخذي القرار:

متوسط رصيد آخر المدة من المخزون = $\frac{\text{91 وحدة}}{10}$ = 9.1 وحدة / يوم.

2 وحدة مفقودة

متوسط المبيعات المفقودة (الضائعة) = ———————— = 0.2 وحدة / يوم.

10 أيام

3 أوامر

متوسط عدد أوامر الشراء = ———————— = 0.3 أمر / يوم.

10 أيام

تساعد النتائج السابقة في دراسة تكاليف المخزون، وسياسة المحاكاة التي تمّ اتباعها، ولتوضيح ذلك افترض أنّ تكلفة إصدار أمر الشراء تبلغ 100 ل.س، وأنّ تكلفة المبيعات الضائعة تبلغ 80 ل.س لكل وحدة، وتكلفة الاحتفاظ بالمخزون 50 ل.س لكل وحدة. مثل هذه المعلومات سوف تساعد متخذ القرار في حساب تكلفة المخزون اليومية.

دعنا الآن نوضح ذلك:

تكلفة الأمر اليومي = تكلفة إصدار الأمر × متوسط عدد أوامر الشراء في اليوم

= 100 × 0.3 = 30 ل.س.

تكلفة الاحتفاظ بالمخزون يومياً = تكلفة الاحتفاظ بالوحدة × متوسط رصيد آخر المدة.

= 50 × 9.1 = 455 ل.س.

تكلفة نفاذ المخزون يومياً = متوسط المبيعات المفقودة بالوحدات × تكلفة الوحدة المفقودة

= 0.2 × 80 = 16 ل.س.

تكلفة المخزون اليومية = التكلفة اليومية للأمر + تكلفة الاحتفاظ بالمخزون اليومية + تكلفة نفاذ المخزون.

= 30 +455 + 16 = 501 ل.س.

وأخيراً، في نهاية هذا التحليل دعنا نطرح تساؤلاً هاماً: هل تكفي محاولة واحدة للمحاكاة لاستخلاص نتائج دقيقة عن سياسة المخزون وتكلفتها ؟.
الإجابة بالواقع هي بالنفي، بل يجب أن تتم مئات المحاولات أو آلاف المحاولات، فالقاعدة عموماً تشير إلى أنه كلما زاد عدد المحاولات اقتربنا من التقديرات الدقيقة للسياسة أو المشكلة محل الدراسة.

ويظهر هنا بوضوح دور الحاسبات الإلكترونية في إجراء عدد كبير جداً من المحاولات في وقت قليل للغاية، ومن البرامج المعدة خصيصاً لهذا الغرض برنامج MAPII ، SLAMII ، يضاف إلى أنه يمكن استخدام أوراق العمل الإلكترونية مثل إكسل ولوتس 1, 2, 3 لتطوير عمليات محاكاة سهلة وسريعة.

8/7- تدريبات

س1- اشرح مفهوم المحاكاة.

س2- ما الخطوات الأساس لأسلوب المحاكاة أو نموذجها ؟.

س3- ما مجالات تطبيق المحاكاة ؟.

س4- تحدث عن مزايا المحاكاة.

س5- تحدث عن عيوب المحاكاة.

س6- اشرح مفهوم المحاكاة باستخدام أسلوب (مونت كارلو).

س7- كيف يمكن استخدام المحاكاة في حل مشكلات نظرية صفوف الانتظار ؟.

س8- كيف يمكن استخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون ؟.

الفصل الخامس عشر

تحليل ماركوف

1/15- مقدمة

2/15- مبررات استخدام أسلوب ماركوف

3/15- خطوات استخدام أسلوب ماركوف

4/15- افتراضات أسلوب ماركوف

5/15- حالات عملية

6/15- تدريبات

1/15- مقدمة:

إنّ أسلوب تحليل ماركوف Markov Analysis هو أسلوب يتعامل مع احتمالات حدوث حدث معين في المستقبل مستنداً إلى تحليل بعض الاحتمالات المعروفة لنا حالياً، ومثل هذا الأسلوب له العديد من التطبيقات في دنيا الأعمال مثل تحليل حصة الشركة في السوق، والتنبؤ بعدد الطلاب المتوقع أن يسجلوا في أحد برامج الجامعة، وتحليل سلوك المشتري ونتائج ولائه لعلامة تجارية، والاستفادة من ذلك في القيام بأفضل تقسيم للسوق إلى مناطق بيعية، وتحليل تقلبات الأوراق المالية، وتحديد احتياجات المنظمة من القوى العاملة، وتحديد أمثل سياسة للإنتاج والمخزون السلعي،..., إلخ[1].

ويبدأ تحليل ماركوف بافتراض أساس هو أنّ أي نظام يبدأ في ظل موقف أو حالة مبدئية، على سبيل المثال يوجد شركتان متنافستان في السوق وكل منهما يحصل حالياً على 40%، 60% من مبيعات السوق على التوالي، ومثل هذا الموقف أو هذه الحالة هي التي يطلق عليها اسم الموقف المبدئي أو الحالة المبدئية، وقد يحدث أن يتغير حجم السوق الخاص بكل من الشركتين في الفترة القادمة إلى 45%، 55% على التوالي، والتغير إلى مثل هذا الوضع الجديد يتطلب معرفة احتمالات التغير من الموقف المبدئي إلى الموقف الجديد.[2]

وفي الحياة العملية يمكن القيام بجميع هذه الاحتمالات ووضعها في مصفوفة أو جدول، وتعرف هذه المصفوفة باسم مصفوفة التغير، وهي التي تحدد ما الاحتمالات الخاصة بتغير الحدث من الموقف المبدئي إلى الموقف الجديد في المستقبل ؟، ومثل هذه العملية التي يُطلق عليها ماركوف تمكننا من التنبؤ بما يمكن حدوثه في المستقبل.

1- د. جمال علي سعد مروان، **مرجع سبق ذكره**، ص 218.

2- د. إسماعيل السيد، (1998)، **استخدام الأساليب الكمية في الإدارة**، الإسكندرية- مركز التنمية الإدارية- جامعة الإسكندرية، ص 337.

2/15- مبررات استخدام أسلوب ماركوف:

هناك مجموعة من النواحي والمزايا الهامة لاستخدام أسلوب ماركوف، التي من أهمها:[1]

1- أسلوب ماركوف يمكّن من التنبؤ بالنصيب المحتمل لكل شركة، وتحديد مدى التغير في نصيب كل شركة بالنسبة للشركات الأخرى المنافسة من عام لآخر، ولا شك أنّ عمل تلك التنبؤات تمكّن الشركات من رسم سياساتها التسويقية على ضوء هذه المعرفة وصولاً إلى أقصى درجات الفاعلية لطاقاتها ومواردها التسويقية، كما أنّ تحديد مدى التغير في نصيب الشركة بالنسبة للشركات الأخرى من عام لآخر يمكّن كل شركة من القيام بدراسة أسباب ذلك، والعمل على وضع المناسب من السياسات التسويقية لعلاج أسباب ضعف مركزها التنافسي بما يقوي مركزها في السوق.

2- يتفق استخدام أسلوب ماركوف وطبيعة نشاط الشركات التي تتسم بوجود المنافسة على غزو الأسواق، وبذلك فهو يمكّن من التحليل الكمي للطلب مع أخذ ظروف المنافسة بين الشركات في الاعتبار.

3- يُعدّ أسلوب ماركوف أداة هامة للإدارة لتحليل السوق، وباستخدام هذه الأداة تتمكن الشركات من استخلاص نتائج دقيقة لموقفها في السوق حاضراً ومستقبلاً، وهذا النوع من التحليل يعدّ ضرورياً لتحديد مدى نجاح كل شركة بالنسبة لمنافسيها من الشركات الأخرى في اكتساب أسواق جديدة، أو مدى خسارتها لبعض الأسواق الحالية، حيث تبين أنه لا تكفي مجرد الزيادة المطلقة في إيرادات الشركة من عام لآخر للحكم على نجاحها، وينفرد أسلوب ماركوف دون الأساليب التقليدية الأخرى بتحديد ذلك.

---

[1]- د. عايدة نخلة وآخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص237.

4- لما كان من الضروري أن يتسم نموذج التنبؤ المستخدم بأن يكون بسيطاً وعملياً حتى يسهل استخدامه، امتاز أسلوب ماركوف عن الأساليب التقليدية السابقة بسهولة إجراءاته الحسابية، كما أنّ تطبيق أسلوب ماركوف لا يتطلب بيانات كثيرة لإجراء العمليات الحسابية المطلوبة، إذ يتطلب أسلوب ماركوف إعداد بيانات عن عام واحد سابق، ولا يتطلب افتراضات جوهرية مثل افتراض الخطية، وعدم وجود ارتباط خطي تام،....، كما هو الحال في نماذج الانحدار، ويتصف النموذج أيضاً بالبساطة والوضوح ويتسم بالمرونة، حيث يمكن استخدام أية متغيرات مستقلة يرى المحلل المالي أنّ لها قدرة تنبؤية عالية.

3/15- خطوات استخدام أسلوب ماركوف:

1- إعداد البيانات الأساس اللازمة للتحليل: حتى تتوافر المكونات الضرورية لتطبيق أسلوب ماركوف.

2- حساب مصفوفة احتمالات الانتقال (تحديد مصفوفة التحركات الاحتمالية)، يمكن وضع الاحتمالات في صورة مصفوفة الانتقال Transition matrix، ونرمز لها بالرمز (P)، وكل عنصر من المصفوفة يوضح احتمال الانتقال من حالة إلى أخرى، ويمكن أن يُرمز لكل عنصر من هذه المصفوفة بالرمز (P_{ij})، وهو بمثابة احتمال شرطي يبين أنه إن كانت العملية الآن في الحالة (i) فإنها ستنتقل إلى الحالة (j) في الخطوة التالية، كما يمكن أن يرمز لكل شركة بالرمز (S) وللفترة الزمنية بالرمز (n) ويُرمز للعدد الكلي للمراحل بالرمز (m) وعلى أساس ذلك فإنه يمكن تصور مصفوفة احتمالات الانتقال على شكل قائمة (من – إلى) ، توضح الانتقال من الحالة (i) إلى الحالة (j) على النحو التالي:

From Present	to Next
(n = 0)	(n = 1)

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & & S_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots\ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots\ldots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ P_{m1} & P_{m2} & \ldots\ldots & P_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

ولا بد من توافر الشروط التالية في مصفوفة احتمالات الانتقال السابقة:

3- إنّ كل عنصر في المصفوفة السابقة يمثل احتمالاً، أي أنه يتدرج من الصفر حتى الواحد الصحيح، وبذلك يتحقق الشرط الأول في مصفوفة الاحتمال السابقة وهو: $0 \leq P_{ij} \leq 1$.

4- مجموع كل صف من هذه المصفوفة يجب أن يساوي الواحد الصحيح، وبذلك يتحقق الشرط الثاني، وهو:

$$\sum_{i=1}^{m} P_{ij} = 1, (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

ويمثل كل صف من صفوف مصفوفة احتمالات الانتقال متجهاً احتمالياً يمكن أن يُرمز له بالرمز V_i، وبذلك فإنه يمكن القول إنّ مصفوفة احتمالات الانتقال ما هي إلا مجموعة من صفوف المتجهات الاحتمالية.

وحتى يمكن وصف سلاسل ماركوف وصفاً كاملاً فلا بد من معرفة كل من الحالة الحالية Current State والتحركات الاحتمالية Probabilities Transition، والحالة الحالية يمكن وصفها بأنها آخر حدث تمّ في الفترة السابقة مباشرة، أو يمكن القول بمعنى آخر إنها الحالة الاحتمالية القائمة التي سيبدأ بها التحليل الحركي، أما التحركات الاحتمالية فهي عبارة عن احتمالات التحرك أو التغير بين الحالات الممكنة، وقد تكون هذه الحالات مواقع مختلفة

أو مصانع تقوم بإنتاج المنتج نفسه ، أو علامات تجارية مختلفة لمنتج واحد أو ما شابه ذلك.

ويمكن عن طريق التحليل تحديد احتمال الحالة المتوقعة في أي فترة زمنية في المستقبل في ضوء الحالة السابقة لها مباشرة.

وعلى ذلك إذا رمزنا لاتجاه نصيب كل شركة في السوق في تاريخ معين (t) (نقطة البداية) بالرمز K ولمصفوفة التحركات الاحتمالية خلال هذه الفترة بالرمز P ، فإنّ:

$$K_{t+1} = K_t \cdot P$$
$$K_{t+2} = K_{t+1} \cdot P$$

وبفرض ثبات P فإنّ:

$$K_{t+2} = Kt \cdot (P_t)^2$$
$$\mathbf{K_{t+n} = Kt \cdot (P_t)^n} \quad \text{..... (1)}$$

5- التنبؤ بالأنصبة المتوقعة للشركات خلال الفترة القادمة (حساب حصص السوق المحتملة مستقبلاً):

نظراً لأنّ منطق سلاسل ماركوف يستند إلى أنّ سلوك متغير ما في فترة قادمة يتوقف تماماً على سلوكه في الفترة السابقة مباشرة، لذلك فإنّ حصص الشركات في بداية الفترة الثانية ستتوقف على حصصها في بداية الفترة الأولى،....، وهكذا. هذا ويمكن أن يحسب النصيب المحتمل لكل شركة في خلال الفترة القادمة باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين:

أ- **الطريقة الأولى:** يتم بمقتضاها ضرب حصص الشركات في مصفوفة احتمالات الانتقال الأساس (أ) بعد وضعها باسم مناسب يساوي عدد السنوات المطلوب التنبؤ بها، فعلى سبيل المثال إذا رغبنا بالتنبؤ بالأنصبة المختلفة للشركات خلال السنة الثانية فإنه يتم تربيع المصفوفة الأصلية وضربها في نصيب كل شركة خلال الفترة الأولى،....، وهكذا.

ب- **الطريقـة الثانيـة:** تـتم بواسـطة ضـرب مصـفوفة الانتقـال (أ) فـي نصـيب الشركات فـي الفترة الأولـى للحصـول علـى أنصـبتها فـي الفترة الثانيـة، ثـم ضـرب مصـفوفة الاحتمـالات الأصـلية (أ) فـي أنصـبتها فـي السـنة الثانيـة للحصول على أنصبتها في السنة الثالثة، وهكذا يستمر الحال في السنوات الرابعة والخامسة،....، إلخ.

4- التنبـؤ بحـالات التـوازن (تحديـد شـروط التـوازن): يمكـن اسـتخدام مصـفوفة احتمالات الانتقال أيضاً في تحديد احتمالات التوازن كأداة للتنبؤ فـي المدى الطويل، ويمكن تعريف احتمـالات التوازن بأنها الاحتمـالات الطويلـة الأجل للبقـاء فـي حالـة معينـة بعـد أن اسـتمرت العمليـة لمـدة كافيـة حيـث تلاشـت الاشتراطات المبدئية.

ويتحقق حالة التوازن عندما:

- نصيب الشركات المختلفة المتنافسة في السوق لن يتغير.
- لا يكون هناك تغيير في حصة المتنافسين من مرة إلى أخرى.
- تثبت سياسة المتنافسين ونسب التحويلات بينهم، وتكون الظروف طبيعية وتطـول الفتـرة الزمنيـة، حيـث إنّ التـوازن يتحقـق عـادة فـي الأجـل الطويـل، ويصلح في تقدير حصة المنظمة لفترات طويلة، بحيث يمكن الاعتماد علـى هذا التقدير في التخطيط طويل الأجل.
- لا تتخـذ إحـدى الشـركات إجـراءات مـن شـأنها تعـديل مصـفوفة التحركـات الاحتمالية.
- لا يتغير نصيب الشركات من حصص السوق طالما أنّ مصفوفة التحركات الاحتمالية كما هي من دون أي تغيير.

وحالـة التـوازن تحسـب بنـاء علـى فـرض أسـاس مـؤداه أنّ مصـفوفة التحركـات الاحتماليـة تظـل كمـا هـي دون تغييـر، وأنّ الشـركات المتنافسـة تظـل قـدرتها علـى الاحتفاظ بعملائها وجذب عمـلاء جدد وخسـارة عمـلاء حـاليين كمـا هـي فـي حالـة

الثبات، وبالطبع إذا تغيرت مصفوفة التحركات الاحتمالية نتيجة إجراءات اتخذتها الإدارة، فإنّ حصص حالة التوازن يجب أن تحسب من جديد.

ويلاحظ أنّ حدود حالة الثبات تكون هي الحدود نفسها التي يتم التوصل إليها في ضوء مصفوفة التحركات الاحتمالية مهما كانت نقطة البدء في النظام، وكل ما في الأمر أنّ حالة الثبات قد تتسرع أو تتأخر طبقاً لاختلاف النسب الأصلية للحالة عن النسب المحددة في حالة الثبات.

وهناك طريقتان لتحديد نسب حالة الثبات أو حدودها، هما طريقة مجموع التدفقات وهي تستخدم الطرق التقليدية المعروفة في الحذف والتعويض لاشتقاق حدود الثبات لكل متغير، أما الطريقة الثانية فهي طريقة معادلة المصفوفة وتستخدم أسلوب المحددات أو المصفوفات في إيجاد قيم هذه الحدود.

وفي طريقة معادلة المصفوفة نجد أنها تشتق حدود حالة الثبات أو احتمالاتها على أساس حقيقة هامة هي أنه إذا كان احتمال الحالة في الفترة المقبلة = احتمال الحالة في الفترة السابقة مباشرة × مصفوفة التحركات الاحتمالية فإنه عندما نصل إلى حالة الثبات فإنّ الاحتمالات المطلقة لا تتغير، بمعنى أنّ:

$$\mathbf{K_t . P = K_t} \quad \text{..... (2)}$$

حيث إنّ Kt: المتجه الأفقي لاحتمالات حالة الثبات.

P: مصفوفة التحركات الاحتمالية.

مع ملاحظة أنّ عناصر هذا المتجه K_t يجب أن تساوي الواحد الصحيح:

أي أنّ:

$$\sum_{L=1}^{n} \mathbf{K_t . L = 1} \quad \mathbf{, (L = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n)} \quad \text{.....(3)}$$

4/15- افتراضات أسلوب ماركوف[1]

1- إنّ الفترة الزمنية للتنبؤ تكون في المدى المتوسط أو القصير الأجل، حيث توجد انتقالات (تحركات) مبدئية كبيرة تتناقص تدريجياً مع استمرار العملية، وتختفي تماماً عند الوصول إلى مرحلة التوازن.

2- إنّ حجم السوق ثابت خلال الفترة الزمنية المحددة للتنبؤ.

3- ثبات الاحتمالات من فترة لأخرى، حيث إنّ تقدير هذه الاحتمالات يتطلب فترة طويلة، وكلما طالت فترة تقدير الاحتمالات كان ثباتها أمراً بديهياً، وتتخذ سلاسل ماركوف ثلاثة مستويات أو درجات:

أ- سلاسل ماركوف من الدرجة الأولى، وهي مبنية على افتراض أنّ احتمال الحدث التالي يتوقف تماماً على نتائج الحدث السابق مباشرة.

ب- سلاسل ماركوف من الدرجة الثانية، وتفترض أنّ احتمال الحدث في المرة القادمة يمكن أن يتوقف على نتائج الحدثين السابقين له مباشرة.

ج- سلاسل ماركوف من الدرجة الثالثة، وتفترض أنّ السلوك المستقبلي للظاهرة يمكن التنبؤ به بدراسة سلوكها في الفترات الزمنية الثلاث السابقة على الفترة موضع التنبؤ.

5/15- حالات عملية:

مثال (1):

بفرض وجود ثلاث ماركات لسلعة معينة A, B, C وهذه السلعة تعدّ من سلع الاستقراب (الميسرة)، ومن خلال دراسات السوق المتعمقة المبنية على مقابلات

1 - W. L Winston,., C. Albright, and M. Broadie, (1997), "**Practical Management Science – Spreadsheets Modeling and Applications**", USA: An International Thomson Publishing Company, P.256.

شخصية متعمقة مع عينة مكونة من مئات من المستهلكين أُمكن تحديد معدلات استمرار العملاء في استخدام ماركة معينة، أو معدلات التحول من ماركة لأخرى كما يتضح من مصفوفة التحولات الاحتمالية التالية:

إلى / من	ماركة A	ماركة B	ماركة C
ماركة A	0.90	0.05	0.05
ماركة B	0.10	0.80	0.10
ماركة C	0.10	0.15	0.75

ويتضح من هذا الجدول:

- أنّ 90% من مستهلكي الماركة (A) استمروا في ولائهم لتلك الماركة، 80% من مستهلكي الماركة (B) استمروا في استهلاك الماركة (B)، وكذلك 75% من مستهلكي الماركة (C) استمروا في استهلاكها.
- أنّ هناك 5% من المستهلكين يتحول من استخدام الماركة (A) إلى الماركة (B)، وكذلك هناك احتمال 5% أن يتحول المستهلكون من استخدام الماركة (A) إلى الماركة (C). وهكذا يمكن تفسير بقية قيم تلك المصفوفة.

ويلاحظ أنّ أهم ما يريده منتج (أو تاجر) ماركة معينة هو معرفته حصته التسويقية، وبفرض أنّ دراسة السوق بينت أنّ الحصص السوقية للماركات الثلاث هي 45% ، 35% ، 20% لكل من A و B وC على الترتيب.

المطلوب: استخدم سلاسل ماركوف في التنبؤ بالحصص السوقية للماركات الثلاث لأكثر من فترة تجارية.

خطوات الحل:

بالرجوع إلى مصفوفة التحولات وبأخذ وجهة نظر الماركة (A)، نجد أنّ 90% من الحصة السوقية للماركة (A) سوف تستمر في استهلاك الماركة (A)، وأنّ 10% من الحصة السوقية للماركة (B) سيتحولون إلى استهلاك الماركة (A)، وأنّ 10% من الحصة السوقية للماركة (C) سيتحولون إلى استهلاك الماركة (A).

وعلى ذلك فإنه يمكن التنبؤ للماركة (A) بالحصول على حصة سوقية:

الموقف القديم	×	الاحتمالات التحويلية	=	الموقف الجديد
0.45	×	0.90	=	0.405
0.35	×	0.10	=	0.035
0.20	×	0.10	=	0.020
				0.460

أي أنّ الماركة (A) سوف تحصل على حصة سوقية 46% في الفترة الجديدة بزيادة (1%) عن حصتها في الفترة السابقة.

وبالطريقة نفسها يمكن التنبؤ بحصص B و C وفقاً لما يلي:

يمكن التنبؤ للماركة (B) بالحصول على حصة سوقية:

الموقف القديم	×	الاحتمالات التحويلية	=	الموقف الجديد
0.45	×	0.05	=	0.0225
0.35	×	0.80	=	0.280
0.20	×	0.15	=	0.030
				0.3325

أي قد حدث تغير في حصة الماركة (B) بالنقص (1.75%)

ويمكن التنبؤ للماركة (C) بالحصول على حصة سوقية:

الموقف القديم	×	الاحتمالات التحويلية	=	الموقف الجديد
0.45	×	0.05	=	0.0225
0.35	×	0.10	=	0.0350

0.20	×	0.75	=
			0.1500
			0.2075

أي قد حدث تغير في حصة الماركة (C) بالزيادة (0.75%)

محصلة الزيادة والنقص للماركات الثلاث هي (+1 – 1.75 + 0.75) = صفر

ويمكن تكرار التنبؤ بالحصص السوقية في الفترة الثانية كما يلي:

الماركة (A)

الموقف القديم	×	الاحتمالات التحويلية	=	الموقف الجديد
0.46	×	0.90	=	0.414
0.3325	×	0.10	=	0.03325
0.2075	×	0.10	=	0.02075
				0.468

أي قد حصلت زيادة مقدارها (0.8%).

الماركة (B)

الموقف القديم	×	الاحتمالات التحويلية	=	الموقف الجديد
0.46	×	0.05	=	0.023
0.3325	×	0.80	=	0.266
0.2075	×	0.15	=	0.0311
				0.3201

أي هنا قد حصل تغير بالنقص مقداره (1.24%).

الماركة (C)

الموقف القديم	×	الاحتمالات التحويلية	=	الموقف الجديد
0.46	×	0.05	=	0.023
0.3325	×	0.10	=	0.03325
0.2075	×	0.75	=	0.1556

0.2119

أي هنا قد حصل تغير بالزيادة مقداره (0.44%).

محصلة الزيادة والنقص للماركات الثلاث هي (+0.8 – 1.24 + 0.44) = صفر.

ويمكن تكرار التنبؤات لفترات أخرى.

مثال (2):

لدينا ثلاث شركات A, B, C كل منها تمد العملاء بكل مستلزماتهم من السلع، ومن المعروف لدى هذه الشركات أنّ العملاء يتحولون من شركة لأخرى وذلك إمّا بتأثير الإعلان، وإمّا نتيجة عدم الاقتناع بسلع الشركة التي يتحولون عنها، وإمّا لعدم الرضا عن مستوى الخدمة أو نوع المعاملة التي يتلقونها من العاملين بالشركة، فإذا كانت كل شركة تدون أو تحتفظ بسجلات كاملة عن حركة عملائها، افترض أنّ لدينا البيانات التالية عن حركة العملاء في شهري شباط وآذار.

الشركة	شهر شباط	جذب من			تحول إلى			شهر آذار
		A	B	C	A	B	C	
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290
مجموع	1000							1000

المطلوب:

1- حساب مصفوفة احتمالات التحول.

2- التنبؤ بنصيب كل شركة من السوق في الفترة القادمة.

3- إيجاد قيم التوازن.

خطوات الحل:

1- حساب مصفوفة احتمالات التحول أو الانتقال:

مصفوفة جذب:

	A	B	C
A	0	35	25
B	20	0	20
C	20	15	0
	200	500	300

مبيعات شهر شباط

مصفوفة احتمالات التحول:

مكسب

	A	B	C
A	$1 - (0.1 + 0.1) = 0.8$	$35 \div 500 = 0.07$	$25 \div 300 = 0.083$
B	$20 \div 200 = 0.1$	$1 - (0.07 + 0.03) = 0.9$	$20 \div 300 = 0.067$
C	$20 \div 200 = 0.1$	$15 \div 500 = 0.03$	$1 - (0.083 + 0.067) = 0.85$

خسارة

– حساب نصيب كل شركة من السوق في الفترة الحالية (شهر آذار).

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} 220 \div 1000 = 0.22 \\ 490 \div 1000 = 0.49 \\ 290 \div 1000 = 0.29 \end{bmatrix}$$

3– حساب نصيب كل شركة من السوق في الفترة التالية (شهر نيسان).

= مصفوفة احتمالات الانتقال × نصيب الشركات في شهر آذار

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.07 & 0.083 \\ 0.1 & 0.9 & 0.067 \\ 0.1 & 0.03 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.22 \\ 0.49 \\ 0.29 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 \times 0.22 + 0.07 \times 0.49 + 0.083 \times 0.29 \\ 0.1 \times 0.22 + 0.9 \times 0.49 + 0.067 \times 0.29 \\ 0.1 \times 0.22 + 0.03 \times 0.49 + 0.85 \times 0.29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.23437 \\ 0.48243 \\ 0.2832 \end{bmatrix}$$

وبافتراض ثبات مصفوفة احتمالات التحول (وهي سمة أساس من سمات هذه المصفوفة) يمكن التنبؤ بأنصبة هذه الشركات خلال شهر أيار، وذلك كما يلي:

= مصفوفة احتمالات الانتقال × نصيب الشركات في شهر نيسان:

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.07 & 0.083 \\ 0.1 & 0.9 & 0.067 \\ 0.1 & 0.03 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.23437 \\ 0.48243 \\ 0.2832 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 \times 0.23437 + 0.07 \times 0.48243 + 0.083 \times 0.2832 \\ 0.1 \times 0.23437 + 0.9 \times 0.48243 + 0.067 \times 0.2832 \\ 0.1 \times 0.23437 + 0.03 \times 0.48243 + 0.85 \times 0.2832 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.24447 \\ 0.47659 \\ 0.27863 \end{bmatrix}$$

4- دراسة وضع التوازن وإيجاد قيم التوازن:

لنرمز لوضع التوازن للشركة A في الفترة الحالية بالرمز A_t

والفترة السابقة عليها مباشرة بالرمز A_{t-1}

والفترة اللاحقة لها مباشرة بالرمز A_{t+1}

وكذلك للشركة B : B_t , B_{t-1} , B_{t+1}

وللشركة C : C_t , C_{t-1} , C_{t+1}

ومن ثم يمكن كتابة المعادلات التالية:

$$A_t = 0.8 \times A_{t-1} + 0.07 \times B_{t-1} + 0.083 \times C_{t-1}$$
$$B_t = 0.1 \times A_{t-1} + 0.9 \times B_{t-1} + 0.067 \times C_{t-1}$$
$$C_t = 0.1 \times A_{t-1} + 0.03 \times B_{t-1} + 0.85 \times C_{t-1}$$

وبافتراض أنّ نصيب أي شركة في الفترة الحالية مساوٍ تقريباً لنصيبها في الفترة السابقة عليها مباشرة، فإنه يمكن كتابة المعادلات السابقة في الشكل التالي:

$$A = 0.8\ A + 0.07\ B + 0.083\ C$$
$$B = 0.1\ A + 0.9\ B + 0.067\ C$$
$$C = 0.1\ A + 0.03\ B + 0.85\ C$$

ويمكن إعادة كتابتها في الصورة التالية:

$$-0.2\ A + 0.07\ B + 0.083\ C = 0 \qquad (1)$$
$$0.1\ A - 0.1\ B + 0.067\ C = 0 \qquad (2)$$
$$0.1\ A + 0.03\ B - 0.15\ C = 0 \qquad (3)$$
$$A + B + C = 1 \qquad (4)$$

أي يصبح لدينا أربع معادلات بثلاثة مجاهيل، وبحذف واحدة منها ولتكن الثالثة، يصبح لدينا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل:

$$-0.2\ A + 0.07\ B + 0.083\ C = 0 \qquad (1)$$
$$0.1\ A - 0.1\ B + 0.067\ C = 0 \qquad (2)$$
$$A + B + C = 1 \qquad (3)$$

وباستخدام المحددات في حل المعادلات نحصل على قيم التوازن كما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -0.2 & 0.07 & 0.083 \\ 0.1 & -0.1 & 0.067 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

باختيار الصف الأول مثلاً:

$$-0.2\begin{vmatrix} -0.1 & 0.067 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.07\begin{vmatrix} 0.1 & 0.067 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.083\begin{vmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -0.2\,(-0.1 - 0.067) - 0.07\,(0.1 - 0.067) + 0.083\,(0.1 + 0.1)$$
$$= -0.2\,(-0.167) - 0.07\,(0.033) + 0.083\,(0.2)$$
$$= 0.0334 - 0.00231 + 0.0166 = 0.04769$$

*** بحذف العمود الأول من المصفوفة السابقة (عمود A) ووضع قيم الثوابت بدلاً عنه:**

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 0.07 & 0.083 \\ 0 & -0.1 & 0.067 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

وباختيار الصف الأول مثلاً:

$$+0\begin{vmatrix} -0.1 & 0.067 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.07\begin{vmatrix} 0 & 0.067 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.083\begin{vmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -0.07\,(0 - 0.067) + 0.083\,(0 + 0.1)$$
$$= -0.07\,(-0.067) + 0.083\,(0.1)$$
$$= 0.00469 + 0.0083 = 0.01299$$

*** بحذف العمود الثاني من المصفوفة السابقة (عمود B) ووضع قيم الثوابت بدلاً عنه:**

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} -0.2 & 0 & 0.083 \\ 0.1 & 0 & 0.067 \end{vmatrix}$$

1 1 1

وباختيار الصف الأول مثلاً:

$$-0.2\begin{vmatrix} 0 & 0.067 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0.1 & 0.067 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.083\begin{vmatrix} 0.1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -0.2\ (0 - 0.067) + 0.083\ (0.1 - 0)$
$= -0.2\ (-0.067) + 0.083\ (0.1)$
$= 0.0134 + 0.0083 = 0.0217$

*** بحذف العمود الثالث من المصفوفة السابقة (عمود C) ووضع قيم الثوابت بدلاً عنه:**

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} -0.2 & 0.07 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

وباختيار الصف الأول مثلاً:

$$-0.2\begin{vmatrix} -0.1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.07\begin{vmatrix} 0.1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -0.2\ (-0.1 - 0) - 0.07\ (0.1 - 0)$
$= -0.2\ (-0.1) - 0.07\ (0.1)$
$= 0.02 - 0.007 = 0.013$

مما سبق نستنتج:

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{0.01299}{0.04769} = 0.27238$$

$$\Delta_B \qquad 0.0217$$

$$B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{0.02169}{0.04769} = 0.45502$$

$$C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{0.013}{0.04769} = 0.27259$$

وهكذا فإنّ أنصبة الشركات لا تتغير في أي فترة تالية، وهو ما يدل على الوصول إلى وضع التوازن.

لاحظ أنّ وضع التوازن الذي توصلنا إليه لا يعتمد على أنصبة الشركات من السوق قبل وضع التوازن، حيث إنّ أي توزيع للأنصبة قبل حالة التوازن لا يؤثر في قيمة التوازن نفسها، ولكن قيمة التوازن تعتمد فقط على مصفوفة احتمالات التحول ومدى ثباتها.

لاحظ كذلك أنه إذا كان وضع الأنصبة قبل التوازن قريباً من وضع التوازن فإننا نصل إلى حالة التوازن أسرع مما لو كانت الأنصبة قبل التوازن بعيدة عن الأنصبة في حالة التوازن.

ويمكن أيضاً استخدام تحليل ماركوف في مجال تحديد استراتيجيات التسويق، فقد لا تقوم الشركات بتغيير سياساتها التسويقية، وقد تجد بعض الشركات أنّ نصيبها من السوق لا يتناسب وحجمها وسمعتها فتفكر في تغيير سياساتها التسويقية بما يسمح لها بزيادة نصيبها من السوق، وهنا قد يكون أمامها أكثر من اختيار للوصول إلى هذا الهدف، فقد تحاول الشركة اجتذاب أكبر قدر من العملاء الذين يتحولون عن شركة أخرى، أو قد تحاول الشركة تحسين معاملتها لعملائها، ومحاولة رفع احتمال الاحتفاظ بالعملاء الذين يتحولون إلى شركة أخرى، وفي كل حالة يتغير شكل مصفوفة احتمالات التحول، ونحدد قيم التوازن، ونصيب كل شركة، ونحدد المسلك الأفضل الذي تعدّه الشركة في سياستها التسويقية.

6/15- تدريبات

س1- وضح مبررات استخدام أسلوب ماركوف.

س2- اشرح خطوات استخدام أسلوب ماركوف.

س3- ما الافتراضات الأساس لأسلوب ماركوف ؟.

س4- بفرض وجود ثلاث ماركات لمسحوق الغسيل (بشرى، ومدار، وبرسيل)، ومن خلال دراسات السوق أمكن تحديد معدلات استمرار العملاء في استخدام ماركة معينة، أو معدلات التحول من ماركة لأخرى كما يتضح من مصفوفة التحويلات التالية:

إلى / من	ماركة بشرى	ماركة مدار	ماركة برسيل
ماركة بشرى	0.40	0.25	0.35
ماركة مدار	0.20	0.40	0.40
ماركة برسيل	0.20	0.30	0.50

المطلوب: تفسير القيم داخل المصفوفة.

وإذا علمت أنّ الحصص السوقية للماركات الثلاث (بشرى، ومدار، وبرسيل) هي 45%، 35%، 20% على الترتيب، استخدم سلاسل ماركوف في التنبؤ بالحصص السوقية للماركات الثلاث لفترتين قادمتين.

س5- الجدول التالي يوضح مبيعات ثلاث شركات كبرى في الملابس الجاهزة (ملبوسات 400 ، وملبوسات آسيا، وملبوسات سمير أميس) خلال العام 2011.

البيان / الشركات	صافي المبيعات عام 2011	المبيعات خلال عام 2011						مبيعات 2012
		الكسب من			الخسارة إلى			
		ملبوسات 400	آسيا	سمير أميس	ملبوسات 400	آسيا	سمير أميس	
ملبوسات 400	80808	0	35305	9385	0	42194	6823	76481
آسيا	62382	42194	0	14825	35305	0	8684	75412
سمير أميس	43123	6823	8684	0	9385	14825	0	34420
مجموع	186313							186313

(الأرقام بالألف ليرة سورية، وهي أرقام افتراضية).

المطلوب:

1- حساب مصفوفة احتمالات الانتقال.

2- التنبؤ بالأنصبة المحتملة لكل شركة ملبوسات خلال الأعوام 2013- 2014 – 2015.

3- التنبؤ بحالات التوازن في شركات الملبوسات السورية.

قائمة المصطلحات العلمية

A	
Absolute	مطلق
Abnormal curve	منحنى غير طبيعي
Activity	نشاط– فعالية
Additivity	إضافة
Algorithm	خوارزمية
Adjacent basic feasible solution	حل مبدئي قاعدي مجاور
Alternative	بديل
Alternative strategies	استراتيجيات بديلة
Allocation	تخصيص
Allocation problem	مسألة التخصيص
Alternative strategies	استراتيجيات بديلة
Area of feasible solution	منطقة الحلول الممكنة
Arrow diagram	مخطط شبكي
Artificial constraints	قيود مصطنعة
Artificial variable	متغير اصطناعي
Attitude	موقف – اتجاه
Available resources	الموارد المتاحة
B	
Balance	توازن
Branch and Bound method	طريقة الفرع والحد
Basic	أساسي
Basic solution	حل أساسي

Basic variable	متغير أساسي
Basic feasible solution	حل قاعدي ممكن
Balancing transportation model	موازنة نموذج النقل
Benchmarking	معايرة
Branch and Bound method	طريقة الفرع والحد
Bounded variable	متغيرات مقيدة
Bounding	تحديد
Buffer stock	مخزون أمان
C	
Capital Account	حساب رأس المال
Certainly	التأكد
Challenges	تحديات
Classification	تصنيف
Cofficient	معامل
Cofficient matrix	مصفوفة المعاملات
Column	عمود
Continuous function	تابع مستمر
Comparative advantage	ميزة نسبية
Convex	محدب
Constrictions	قيود
Crashed cost	التكلفة المضغوطة
Crashed time	الزمن المضغوط
Cost	تكلفة

Competition	منافسة
Cost- Benefit- Analysis	تحليل التكلفة والعائد
Criteria	معيار
Critical activity	النشاط الحرج
Critical node	نقطة حرجة
Critical path	المسار الحرج
Critical Path Method (CPM)	طريقة المسار الحرج
Curve	منحنى
D	
Decision	القرار
Decision making	صنع القرار
Decision maker	متخذ القرار
Decisions tree	شجرة القرارات
Decision under certainty	القرار في حالة التأكد
Decision under uncertainty	القرار في حالة عدم التأكد
Decision under risk	القرار في حالة المخاطرة
Demand forecast	التنبؤ بالطلب
Dual	المرافق
Dual simplex method	أسلوب المرافق للسمبلكس
Dual solution	الحل المرافق
Dummy	وهمي
Dummy activity	النشاط الوهمي
Dynamic programming	البرمجة الديناميكية
E	

Early time	الزمن المبكر
End note	نقطة النهاية
Economic	اقتصادي
Economic Integration	تكامل اقتصادي
Effectiveness	فعالية
Efficiency	كفاءة
Elasticity	مرونة
Entering variable	المتغير الداخل
Evaluation	تقويم
Equality	معادلة
Equilibrium	توازن
Expected profit	الربح المتوقع
Expected value	القيمة المتوقعة
Exporting	تصدير
Execution	تنفيذ
F	
Factor	عامل
Feasibility condition	شرط الإمكانية
Feasible region	منطقة الحلول المقبولة
Final	نهائي
Final solution	الحل النهائي
Final product	المنتج النهائي
Fixed	ثابت

Float in (PERT- CPM)	الأوقات الفائضة
Forecasting	تنبؤ
Fractional cut	القطع الجزئي
Functional constraints	قيود وظيفية
Function	تابع
G	
Game matrix	مصفوفة اللعبة
Game theory	نظرية الألعاب
Geometric Programming	البرمجة الهندسية
Gross	إجمالي
Gradient	متدرج
Goal programming	برمجة الأهداف
Goods	منتجات
Graphical method	الطريقة البيانية
H	
Hierarchy	تدرج المستويات الإدارية
Human resources management	إدارة الموارد البشرية
I	
Identity matrix	مصفوفة أحادية
Implicit	ضمني
Implicit function	تابع ضمني
Independence	استقلالية
Independent events	حوادث مستقلة
Inequalities	متراجحات (متباينات)

Integer programming	برمجة الأعداد الصحيحة
Input- output analysis	تحليل المدخلات والمخرجات
Investment	استثمار
Iteration	معاودة
K	
Key	مفتاح
Key column	العمود المفتاح
Key row	الصف المفتاح
L	
Lagrange multipliers method	طريقة مضاريب لاغرانج
Late time	الوقت المتأخر
Latest completion time	زمن النهاية المتأخرة
Least cost method	طريقة التكلفة الأقل
Leaving variable	المتغير الخارج
Limit	حد أو نهاية
Linear	خطي
Linear function	تابع خطي
Linear programming	البرمجة الخطية
Logistics	الإمدادات
Loss	خسارة
M	
Mathematical	رياضي
Mathematical model	نموذج رياضي
Mathematical expectation	التوقع الرياضي

Matrix	مصفوفة
Maximum value of game	القيمة العظمة للعبة
Maximum payoff	القيمة العظمة للربح
Minimizations	تصغير
Model	نموذج
Multiplier	ضارب
Multiplier Lagrange	ضارب لاغرانج
Multipliers method	طريقة المضاريب
N	
Network	شبكة
Network programming	البرمجة الشبكية
Necessary conditions	الشروط الضرورية
Node	نقطة
Nonlinear programming	البرمجة غير الخطية
Normal	طبيعي
Normal cost	تكلفة عادية
Normal curve	منحنى عادي
No basic variable	متغير خارج الأساس
No feasible solution	حل غير ممكن
No critical activity	نشاط غير حرج
Nonlinear programming	البرمجة غير الخطية
No negativity	عدم السلبية
Normal distribution	توزيع طبيعي

O	
Objective	هدف
Objective function	دالة الهدف
Objective function coefficient	معامل دالة الهدف
Operations	عمليات
Operations evolution	تقييم العمليات
Operations research	بحوث العمليات
Optimization	أمثلية
Optimistic time	الوقت المتفائل
Optimistic estimate	التقدير المتفائل
Opportunities	الفرص
Order	أمر – طلب
Output	مخرجات
P	
Parameters	ثوابت أو معالم
Partial	جزئي
parallel	متوازي
Path	مسار
Perfect information	المعلومات المؤكدة
Pessimistic estimate	التقدير المتشائم
Pivot	عنصر (مفتاح)
Pivot column	العمود المفتاح
Pivot row	الصف المفتاح
Primal	أولي

Primal dual algorithm	خوارزمية الأولي المرافق
Probability	احتمالية
Proportionality	نسبية
Problem constraints	قيود المسألة
Problem variables	متغيرات المسألة
Product mix	المزيج السلعي
Production	إنتاج
Production function	تابع إنتاجي
Profit	ربح
Profitability	ربحية
Programming	برمجة
Project	مشروع
Project Management	إدارة المشروع
Procurement	تأمين الاحتياجات
Pure integer programming	برمجة الأعداد الصحيحة الصرفة
Pure strategy	الاستراتيجية الصرفة
Q	
Quality	جودة – نوعية
Quantity	كمية
Quantity control	رقابة الجودة
Qualitative research	بحوث نوعية
Quantitive research	بحوث كمية
Queuing theory	نظرية صفوف الانتظار
Quadratic form	شكل تربيعي

Quadratic programming	برمجة بربيعية
Quote	حصة
Quote system	نظام الحصص
R	
Rank	مرتبة
Rank of matrix	مرتبة المصفوفة
Rate	معدل
Resources	موارد
Return on investment	عائد على الاستثمار
Risks analysis	تحليل المخاطر
Rectifications	قيود
Real values	قيم حقيقية
Russel's Approximation Method	طريقة رسل التقريبية
S	
Scientific approach	الطريقة العلمية
Sector	قطاع
Sensitivity analysis	تحليل الحساسية
Shadow cost	تكلفة الظل
Shadow prices	أسعار الظل
Simplex method	طريقة السمبلكس
Simplex multiplies	مضاريب السمبلكس
Simulation	محاكاة
Specialization	تخصص
Sub system	نظام فرعي

Sub project	مشروع فرعي
Standardization	تنميط
Stability	استقرار
Standard form	شكل معياري
Starting basic solution	حل أساس ابتدائي
Sufficient conditions	الشروط الكافية
Stochastic models	نماذج عشوائية
System	نظام
T	
Technical	تقني
Technique	تقنية
Team Work	فريق العمل
Technology	تكنولوجيا
Technology transfer	نقل التكنولوجيا
Top management	إدارة عليا
Training	تدريب
Total derivation	مشتق كلي
Total differential	تفاضل كلي
U	
Unacceptable solution	حل غير مقبول
Unbounded solution	حل غير محدد
Uncertainly	حالة عدم التأكد
Unit	وحدة
Unstable game	لعبة غير مستقرة

Utilization factor	معامل الاستخدام
Utility	منفعة
Unit	وحدة
V	
Value added	قيمة مضافة
Value of game	قيمة اللعبة
Value chain analysis	تحليل سلسلة القيمة
Variable	متغير
Variance	تباين
Vectors	أشعة أو متجهات
Vertical Communication	اتصال رأسي
Vogel's Approximation Method	طريقة فوجل التقريبية
W	
Waiting line	صف الانتظار
Weighted	مرجح
Weaknesses	نقاط الضعف
Working capital	رأس المال العامل
Working life	العمر الإنتاجي
World	عالم
Z	
Zero – Sum- Game	مباراة حاصلها الصفر

مراجع الكتاب

أولاً- المراجع باللغة العربية

1- الكتب:

1- د. إبراهيم محمد العلي، (2004)، **مدخل إلى بحوث العمليات**، جامعة تشرين- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية.

2- د. أحمد رجب عبد العال ود. فتحي رزق السوافيري، (1998)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، كلية التجارة – جامعة الإسكندرية.

3- د. أحمد رفيق قاسم، (1992), **بحوث العمليات**، جامعة حلب – مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية.

4- د. أحمد رفيق قاسم و د.محمد كامل ريحان, (1982), **الطرق الكمية في العلوم الاقتصادية والإدارية**، بلا ناشر.

5- د. أحمد حسين علي حسين ود. فتحي رزق السوافيري، (2003)، **بحوث العمليات في المحاسبة مدخل معاصر باستخدام الحاسب الآلي**، الإسكندرية – دار الجامعة الجديدة.

6- د. أحمد سرور محمد، **بحوث العمليات في الإدارة**، القاهرة- مكتبة عين شمس، بلا تاريخ نشر.

7- د. أحمد سيد مصطفى، (1997)، **إدارة الإنتاج والعمليات في الصناعة والخدمات**، كلية التجارة- جامعة بنها- مصر.

8- د. أحمد هشام معوض سليم، (1997), **أساليب البرامج الخطية (الجزء الثاني)**، شبين الكوم- الولاء للطبع والتوزيع.

9- د. إسماعيل إبراهيم جمعة وآخرون، (2003) ، **بحوث العمليات في اتخاذ القرارات مع تطبيقات على الحاسب**، كلية التجارة- جامعة الإسكندرية.

10- د. إسماعيل السيد، (1998)، **استخدام الأساليب الكمية في الإدارة، الإسكندرية**- مركز التنمية الإدارية- جامعة الإسكندرية.

11- د. جلال إبراهيم العبد، (2004)، **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، الإسكندرية- دار الجامعية الجديدة للنشر.

12- د. جمال علي سعد مروان، (1996)، **بحوث العمليات في مجال صنع القرارات الإدارية في ظل أحوال عدم التأكد**، الزقازيق – مكتبة اليسر.

13- د. حسين شرارة، وآخرون، (1998), **مقدمة في بحوث العمليات (مدخل تطبيقي)**، القاهرة – مكتبة عين شمس.

14- د. حسين الطيف السامرائي، (1997)، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، الأردن- دار الهلال.

15- د. حلمي عبد الفتاح البشبيشي وآخرون، (1993), **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر.

16- حمدي طه ، تعريب د. أحمد حسين علي حسين، (1996)، **مقدمة في بحوث العمليات**، المملكة العربية السعودية – دار المريخ للنشر.

17- د. دلال صادق بطرس، (2003)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر.

18- د. سمير بهباوي و د. محمد صبري العطار، (2002)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، القاهرة- مكتبة الأنجلو المصرية.

19- د. سمير علام، (2003)، **إدارة المشروعات الصناعية الصغيرة**، مركز التعليم المفتوح- جامعة القاهرة.

20- د. سونيا محمد البكري، (2000)، **تخطيط ومراقبة الإنتاج**، الإسكندرية- الدار الجامعية.

21- د. صلاح سيخ ديب، (2007)، **بحوث العمليات في الإدارة**، جامعة تشرين- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية.

22- د. صلاح سيخ ديب، (2008)، **بحوث العمليات (2)**، جامعة تشرين- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية.

23- د. عادل قاسم حسن، (1996), **بحوث العمليات في إنتاج وترشيد المعلومات المحاسبية**، الزقازيق - مكتبة المدينة.

24- د. عايدة نخلة وآخرون، (2003)، **بحوث العمليات**، القاهرة – مكتبة عين شمس.

25- د. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي ود. نجم عبد الله الحميدي, (2008), **الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الأعمال**, الطبعة الأولى, الأردن- عمان، دار وائل للنشر والتوزيع.

26- د. عمر وصفي عقيلي، وآخرون، (2004)، **مبادئ الإدارة**، جامعة حلب- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية.

27- د. علي الشرقاوي، (2003)، **إدارة النشاط الإنتاجي مدخل التحليل الكمي**، الإسكندرية- دار الجامعة الجديدة للنشر.

28- د. فريد عبد الفتاح زين الدين، (1997)، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشكلات واتخاذ القرارات**، الزقازيق- مكتبة التكامل.

29- د. فتحي رزق السوافيري، (2004)، **مدخل معاصر في بحوث العمليات- تطبيقات باستخدام الحاسب**، الإسكندرية- الدار الجامعية.

30- د. محمد أسعد عبد الوهاب النيداني، (2006)، **مقدمة في بحوث العمليات**، بلا ناشر.

31- د. محمد سليمان هدى، (2004)، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في قطاع النقل البحري**، القاهرة- الأكاديمية العربية للعلوم التكنولوجية والنقل البحري.

32- د. محمد شريف توفيق، (1985), **برمجة الأهداف منهج متقدم لصياغة وحل نماذج البرامج الرياضية متعددة الأهداف**، الزقازيق- مكتبة التكامل.
33- د . محمد صبري العطار، (1989)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر.
34- د. محمد عبد العزيز أبو العينين، (1998)، **إدارة الإنتاج والعمليات بين النظرية والتطبيق**، بلا ناشر.
35- د. محمود علي أبو النصر، (2000)، **مقدمة في بحوث العمليات والطرق الكمية**، مركز التعليم المفتوح- جامعة عين شمس.
36- د. محمود محمد المنصوري، (1996)، **أساليب بحوث العمليات واستخداماتها في ترشيد عملية اتخاذ القرارات**، بنغازي- مركز بحوث العلوم الاقتصادية.
37- د. نبيل محمد مرسي، (2004)، **إدارة الإنتاج والعمليات**، الإسكندرية- دار الجامعة الجديدة.
38- د. هالة عبد الله الخولي، (2000)، **بحوث العمليات في المحاسبة**، بلا ناشر.

2- الدوريات والرسائل

1- د. سيد محمد جبر، (1989), استخدام نموذج برمجة الأهداف في إعداد موازنات الأقسام الداخلية، **مجلة التكاليف** (الجمعية العربية للتكاليف، العدد الأول والثاني، السنة الثامنة عشر.
2- د. شعبان يوسف مبارز ود. بهاء الدين بديع القاضي، (1993), تقييم بدائل الاستثمار المتاحة لبرنامج خصخصة موارد قطاع الأعمال العام باستخدام أسلوب برمجة الأهداف ونظرية المنفعة المتعددة الأهداف، **المجلة العلمية للبحوث والدراسات التجارية**، كلية التجارة وإدارة الأعمال - جامعة حلوان، السنة السابعة - العدد الثاني.

3- صلاح الدين إسماعيل، (1990), استخدام أساليب بحوث العمليات في حل مشكلات تخطيط ومراقبة الإنتاج في القطاع العام للصناعات التجميعية، **رسالة ماجستير غير منشورة**، كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان.

4- د. مسعود عبد الله بدري ود. جمال محمد المهيري، (2000), نموذج متعدد الأهداف للتخطيط الأمثل لمواقع المستوصفات الطبية، **المجلة العربية للعلوم الإدارية**، جامعة الكويت، المجلد السابع، العدد الثاني.

5- د. محمد كامل السيد, (2003), استخدام نموذج برمجة الأهداف لتحديد المكونات الأكثر ملاءمة ونسب التخصيص المثلى للأموال المستثمرة بمحفظة قطاع تأمينات الممتلكات والمسئولية بالسوق المصري، **مجلة المحاسبة والإدارة والتامين**، كلية التجارة– جامعة القاهرة، العدد الستون.

6- د . نبيل فهمي سلامة، (1986), استخدام نموذج برمجة الأهداف في التخطيط قصير المدى لمكاتب المحاسبة والمراجعة، **المجلة العلمية للاقتصاد والتجارة**، كلية التجارة – جامعة عين شمس، العدد الأول.

7- يسري محمد علي خيري، (1993), ترشيد إعداد الموازنة الرأسمالية بمنظور إسلامي باستخدام نموذج برمجة الأهداف بالأعداد الصحيحة، **رسالة ماجستير غير منشورة**، كلية التجارة – جامعة المنصورة.

ثانياً– المراجع باللغة الأجنبية:

1-Books:

1-Anderson, D. R., D. J. Sweeney, and T. A.Williams, (2000), "**An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making**", New York: South- Western College Publishing.

2- Charnes, A. and W. W. Cooper., (1961), **"Management Models and Industrial Application of Linear Programming**", N.Y: John Wiley & Sons, Inc.

3 - Hamdy, T. A., (1976), "**Operations Research**", Second Edition, USA: Macmillan Publishing Company.

4- Littlechild Stephen and Maurice Shulter, (1991), **Operations Research in Management**, UK: Prentice Hall International Ltd.

5- Lotfi. V., and C. Carl Pegels, (1996), **"Decision Support Systems for Operations Management & Management Science**", Third Edition, USA: McGraw- Hill Companies, Inc.

6- Murty, K. G., (1995), "**Operations Research Deterministic Optimization Models**", USA: Prentice- Hall, Inc.

7- Render, B. and R. M. Stair, (2000), "**Quantitative Analysis For Management**", Seven Edition, USA: Prentice- Hall, Inc.

8- Stephen, L. and M. Shutler, (1991), "**Operations Research in Management**", UK: Prentice Hall International.

9- Stevenson. W. J., (2002), **"Operations Management**", Seventh Edition, New York: McGraw- Hill/ Irwin.

10- Thomas, N. H. and et al, (1971)," **Introduction to Linear Programming: Methods and Cases"** California:Wadsworth Publishing Company, Inc.

11- Winston, W. L., C. Albright, and M. Broadie, (1997), "**Practical Management Science – Spreadsheets Modeling and Applications**", USA: An International Thomson Publishing Company.

2- Articles and Thesis

1- Arbel, A. and P. Korhonen, (2001), "Using Objective Values to Start Multiple Objective Linear Programming Algorithms" **European Journal of Operational Research**, No. 128, pp. 584-593.

2- Axsater Sven, (2005), A simple Decision Rule For Decentralized Two-echelon Inventory Control**, International Journal of Production Economics**, vol.93-94, pp.53-61

3- Benjamin, C. O. (1985), " A Linear Goal Programming For Public Sector Project Selection", **Journal of The Operational Research Society**, Vol. 36, No. 1, pp.13-23.

4- Bryson, N. (1995), "A Goal Programming Method For Generating Priority Vectors", **Journal of The Operational Research Society**, Vol. 46, No. 5 pp. 641- 648.

5- Calvete Herminia and Lourdes Delpozo, (2003), The Quickest Path Problem with Batch Constraints, **Operations Research Letters**, Vol.31, Issue.4, pp.277-284.

6- Chen Wang- Reay and Shain- Jong Chuu, (2004), Group Decision Making a Fuzzy Linguistic Approach For Evaluating the Flexibility in a Manufacturing System, **European Journal of Operational Research**, No.154, pp.563-572.

7- Diminnie, C. B. and N. K. Kwak, (1986), "A Hierarchical Goal Programming Approach to Reverse Allocation in Institutions of Higher Learning", **Journal of the Operational Research Society,** Vol. 37, No. 1, pp.59-66.

8- - Faizul Huq, and et al., (2004),A Simulation Analysis of Factor Influencing the Flow Time and Through- Put Performance of Functional and Cellular Layouts, **International Journal of Production Economics**, Vol.83, Issue.2, pp.116- 134.

9- Fatemi Ghomi and B. Ashjari, (2002), A Simulation Model For Multi-Project Resource Allocation, **International Journal of Project Management**, Vol.20, Issue.2, pp.127-130.

10- Gross, S. I. (1986), "A Process For Determining Priorities and Weights For Large – Scale Linear Programming" **Journal of The Operational Research Society**, Vol. 37, No. 8, pp. 779 – 789.

11- Ghomi Fatemi and B. Ashjari, (2002), A Simulation Model For Multi- Project Resource Allocation, **International Journal of Project Management**, Vol.20, Issue.2, pp.127-130.

12- Herreruas Rafeal, et al, (2003), A note on the Reasonableness of PERT Hypotheses, **Operations Research Letters**, Vol.31, Issue.1, pp.60-62.

13- Huq Faizul, et al., (2004),A Simulation Analysis of Factor Influencing the Flow Time and Through- Put Performance of Functional and Cellular Layouts, **International Journal of Production Economics**, Vol.83, Issue.2, pp.115-122.

14- Kai Pany -Wan, and et al., (2004), A Simulation Based Approach to the Parameter Estimation for the Three Parameter Gamma Distribution, **European Journal of Operational Research**, No.155, pp.675-682.

15- Kochel Peter., (2004), Finite Queuing Systems Structural Investigation and Optimal Design, **International Journal of Production Economics**, Vol.88, Issue.2, pp.157-178.

16- Jeng Wang, Kung-, et al, (2005), Production and Inventory Control with Chaotic Demands, **Omega**, No.33, p 98.

17 - Li, H. L. and S. Yu, (2000), "Solving Multiple Objective Quasi – Convex Goal Programming Problems by Linear Programming", **International Transactions in Operational Research**, No.7, pp. 265-284.

18- Muata Kweku Muata and Osei Bryson, (2004), Evaluation of Decision Trees, A Multi Criteria Approach, **Computers & Operations Research**, Vol.3, Issue.11, pp. 1933-1945.

19- Mohamed, R. H. S. A. Raafat, and Z. M. EL-Akkad, (2001), "Using Goal Programming in The Input – Output Table Analysis" **The 13th Annual Conference on Statistics & computer Modeling in Human & Social Science**, Faculty of Economics & Political Science – Cairo University.

20- Papchristos. S and K. Skouri, (2003), An Inventory Model With Deteriorating Items, Quantity Discount, Pricing and Time, Dependent Partial Backlogging, **International Journal of Production Economics**, Vol.83, Issue.3, pp.247-256.

21- Schniederjans, M. J. and C. M. Karuppan, (1995), "Designing A Quality Control System in A Service Organization: A Goal Programming Case Study" **European Journal of Operational Research**, No. 81, pp. 249-258

22 -Zhang –Zhe. G and Naishuo Tizn, (2004),An Analysis of Queuing Systems With Multi – Task Servers, **European Journal of Operational Research**, No.156, pp.375-389.