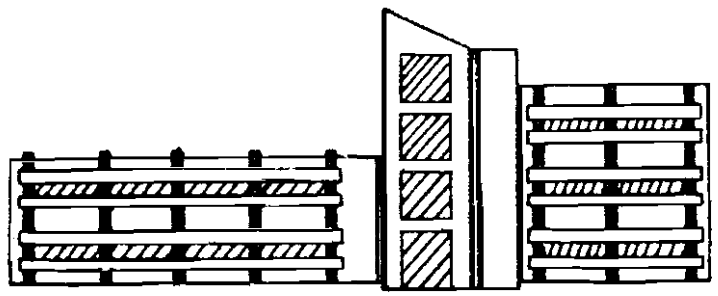
الجمهورية العربية السورية

جامعة تشرين

كلية الاقتصاد



الرياضيـــــات العاليـــــة

الدكتور

ابراهيم محمد العلي

الدكتور

هارون جميل علي

١٤٢٤ – ١٤٢٥ هـ

٢٠٠٣- ٢٠٠٤م

الدكتور ابراهيم محمد العلي- الدكتور هارون جميل علي

الرياضيات العالية

١٤٢٤ – ١٤٢٥ هـ

٢٠٠٣-٢٠٠٤م

سعر المبيع للطالب (٢٩٠) ل.س

جامعـــة تشريـــــن
كلية الاقتصاد

مقدمـــة
فـــي
الرياضيـــــات العاليـــــة

تأليف

الدكتور
ابراهيم محمد العلي

الدكتور
هارون جميل علي

لطلاب السنة الأولى ١٩٩٧

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

مقدمـــة

يُجمع العلماء على أن الرياضيات أصبحت تشكل بنيانا شامخا وصرحا كبيراً، وتتشعب إلى فروع متعددة واختصاصات متنوعة ،ويتألف قوامها من نظريات محكمة وطرائق رشيدة ، لايعتريها الشك من أي جانب ، ولايصيبها الخطأ من أي طرف. ولقد سمت بنفسها سموا لم يتصوره حتى أصحابها ، وشملت بفضلها كل العلوم والتطبيقات ، بدءا من تصميم الأزياء حتى غزو الفضاء ، فكان لها الدور الأول في دفع عجلة التطور الحضاري عبر التاريخ ، وساهمت خلال القرنين الماضيين في تحقيق قفزات هائلة في تطور جميع العلوم وتطبيقاتها المختلفة ، فاستفادت منها الفيزياء والكيمياء وعلوم الأرض والفضاء فائدة كبيرة ، حتى إن بعضهم سمّى القرن التاسع عشر بقرن ترييض العلوم الأساسية والهندسية . كما أطلق بعضهم الآخر على القرن العشرين قرن ترييض العلوم الاقتصادية والاجتماعية . والآن أصبح واضحاً للجميع أنه لايمكن لأي علم أن يتقدم إلا إذا أحسن استخدام الرياضيات في براهينه وتطبيقاته .

هكذا تتأكد لنا أهمية إدخال الطرائق الرياضية في دراسة وتحليل وتطوير الأنشطة الإقتصادية والإجتماعية ، ونجد أن علوماً كالإحصاء والتخطيط والإدارة والمحاسبة والإنتاج والتسويق والتسعير .... الخ .. لابد لها أن تعتمد بشكل أساسي على استخدام الرياضيات وطرائقها المختلفة في البراهين على نظرياتها وتطبيقاتها.

إننا عندما قمنا بإعداد موضوعات هذا الكتاب ، كان هدفنا الأول أن نقدم لطلابنا في كلية الاقتصاد مجموعة منسقة من الطرائق الرياضية الضرورية لفهم وخدمة المقررات الأخرى . ولهذا تضمن كتابنا عشرة فصول هي :

الفصل الأول : موجز في التحليل العددي والهندسة التحليلية ، ويتضمن عرضاً مختصرا لمفاهيم الأعداد وخواصها ، وفكرة مبسطة عن الأشعة وتطبيقاتها ، وشرحاً سريعاً لقضايا التحليل المزجي ، ومدخلاً لبعض مفاهيم الهندسة التحليلية .

الفصل الثاني : المصفوفات والمعينات ، ويتضمن مفاهيم مفصلة عن المصفوفات وخواصها، وأنواعها، وكيفية اجراء العمليات عليها . ثم يبحث في المعينات ، وطرائق إيجاد قيمها العددية .

الفصل الثالث : المعادلات الخطية ، ويبحث في التعاريف الأولية للمعادلات الخطية وخواصها، ويتناول الطرائق المختلفة لإيجاد حلولها المشتركة وخاصة طرائق :

كرامر – غاوص – مقلوب مصفوفة – المعاملات المنفصلة – المعاودة .

الفصل الرابع : المعادلات الجبرية والمتراجحات . وهو يتألف من جزأين أساسيين : الأول المعادلات الجبرية بمختلف درجاتها وأنواعها ، والثاني المتراجحات بكل أنواعها وأشكالها .

الفصل الخامس : التوابع لمتحول واحد (النهايات والاستمرار) ، ويتضمن دراسة خواص التوابع لمتحول واحد ، وتحديد النهايات في مختلف الحالات ، ودراسة الاستمرار في النقاط والمجالات .

الفصل السادس : مشتقات التوابع ، ويتضمن شرحاً لمفاهيم المشتق وخواصه ، ثم حساب مشتقات التوابع الشهيرة .

الفصل السابع : تطبيقات المشتقات ، ويشمل دراسة القيم القصوى للتابع ، ونظرية أوبيتال ، والنشر المنتهي للتوابع ودراسة منحنيات بعض التوابع الشهيرة والمستخدمة في عمليات التحليل الاقتصادي ، مثل التابع الأسي واللوغاريتمي و .... الخ .

الفصل الثامن : التكامل . ويتضمن التكامل غير المحدود وإيجاد التابع الأصلي ، وذلك باستخدام طرائق التكامل المعروفة ، وهي طريقة إيجاد التابع الأصلي مباشرة، وطريقة تغير المتحول ، وطريقة التكامل بالتجزئة ، وطريقة تفريق الكسور . ثم التكامل المحدود وحسابه .

الفصل التاسع : التوابع لمتحولين أو أكثر ، ويشمل دراسة لخصائص التوابع لمتحولين من حيث النهايات والاستمرار والاشتقاق والتفاضل والتكامل ، والنهايات القصوى الحرة والمقيدة ، و يبحث بإيجاز بعض خصائص التوابع لعدة متحولات .

الفصل العاشر : المعادلات التفاضلية والفرقية . ويشمل عرضا لمفاهيم المعادلات التفاضلية ، وأنواعها ، ثم شرحا لطرائق ايجاد حلولها الخاصة والعامة ، ويتبع ذلك تحليل لمفاهيم المعادلات الفرقية وكيفية ايجاد حلولها الخاصة والعامة .

وإننا إذ نضع هذا الكتاب بين أيدي زملائنا الكرام وطلابنا الأعزاء ، للإستفادة منه في حل المسائل الاقتصادية التي قد تعترضهم أثناء دراستهم الجامعية ، أو خلال حياتهم العملية ، لايمكننا أن ندعي الكمال والشمول فيه ، ولكننا نأمل أن نكون قد أصبنا هدفنا الأساسي ، ووفقنا في استدراج موضوعاته بشكل منسق ، وعرض البراهين فيه بأسلوب مبسط . وإذا فاتنا بلوغ ذلك الهدف في بعض الأحيان ، فإننا نلتمس العذر والصفح عن كل نقص لم ندركه ، أو لبس لم نشرحه ، أو إسهاب لم نقصده ، أو خطأ لم نلحظه . وسنكون سعداء بتلقي ملاحظات أو إنتقادات القراء الكرام ، لنأخذها بعين الاعتبار عند التدريس ، أو إعادة النشر ، ليتم إخراج هذا الكتاب بشكل يجعل منه أكثر نفعاً وفائدة للقراء الكرام .

المؤلفان

اللاذقية ٢٥ / ٥ / ١٩٩٧

أرقام العد العشرية

الأرقام العربية	الأرقام الرومانية المقابلة
1	I
2	II
3	III
4	IV
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII
9	IX
10	X
20	XX
50	L
100	C
500	D
1000	M

الأحرف الأبجدية العربية واللاتينية واليونانية

الأحرف الأبجدية العربية بالترتيب الأبجدي القديم	احرف الابجدية اللاتينية			أحرف الأبجدية اليونانية		
	شكل الحرف		لفظه	شكل الحرف		للفظه
	حرف صغير	حرف كبير		حرف صغير	حرف كبير	
ا	a	A	اي	α	Α	الفا
ب	b	B	بي	β	Β	بيتا
ج	c	C	سي	γ	Γ	غاما
د	d	D	دي	δ	Δ	دلتا
هـ	e	E	اي	ε	Ε	اسلون
و	f	F	اف	ζ	Ζ	زد
ز	g	G	جي	η	Η	ايتا
ح	h	H	ايتش	θ	Θ	ثيتا
ط	i	I	اي	ι	Ι	يوتا
ي	j	J	جي			
ك	k	K	كي	κ	Κ	كابا
ل	l	L	ال	λ	Λ	لمدا
م	m	M	ام	μ	Μ	ميو
ن	n	N	ان	υ	Ν	نيو
س	o	O	أو	ξ	Ξ	كسي
ع	p	P	بي	ο	Ο	أوميكرون
ف	q	Q	كيو (كو)	π	Π	بي
ص	r	R	ار	ρ	Ρ	رو
ق	s	S	اس	σ	Σ	سيكما
ر	t	T	تي	τ	Τ	تاو
ش	u	U	يو	υ	Υ	يوسلون
ت	v	V	في	φ	Φ	فاي
ث	w	W	دبل يو	ψ	Ψ	بسي
خ	x	X	اكس	ι	Χ	(كاي)
د	y	Y	واي	ω	Ω	أومنغا
ص ، ط ، ع	z	Z	زد			

بعض الرموز والمصطلحات الرياضية

مثال رياضي أو لفظي على استخدام الرمز أو المصطلح	المصطلح	الرمز
مجموعة البشر على سطح القمر	المجموعة الخالية	Φ
مجموعة الأشياء في الكون	المجموعة الكلية (اوميغا)	Ω
يوجد واحد على الأقل مستيقظ	توجد حالة واحدة على الأقل	$\exists$
مهما تكن x من B	مهما تكن	$\forall$
$\forall x \in B$ و		
$\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	جداء حدود	$\prod$
$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$	مجموع حدود (سيكما)	Σ
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	عاملي	!
$5!! = 5.3.1 \ , \ 6!! = 6.4.2.$	العاملي الفردي أو الزوجي	!!
مثلث قائم Δ	مثلث	Δ
زاوية قائمة $\llcorner$	زاوية	$\neg$
	قوس	$\frown$
$\overline{ab} \perp \overline{cd}$	التعامد	$\perp$
$\Delta_1 \sim \Delta_2$	التشابه	$\sim$
$\pi \approx 3,1416$	نسبة محيط الدائرة إلى قطرها	π
$e \approx 2,728$	العدد النيبري	e
$120^\circ \ , \ 30' \ , \ 45''$	الدرجة	$^\circ$
	الدقيقة	$'$
	الثانية	$''$
$\ln e = 1$	اللوغاريتم الطبيعي (بالنسبة لـ e)	ln

الرمز	المصطلح	مثال رياضي أو لفظي على استخدام الرمز أو المصطلح
$\log_b$	اللوغاريتم للأساس b	$\log_b b = 1$
		$\log_{10} 10 = 1$
lim	نهاية مقدار ما	$\lim \frac{1}{x} = 0$
ctc	المقدار الثابت	
sin	جيب	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
cos	جيب تمام	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
tg	ظل	$\operatorname{tg} 0 = 0$
sec	قاطع (قا)	$\sec = \frac{1}{cso}$
csc	قاطع تمام (نقا)	$\csc = \frac{1}{\sin}$
ctg	تظل	$ctg = \frac{1}{tg}$
arc sin	الزاوية التي تقابل الجيب	$arc\sin\frac{1}{2} = 30^o$
arc cos	الزاوية التي تقابل التجيب	$arc\cos\frac{1}{2} = 60^o$
arc tg	الزاوية التي تقابل الظل	$arc\,tg(1) = \frac{\pi}{4}$

بعض الرموز والمصطلحات الرياضية

مثال رياضي أو لفظي على استخداد الرمز	اسم الرمز أو لفظه	الرمز
5 % خمسة في المـ	النسـه المـوية	%
‰ 33 ثلاثة وثلاثون بالالف	النسبة في الالف	‰
$2 \neq 3$	عدم التساوي	$\neq$
$2.9 \approx 3$	التقارب	$\approx$
$3 > 2$	اكبر	$>$
$4 < 6$	اصغر	$<$
$x \geq a$	اكبر او يساوي	$\geq$
$x \leq b$	اصغر او يساوي	$\leq$
$1000 >> 3$	أكبر بكثير من	$>>$
$3 << 1000$	أصغر بكثير من	$<<$
$\lvert -3 \rvert = 3$	القيمة المطلقة	$\lvert\ \rvert$
$\sqrt[3]{8} = 2$	الجذر النوني	$\sqrt[n]{}$
$a < b < c \Rightarrow a < c$	الاقتضاء	$\Rightarrow$
$a < b \Leftrightarrow b > a$	التكافئ (الاقتضاء المزدوج)	$\Leftrightarrow$
المجموعة الشمسية $\in$ الارض	الانتماء	$\in$
مجموعة الفقراء $\notin$ الغني	عدم الانتماء	$\notin$
مجموعة سكان الوطن العربي $\supset$ سكان الكرة الأرضية	الاحتواء التام	$\supset$
	الاحتواء	$\subseteq$
الشعب = الذكور $\cup$ الاناث	الاجتماع (الاتحاد)	$\cup$
الرياضيات= مواد العلوم $\cap$ مواد الاقتصاد	التقاطع	$\cap$
جداء المجموعتين A و B هو $A \otimes B$	جداء المجموعات	$\otimes$

الفصـــــل الأول

الأعـــــداد والأشعـــة

أولا – الأعـــداد :

لقد عرف الإنسان الأعداد منذ القدم ، وقام بتطوير مفاهيمها عبر العصور حتى توصل إلى عدة مجموعات من الأعداد هي :

I – مجموعة الأعداد الطبيعية N :

وهي أولى الأعداد التي استخدمها الإنسان للتعبير عن المقادير والكميات التي يتعامل معها ، ولقد استخدم في البداية وسائل مختلفة للتعبير عن هذه الأعداد كالحصا والعيدان والإشارات على الجدران . ثم راح يخترع رموزاً مختصرة للتعبير عنها حتى توصل إلى الرموز العربية المعروفة في جميع أنحاء العالم وهي :

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 والتي تعتمد على نظام العد العشري المعروف .

يرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز N ، وتكتب على الشكل التالي :

$$N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... \}$$

وهي مجموعة غير منتهية وغير محدودة من الأعلى ولكنها محدودة من الأدنى بالعدد 0 .

ويمكن إجراء بعض العمليات عليها كعمليات الجمع والضرب والرفع إلى الأس ، ولكنها لاتقبل إجراء عمليات الطرح والقسمة والجذر ، إلا في بعض الحالات الخاصة جداً .

الصحيحة Z :

وهي المجموعة التي تتضمن الأعداد الطبيعية ونظائرها السالبة ، ويرمز لها بالرمز **Z** ، وتكتب على الشكل التالي :

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots . -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \ldots . \}$$

وهي مجموعة غير منتهية ، وغير محدودة من الأعلى والأدنى . ويمكن إجراء بعض العمليات عليها كعمليات الجمع والضرب والطرح والرفع إلى أس موجب . ولكنها لاتقبل إجراء عمليات القسمة والجذر والرفع إلى أس سالب إلا في حالات خاصة .

III – مجموعة الأعداد العادية Q :

يمكن التوصل إلى تعريف هذه المجموعة انطلاقاً من تعريف العدد العادي، والذي يعرف بأنه ناتج قسمة عددين صحيحين ، فإذا كان k و m صحيحين و $(k \neq o)$ فإن العدد المعرف بالعلاقة :

$$q = \frac{m}{k} \qquad (k \neq o)$$

هو عدد عادي ، ويمكن أن يكون صحيحاً أو كسرياً ، موجباً أو سالباً .

وهكذا نجد أن مجموعة الأعداد العادية أوسع من مجموعة الأعداد الصحيحة وتشملها ضمناً ، ويرمز لها بالرمز **Q** ، وتكتب على الشكل التالي :

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{k} : m , k \in Z ; k \neq o \right\}$$

وهي مجموعة غير منتهية وغير محدودة من الطرفين الأعلى والأدنى ، ويمكن إجراء بعض العمليات عليها كعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة ، ولكنها لاتقبل عمليات الجذر والرفع إلى أس إلا في حالات خاصة .

IV – مجموعة الأعداد الحقيقية R :

لقد اكتشف الإنسان من خلال تجاربه الحياتية أن هناك أعداداً غير عادية ، ويحكى ان أميرا طلب من أحد المهندسين أن يبني له حماما مربعا جديدا ، بحيث تكون مساحته ضعف مساحة الحمام القديم . فواجه ذلك المهندس معضلة غير قابلة للحل لأنه لم يتمكن من حساب طول ضلع الحمام الجديد باستخدام الأعداد العادية . حيث افترض أن مساحة الحمام القديم تساوي (1) فتكون مساحة الحمام الجديد (2) فإذا كان طول الضلع هو x ، فإن المساحة الجديدة تساوي :

$$x^2 = 2$$

وهكذا وجد نفسه أمام حل لهذه المعادلة وهو $x = \pm \sqrt{2}$ ، وهو عدد غير عادي لأنه لاينتج عن قسمة عددين صحيحين . ومن هنا يمكننا أن نلاحظ أن هناك الكثير من هذه الأعداد غير العادية الموجودة فعلاً وغير المعروفة في مجموعة الأعداد العادية مثل :

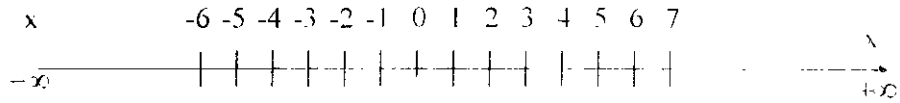
$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{0,2}$ ..... , $\pi = 3.1416$ و $e = 2.7182...$

ولهذا سنرمز لهذه الأعداد غير العادية وما شابهها بالرمز S . مما تقدم يمكننا أن نعرف مجموعة الأعداد الحقيقية بأنها اجتماع مجموعتي الأعداد العادية Q وغير العادية S . ويرمز لها بالرمز R وتكتب على الشكل التالي :

$$R = Q \cup S$$

ومن الواضح أن R أصبحت تشمل الأعداد الطبيعية والصحيحة والعادية وغير العادية . ويمكننا إجراء بعض العمليات عليها كعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والرفع إلى أس صحيح ، والجذر التربيعي على الأعداد الموجبة فقط ، وتبقى عمليات الجذور الزوجية واللوغاريتمية على الأعداد السالبة غير معرفة في R ، كما إن عملية الرفع إلى أس غير صحيح (عادي) غير معرفة إلا في بعض الحالات الخاصة .

يمكن أن تُمثل الأعداد الحقيقية على المحور الحقيقي $X'OX$ الممتد من $-\infty$ إلى $+\infty$ كما في الشكل التالي :



شكل رقم (١) محور مجموعة الأعداد الحقيقية R

وتلعب مجموعة الأعداد الحقيقية – رغم نواقصها السابقة – دوراً كبيراً في العمليات الحسابية ، فهي تستخدم كثيرا في حلول المعادلات الجبرية لذلك سنستعرض أهم الخواص التي تحققها أعداد هذه المجموعة بشكل مختصر وفق ما يلي :

إذا كان n و m عددين صحيحين وكانت a و b و c أعدادا من R فإن :

1- $a + b = b + a$

2- $a + (b + c) = (a + b) + c$

3- $a \cdot b = b \cdot a$

4- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

5- $a(b + c) = ab + ac$

6- $\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{\text{n مرة}} = a^n$

7- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

8- $(a^n)^m = a^{n.m}$

9- $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$

10- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq o)$

11- $a^o = 1$ $(a \neq o)$

12- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq o)$

13- $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $(a > o)$

14- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $(a > o , b > o)$

15- $\log_{10} b = a \Leftrightarrow b = 10^a$ $(b > o)$

$\log_e b = a \Leftrightarrow b = e^a$

16- $\log (b \ c) = \log b + \log c$ $(b > o , c > o)$

17- $\log (b / c) = \log b - \log c$ $\left(\frac{b}{c} > o \ \ c \neq o\right)$

18- $\log b^a = a \log b$ $(b > o)$

19- $|a| = \begin{cases} a & : a > 0 \\ -a & : a < 0 \end{cases}$

20- $|a + b| \leq |a| + |b|$

21- $|a - b| \geq |a| - |b|$

22- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

23- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $, \ b \neq o$

24- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < +a$

25- $|x| > a \Leftrightarrow x > +a , x < -a$

V – مجموعة الأعداد المركبة (التخيلية) C :

١- مفاهيم عامة :

لقد لاحظنا أن عملية الجذر التربيعي بقيت غير معرفة على الأعداد السالبة من المجموعة R ، وهذا ما يعيق عملية إيجاد حل للمعادلة $x^2 = -1$ ضمن أعداد تلك المجموعة . وتذليلاً لهذه العقبة قام الرياضيون بإفتراض وجود عدد تخيلي رمزوا له بالرمز i بحيث يكون مربعه مساوياً (1-) . أي وضعوا تعريفاً رياضياً للعدد i وهو

أن يكون :

$$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$$

وبناء على هذا التعريف أمكن حساب القوى المختلفة لـ (i) وهي تساوي كما يلي :

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 . i = -i \qquad i^4 = i^2 . i^2 = +1$$

$$i^5 = i^4 . i = +i \qquad i^6 = i^5 . i^5 = +i^2 = -1$$

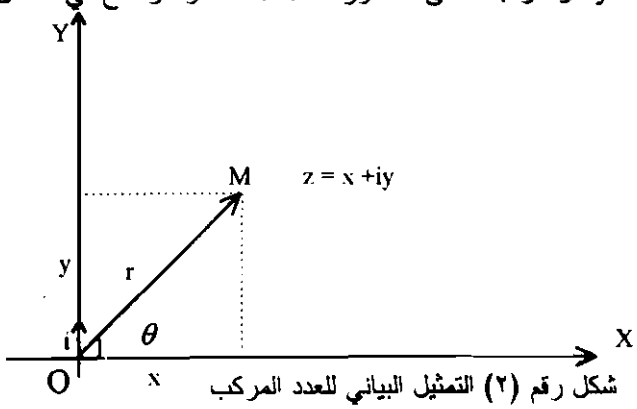
وتعميماً لمفهوم الأعداد ، تمّ الاصطلاح على كتابة أي عدد على شكل مركب من جزأين حقيقيين a و b ، بحيث يبقى الجزء الأول a حراً ، ويضرب الجزء الثاني b بالعدد التخيلي i ، وذلك وفق التالي :

$$z = a + ib$$

حيث أن a و b عددان حقيقيان ، وأن z هو العدد المركب الناتج عنهما . سمّيت مجموعة هذه الأعداد بالأعداد المركبة ، ويرمز لها بالرمز **C** ، ومن الواضح أن المجموعة **C** تشمل المجموعة **R** ، لأن أعداد المجموعة **R** هي حالة خاصة من المجموعة **C** والتي يكون فيها $b = o$.

٢- التمثيل البياني للأعداد المركبة :

إذا قمنا بتمثيل العدد المركب $z = x + iy$ على محورين إحداثيين متعامدين في المستوي XOY بحيث يكون الجزء x هو مركبته أومسقطه على المحور $X'OX$ والجزء y هو مركبته على المحور $Y'OY$ كما هو موضح في الشكل التالي :



شكل رقم (٢) التمثيل البياني للعدد المركب

وهكذا نجد تطابقا بين مجموعة الأعداد المركبة C ومجموعة نقاط المستوي XOY. بينما تمثل المجموعة R على المحور $X'OX$ فقط .

وبناء على هذا التمثيل يمكننا التعبير عن أي عدد مركب بواسطة شعاع $\vec{OM}$ مبدؤه المركز (o,o) ونهايته النقطة (x,y) . ومن الملاحظ أن طويلة ذلك الشعاع تساوي :

$$r = |OM| \quad \sqrt{x^2 + y^2}$$

وهو يصنع زاوية θ بينه وبين الاتجاه الموجب للمحور ox .

٣- الشكل المثلثي للأعداد المركبة :

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + iy$ بواسطة التوابع المثلثية $\sin\theta$ و$\cos\theta$ ، وذلك بملاحظة أن الشعاع $\vec{OM}$ يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وإن طويلته تساوي r فيكون لدينا

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

وبالتعويض في العبارة : $z = x + iy$ نحصل على :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وبفرض أن θ تقاس بالراديان وبالاستفادة من العلاقتين المثلثيتين التاليتين :

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$$
$$\sin\theta = \sin(\theta + 2k\pi)$$

حيث أن .... $k = 0, 1, 2, 3$ ، وبذلك يمكننا كتابة العدد المركب z على الشكل :

$$z = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$$

أما إذا كانت θ مقاسة بالدرجة فيتم استبدال العدد (2π) بـ 360 درجة فنحصل على علاقة مشابهة، تتضمن متحولين أساسيين هما r و θ ، بدلاً من y و x .

٤- الشكل الأسي للعدد المركب :

نعلم من التحليل الرياضي أن :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

تسمى هذه العلاقة علاقة أولر ، حيث e هو العدد النيبري المساوي 2,7182 = e وبناء على ذلك يمكننا كتابة أي عدد مركب z على الشكل التالي : $z = re^{i\theta}$

او بشكل عام كما يلي :

$$z = r\,e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ومن المفيد جدا أن نتذكر أن المحورين r و θ يرتبطان مع المتحولين x و y بواسطة العلاقتين التاليتين

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = arctg\,\frac{y}{x}$$

وهكذا نجد أنه يمكننا كتابة العدد المركب على أحد الأشكال التالية :

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

٥ - العمليات الأساسية على C :

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

أما بالنسبة لعملية القسمة فيكفي بحسب أن نعرف العدد المرافق للعدد z ، والذي

سنرمز له بالرمز $\bar{z}$ ، وهو العدد الذي

ويمكننا بسهولة أن نستنتج أن

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$$

وبذلك نجد أن :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ و } y_1 = y_2$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ و } y_1 = 0$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$$

نعتمد على العمليات المستخدمة للشكلين الأسي والمثلثي للعدد المركب حيث :

أ) $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

بحسب [illegible]

أ) $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

تسمى العلاقتان (3) و(4) نظرية دوموافر Demoiver

٦- خواص الأعداد المركبة :

1) $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

2) $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

3) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

5) $Ln\, z = Ln(re^{i\theta}) = Ln\, r + i\theta$

6) $\lg_{10} z = \lg_{10}(re^{i\theta}) = \lg_{10} r + i\theta \lg_{10} e$

7) $z + 0 = z$

8) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

9) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

10) $0 \cdot z = 0$

11) $1 \cdot z = z$

12) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

13) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

14) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

ثانياً - الأشعة :

لقد لاحظنا أنه بإمكاننا تمثيل الأعداد المركبة في المستوي [2] في نفس المستوي XOY أي في R^2 . وتعميماً لهذه الفكرة ونحو[illegible] والطبيعية ، تمّ تعريف الأشعة في فضاء ذي n بعداً أي في الفضاء R^n

يعرف الشعاع في R^n [illegible] على الشكل التالي :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

تسمى الأعداد x_1 x_2 [illegible] بمركبات [illegible] في R^n

يمكن أن نميز بين عدة أنواع من الأشعة :

١- الشعاع السطر ويكتب على الشكل التالي : $A = [\, a_1 \;\; a_2 \;\ldots\ldots\; a_n \,]$

٢- الشعاع العمود ويكتب على الشكل التالي : $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$

٣- **الشعاع الصفري** : يمكن أن يكون شعاع سطر أو شعاع عمود ، جميع مركباته معدومة ، ويرمز له بالرمز O ، ويكتب على الشكل التالي :

$$O = [o.o\ldots\ldots.o.] \;\; ; \;\; O = \begin{bmatrix} o \\ o \\ \\ o \end{bmatrix}$$

العمليات على الأشعة :

١- **المساواة** : يتساوى شعاعان A و B من R^n ، إذا تساوت مركباتهما المتقابلة . أي أنه إذا كان :

$$A = B \Leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)$$
$$\Leftrightarrow a_1 = b_1 \; ; \; a_2 = b_2 \; ; \ldots\ldots ; a_n = b_n$$

٢- الجمع والطرح :

مجموع شعاعين X , Y من R^n ، يساوي شعاعاً ثالثاً مركباته مجموع المركبات المتقابلة :

$$X \pm Y = (x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n) \pm (y_1 , y_2 , \ldots\ldots , y_n)$$
$$= (x_1 \pm y_1 , x_2 \pm y_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots , x_n \pm y_n)$$

٣ - جداء شعاع X بعدد حقيقي λ هو شعاع آخر ويساوي :

$$\lambda . X = \lambda (x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n) = (\lambda x_1 , \lambda x_2 , \ldots\ldots , \lambda x_n)$$

ونجد أن :

$$0 . x = 0$$
$$1 . x = x$$

٤- خواص العمليات السابقة :

لتكن X , Y , Z ثلاثة أشعة من R^n ، λ ، μ عددان من R ،فإن :

1) $X + Y = Y + X$

2) $(X + Y) + Z = X + (Y + X)$

3) $\lambda (X \pm Y) = (\lambda X \pm \lambda Y)$

4) $(\lambda \pm \mu) X = \lambda X \pm \mu X$

5) $\lambda (\mu X) = (\lambda \mu) X$

٥ – **جداء شعاعين** : إن جداء شعاع سطر X بشعاع عمود Y وكلاهما من R^n ، هو عدد حقيقي ، وليس شعاعاً ، ويُعرف جداؤهما على الشكل التالي :

$$X \times Y = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

عدد حقيقي $= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_n y_n$

مثال : إذا كان أحد المصانع ينتج أربعة أنواع من المنتجات ، وكانت كمية منتجاته منها في اليوم هي كما يلي :

$$Q = (12 , 8 , 11 , 18)$$

فإذا علمنا أن سعر الواحدة من هذه المنتجات هو على الترتيب كما يلي :

$$P = (15 , 5 , 10 , 20)$$

فما هي القيمة الاجمالية لمنتجات ذلك المصنع في اليوم ؟

من الواضح أن القيمة الاجمالية تنتج من جداء الكميات في أسعار الواحدة لكل منتج ، ثم جمع النواتج الأربعة ، وهي تحسب بواسطة جداء الأشعة كما يلي :

$$Q.P = [12,8,11,18] \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = 180 + 40 + 110 + 360 = 690 \; L.S$$

وهو عدد حقيقي وليس شعاعاً .

٦– الارتباط الخطي للأشعة :

نقول عن شعاع V من R^n أنه مرتبط خطيا بالأشعة $(a_1 , a_2 , \ldots a_m)$ من R^n [ليس من الضرورة أن يكون $n = m$] ، اذا أمكن التعبير عن الشعاع V بدلالة

بدلالة الأشعة : $a_1 , a_2 , \ldots\ldots , a_m$ بعلاقة خطية من الشكل :

$$V = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots\ldots + \lambda_m a_m$$

حيث الأعداد $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots\ldots , \lambda_m$ لاتساوي الصفر.

مثال : ليكن الشعاع $V(14 , -10 , 7)$ من R^3 والشعاعين $a_1 = (4 , 1 , 2)$ ، $a_2 = (2 , -4 , 7)$ من R^3 أيضا . فنجد أنه يمكننا كتابة V بدلالة a_1 , a_2 على الشكل التالي :

$$V = 2a_1 + 3a_2$$

$$= 2(4 , 1 , 2) + 3(2 , -4 , 1) = (14 , -10 , 7) = V$$

أي أن V مرتبط خطيا بالشعاعين a_1 , a_2 .

ملاحظة : إذا كان V مرتبطاً خطيا مع a_1 , a_2 . فإنه يمكننا القول أن a_1 **مرتبط خطياً** مع V و a_2 ، أو a_2 مرتبط خطياً مع V و a_1 . لأنه يمكننا التعبير عن أحد هذه الأشعة بدلالة الشعاعين الآخرين بعلاقة ارتباط خطي

٧- الاستقلال الخطي للأشعة :

نقول عن جملة الأشعة $a_1 , a_2 , \ldots , a_m$ من R^n ، إنها أشعة مستقلة خطياً ، إذا لم تكن مرتبطة خطياً . أي إذا لم يكن بالإمكان حساب أحدها بدلالة الأخرى .

وبتعبير آخر إذا كانت الأشعة $a_1 , a_2 , \ldots , a_m$ مستقلة ، فإن وجود أية علاقة خطية بينها مثل العلاقة :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots\ldots + \lambda_m a_m = 0$$

لا تتحقق إلا إذا كانت جميع الأعداد $(i = 1 , 2 , \ldots , m) ; \lambda_i$ معدومة أي

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots \lambda_m = 0 .$$

ولذلك يستخدم هذا الشرط للبرهان على استقلالية الأشعة أو ارتباطها .

مثال : لنأخذ الأشعة $a_1 = (1 , 2 , -1)$ $a_2 = (2 , 1 , 0)$ $a_3 = (0 , -2 , 1)$

ولنبرهن على أنها مستقلة خطياً . لذلك نشكل منها العبارة الخطية التالية :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$

ثم نقوم بإجراء الحسابات فنجد أن :

$$\lambda_1 (1 , 2 , -1) + \lambda_2 (2 , 1 , 0) + \lambda_3 (0 , -2 , 1) = (0 , 0 , 0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 , 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 , -\lambda_1 - \lambda_3) = (0 , 0 , 0)$$

وبإجراء المطابقة نحصل على المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

نحل هذه المعادلات بطريقة التعويض أو غيرها ، فنحصل على الحل التالي :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

أي الأشعة a_1 ، a_2 ، a_3 مستقلة خطيا .

٨- القاعدة (أو الأساس) :

نقول عن أية جملة من الاشعة مثل a_n ، ... ، a_2 ، a_1 (وعددها n من الفضاء R^n) ، إنها تشكل قاعدة في ذلك الفضاء . إذا كانت مستقلة خطيا ، ومولدة لعناصر الفراغ R^n . أي يمكن التعبير عن أي شعاع V من R^n بدلالتها بواسطة علاقة خطية من الشكل :

$$V = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots\ldots + \lambda_n a_n \qquad (\lambda_i \neq 0)$$

وذلك دون أن تكون الأعداد λ_i أو بعضها معدوما .

ومن الواضح أنه يمكن استبدال الشعاع V بأي شعاع من أشعة القاعدة ، مثل الشعاع a_r (حيث $\lambda_r \neq 0$) وبالتالي يمكن حساب a_r بدلالة الأشعة الأخرى .

$$a_1 , a_2 , \ldots\ldots , V , \ldots\ldots , a_n$$

فنحصل على العلاقة :

$$a_r = -\frac{\lambda_1}{\lambda_r} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_r} a_2 \ldots\ldots + \frac{1}{\lambda_r} V \ldots\ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_r} a_n$$

وهذا يعني أن الأشعة الجديدة $a_1 , a_2 \ldots V \ldots a_n$ هي أشعة مستقلة خطياً وتشكل قاعدة جديدة في الفضاء R^n .

وهكذا نستطيع أن ننشيء عدداً لانهائيا من القواعد الشعاعية المختلفة عن بعضها البعض في الفضاء R^n . لأن أي جملة مستقلة خطياً من R^n تصلح لأن تكون قاعدة في

ذلك الفضاء . وخير مثال على الأشعة التي تشكل قاعدة في R^2 ، الشعاعان الواحديان $e_1(1,0)$ $e_2(0,1)$. وفي R^3 الأشعة الواحدية

$e_3(0,0,1)$. $e_2(0,1,0)$. $e_1(1,0,0)$

وفي الفضاء R^n الأشعة الواحدية التالية :

$e_n(0,0,\ldots,0,1) \ldots e_2(0,1,0,\ldots,0) \ldots e_1(1,0,0,\ldots,0)$

وذلك لأنها مستقلة خطياً . حيث يمكن التعبير بدلالتها عن أي شعاع في فضائها مثل $V(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ ، إذ نجد أن :

$$V = v_1e_1 + v_2e_2 + \ldots + v_ne_n$$

تسمى الجملة $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ بالأساس الطبيعي أو القانوني للفراغ R^n .

٩- بعض خواص الإرتباط والاستقلال الخطي :

- إذا وجد بين الأشعة $a_1,a_2,\ldots,a_m$ شعاعان متساويان أو متناسبان ، فهذا يعني ان هذه الأشعة مرتبطة خطيا .

- إذا أضفنا إلى جملة الأشعة المرتبطة خطيا عددا آخر من الأشعة المرتبطة خطياً ، فإن أشعة الجملة الجديدة ، تكون مرتبطة خطيا أيضاً .

- إذا كانت جملة الأشعة $a_1,a_2,\ldots,a_m$ مستقلة خطيا ، فإن اشعة أي جزء منها تكون مستقلة خطيا .

- إذا كان بالإمكان التعبير عن جملة الأشعة $a_1,a_2,\ldots,a_m$ بواسطة جملة أخرى $b_1,b_2,\ldots,b_m$ وكان يمكن التعبير عن الثانية بواسطة جملة ثالثة $c_1,c_2,\ldots,c_m$ ، عندئذ يمكن التعبير عن جملة الأشعة الأولى $a_1,a_2,\ldots,a_m$ بواسطة الأشعة الأخيرة $c_1,c_2,\ldots,c_m$.

ثالثاً - تشكيل المجموعات :

إذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من n عنصرا مختلفا مثل :

$$A_n = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n\}$$

فإنه يمكننا أن نشكل من هذه المجموعة مجموعات كثيرة . سنميز هنا بين الأنواع التالية :

١ – المتبادلات :

وهي جملة المجموعات من نفس الحجم n ، التي يمكن تشكيلها من عناصر المجموعة

A_n ، بتغيير ترتيبها داخل المجموعة .

ويبرهن على أن عدد متبادلات المجموعة ذات الحجم n هو P_n ويساوي

$$P_n = n!$$

حيث n! تشير إلى عاملي n أي أن $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

وكمثال على ذلك نجد أنه يمكن لمجلس الادارة المؤلف من 5 أعضاء أن يوزع المهام بين أعضائه بعدد من الطرق يساوي :

$$P_n = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

ملاحظة هامة : إذا كان بعض عناصر المجموعة A_n مكرراً . فإننا نقسم العدد n! على عاملي عدد مرات تكرار كل منها .

وكمثال على ذلك نجد أن عدد متبادلات المجموعة

$$A = \{aa, bbb, ccccc\}$$

يساوي $P'_n = \dfrac{10!}{2!3!5!}$

وبصورة عامة يكون لدينا عدد المتبادلات

$$P_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots . n_n!}$$

حيث n_i هو عدد مرات تكرار العنصر a_i ، وإذا كان $n_i = 1$ فإن $P_n = n!$ كما سبق وذكرنا في البداية .

٢ – المرتبات :

وهي جملة المجموعات الجزئية من الحجم K ، التي يمكن تشكيلها من المجموعة A_n ، حيث ($k \le n$) ، والتي تختلف عن بعضها باختلاف عناصرها ، أو باختلاف ترتيب تلك العناصر داخلها .

ويبرهن على ذلك ... يساوي :

$$(n-k)!$$

وكمثال على ذلك نجد أن عدد المرتبات المختلفة ، التي يمكن تشكيلها بدون اعادة وبحجم k=3 ، من المجموعة $A=\{a,b,c,d,e\}$ حيث n = 5 يساوي

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 60$$

ملاحظة هامة : إذا كانت شروط التشكيل تسمح بتكرار العناصر ضمن المرتبات (حالة السحب مع الإعادة) ، فإن عدد المرتبات الممكنة يساوي

$$A_n'^k = n^k$$

مثال ذلك إن عدد الأرقام ذات ثلاث مراتب ، التي يمكن تشكيلها من مجموعة الأرقام العشرية $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ يساوي

$$A_{10}'^3 = 10^3 = 1000$$

وهي تشمل جميع الأعداد من 0 إلى 999 .

٣ - المتوافقات :

هي جملة المجموعات الجزئية من الحجم k ، التي يمكن تشكيلها من المجموعة A_n ، حيث ($k \le n$) ، والتي تختلف عن بعضها باختلاف عناصرها فقط . أي أن المتوافقات لاتفرق بين المجموعات $\{a\ b\ c\}$ و $\{b\ c\ a\}$ و $\{c\ b\ a\}$ ، لأنها تحوي نفس العناصر . ولذلك نعتبرها متوافقة واحدة .

يبرهن على أن عدد المتوافقات التي يمكن تشكيلها بحجم k ، من أصل n ، في حالة السحب بدون اعادة يعطى بالعلاقة :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

وكمثال على ذلك نجد أن عدد المتوافقات التي يمكن تشكيلها بحجم k = 3 من الأحرف $A_5 = \{a,b,c,d,e\}$ يساوي

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

وهنا نلاحظ أن عدد المتوافقات يرتبط بعدد المتبادلات والمرتبات بالعلاقة

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{K!} = \frac{\text{عدد المرتبات}}{\text{عدد المتبادلات}}$$

ملاحظة هامة : إذا كانت شروط التشكيل ، تسمح بتكرار العناصر ضمن المتوافقة ، (حالة السحب مع الإعادة) ، فإن عدد المتوافقات الممكنة يساوي :

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

مثال : إن عدد المتوافقات التي يمكن تشكيلها مع الإعادة بحجم $k = 3$ من المجموعة $A_5 = \{a, b, c, d, e\}$ يساوي :

$$C_{n+k-1}^k = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

وهي تشمل جميع المتوافقات ذات العناصر المكررة داخلياً ، مثل $\{a\ a\ a\}$ و $\{a\ a\ b\}$ .... الخ .

٤ - عدد طرق تجزئة المجموعة A_n :

لنفرض أننا نريد تجزئة المجموعة A_n إلى m مجموعة جزئية ، بحجوم $k_1, k_2, \ldots k_m$ حيث أن $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$. فإن عدد طرق التجزئة يساوي :

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,\ldots\ldots k_n!}$$

مثال : عدد طرق تجزئة المجموعة : $A_n = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}\}$ إلى ثلاث مجموعات بحجوم $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$ يساوي :

$$P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520 \quad \text{(طريقة)}$$

٥- دستور ذي الحدين لنيوتن :

إن دستور ذي الحدين هو مفكوك التركيب $(a + b)^n$ ، ويعطى بالعلاقة :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k}\, a^{n-k}\, b^k$$

فمثلاً نجد أن :

$$(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k\, x^k\, y^{5-k}$$

$$= c_5^0 x^5 y^0 + c_5^1 x^4 y^1 + c_5^2 x^3 y^2 + c_5^3 x^2 y^3 + c_5^4 x^1 y^4 + c_5^5 x^0 y^5$$

$$= y^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5$$

بناء على عدد المتوافقات ودستور ذي الحدين ، يمكننا استخلاص النتائج التالية :

١ -
$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

٢- إذا وضعنا $a = 1$, $b = 1$ في العلاقة السابقة ، نجد أن :

أي أن :
$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 1^k \cdot 1^{n-k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

٣ - إذا وضعنا $a = 1$, $b = x$ نجد أن :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots + x^n$$

٤ - إذا وضعنا $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$ فإننا نجد أن :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots\ldots \approx e$$

إن نهاية هذا الطرف الأيسر ، عندما نستبدل n بعدد حقيقي x يتناهى إلى اللانهاية ، تساوي العدد e ، أي أن :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828\ldots$$

وكذلك يكون لدينا

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2{,}71828\ldots$$

وكذلك يكون لدينا

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2{,}71828\ldots$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

رابعاً : المتواليات العددية :

نقول عن الأعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ إنها متوالية عددية ، إذا كانت حدودها تنشأ عن بعضها البعض وفق علاقة أو قانون معين . نسمي a_1 الحد الأول للمتوالية و a_n حدها الأخير و a_k حدها العام .

أ – المتوالية الحسابية :

وهي المتوالية التي يكون فيها الفرق بين أي حد وسابقه يساوي مقداراً ثابتاً r . يسمى المقدار r أساس المتوالية . أي أن حدود المتوالية الحسابية تحقق الشرط التالي

$$a_k - a_{k-1} = r \qquad r \neq 0$$

حيث أن $(k=2,3,\ldots\ldots,n)$. وهكذا نجد أنه يمكننا حساب أي حد من حدود المتوالية الحسابية من خلال العلاقات التالية : a_1 a_1

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$a_k = a_{k-1} + r = a_1 + (k-1)r$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots$$
$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r$$

خواص المتوالية الحسابية :

١- مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً ، وهو $2a_1 + (n-1)r$ لأن :

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + [a_1 + (n-2)r] = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + [a_1 + (n-3)r] = 2a_1 + (n-1)r$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

٢ – **مجموع حدود المتوالية الحسابية** ، والذي سنرمز له بـ S_n يساوي

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$

ويمكن كتابته على شكل معكوس كما يلي :

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_k + \ldots\ldots + a_2 + a_1$$

و بجمع هاتين العلاقتين نحصل على :

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

وبما أن عدد الأقواس يساوي n قوساً ، وبالإستفادة من الخاصة السابقة نجد أن :

$$2S_n = [2a_1 + (n-1)r] \cdot n$$

وهكذا نجد أن :

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r] \qquad (A)$$

ومن ناحية أخرى ، إن مجموع أي حدين متقابلين يساوي ايضاً $(a_1 + a_n)$ ، لذلك يمكننا كتابة المجموع السابق كما يلي :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (B)$$

٣- تكون المتوالية متزايدة إذا كان $r > 0$ ومتناقصة إذا كان $r < 0$.

مثال ١ : أدرس المتوالية التالية وأوجد مجموع حدودها

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20

من خلال دراسة الحدود ، نجد أن الفرق بين أي حد وسابقه يساوي 2 ، أي أن المتوالية حسابية ، أساسها $r = 2$ ، ومجموع حدودها يساوي :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(2 + 20) = 110$$

مثال ٢ : أوجد مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى n .

إن الأعداد الطبيعية المذكورة هي :

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.,....., n - 1 , n

وهي تشكل متوالية حسابية أساسها $r = 1$ وعدد حدودها يساوي n حداً . وبذلك نجد أن مجموعها يساوي ،

مثال 3 : حدد نوع المتوالية التالية ، وأوجد أساسها ومجموعها

2, 6, 18, 54, 162 , 486

نلاحظ أن نسبة أي حد على سابقه تساوي 3 .أي أنها متوالية هندسية أساسها $q = 3$

وعدد حدودها $n = 6$ ، ومجموعها يساوي $G_n = 2\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728$

مثال 4 : إذا كان مجموع حدود متوالية هندسية يساوي 242 وكان أساسها $q = 3$ وعدد حدودها $n = 5$ ، فما هو حدها الاول وحدودها المتتالية .

من علاقة المجموع G_n نجد أن :

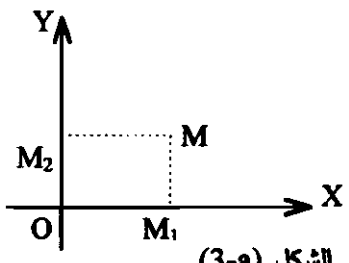
$$242 = a_1 \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{242}{121} = 2$$

والحدود المتتالية هي : 2, 6 , 18, 54, 162

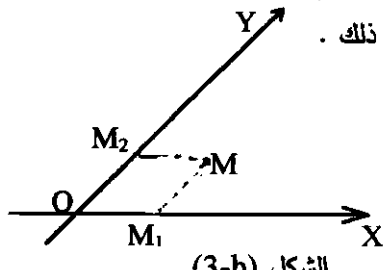
خامساً : مبادىء الهندسة التحليلية :

تعريف : جملة المحاور الإحداثية الديكارتية :

إن تقاطع محورين احداثيين OX ، OY في نقطة واحدة O ، يشكل جملة محاور احداثية ديكاريتية OXY ، حيث يحدد على كلا المحورين واحدة قياس خاصة للأبعاد. يسمى المحور OX محور الفواصل ، والمحور OY محور التراتيب . كما تسمى النقطة O مبدأ أو مركز جملة الإحداثيات . تسمى الجملة OXY ، جملة محاور احداثية متعامدة ، عندما تكون الزاوية بين محوريها قائمة (الشكل 3-a) . كما تسمى جملة محاور مائلة ، إذا كانت الزاوية بين المحورين OX وOY زاوية حادة (الشكل 3-b) . سوف نعتمد جملة المحاورر القائمة في هذا الكتاب ، ما لم ينص على خلاف ذلك .



الشكل (3-a)



الشكل (3-b)

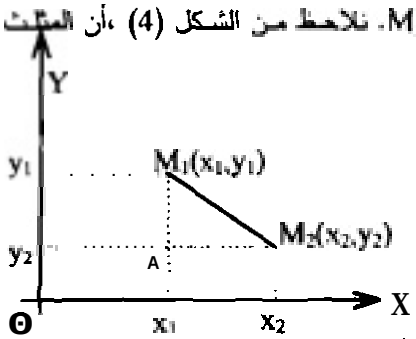
الشكل (3)

بواسطة هذه المحاور المتعامدة ، يمكن تحديد وضع اي نقطة M في المستوي بشكل وحيد ، بإيجاد مسقطي هذه النقطة على المحورين الإحداثيين OX و OY ، أي بواسطة القطعتين المستقيمتين الموجهتين OM_1 و OM_2. يسمى البعد الجبري $\overline{OM_1} = x$ فاصلة النقطة M و $\overline{OM_2} = y$ ترتيب النقطة M . وبذلك نسمي x و y إحداثيي النقطة M ، ونكتب M (x,y) .

٢ ـ البعد بين نقطتين في المستوي :

لدينا النقطتان $M_1(x_1,y_1)$ و $M_2(x_2,y_2)$ المنسوبتان إلى جملة المحاور الإحداثية القائمة OXY .

لإيجاد العلاقة التي تعطي البعد بين M_1 و M_2. نلاحظ من الشكل (4) ،أن المثلث AM_1M_2 قائم في A .



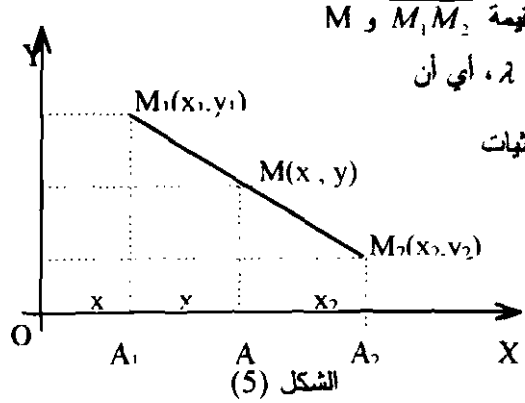
الشكل (4)

وفيه الضلع القائمة AM_2 تساوي (x_2-x_1) ، والضلع القائمة AM_1 تساوي $y_1-y_2 = -(y_2-y_1)$ ، وأما الوتر M_1M_2 فهو البعد بين النقطتين المفروضتين ويعطى بالعلاقة :

$$d = \overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

٣ ـ النقطة القاسمة داخلاً وخارجاً لقطعة مستقيمة :

لتكن القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ و M نقطة تقسم $\overline{M_1M_2}$ بنسبة λ ، أي أن $\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda$. تتعين احداثيات M(x,y) كما يلي :



الشكل (5)

نلاحظ من الشكل (5) أن :

$$\overline{A_1A} = x - x_1$$

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda \quad \text{و} \quad \overline{AA_2} = x_2 - x$$

ولدينا المستقيمات المتوازية $A_1M_1 // AM // A_2M_2$. عندها نكتب :

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2}$$

وبالتالي :

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{A_1A}{AA_2} = \lambda \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow (x - x_1) = \lambda (x_2 - x)$$

ومنه :

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$$

أي :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad ; \quad (\lambda \neq -1) \qquad (1)$$

وبنفس الطريقة نعين ترتيب النقطة القاسمة M ، فنجد:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad ; \quad (\lambda \neq -1) \qquad (2)$$

إذا كانت M نقطة قاسمة داخلاً ، فإن$\lambda > 0$ ، و إذا كانت قاسمة خارجا ، فإن $\lambda < 0$

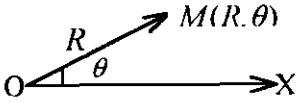
أما إذا كانت M في منتصف القطعة M_1M_2 ، فإن $\lambda = 1$ ، وعندها تصبح العلاقتان (1) , (2) بالشكل :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (3)$$

٤ ـ جملة المحاور الإحداثية القطبية :

لنعين نقطة O في المستوي ونسميها نقطة قطبية .

نرسم منها محوراً OX ونسميه المحور القطبي .



الشكل (6)

إن الجملة المؤلفة من نقطة قطبية ومحور قطبي ، تسمى جملة محاور احداثية قطبية . تتعين أية نقطة M في المستوي منسوباً إلى جملة محاور احداثية قطبية، بواسطة بعدها عن O ، ويسمى هذا البعد بنصف القطر $R = \overline{OM}$ وبالزاوية θ التي يشكلها الشعاع R مع المحور OX . تسمى θ الزاوية القطبية أو

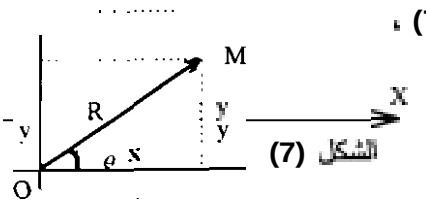
عمدة الشعاع OM . إذن يمكن أن نكتب النقطة M بالشكل $M(R,\theta)$ الشكل (6) . وبالتالي فإن كل نقطة في المستوي يقابلها إحداثيان قطبيان (R,θ) . وبالعكس فإن كل إحداثيين قطبيين (R,θ) يقابلهما نقطة في المستوي . فإذا أخذنا $R > 0$ و $0 \le \theta < 2\pi$ ، فإن الشعاع OM يمسح المستوي بكامله .

تعطى المسافة بين نقطتين $M_1(R_1,\theta_1)$ ، $M_2(R_2,\theta_2)$ بالإحداثيات القطبية بالعلاقة التالية :

$$d = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (4)$$

5 ـ علاقات التحويل بين جملتي المحاور : الديكارتية والقطبية :

إذا قمنا برسم جملتي المحاور الإحداثية الديكارتية والقطبية على شكل واحد ، ومن مبدأ واحد ، ورسمنا إحداثيات النقطة M على الشكل الموحد بكلتا الطريقتين ، **كما في الشكل (7)** ،



الشكل (7)

كان لدينا : $\mathbf{M(x, y) = M(R, \theta)}$.

بالإستفادة من العلاقات المثلثية ، نلاحظ أن الإحداثيات الديكارتية ترتبط مع الإحداثيات القطبية ، للنقطة **M** ، بواسطة العلاقتين التاليتين :

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \end{aligned} \qquad (5)$$

ومنهما، يمكننا استنباط علاقتين مشابهتين تعطيان الإحداثيات القطبية بدلالة الإحداثيات الديكارتية ، كما يلي :

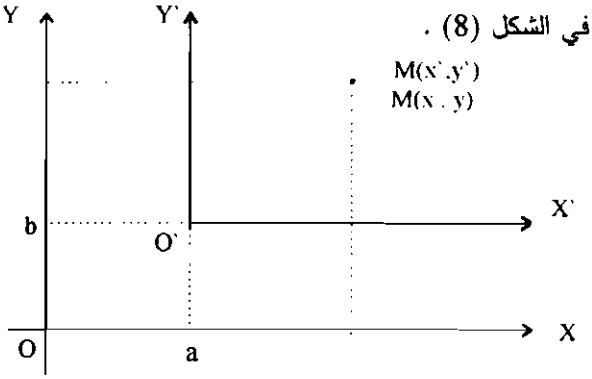
$$\begin{aligned} R^2 = x^2 + y^2 &\Rightarrow R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \frac{y}{x} &\Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \qquad (6)$$

لقد كان إختراع الإحداثيات الديكارتية ، إنجازاً علمياً كبيراً في مجال الهندسة، والتحليل الرياضي كما كان وضع الإحداثيات القطبية تحولاً مهماً لتسهيل

التعبير الرياضي عن كثير من المعادلات المعقدة . وسنصادف تطبيقات كثيرة ، واستخدامات متعددة ، لكل من هاتين الجملتين في عمليات التحليل الرياضي ، والتفاضل ، والتكامل ...الخ .

٦ـ انسحاب المحاور الإحداثية الديكارتية :

إن انسحاب المحاور الإحداثية ، يعني انزياح مركزها O ، إلى نقطة أخرى O' ، مع الحفاظ على اتجاهات وتوازي المحورين OX مع $O'X'$ و OY مع $O'Y'$ ، كما هو موضح في الشكل (8) .



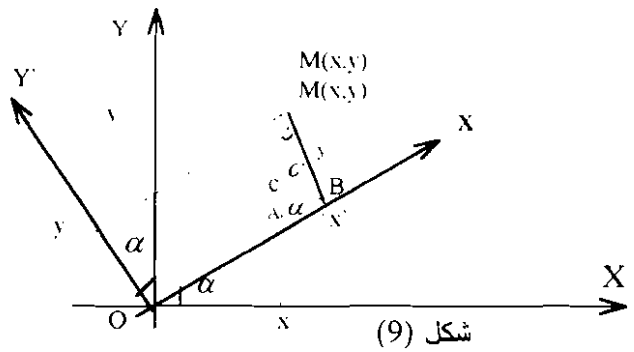
شكل (8)

من الشكل (8) نلاحظ أن إحداثيات أية نقطة M(x , y) ، في المحاور القديمة OXY ، تتغير لتصبح $M(x',y')$ في المحاور الجديدة $O'X'Y'$. وإذا فرضنا أن الإحداثيات الجديدة لـ M ترتبط مع الإحداثيات القديمة بواسطة العلاقتين التاليتين :

$$\begin{aligned} x' &= x - a \Rightarrow x = x' + a \\ y' &= y - b \Rightarrow y = y' + b \end{aligned} \qquad (7)$$

٧ـ دوران المحاور الإحداثية الديكارتية :

إن تدوير المحاور الإحداثية ، يعني دوران تلك المحاور حول نفس المركز O، بزاوية محددة قدرها α . كما هو موضح في الشكل (9) :



شكل (9)

من الشكل (9) ، واعتماداً على المثلث القائم ABC ، وعلى الإسقاطات المناسبة ، يمكننا كتابة الإحداثيات القديمة للنقطة M ، بدلالة الإحداثيات الجديدة (x',y') وزاوية الدوران α وفق العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned} \qquad (8)$$

ولحساب الإحداثيات الجديدة بدلالة القديمة ، نضرب العلاقة الأولى بـ $\cos\alpha$ والعلاقة الثانية بـ $\sin\alpha$ ، ثم نجمع المعادلتين ، فنحصل على المعادلة التالية :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = x'\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = x'$$

ثم نضرب العلاقة الأولى بـ $\sin\alpha$ ، والثانية بـ $\cos\alpha$ ، ونطرحهما ، فنحصل على

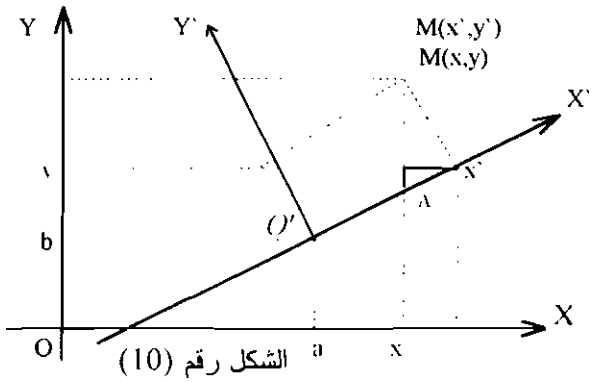
$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = -y'\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = -y'$$

وبذلك نحصل على العلاقتين التاليتين للإحداثيات الجديدة (x',y') بدلالة القديمة (x,y) وهما :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \qquad (9)$$

٨ ـ انسحاب ودوران المحاور الإحداثية الديكارتية :

إن نقل المحاور الإحداثية OXY ، يعني سحبها إلى مركز جديد O' ، وتدوير محاورها بزاوية مقدارها α .



الشكل رقم (10)

اعتماداً على ما سبق ، ومن الشكل (10) ، وبفرض أن إحداثيات المركز الجديد O' ، في المحاورر القديمة ، هي $O'(a,b)$ ، يمكننا بسهولة إيجاد العلاقتين اللتين تربطان الإحداثيات الجديدة للنقطة $M(x',y')$ بالإحداثيات القديمة ، وهما :

$$x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha$$
$$y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \qquad (10)$$

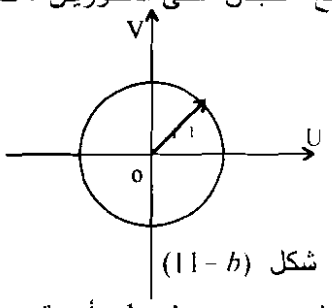
تصلح هاتان العلاقتان لمعالجة جميع حالات الإنسحاب والدوران والإنتقال: ففي حالة الإنسحاب فقط تكون المحاور متوازية ، وبالتالي تكون الزاوية $\alpha = 0$ ، وبالتعويض فيهما نحصل على أن : $x' = x - a$ ، $y' = y - b$. وفي حالة الدوران فقط يبقى المركز نفسه أي نضع $a = 0$ و $b = 0$ ، فنحصل على علاقات الدوران (٩)

٩ ـ تغيير المتحول وواحدات القياس :

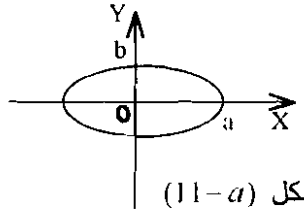
لقد رأينا أن كل محور من المحاور الإحداثية ، يمثل متحولاً معيناً، فالمحور الأفقي يمثل متحولاً يسمى x ، والعمودي يمثل متحولاً يسمى y . إن لكل متحول واحدة قياس معينة ، ولكن كثيراً ما نلجأ إلى إجراء تغيير في أسماء المتحولات ، وفي واحدات القياس عليها ، لتسهيل بعض العمليات الرياضية . يتم هذا التغيير من خلال علاقات رياضية محددة ، كما نلجأ أحياناً إلى الإنتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية للسبب نفسه . و كمثال على ذلك نأخذ معادلة القطع الناقص المركزي التالية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فهذه المعادلة معطاة على أساس أن محوري القطع منطبقان على المحورين ، كما في الشكل (11) التالي :



شكل $(11-b)$



شكل $(11-a)$

وإذا أجرينا تغييراً للمتحولين x و y ، بتقسيم x على a ، و y على b ، أي نقوم بتغيير واحدات القياس لهما ، وفق العلاقتين التاليتين :

$$u = \frac{x}{a} \quad ; \quad v = \frac{y}{b}$$

وبالتعويض نحصل على المعادلة التالية : $u^2 + v^2 = 1$

وهي معادلة دائرة ، مركزية ، نصف قطرها $r = 1$. وبذلك تم تحويل القطع الناقص إلى دائرة . إن التعامل مع الدائرة أسهل بكثير من التعامل مع القطع الناقص . كما يمكن التعبير عن هذه الدائرة بطريقة أسهل ، وذلك بالإنتقال إلى الإحداثيات القطبية ، فنعوض u و v من العلاقتين : $u = R\cos\theta \qquad v = R\sin\theta$

فنجد أن معادلة الدائرة تأخذ الشكل التالي :

$$R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = 1 \Rightarrow R = 1$$

وهي معادلة تلك الدائرة في الإحداثيات القطبية .

١٠ ـ بعض العلاقات المثلثية الهامة :

الزوايا : تقاس بالدرجة أو بالراديان .

الدرجة : هي جزء من 360 جزء من محيط الدائرة .

الراديان: هو الزاوية التي قوسها يساوي نصف قطر الدائرة . وبذلك نجد أن كامل محيط الدائرة يساوي 2π راديان ، والزاوية القائمة تساوي $\frac{\pi}{2}$ راديان .إن العلاقة التي

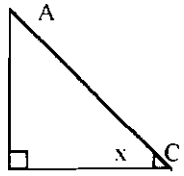
تربط الدرجة مع الراديان هي : $1\ rad = \frac{180}{\pi} = 57^{o}.17'45''$.

النسب المثلثية للزوايا في المثلث القائم :

$$\sin x = \frac{AB}{AC} \qquad \sec x = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos x = \frac{BC}{AC} \qquad \csc x = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\cos x}$$

$$tg\ x = \frac{AB}{CB} \qquad ctg\ x = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{tgx}$$



الشكل (12)

الجدول التالي يبين الزوايا الشهيرة مقاسة بالدرجة والراديان وقيم النسب المثلثية

الزاوية بالدرجة	0	30	45	60	90	180	270	360
الزاوية بالراديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	o	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	o	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	o

أهم العلاقات التي تربط هذه النسب المثلثية هي :

1- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 3- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

4- $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ 5- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

6- $tg^2 x = \frac{2tg\,x}{1-tg^2 x}$ 7- $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

8- $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ 9- $tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

10 - $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

11- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx\ tgy}$$

13- $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

14- $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

15- $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

16- $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

17- $\sin x \,.\, \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

18- $\cos x \,.\, \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$

19- $\sin x \,.\, \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

20- $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ 21- $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

22- $\operatorname{tg} x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$

وأخيراً نذكر أن التوابع العكسية للتوابع المثلثية هي :

23- $\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$

24- $\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y$

25- $\operatorname{arc\,tg} x = y \Leftrightarrow x = tgy$

تمارين :

١- قم بتمثيل الأعداد المركبة التالية بيانياً:

3+4i , 3+2i , 5-3i , -5-4i

3 , -5 , 2i , 3i

٢- مثّل الأعداد المركبة السابقة ، بواسطة التوابع المثلثية .

٣- اجر العمليات المبينة على الأعداد التالية :

(5+4i) + (3-7i) . (1+i) + (3+i)

(6-4i) - (5+3i) , (3+4i) - (3+2i)

(2-3i) . (4-i) , (3+5i) . (3-5i)

$\frac{3+2i}{2-3i}$; $\frac{5}{2+i}$; $(1+I)^2$; $(3+2i)^3$

٤- أوجد قيمة كل من x و y من خلال مطابقة الأعداد التالية :

$2+5ix-3iy = 14i+3x-5y$

$a\,ix+b\,iy-a = i-a^2x-b^2y$

٥ - برهن على أن :

$|z| = |\bar{z}|$ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $z.\bar{z} = |z|^2$

٦- أوجد جذور العدد : $z^{1/3} = (2+3i)^{1/3}$

٧- برهن على أن جملة الأشعة $p_1 . p_2 . p_3 , p_4$ من R^5 مرتبطة خطياً حيث :

$p_1 = (1,-1,1,-1,1)$ $p_2 = (1,0,2,0,1)$

$p_3 = (1,-5,-1,2,-1)$ $p_4 = (3,-6,2,1,1)$

٨ - برهن على أن جملة الأشعة P_1 , P_2 , P_3 من R^4 مرتبطة خطياً ، حيث :

$p_1 = (1,2,-1,0)$ $p_2 = (-1,2,4,2)$ $p_3 = (-3,-2,6,2)$

٩- أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية :

(5,3) (7,2) (8,10) (-3,2) (3,-2) (-8,-10)

١٠- أحسب إحداثيات النقاط السابقة بالنسبة للمحاور الإحداثية الجديدة الناتجةعن الأولى

بسحبها إلى النقطة (3,2) وتدويرها بمقدار زاوية $\frac{\pi}{6}$.

١١ـ أوجد صيغة بسيطة لمعادلة الدائرة التالية :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

واشرح معنى ذلك هندسياً .

١٢- بكم طريقة يمكن توزيع المناصب التالية : رئيس ، مدير ، محاسب ، أمين ، مندوب ، على أعضاء اللجنة المنتخبة والمؤلفة من خمسة أشخاص .

١٣- بكم طريقة يمكن أن نشكل كلمات ثلاثية من الأحرف التالية a, b, c, d, e,f,h وذلك في حالة عدم تكرار الأحرف في الكلمة الواحدة .

١٤-عندما نرمي حجري نرد معاً ، فما هو عدد النتائج الممكنة لهما ؟

١٥- ما هو عدد العينات التي يمكن سحبها بحجم $k = 4$ ، من مجموعة حجمها $n = 10$ ، وذلك في كلتا حالتي السحب .

١٦- ما هو عدد طرق تجزئة مجموعة بحجم $n = 15$ ، إلى ثلاثة مجموعات بحجوم $k_1 = 4$, $k_2 = 5$, $k_3 = 6$.

١٧- أوجد مفكوك التراكيب التالية :

$$(x + y)^4 \cdot (x - y)^3 \quad , \quad (x + 1)^5$$

١٨- بوضع $b = -1$ و $a = 1$ برهن على أن :

$$(a + b)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots\ldots - C_n^n = 0$$

١٩- أوجد مجموع حدود متوالية الأعداد الزوجية الطبيعية ، ثم أوجد مجموع حدود متوالية الأعداد الفردية الطبيعية .

٢٠- أوجد أساس متوالية هندسية ، إذا كان مجموع حدودها 728 ، وحدها الأول $a_1 = 2$ وعدد حدودها $n = 6$.

الفصل الثاني

المصفوفات والمعينات

أولاً – المصفوفات MATRIX

I – تعريف : تدعى جملة الأعداد المرتبة في جدول يحوي m سطراً و n عموداً ، مصفوفة من المرتبة m × n ، نرمز لها بـ $A_{m,n}$ ، وتكتب على الشكل التالي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أما الأعداد a_{ij} فتدعى عناصر المصفوفة A .

يرمز الدليل i إلى رقم السطر ويأخذ القيم $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, m$

ويرمز الدليل j إلى رقم العمود ويأخذ القيم $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$

يمكن أن نكتب المصفوفة $A_{m,n}$ بشكل مختصر كما يلي

$$A_{m,n} = [a_{ij}]_{m,n}$$

وهنا نلاحظ أن العناصر $a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots, a_{in}$ ، والتي لها نفس الدليل الأول تشكل عناصر السطر i في المصفوفة A .

II – أنواع المصفوفات :

تصنف المصفوفات حسب مراتبها ، وقيم عناصرها، والعلاقات بين عناصرها، إلى الأنواع التالية :

١ – **المصفوفات المستطيلة:** $A_{m,n} = [a_{ij}]_{m,n}$ حيث $m \neq n$ ويمكن أن نجد منها :

* **مصفوفة السطر** : وهي مصفوفة مستطيلة ، تحوي سطرا واحدا فقط و n عمودا وتكتب على الشكل التالي : $A_{1\times n} = [a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n}]$

وتسمى أيضاً مصفوفة شعاع – سطر .

• **مصفوفة العمود** : وهي مصفوفة مستطيلة تحوي عموداً واحداً فقط ، و m سطراً، وتكتب على الشكل :

$$A_{m\times 1}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

وتسمى أيضاً مصفوفة شعاع – عمود

غالباً ما تسمى المصفوفتان $A_{1\times n}$ و $A_{m\times 1}$ أشعة فقط ، وعناصرهما مركبات الأشعة، أو إحداثياتها .

• **المصفوفة الصفرية** : وهي مصفوفة جميع عناصرها أصفار . نرمز لها بالرمز O وتكتب بالشكل التالي :

$$O=\begin{bmatrix} o & o\cdots\cdots\cdots\cdots o \\ o & o\cdots\cdots\cdots\cdots o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ o & o\cdots\cdots\cdots\cdots o \end{bmatrix}$$

٢ – **المصفوفات المربعة** : هي المصفوفات التي فيها $m = n$ أي التي يكون فيها عدد الأسطر مساوياً لعدد الأعمدة . ولذلك غالباً ما تكتب المصفوفة المربعة على الشكل : $A_{n\times n}=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ ، ويرمز لها اختصاراً بـ A_n كالمصفوفة :

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فهي مصفوفة مربعة من المرتبة n . كذلك المصفوفة :

$$A_3=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a & 3 & 4 \\ b & 1 & x \end{bmatrix}$$

فهي أيضاً مربعة من المرتبة الثالثة .

من المصفوفات المربعة نجد المصفوفات التالية :

* – **المصفوفة أحادية العنصر** : وهي مصفوفة ذات عنصر واحد فقط $A_{1\ 1}=[a]$

* – **المصفوفة الواحدية** : وهي مصفوفة مربعة من المرتبة n ،فيها عناصر القطر الرئيسي متساوية ، وتساوي الواحد ، أما بقية عناصرها فهي معدومة . نرمزلها بـ I_n

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

وهي تلعب دور العنصر الحيادي بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات ، كالعدد واحد بالنسبة لضرب الأعداد .

* – تتولد عناصر المصفوفة الواحدية من رمز كرونيكر التالي :

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & : \quad \text{عندما } i=j \\ 0 & : \quad \text{عندما } i\neq j \end{cases}$$

وبالتالي يمكن كتابة المصفوفة الواحدية بالشكل $I_n=\left[\delta_{ij}\right]_n$

وفي الحقيقة فإن $I_1=[1]$; $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وهكذا .....

* – **المصفوفة القطرية** : وهي مصفوفة من المرتبة n ، جميع عناصرها غير القطرية معدومة . وتكتب على الشكل التالي :

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & o & \dots & o \\ o & a_{22} & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

في الحالة الخاصة ، عندما تكون العناصر القطرية متساوية ، وتساوي عدداً ثابتاً λ أي

$$a_{ij}=\lambda \quad ; (i,j=1\ 2\ \dots\ n)$$

فإننا نحصل على المصفوفة القطرية التالية :

$$\begin{bmatrix} \lambda & o & . & . & o \\ o & \lambda & . & . & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & . & . & \lambda \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة من المرتبة n ، من الأمثلة عليها ، المصفوفة الواحدية I_n .

* – **المصفوفة المثلثة** : وهي مصفوفة مربعة ، تكون فيها جميع العناصر الواقعة تحت أو فوق القطر الرئيسي معدومة .

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \cdots & a_{1n} \\ o & a_{22} \cdots \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o \cdots \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

إذا كانت العناصر $a_{ij} = o$ من أجل $i > j$ تسمى عندئذ المصفوفة المثلثة فوقية كالمصفوفة السابقة . وإذا كانت العناصر $b_{ij} = o$ ، من أجل $i < j$ ، فإن المصفوفة تسمى مصفوفة مثلثة تحتية ، كالمصفوفة :

$$B_n = \begin{bmatrix} b_{11} & o & o \cdots \cdots o \\ b_{21} & b_{22} & o \cdots \cdots o \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \cdots b_{nn} \end{bmatrix}$$

*– **المصفوفة المتناظرة** : هي مصفوفة مربعة $A_n = [a_{ij}]$ ، تكون عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية ، أي $a_{ij} = a_{ji}$; $i, j = 1,2,\ldots\ldots,n$

مثال المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3. & .4 \\ 3 & -2 & .o \\ 4 & o & 6 \end{bmatrix}$$

متناظرة لأن : $a_{13} = a_{31} = 4$ $a_{23} = a_{32} = o$ $a_{12} = a_{21} = 3$

*– **المصفوفة المتعاكسة** : هي مصفوفة مربعة تكون فيها العناصر المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متعاكسة : أي $a_{ij} = -a_{ji}$ ، $a_{ji} (_{ij} = 1. 2.\ldots\ldots n)$. إن هذه

المساواة تتطلب أن تكون عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر

مثال : المصفوفة التالية متعاكسة

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

* **نظيرة المصفوفة** : وهي المصفوفة التي تنتج عن المصفوفة A ، بضرب جميع عناصرها بـ (-1) : أي أن نظيرة A هي المصفوفة (-A) .

III العمليات الحسابية على المصفوفات :

١ - **المساواة** : نقول عن المصفوفتين : $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ أنهما متساويتان ونكتب $A = B$ ، إذا كانتا من نفس المرتبة $m \times n$ ، وكانت عناصرهما المتقابلة متساوية . أي $a_{ij} = b_{ij}$; $\begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots\ldots, m \\ j = 1, 2 \ldots\ldots, n \end{pmatrix}$

خواص تساوي مجموعتين :

١) اذا كانت $A=B$ فان $B = A$

٢) اذا كانت $A = B$ و $B = C$ فإن $A = C$

مثال : إذا كانت المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2x & y \\ x-z & y-t \end{bmatrix}$$

متساويتين، فأوجد قيم x , y , z , t

من تعريف تساوي مصفوفتين ، نجد أنه إذا كان $A = B$. فهذا يعني أن $a_{ij} = b_{ij}$ ، أي أن

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad x - z = 1 \Rightarrow z = -1$$

$$y = 2 \qquad y - t = 3 \Rightarrow t = -1$$

٢ - **جمع المصفوفات** : حاصل جمع مصفوفتين $A_{mn}=[a_{ij}]$ و $B_{mn}=[b_{ij}]$ من نفس المرتبة $m \times n$ ، هو مصفوفة ثالثة $C_{m,n}=[c_{ij}]$ لها نفس المرتبة ، وعناصرها هي حاصل جمع العناصر المتقابلة في المصفوفتين A و B أي :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; ; \; i = 1.2,\ldots\ldots, m \; ; \; j = 1,2,\ldots\ldots,n$$

أي:

$$A + B = C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \ldots\ldots a_{1n} + b_{2n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \ldots\ldots a_{2n} + B_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \ldots\ldots a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال : ليكن لدينا المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \; ; \; A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = C$$

خواص جمع المصفوفات : بفرض المصفوفات A , B , C من نفس المرتبة يكون

- قانون جمع المصفوفات تبديلي أي : $A + B = B + A$
- قانون جمع المصفوفات تجميعي أي : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- بفرض 0 مصفوفة صفرية من مرتبة A فإن $A + 0 = A$

وعلى ذلك تعتبر المصفوفة الصفرية عنصر حيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

- من أجل كل مصفوفة A توجد مصفوفة وحيدة Y مناظرة لـ A وتحقق العلاقة التالية: $A + Y = 0$

في الحقيقة لكي تحقق المصفوفتان $A = [a_{ij}]$ و $Y = [y_{ij}]$ المعادلة السابقة يجب أن تكون Y من مرتبة A كذلك :

$$a_{ij} + y_{ij} = 0 \; ; (i = 1,2,\ldots,m \; ; \; j = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

فإن لهذه المعادلة حل وحيد هو :

$$y_{ij} = -a_{ij} \; ; \; (i = 1,2, \quad , m \; ; \; j = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

وبالتالي توجد المصفوفة وحيدة $Y_{mxn} = [y_{ij}] = [-a_{ij}]$

تحقق المعادلة $A + Y = 0$

يُرمز عادة للمصفوفة Y بـ -A أي :

$$Y = -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \ldots\ldots -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} \ldots\ldots -a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{m1} & -a_{m2} \ldots\ldots -a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى المصفوفة (-A) نظيرة المصفوفة A .

٣- **طرح مصفوفتين** : إن ناتج طرح مصفوفتين A و B من المرتبة نفسها m×n ، هو مصفوفة ثالثة C من المرتبة (m x n) ، تحسب عناصرها من طرح العناصر المتقابلة للمصفوفتين A و B ونكتب ذلك على الشكل التالي : A -B = C

حيث يتم حساب عناصر المصفوفة C من العلاقة :

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad i = 1,2,\ldots,m \;\; ; \;\; j=1,2,\ldots,n$$

يمكن النظر إلى عملية الطرح A-B على أنها عملية جمع للمصفوفة A مع نظيرة المصفوفة B وهي (- B) فنجد أن : $A - B = A + (- B) = C$

وبذلك تتحول عملية الطرح إلى عملية جمع العناصر المتقابلة لـ A مع عناصر النظيرة (- B) . وهنا يجب الإشارة إلى أن عملية الطرح لاتتمتع بجميع خواص عملية الجمع السابقة . حيث :

$$A - B \neq B - A$$

$$(A - B) - C = A - (B + C)$$

$$A - 0 = A$$

$$A + (- A) = 0$$

٤ - **ضرب المصفوفة بعدد ثابت** λ : إن حاصل ضرب مصفوفة $A_{m.n} = [a_{ij}]$ بعدد ثابت λ ، هومصفوفة B من المرتبة m × n أي $B_{m.n} = [b_{ij}]$ ، حيث :

$$b_{ij} = \lambda\, a_{ij} \qquad (i: 1\ 2 \ldots\ldots m \;.\; j: 1\ 2 \ldots\ldots n)$$

$$B_{m.,n} = \lambda\, A_{r} \qquad \begin{bmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} \ldots . \lambda\, a_{1n} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} \ldots\ldots \lambda\, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda\, a_{m1} & \lambda\, a_{m2} \ldots\ldots \lambda\, a_{mn} \end{bmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات بعدد :

• لاتتغير المصفوفة اذا ضربت بالعدد 1 أي $1 . A = A$

يعتبر الواحد عنصر حيادي بالنسبة لعملية ضرب مصفوفة بعدد .

• تتحول المصفوفة A إلى مصفوفة صفرية إذا ضربت بالعدد 0، أي $0 . A = 0$.

• بفرض أن λ و μ عددان ثابتان ، فإن : $\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$

• بفرض أن λ عدد حقيقي ما و A و B مصفوفتين من نفس المرتبة (m.n) فإن :

$$\lambda(A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B$$

أي أن عملية الضرب بعدد توزيعية على عملية جمع المصفوفات

• بفرض أن λ و μ عددان حقيقيان و A مصفوفة ، فإن

$$(\lambda \pm \mu)A = \lambda A \pm \mu A$$

أي أن عملية ضرب مصفوفة بعدد توزيعية على جمع الأعداد .

٥ – **ضرب المصفوفات ببعضها** : لندرس أولاً ضرب مصفوفة سطر (شعاع)

$$A_{1n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \end{bmatrix}$$

بمصفوفة عمود (شعاع)

$$B_{n1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots\ldots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

إن ضرب المصفوفتين $A_{1n} \times B_{n1}$ شبيه بعملية ضرب شعاعين

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots\ldots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + \ldots + a_{1n} b_{n1} = c$$

حيث c هو عدد ثابت . وهكذا نجد أن حاصل ضرب شعاع سطر بشعاع عمود هو عدد ثابت . يمكن تعميم هذه العملية على جداء مصفوفتين

$A_{m.n} = [a_{is}]$ و $B_{n.p} = [b_{sj}]$ يكون فيهما عدد أعمدة A مساوياً لعدد أسطر B ويساوي n . فنحصل على مصفوفة ثالثة C أي :

$$A_{m.n} . B_{n.p} = C_{m.p} = [C_{ij}]_{m.p}$$

حيث C مصفوفة من المرتبة m.p . نحصل على العنصر c_{ij} بأخذ جداءات عناصر شعاع السطر i بالعناصر المقابلة لها في العمود j ، ثم أخذ مجموع هذه الجداءات فنحصل على العدد الواقع في السطر i والعمود j في المصفوفة C . أي أن :

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \times b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \ldots\ldots + a_{in}b_{nj}$$

ملاحظة هامة : إذا افترضنا أن A هي المضروب الأول و B المضروب الثاني ، مما سبق نجد أن شرط تحقق عملية ضرب المصفوفتين A × B هو أن يكون عدد أعمدة A مساوياً لعدد أسطر B .

مثال (١) : لتكن لدينا المصفوفتان :

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد حاصل الضرب A × B .

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1+2.2 & 3.3+2.4 & 3.1+2.3 \\ 1.1+2.4 & 1.3+4.4 & 1.1+4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 17 & 9 \\ 9 & 19 & 13 \end{bmatrix} = C_{2,3}$$

ولكن عملية الجداء B × A غيرممكنة في هذا المثال ، لأن عدد أعمدة B لايساوي عدد أسطر A .

مثال (٢) : أوجد حاصل الضرب A . X حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = B$$

وبذلك نحصل على المعادلة المصفوفة $A.X = B$ ، وهي شكل مختصر لثلاث معادلات خطية هي :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1$$
$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = b_2$$
$$5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = b_3$$

ملاحظة : اذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من نفس المرتبة ، فإن عمليتي الجداء A..B و B.A ممكنتان في نفس الوقت ، ولكنهما غير متساويتين $A.B \neq B.A$

مثال : ليكن لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد الجداءين $A \times B$ و $B \times A$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ مباشرة أن : $A \cdot B \neq B A$

خواص ضرب المصفوفات :

* ليكن λ عدد ثابت و $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ مصفوفتان فإن :

$$\lambda(A.B) = (\lambda.A)B = A(\lambda B)$$

* إن ضرب المصفوفات تجميعي . فإذا كانت $A_{m1\times n1}$ و $B_{n1\times n2}$ و $C_{n2\times n3}$ أي أن شرط ضرب المصفوفات محقق ، فإن :

$$A(B.C) = (A.B).C$$

* ان ضرب المصفوفات غير تبديلي أي

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

* اذا كانت A مصفوفة من المرتبة ($m\times n$) و I مصفوفة الواحدة فإن

$$A_{m\times n} \cdot I_n = I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

في الحالة الخاصة اذا كانت A مربعة من المرتبة n ، فإن :

$$A..I_n = I_n . A = A$$

هنا تلعب مصفوفة الواحدة دور العنصر الحيادي بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات.

* إن ضرب المصفوفات توزيعي من اليمين واليسار بالنسبة لجمع وطرح المصفوفات ، بشرط الحفاظ على المواقع وتأمين المراتب المناسبة .أي أن

$$\begin{cases}(A+B)C = AC+BC \\ C(A+B) = CA+CB\end{cases}$$

$$\begin{cases}(A-B)C = AC-BC \\ C(A-B) = CA-CB\end{cases}$$

* إذا كانت $A . B = A . C$ فإن $B = C$.

ملاحظة : نشير أخيراً إلى أن ضرب المصفوفات ، يختلف عن ضرب الأعداد ، حيث يمكن أن نحصل على مصفوفة صفرية من ناتج ضرب مصفوفتين غير صفريتين A و B .

مثال : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

إن عملية الضرب ممكنة لأن عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B يساوي (3) .

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2} .$$

نلاحظ أن ناتج الضرب هو مصفوفة صفرية رغم أن $A \neq 0$ و $B \neq 0$.

٦- منقول مصفوفة (مُدوَّرمصفوفة) : إن منقول المصفوفة $A_{m\times n}$ هو المصفوفة $A'_{n\ m}$ الناتجة عن A بتبديل الأسطر بالأعمدة (والأعمدة بالأسطر) . نضع السطر

الأول في A عموداً أولاً في A' والسطر الثاني عموداً ثانياً .... وهكذا نرمز لمنقول A بالرمز A أو A' .

يتمتع منقول مصفوفة بالخواص التالية :

1) $(A')' = A$ 2) $(A+B)' = A' + B'$

3) $(\lambda A)' = \lambda A'$ 4) $(A \cdot B)' = B' \quad A'$

5) $(A.B.C)' = C' \; B \quad A'$

مثال : أوجد منقول المصوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{bmatrix}$$

ثانيا – المعينات (المحددات) Determinant.s

I – تعريف : يرافق كل مصفوفة مربعة A عدد يسمى معينة A ، ويرمز لها عادة بـ det A أو بـ $|A|$. إن عناصر المعينة هي نفسها عناصر المصفوفة ، ومكتوبة بنفس الترتيب في سطور وأعمدة ضمن خطين متوازيين . وبما أن المعينات هي خاصة مرافقة للمصفوفات المربعة فقط ، ولذلك فإن عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها دائماً . فمثلاً المصفوفة المربعة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ترافقها المعينة} \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

II – إيجاد قيمة المعينة :

لإيجاد قيمة المعينة لدينا أكثر من طريقة ، بعضها خاص بالمعينة الثنائية 2×2 والثلاثية 3 × 3 وهناك الطريقة العامة لكل المعينات من أية مرتبة كانت .

١ – حساب قيمة المعينة الثنائية 2×2 :

اذا كانت A مصفوفة مربعة 2×2 مثل : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

فان قيمة معينتها

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

أي ان قيمة المعينة الثنائية تساوي جداء عنصري القطر الرئيسي $a_{11} \cdot a_{22}$ مطروحاً منه جداء عنصري القطر الثانوي $a_{21} \cdot a_{12}$

مثال١: أوجد قيمة المعينة

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.(-2) = 10$$

٢- حساب قيمة معينة مصفوفة من المرتبه الثالثة 3×3 :

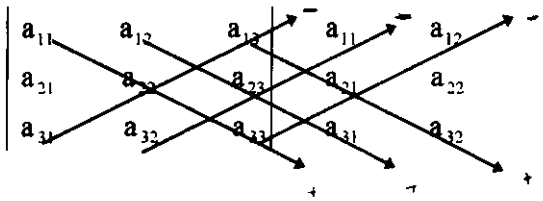
لنشرح أولاً الطريقة الخاصة بإيجاد قيمة معينة من المرتبة الثالثة والتي تسمى **طريقة سايروس** . وبعد ذلك نشرح الطريقة العامة لحساب قيمة أية معينة من أية مرتبة كانت $n \geq 3$.

*** طريقة سايروس Sairrus** لحساب معينات المصفوفات من المرتبة 3×3 فقط . لتكن لدينا المعينة :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

تتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي :

١ - نكتب الى جانب المعينة الأيمن العمودين الأول والثاني ، فتصبح على الشكل :



٢ - نمرر ثلاثة أسهم هابطة متوازية مارة بعناصر القطر الرئيسي وبعناصر القطرين الآخرين الموازيين له ، ونأخذ مجموع جداء العناصر الواقعة على هذه الأسهم . نسمي

هذا المجموع S أي :

$$S = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

٣ – نمرر ثلاثة أسهم صاعدة متوازية سارة بعناصر القطر الثانوي وبعناصر القطرين الآخرين الموازيين له ، ونأخذ مجموع جداءات العناصر الواقعة على هذه الأسهم نرمز لهذا المجموع بـ T أي :

$$T = a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

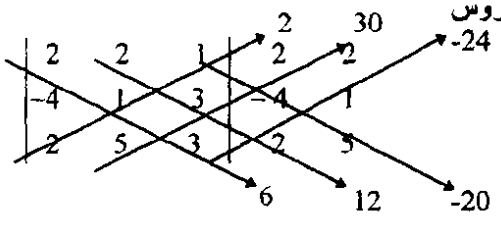
٤ – نحصل على قيمة المعينة D من حساب الفرق S- T أي أن :

$$D = S - T$$

مثال : أوجد قيمة المعينة :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل : باتباع طريقة سايروس



$S = 2.1.3 + 2.3.2 + 1.(-4).5 = -2$

$T = 2.1.1 + 5.3.2 + 3.(-4).2 = 8$

$D = S\text{-}T = -2 - (8) = -10$

٣ – الطريقة العامة لحساب قيمة معينات المصفوفة من المرتبة $n \geq 3$

تعتمد الطريقة العامة لحساب قيمة المعينات من المراتب $n \geq 3$ على عدة مفاهيم جديدة وهي جدول الإشارات ، المصغرات ، العوامل المرافقة .

أ – جدول الإشارات : يرافق كل معينة جدول من الإشارات ، وهي إشارات متناوبة في كل سطر وكل عمود ، تبدأ بإشارة (+) في الزاوية العليا اليسرى كما هو موضح في المثال التالي :

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

يمكننا الحصول على الإشارة المقابلة للعنصر a_{ij} من تطبيق القاعدة $(-1)^{i+j}$ ، حيث i رقم سطر العنصر ، و j رقم عموده ، التي تعطينا مثلا أن الإشارات المقابلة للعنصر a_{32} هي $(-1)^{3+2}=(-1)^5=-1$ ..... الخ . وهنا لابد من الإشارة الى أنه ليس لجدول الإشارات علاقة بالإشارات الجبرية للعناصر a_{ij} نفسها .

ب – المصغّرات Minors : هي معيّنات جزئية مشكلة من المعين الأساسي D ، بحذف نفس العدد من الأسطر والأعمدة . يتم تشكيل مصغرات المرتبة (n-1) بحذف أحد الأسطر وأحد الأعمده من المعين D . وهكذا يمكننا أن نشكل مقابل كل عنصر a_{ij} من D مصغراً من المرتبة (n -1) بحذف السطر i و العمود j . نرمز للمصغّر المقابل للعنصر a_{ij} بالرمز M_{ij} . بما أن عدد عناصر المعين يساوي n^2 عنصراً ، فإن عدد مصغرات المرتبة (n-1) يساوي n^2 مصغراً .

للحصول على مصغرات المرتبة (n-2) نعالج كلاً من مصغرات المرتبة (n-1) بنفس الطريقة .

مثال : أوجد جميع مصغرات المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

إن المصغرات المقابلة لعناصر المصفوفة أو لمعينتها هي :

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{32}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

وعددها تسعة مصفرات لان $n^2 = 3^2 = 9$. بحساب قيمه هذه المصفرات نحصل على أعداد جبرية عادية .

ج – العوامل المرافقة : هي جملة الأعداد الناتجة عن جداء المصفرات السابقة بالإشارات المقابلة لها في جدول الإشارات . أي ان العامل المرافق للعنصر a_{ij} والذي سنرمز له بـ D_{ij} هو العدد :

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}.\ M_{ij}$$

وتطبيقاً على المثال السابق نجد أن العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A هي :

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +2 \quad D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +4 \quad D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +1 \quad D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +3$$

وبذلك نحصل على معينة العوامل المرافقة المقابلة لعناصر المصفوفة A وهي :

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +2 & +4 & -5 \\ +1 & -5 & +1 \\ -4 & -1 & +3 \end{vmatrix}$$

نعود إلى معالجة الطريقة العامه لحساب قيمة المعينات من المراتب $n \geq 3$ ، وذلك من خلال النظرية التالية :

نظرية : إن قيمة معينة المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ، تساوي مجموع نواتج جداء عناصر أي سطر منها (أو أي عمود منها) في العوامل المرافقة المقابلة لعناصر ذلك السطر (العمود) .

فإذا أردنا حساب قيمة معينة A حسب عناصر السطر i ، فإن ذلك يساوي :

$$|A| = a_{i1}.D_{i1} + a_{i2}.D_{i2} + a_{i3}D_{i3} + \ldots\ldots + a_{in}D_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.D_{ij}$$

وإذا أردنا حساب قيمة معينة A حسب عناصر العمود j ، فإن ذلك يساوي :

$$|A| = a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + a_{3j} . D_{3j} + \ldots\ldots + a_{nj} D_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$$

تسمى هاتان العلاقتان **بنشر أو مفكوك لابلاس** لمعينة المصفوفة A بدلالة عناصر السطر i أو العمود j .

ومن الجدير بالذكر أن عملية نشر المعينة $|A|$ حسب أي سطر أو أي عمود لاتؤثر على قيمتها ، وإن كل الحالات تعطينا نفس القيمة . لذلك ننصح عند تطبيق إحدى هاتين العلاقتين أن نقوم باختيار السطر (أوالعمود) الذي يتضمن عناصر صفرية كثيرة أونقوم بإجراء بعض العمليات على الاسطر والاعمده للحصول على أكبر عدد من الأصفار في أحد الأسطر أو أحد الأعمدة .

مثال١ : لحساب قيمة معينة المصفوفة A السابقة حسب عناصر السطر الأول نجد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{11} D_{11} + a_{12} D_{12} + a_{13} D_{13}$$

$$= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4-2) - (2-6) + 3(1-6) = -7$$

مثال٢ : لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

أحسب المعينة $|A|$ باستخدام العوامل المرفقة لعناصر السطر الأول

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(6-63) - (5-56) + 4(45-48) = 27$$

II – خواص المعينات :

سنورد هنا خواص المعينات من خلال بعض النظريات التي تنص على هذه الخواص، وسنبرهن بعضها ونورد بعض الامثله للايضاح .

نظرية ١ : اذا بدلنا أسطر معينة بالاعمدة المناظرة لها نحصل على معينة جديدة مساوية للأولى .

مثال ١ : المعينة $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$ والمعينة $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$

مثال ٢ : $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin(\alpha - \beta)$

نظرية ٢: اذا كانت عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) في معينة $|A|$ تساوي الصفر فإن قيمة المعينة تساوي الصفر .

البرهان : اذا نشرنا المعينة حسب عناصر السطر (العمود) الصفري نحصل على الصفر كقيمة للمعينة .

نظرية ٣ : اذا بدلنا مواضع سطرين (عمودين) في المعينة |A| نحصل على معينة جديدة |B| تساوي |-A| أي $|B| = -|A|$ **أو** $|A| + |B| = 0$

مثال ١ :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

أما إذا أجرينا تبديلين في معينة فلا تتغير إشارتها لأن جداء عددين سالبين هو عدد موجب ، واذا أجرينا ثلاثة تبديلات فإن ذلك يودي إلى تغيير الإشارة من جديد ...الخ كما يلي :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

نظرية ٤: اذا تضمنت المعينة سطرين (عمودين) متساوين فانها تساوي الصفر .

البرهان : لنكتب المعينة $|A|$ التي تحوي عمودين متساوين بالشكل المنقط التالي :

$$A = \begin{vmatrix} I & II \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix}$$

حيث أن I و II عمودان متساويان لنبدل مواضع العمودين فنجد :

$$B = \begin{vmatrix} II & I \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix}$$

حسب النظرية ٣ فإن $|B| = -|A| \Leftarrow |A|+|B|=0$

ولكن $A = B$ لأن العمودين I و II متساويان .اذن

$$2|A| = o \Rightarrow |A| = o$$

نظرية ٥ : اذا ضربنا عناصر سطر (عمود) في معينة $|A|$ بعدد λ . نحصل على معينة B تساوي $|A|\lambda$. أي $\lambda|A| = |B|$.

البرهان : لتكن المعينة A $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{12} & a_{33} \end{vmatrix}$

اذا ضربنا عناصر السطر الأول بالعدد λ ونشرنا المعينة الجديدة حسب عناصر السطر الأول نجد :

$$B = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{2} & a_{23} \\ a_{31} & a_{3} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$B = \lambda a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2} \\ a_{32} & a_{3} \end{vmatrix} - \lambda a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left\{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\right\}$$

$$= \lambda|A|$$

تفيد هذه الخاصة بإمكانية إخراج عامل مشترك من عناصر سطر (عمود) خارج

المعينة ، وضربها به . وبذلك يمكن الحصول على معينة عناصرها اصغر من المعينه المفروضة .

نظرية ٦ : **إذا ضربنا المصفوفة A بعدد λ فإن قيمة المعينة للمصفوفة الناتجة λA تساوي :**

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

البرهان :إن ضرب المصفوفة A بالعدد λ يعني ضرب جميع عناصرها بـ λ أي أن :

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \ldots\ldots \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \ldots\ldots \lambda a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} \ldots\ldots \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

وإن قيمة المعينة $|\lambda A|$ تساوي

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \ldots\ldots \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \ldots\ldots \lambda a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} \ldots\ldots \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n |A|$$

ملاحظة هامة : إن ضرب المصفوفة A بعدد λ يختلف كلياً عن ضرب المعينة $|A|$ بذلك العدد ، لأن ضرب المصفوفة A بـ λ يعني ضرب جميع عناصرها بـ λ ، وأن ضرب المعينة $|A|$ بـ λ يعني ضرب عناصر أحد أسطرها (أو أعمدتها) بالعدد λ كما يلي :

$$\lambda |A| = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \ldots\ldots \lambda a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{ni} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

وبناء على ذلك يمكننا إخراج أي عامل مشترك بين عناصر أي سطر، أو أي عمود من المعينة خارج الخطين ثم متابعة العمليات المطلوبة .

نظرية ٧ : إذا وجد في معينة سطران (عمودان) متناسبان [أحدهما للآخر] فإن المعينة تساوي الصفر .

البرهان : لنفرض لدينا في المصفوفة A السطرين k و ℓ متناسبين أي أن :

$$\frac{a_{kj}}{a_{\ell j}} = \lambda \quad , j = 1,2,..,n$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} \cdots\cdots a_{\ell n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} \cdots \lambda a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

حسب النظرية /٥/ يمكن أن نخرج العامل المشترك λ خارج المعينة | A | أي أن :

$$|A| = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

إن المعينة تساوي الصفر لتساوي سطرين فيها حسب النظرية /٤/ السابقة .

نظرية ٨: اذا كانت a_{ij} (j =1,2,...,n) عناصر السطر i في المعينة | A | عبارة عن مجاميع من الشكل $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ (j = 1,2, ...,n) عندئذ يمكن كتابة المعينة A كمجموع معينتين $A = A' + A''$ ، بحيث تكون عناصر السطر i في A′ هي a′ij (j=1,2,....,n) وعناصر السطر i في A″ هي a″ij (j=1,2, ..,n)

وأما بقيـة عنـاصر الأسطر الأخـرى فـي المعينتيـن A' , A'' فهـي نفـس عنـاصر الأسـطر الأخـرى في A ، أي :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} \dots\dots a'_{in}+a''_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1n} \\ a_{11} \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a'_{i1} \dots\dots a'_{in} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a''_{i1} \dots\dots a''_{in} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

إن هذه النظريـة صـحيحـة أيضـاعلى عنـاصر أي عمـود فـي المعينـة /A/. فـإذا كـانت عناصر العمود j هي مجاميع عددين من الشكل

$$a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj} \; ; \quad (k = 1, 2, .. n)$$

فإن المعينة A تكتب كمجموع معينتين A_1, A_2 . كما وجدنا في حالة الأسطر.

نظريـة ٩: لاتتغير قيمـة المعينـة $|A|$ إذا ضربنـا عنـاصر أحـد أسـطرها (أعمدتهـا) بعدد λ و أضفنا الناتج إلى عناصر سطر (عمود) آخر .

البرهان : لتكن لدينا المعينة $|A|$ التالية

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ولنضـرب عنـاصر العمـود الثـاني بعـدد λ ونضيفهـا إلـى العمـود الأول فنحصـل علـى المعينة B التالية :

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}+\lambda a_{n2} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حسب النظرية (٧) نستطيع أن نكتب B كمجموع معينتين :

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ \lambda a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \\ \lambda a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + |A_1|$$

حسب النظرية (٧) نستطيع أن نكتب **B** كمجموع لمعينتين :

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \lambda a_{22} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \\ \lambda a_{n2} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + |A_1|$$

ولكن في المعينة A_1 العمودان الأول والثاني متناسبان ، فهي تساوي الصفر أي $|A_1| = 0$ حسب النظرية (٦) . إذن $|B| = |A|$ ،أي أن قيمة $|A|$ لم تتغير .

نتيجة : اذا كان أحد الأسطر (الأعمدة) في المعينة $|A|$ ، تركيباً خطياً من أسطر (أعمدة) أخرى فإن المعينة $|A|$ تساوي الصفر .

ملاحظة ١ : تكون عناصر السطر i في المعينة $|A|$ تركيباً خطياً من عناصر السطرين k و ℓ إذا وجد العددان λ_1 و λ_2 بحيث يتحقق :

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{kj} + \lambda_2 a_{\ell j} \qquad ; \qquad (j = 1,2,\ldots\ldots\ n)$$

ملاحظة٢ : تعتبر النظرية (٩) خاصة هامة للمعينات لأنها تستخدم في إظهار أكبر عدد ممكن من الأصفار في سطر (عمود) ما ، وذلك لتسهيل عملية نشر المعينة ، ثم حساب قيمتها حسب عناصر ذلك السطر (العمود)

مثال١ : أحسب قيمة المعينة $|A|$ التالية :

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}$$

الحل : نضرب عناصر السطر الأول بـ (1−) ونضيفها إلى عناصر السطر الثاني

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}$$

نضرب عناصر السطر الثالث بـ (1−) ونضيفها إلى عناصر السطر الرابع فنجد أن ،

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 4 & 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=0$$

وذلك لأن العناصر المتقابلة للسطرين الثاني والرابع متساوية

مثال٢: أحسب قيمة المعينة $|\Delta|$ التالية:

$$|\Delta|=\begin{vmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{vmatrix}$$

الحل : نضيف العمودين الأول والثاني إلى العمود الثالث :

$$|\Delta|=\begin{vmatrix}x & 1 & x+2\\ 1 & x & x+2\\ 1 & 1 & x+2\end{vmatrix}=(x+2)\begin{vmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

نطرح في المعين الأخير، العمود الثالث من العمودين الأول والثاني :

$$|\Delta| = (x+2)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2).(x-1)^2$$

نظرية ١٠: إن قيمة معينة جداء مصفوفتين تساوي جداء قيمتي معينتيها أي :

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \,.\, |\mathbf{B}|$$

مثال : إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 15 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 44 & 15 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 352 - 165 = 187$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -17 \qquad \text{ولكن} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

هكذا نجد أن :

$$|\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}| = (-11)(-17) = +187 = |\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}|$$

نظرية ١١: إن قيمة معينة المصفوفة المثلثة ، تساوي جداء عناصرها القطرية . أنه إذا كانت A مصفوفة مثلثة فإن قيمة معينتها تساوي :

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{a_{11}} \cdot \mathbf{a_{22}} \cdot \mathbf{a_{33}} \cdots\cdots \mathbf{a_{nmi}}$$

البرهان : لنأخذ المصفوفة المثلثة التحتية التالية :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

وإذا قمنا بحساب معينتها $|A|$ بنشرها حسب عناصر السطر الأول نجد أن :

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - 0 \cdot D_{12} + 0 \cdot D_{13} - 0D_{14}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - 0 + 0$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

وهو جداء العناصر القطرية للمصفوفة المثلثة .

نظرية ١٢ : إن قيمة معينة منقول المصفوفة A تساوي قيمة معينة A أي أن

$$|A'| = |A|$$

IV – طريقة (غاوص) لحساب قيم المعينات :

تعتمد هذه الطريقة على الاستفادة من خواص المعينات السابقة لتحويل المعينة إلى معينة مثلثة (فوقية أو تحتية) ، أو لتخفيض مرتبتها من n إلى (n-1) ، وذلك باتباع الخطوات التالية :

١- نفرض أن المعينة $|A_n|$ من المرتبة n ولها الشكل العام التالي :

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

٢- نقسم عناصر العمود الأول (أو أي سطر أو عمود أخر) على العنصر a_{11} أو غيره ($a_{11} \neq 0$) ونخرجه خارج المعينة ونكتب ذلك على الشكل التالي :

$$|A_n| = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{23} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & a_{32} & a_{33}\ldots\ldots a_{33} \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{42} & a_{43}\ldots\ldots a_{43} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

٣ – وحتى نجعل بقية عناصر السطر الأول أصفاراً ، نضرب عناصر العمود الأول بـ a_{12} ونطرحها من العمود الثاني ، ثم نضربها بـ a_{13} ونطرحها من العمود الثالث وهكذا ..... وأخيراً نضربها بـ a_{1n} ونطرحها من العمود الأخير . وبنتيجة ذلك تصبح بقية عناصر السطر الأول أصفاراً . أما العناصر الأخرى فيتم حسابها حسب نتيجة الطرح في كل مرة ، فعناصر العمود (j) الجديدة تحسب من العلاقة :

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}.a_{1j} = a_{ij}.1 - b_{i1}.a_{1j}$$

وهي تنتج من جراء حساب الفرق بين جداء رأسي المستطيل المُشكَّل من العنصر الرئيسي والعنصر a_{ij} وبين جداء الرأسين الأخرين a_{1j} و b_{i1} .

بنتيجة هذه العملية نحصل على معينة من المرتبة (n-1) لها الشكل التالي :

$$|A_n| = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots\ldots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\ldots\ldots & b_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots\ldots b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|B_{n-1}| + 0\ldots$$

وذلك بعد نشر المعينه $|B_n|$ حسب عناصر السطر الاول وحذف العمود الاول والسطر الاول

٤ – نقوم بمعالجة المعينة $|B_{n-1}|$ كمعينة جديدة ونطبق عليها نفس الإجراءات السابقه ، حتى نحصل على معينة جديدة من المرتبة (n-2) ، ولتكن $|C_{n-2}|$ حيث :

$$|A_n| = a_{11}.b_{21}|C_{n-2}|$$

٥ – نتابع العمل على المعينة $|C_{n-3}|$ حتى نحصل على معينة من المرتبة الثالثة أو الثانية فنحسب قيمتها حسب الطرائق السابقة .

ملاحظة : عندما تتضمن المعينة العدد (1) في السطر i والعمود j منها فيمكننا الإنطلاق منه مباشرة واعتباره عنصراً رئيسياً جاهزاً ولكن علينا في هذه الحالة أن نضرب المعينة التالية بـ $(-1)^{i+j}$.

مثال١ : أوجد قيمة المعينة

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

١– نلاحظ أن العمود الخامس يحوي العدد (1) لذلك نتجاوز عملية التقسيم ونعتبر العنصر $\alpha_{15} = 1$ العنصر الرئيسي ونقوم بضرب العمود الأخير بـ (3) ثم نطرحه من العمود الأول ثم نضربه بـ (1) ونطرحه من العمود الثاني، ثم نضربه بـ (-1) ونطرحه من العمود الثالث ثم نضربه بـ (2) ونطرحه من العمود الرابع ، فنحصل على المعينة التالية $|A_5| = (-1)^{1+5}|B_4|$ بعد حذف السطر الأول و العمود الأخير من $|A_5|$.

$$|A_5| = (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} -2-3.3 & 3-1.3 & 1-(-1)3 & 4-2.3 \\ 1-3.1 & 4-1.1 & 2-(-1).1 & 3-2.1 \\ 5-3(-1) & -2-1(-1) & -3-(-1)(-1) & 5-2(-1) \\ -1-3.2 & 1-1.2 & 2-(-1).2 & 3-2.2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -11 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & -1 & -4 & 7 \\ -7 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = |B_4|$$

ثم نأخذ العنصر $b_{24} = 1$ كعنصر رئيسي ونقوم بنفس الإجراءات السابقة فنحصل

على المعينة التالية بعد حذف السطر الثاني و العمود الرابع من $|B_4|$

$$|A| = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} -15 & 6 & 10 \\ 22 & -22 & -25 \\ -9 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -15 & 3 & 10 \\ 22 & -11 & -25 \\ -9 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 12 & -11 \\ -77 & 52 \end{vmatrix} = 446$$

مثال ٢: أوجد قيمة المعينة

$$(A_4) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1-6 & 3-4 & 1+2 \\ 2+3 & 1+2 & 1-1 \\ -5+6 & 2+4 & 3-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1+42 & 3+7 \\ 3-30 & 0-5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 41 & 10 \\ -27 & -5 \end{vmatrix} = -205 + 270 = 65$$

مثال ٣ : أوجد قيمة المعينة التالية :

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2+6 & 3-4 & 4+4 \\ 3-9 & 2+6 & 4-6 \\ -2-0 & 4-0 & 5-0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1+16 & 8+20 \\ 8-12 & -2-15 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 15 & 28 \\ -4 & -17 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-255+112)$$

$$= -286$$

V – العمليات البسيطة على المصفوفات :

لتكن لدينا المصفوفة $A_{m\times n}$. سنرمز للعملية المنفذة على الأسطر بـ R وعلى الأعمدة بـ K عندئذ يمكن أن نجري العمليات البسيطة التالية على المصفوفة A_m :

١- R_{ij} تبديل موضعي السطرين i و j .

$K_{S,r}$ تبديل موضعي العمودين S و r .

٢- λR_i ضرب السطر i بالعدد λ [μk_j ضرب العمود j بالعدد μ]

٣- $R_{ij}(\lambda)$ ضرب السطر j بالعدد λ وإضافته إلى السطر i .

$k_{r,s}(\mu)$ ضرب العمود S بالعدد μ وإضافته إلى العمود r .

[حيث العددان λ , μ لايساويان الصفر]

VI – المصفوفات المتكافئة :

نقول عن مصفوفتين $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ أنهما متكافئتان ونرمز لذلك بـ $A\sim B$ إذا نتجت B عن A بإحدى العمليات البسيطة يجب أن ننوّه إلى أن تكافؤ مصفوفتين لايعني إطلاقاً تساويهما .

مثال : نفّذ العمليات R_{13} K_2 $R_{23}(-2)$, $K_{41}(1)$ على المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$R_{13}\rightarrow\begin{bmatrix} 5 & -1 & 6 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}=A_1$$

$$K_{24}\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & & -1 & 3 \end{bmatrix}=A_2$$

$$R_{21}(-2) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & -7 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A_3$$

$$K_{41}(1) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A_4$$

ملاحظة : إن المصفوفات A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 الناتجة عن المصفوفة A بالعمليات البسيطة السابقة متكافئة وتكافئ المصفوفة A .

VII – مقلوب مصفوفة مربعة :

يُعرّف مقلوب مصفوفة على المصفوفات المربعة A_n فقط . وقبل البدء في دراسة هذا المقلوب نشير إلى مفهومين أساسين هما :

المصفوفة النظامية : وهي المصفوفة المربعة التي تكون قيمة معينتها مختلفة عن الصفر .أي التي يكون فيها $|A| \neq 0$.

المصفوفة الشاذة : هي المصفوفة المربعة التي يكون فيها $|A| = 0$

١ – تعريف مقلوب المصفوفة A_n :

إن مقلوب المصفوفة النظامية A_n هو مصفوفة X_n من نفس المرتبة وتحقق العلاقة المزدوجة التالية

$$X \cdot A = A \cdot X = I_n$$

حيث I_n هي المصفوفة الواحديه من المرتبة n .

يرمز عادة لمقلوب المصفوفة A بالرمز A^{-1} ، وتأخذ العلاقة السابقة الشكل التالي :

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

مثال : أوجد مقلوب المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

قبل البحث عن المقلوب يجب أن نتأكد من أن A نظامية لذلك نحسب قيمة معينها فنجد $|A| = -17 \neq 0$ لذلك نفترض أن المقلوب هو المصفوفة X والتي لها

الشكل التالي:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد قيم عناصر المصفوفة X نطبق العلاقة السابقة $X.A = I$

و بإجراء عملية الجداء نضع $X.A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x_{11} + 5x_{12} & 3x_{11} - x_{12} \\ 2x_{21} + 5x_{22} & 3x_{21} - x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و حسب تعريف تساوي مصفوفتين تكون لدينا المعادلات التالية

$$2x_{11} + 5x_{12} = 1 \quad ; \quad 2x_{21} + 5x_{22} = 0$$

$$3x_{11} - x_{12} = 0 \quad ; \quad 3x_{21} - x_{22} = 1$$

وبحل هذه المعادلات الأربعة (كل زوج على حده) نحصل على قيم عناصر X وهي

$$x_{11} = \frac{1}{17} \quad ; \quad x_{12} = \frac{3}{17} \quad ; \quad x_{21} = \frac{5}{17} \quad ; \quad x_{22} = -\frac{2}{17}$$

وبذلك نحصل على مقلوب المصفوفة A وهو

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

وللتحقق من ذلك نجري العملية $A^{-1}.A$ فنجد أن

$$A^{-1}.A = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2+15 & , & 3-3 \\ 10-10 & , & 15+2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix} = \frac{17}{17}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ملاحظة : يتضح من المثال السابق أن عملية إيجاد مقلوب مصفوفة ما تزداد تعقيداً كلما ازدادت مرتبة المصفوفة n . ولهذا فإننا سنلجأ إلى طرائق أخرى لإيجاد هذا المقلوب .

وقبل دراسة هذه الطرائق ، نستعرض خواص مقلوب المصفوفة وهي :

٢ – خواص مقلوب المصفوفة :

١– يوجد لكل مصفوفة نظامية مقلوب وحيد (بدون برهان) .

٢– إن مقلوب المقلوب A^{-1} هو المصفوفة A نفسها .

البرهان : نأخذ مصفوفة المقلوب A^{-1} ونضربها بمقلوبها $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ فيكون لدينا :

$$A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1} = I$$

نضرب الطرفين من اليسار بالمصفوفة A فنحصل على

$$A.A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A.I$$

وبما أن $A.A^{-1} = I$ وأن $A.I = A$ نجدأن

$$I.\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

٣– إن مقلوب جداء مصفوفتين من نفس المرتبة يساوي جداء المقلوبين ولكن بترتيب معاكس . أي أن

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

البرهان : لنأخذ الطرف $B^{-1}.A^{-1}$ ونضربه بـ $A.B$ من اليسار، ثم من اليمين فنجد أن

$$A.B\left(B^{-1}.A^{-1}\right) = A\left(B.B^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)A.B = B^{-1}\left(A^{-1}.A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

٤– إن قيمة معينة مقلوب مصفوفة تساوي مقلوب قيمة معينة المصفوفة $|A|$ أي أن

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

إر البرهان على ذلك سهل للغاية لأن العلاقة الأساسية

$$A^{-1}A = I \Rightarrow \left|A^{-1}.A\right| = \left|A^{-1}\right|.|A| = |I| = 1 \Rightarrow$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

وكمثال على ذلك نحسب قيمة معينة مقلوب المصفوفة الواردة في المثال السابق

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{vmatrix} = \frac{1}{17}\,\frac{1}{17}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{17\,17}(-17) = \frac{-1}{17}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{-17} = \frac{1}{|A|}$$

٥- إن مقلوب منقول مصفوفة هو منقول مقلوبها، أي أن

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

٦- إن مقلوب المصفوفة القطرية هو قطرية ، عناصرها تساوي مقلوبات العناصر القطرية أي أن $b_{ii} = \frac{1}{b_{ii}}$. ومن هنا يكون مقلوب المصفوفة الأحادية هو نفسها أي $I^{-1} = I$

٧- إن مقلوب المصفوفة المثلثة هو مصفوفة مثلثة من نوعها . ولنتأكد من صحة هذه النظرية من خلال المثال التالي :

نفرض أن A مثلثة تحتية وأن مقلوبها T مصفوفة عادية ولها الشكل التالي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

بإجراء الجداء نجد أن

$$A.T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{11}+2t_{21} & t_{12}+2t_{22} & t_{13}+2t_{23} \\ t_{11}+2t_{21}+3t_{31} & t_{12}+2t_{22}+3t_{32} & t_{13}+2t_{23}+3t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبإجراء التطابق بين العناصر المتقابلة نجد أن

$$t_{11} = 1 \qquad t_{12} = 0 \qquad t_{13} = 0$$

$t_{11}+2t_{21}=0$ $\quad t_{12}+2t_{22}=1$ $\quad t_{13}+2t_{23}=0$

$t_{11}+2t_{21}+3t_{31}=$ $\quad t_{12}+2t_{22}+3t_{32}=0$ $\quad t_{13}+2t_{23}+3t_{33}=1$

وبحل هذه المعادلات نحصل على أن :

$$t_{11}=1 \qquad t_{21}=-\frac{1}{2} \qquad t_{31}=0 \qquad t_{12}=0 \qquad t_{22}=0$$

$$t_{23}=\frac{1}{2} \qquad t_{32}=-\frac{1}{3} \qquad t_{33}=\frac{1}{3}$$

وهكذا نحصل على المقلوب التالي :

$$T=A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

وهو مصفوفة مثلثة تحتية من نفس نوع A .

٣- إيجاد مقلوب مصفوفة بواسطة المصفوفة المساعدة :

تعتمد هذه الطريقة على ما يسمى بالمصفوفة المساعدة . **لذلك سنقوم قبل كل** شيء بتعريف تلك المصفوفة من خلال المقدمات التالية :

لنفترض أنه لدينا المصفوفة الأساسية التالية :

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots\ldots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{43}\ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

و لنفترض أن مصفوفة العوامل المرافقة المستخرجة من معينة المصفوفة A **هي** المصفوفة التالية :

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13}\ldots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23}\ldots\ldots & D_{2n} \\ D_{31} & D_{32} & D_{34}\ldots\ldots & D_{3n} \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{43}\ldots\ldots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة المساعدة : تعرف المصفوفة المساعدة بأنها منقول المصفوفة D فإذا رمزنا لهذه المصفوفة بـ $\widetilde{A}$ فإن :

$$\widetilde{A} = D' = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} & \cdots & D_{n2} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & \cdots & D_{n3} \\ D_{1n} & D_{2n} & D_{3n} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

نظرية : **إذا كانت المصفوفة المربعة A_n نظامية أي إذا كان معينها $|A_n| \neq 0$ فإن فإن مقلوبها A^{-1} يعطى بالعلاقة التالية :**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$$

حيث $\widetilde{A}$ هي المصفوفة المساعدة المعرفة آنفا . و تطبيقاً لهذه النظرية يتم حساب مقلوب أية مصفوفة نظامية كما سنرى من خلال الأمثلة التالية :

مثال : أوجد مقلوب المصفوفة التالية و تحقق من صحة الناتج .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

قبل كل شيء نتأكد من أن A نظامية ، لذلك نقوم بحساب $|A|$ فنجد أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 0 - 8 + 6 + 6 - 2 - 0 = 2 \neq 0$$

و هذا يدل على أن A مصفوفة نظامية .

نقوم الآن بإيجاد مصفوفة العوامل المرافقة D مع الإنتباه إلى جدول الإشارات فنجد أن هذه العناصر تساوي

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2;\ D_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;\ D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +3\ ;\ D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\ ;\ D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +5$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = +1 ;\ D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 ;\ D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

و هكذا نحصل على مصفوفة العوامل المرافقة التالية

$$D = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & -4 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

و بأخذ منقول D نحصل على المصفوفة المساعدة التالية :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

بتطبيق النظرية السابقة نحصل على مقلوب A التالي :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

و للتحقق من ذلك نحسب الجداء $A^{-1}A$ فنجد أن

$$A^{-1}.A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

مثال آخر :

أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

قبل كل شيء ندرس نظامية المصفوفة فنجد أن معينتها تساوي :

$$|A| = -1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

ثم نحسب العوامل المرافقة لعناصرها وهي :

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; D_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \; ; \; D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; D_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \; ; \; D_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \; ; \; D_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 \; ; \; D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

و بذلك نحصل على مصفوفة العوامل المرافقة و هي :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 10 & -9 & -12 \end{bmatrix}$$

و بأخذ منقول هذه المصفوفة D نحصل على المصفوفة المساعدة $\tilde{A}$ و هي :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ -4 & 1 & -9 \\ -2 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

و بذلك نجد أن مقلوب المصفوفة A يعطى بالعلاقة :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ -4 & 1 & -9 \\ -2 & -2 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{12}{10} \end{bmatrix}$$

و للتحقق من ذلك نأخذ الجداء $A^{-1}.A$ فنجد أن :

$$A^{-1}.A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{12}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

٤ – إيجاد مقلوب المصفوفة بواسطة المصفوفة الواحدية .

تعتمد هذه الطريقة على العلاقة التالية :

$$A^{-1}=[A.I]^{-1}=I.A^{-1}=I.B$$

لذلك نقوم بوضع المصفوفة الواحدية على يمين A ، ثم نجري بعض العمليات البسيطة **على الأسطر فقط** (بما فيها عمليات غاوص) لتحويل الشكل [A I] إلى الشكل[I B] . فتكون المصفوفة B الناتجة هي المقلوب A^{-1}

مثال : أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

قبل كل شيء نتأكد من أن المعينة $|A|\neq 0$ علماً بأن قيمة هذه المعينة لا تستخدم في إيجاد مقلوب المصفوفة

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=16+9+9-12-9-12=1\neq 0$$

ثم نكتب [A I] على الشكل التالي : (نرمز بـ R للسطر و نجري بعض العمليات على الأسطر فقط دون الأعمدة كما هو مشار إليه فوق الأسهم التالية)

$$A.I=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\overset{R2-R1}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\overset{R-R_3}{\Rightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 - 3R_2}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 - 3R_3}{\Rightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I\ B]$$

أي أن مقلوب المصفوفة A هو :

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و يمكننا التحقق من ذلك بإجراء الجداء $A^{-1}A = I$

٥ – إيجاد مقلوب المصفوفة بواسطة مصفوفتين مثلثتين :

تعتمد هذه الطريقة على نظرية أساسية في المصفوفات و هي :

نظرية : إذا كان للمصفوفة A ، المعينات القطرية المتتالية من المرتبة الأولى حتى المرتبة الثامنة غير معدومة . فإنه يمكننا كتابة تلك المصفوفة على شكل مصفوفتين مثلثيتين أحدهما فوقية والأخرى تحتية كما يلي :

$$A = T.V$$

حيث T مصفوفة مثلثة تحتية ، و V مصفوفة فوقية عناصر قطرها الرئيس تساوي الواحد أي أن :

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \ldots\ldots 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \ldots 0 \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} \ldots t_{nn} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & V_{12} & V_{13} \ldots\ldots V_{1n} \\ 0 & 1 & V_{23} \ldots\ldots V_{2n} \\ 0 & 0 & 1 \ldots\ldots V_{3n} \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

و بعد ذلك يمكننا إيجاد مقلوب A من خلال العلاقة

$$A^{-1} = [T.V]^{-1} = V^{-1}.T^{-1}$$

و بذلك تتحول عملية إيجاد مقلوب A إلى إيجاد مقلوبي T و V و هذا أمر سهل نسبياً.

مثال : أوجد مقلوب المصفوفة التالية بواسطة مصفوفتين مثلثتين حيث

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

لإيجاد المقلوب نفرض أن

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \qquad V=\begin{bmatrix} 1 & V_{12} & V_{13} \\ 0 & 1 & V_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بحساب عناصر كل من T و V فنجد أنه يكون لدينا :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix}=T.V=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & V_{12} & V_{13} \\ 0 & 1 & V_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و بإجراء الضرب و المطابقة بين العناصر نحصل على المعادلات التالية

$$t_{11}=1 \qquad t_{11}v_{12}=-1 \qquad t_{11}v_{13}=2$$

$$t_{21}=-1 \qquad t_{21}v_{12}+t_{22}=5 \qquad t_{21}v_{13}+t_{22}v_{23}=4$$

$$t_{31}=2 \qquad t_{31}v_{12}+t_{32}=4 \qquad t_{31}v_{13}+t_{32}v_{23}+t_{33}=14$$

و بحل هذه المعادلات نحصل على :

$$t_{11}=1 \qquad t_{22}=4 \qquad v_{12}=-1$$

$$t_{21}=-1 \qquad t_{32}=6 \qquad v_{13}=2$$

$$t_{31}=2 \qquad t_{33}=1 \qquad v_{23}=\frac{3}{2}$$

و بذلك نحصل على أن :

$$A=T.V=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و لإيجاد المقلوب نجد أن :

$$A^{-1} = V^{-1} T^{-1}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{|V|}\tilde{V} = \begin{bmatrix} 1 & +1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{T}.\tilde{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ -10 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 11 & -\frac{7}{2} \\ 8 & 5 & -\frac{3}{2} \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

و يمكننا التحقق من أن $A^{-1} A = I$

٦ – ايجاد مقلوب المصفوفة بواسطة تجزئة المصفوفة :

تعتمد هذه الطريقة على تجزئة المصفوفة المربعة A_n إلى مصفوفات جزئية مناسبة ، ثم حساب مقلوب كل من المصفوفات الجزئية ، وبذلك يتم حساب مقلوب المصفوفة الأساسية A_n .

لذلك نفترض أنه قمنا بتجزئة A_n إلى أربعة مصفوفات جزئية كمايلي :

$$A = \begin{bmatrix} B_{p\,p} & C_{p\,q} \\ D_{p\,q} & F_{q\,q} \end{bmatrix} \quad ; \quad p + q = n \qquad (1)$$

ويشترط عند التجزئة أن تكون B مربعة ونظامية ومن المرتبة p ، فتكون F مربعة من المرتبة q ، ونفترض أن مقلوب A هو الأخر مجزأ إلى أربعة مصفوفات جزئية كمايلي :

$$A = \begin{bmatrix} K_{p\times p} & L_{p\times q} \\ M_{p\times q} & N_{q\times q} \end{bmatrix} \quad ; \quad p+q=n \qquad (2)$$

حيث أن مرتبة كل من K ، L ، M ، N هي من مراتب B ، C ، D ، F على الترتيب.

ثم نقوم بتجزئة المصفوفة الواحدة I_n إلى أربعة مصفوفات جزئية كمايلي :

$$I_n = \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{bmatrix} \qquad (3)$$

وبأخذ الجداء $A \cdot A^{-1}$ نجد أن :

$$\begin{aligned} A.A^{-1} &= \begin{bmatrix} B & C \\ D & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} BK+CM & BL+CN \\ DK+FM & DL+FN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (4)$$

وبإجراء المطابقة نحصل على المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} BK + CM &= I_p \\ BL + CN &= 0 \\ DK + FM &= 0 \\ DL + FN &= I_q \end{aligned} \qquad (5)$$

وبحل هذه المعادلات بالنسبة للمصفوفات الجزئية المجهولة ، نحصل على العلاقات التالية بدلالة المصفوفة الجزئية المعلومة :

$$\begin{aligned} N &= \left(F - D.B^{-1}.C\right)^{-1} \\ L &= -B^{-1}.C.N \\ M &= -N.D.B^{-1} \\ K &= B^{-1} - B^{-1}.C.M \end{aligned} \qquad (6)$$

نعود ونضع هذه المصفوفات الجزئية في المصفوفة A^{-1} فنحصل على المطلوب .

مثال : أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0,2 & -0,1 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,3 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_3 & C_3 \\ D_3 & F_3 \end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة نلاحظ أن مرتبتها $A = 6$ لذا نقسمها إلى أربعة مصفوفات جزئية ، مرتبة منها (3) ، كما هو مبين أعلاه ، ثم نكتب المقلوب على شكل مجزأ كالتالي :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$$

وحسب العلاقة (6)، نجد أن المصفوفة الجزئية N تساوي

$$N = \left(F - D.B^{-1}.C\right)^{-1}$$

نلاحظ أن $D = O$ وأن $B = I$ ، فيكون $B^{-1} = I$ وبالتالي يكون :

$$N = \left(F - O\right)^{-1} = F^{-1}$$

$$L = -C \cdot N = -C\,F^{-1}$$

$$M = O$$

$$K = B^{-1} = I$$

إذن لحساب مقلوبات هذه المصفوفات ، نحسب مقلوب المصفوفة المثلثة F فقط :

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0,5 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

وبذلك نجد أن :

$$L = -C \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & -1 & -0,2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0,5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,26 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 1,4 & 0,2 \\ 1,5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في المصفوفة A^{-1} نحصل على المقلوب التالي :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,26 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & 1,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 1,5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : إن إيجاد مقلوب المصفوفة بطريقة التجزئة ، يكون مفيداً وعملياً إذا كانت مرتبة المصفوفة كبيرة ، وكانت المصفوفات الجزئية K , L , M , N بسيطة . وتسهل عمليات الحسابات في العلاقات السابقة .

VIII- رتبة المصفوفة : Rank of matrix

لابد من الإشارة هنا إلى أننا نقصد بمصطلح رتبة مصفوفة غير مانقصده بمصطلح مرتبة مصفوفة . فمرتبة مصفوفة هي عدد أسطرها m مقروناً بعدد أعمدتها n . ونقول أن A من المرتبة $m \times n$ ونكتب ذلك $A_{m\,n}$.لإيجاد تعريف لرتبة مصفوفة ، نوضح الأمور التالية :

- إذا كانت لدينا المصفوفة المستطيلة التالية :

$$A_{m\cdot n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

وإذا فرضنا أن $r = \min(m , n)$ ، نقوم بتشكيل جميع المصغرات الأساسية بدءاً

من المرتبة r ، وذلك بحذف عدد من الأسطر أو الأعمدة من المصفوفة السابقة .

– إذا كانت المصفوفة مربعة من المرتبة n فمن أول مصغر يمكن تشكيله منها هوالمعين الأساسي لها D_n ، فإذا كان أحد مصغرات المرتبة r غير معدوم ، فإن رتبة المصفوفة السابقة تساوي r .

أما إذا كانت جميع مصغرات المرتبة r معدومة ، فإننا نقوم بتشكيل جميع المصغرات من المرتبة (r - 1) . فإذا كانت قيمة أحد هذه المصغرات غير معدومة ، فإن رتبة المصفوفة تكون مساوية لـ (r - 1) [مع شرط أن تكون مصغرات المرتبة r معدومة].

أما إذا كانت جميع مصغرات المرتبة r و (r - 1) معدومة ، فإننا نشكل جميع المصغرات من المرتبة (r - 2) وندرس قيمها ..... إلخ .

نكرر هذا العمل حتى نحصل على مصغر واحد على الأقل من المرتبة (r - k) غير معدوم . وعندها نقرر أن رتبة المصفوفة هي (r - k) ، وبذلك يمكننا أن نعرف رتبة مصفوفة بمايلي :

رتبة مصفوفة : هي مرتبة أكبر مصغر غير معدوم يمكن تشكيله منها .

مثال : أوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A_{3\times 4}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ قبل كل شيء أن مرتبة المصغرات الأساسية r هي :

$$r = \min(3, 4) = 3$$

لذلك نشكل جميع المصغرات من المرتبة (3) فنحصل على المصغرات الأربعة التالية:

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}=0 \qquad M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad M_4=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0$$

وبما أن جميع هذه المصغرات معدومة ، فإننا نستنتج أن رتبة المصفوفة السابقة اقل من (3) . ولمتابعة البحث نشكل جميع مصغرات المرتبة الثانية ، فنجد من البداية أن المصغر التالي :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

غير معدوم . وهذا يعني أن رتبة المصفوفة تساوي (2) ونكتب

$$\text{rank } (A) = 2$$

ملاحظة ١: إن رتبة المصفوفة تحقق المتراجحة التالية :

$$1 \leq \text{rank } (A) \leq r$$

ملاحظة ٢ : لاتتغير رتبة المصفوفة $A_{n\ m}$ إذا نفّذنا عليها عدداً منتهياً من العمليات البسيطة . ومن ذلك نجد أن للمصفوفات المتكافئة نفس الرتبة .

تمارين :

١ - أوجد جداء المصفوفات التالية :

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^2$$

٢ - إذا كانت لدينا المصفوفات التالية :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

فأوجد الجداءات التالية :

A . B	A . C	B . C
B . A	C . A	C . B

ثم أحسب بطريقة المصفوفة المساعدة كلاً من A^{-1} ثم B^{-1} ثم C^{-1} وتأكد من صحة النتائج .

٣ - أوجد مقلوب كلاً من المصفوفتين التاليتين بطريقة التجزئة :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

٤- أوجد بطريقة المصفوفة الواحدية مقلوب كل من المصفوفات التالية ، وتحقق من صلنتيجة :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث

جملة المعادلات الخطية

أولاً – مفاهيم أساسية :

I – الشكل العام لجملة المعادلات الخطية :

تعريف : إذا كانت لدينا المجاهيل $x_1 , x_2 , ... , x_n$ والأعداد a_1, a_2 , a_n , b فإن المعادلة التي من الشكل :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ...+ a_n x_n = b \qquad (1)$$

تدعى معادلة خطية وتدعى الأعداد ... a_1 , a_2 ..... a_n بأمثال المتحولات x_1, x_2 ..... x_i .....x_n ، ويسمى العدد b بالثابت الحر للمعادلة الخطية

إذا وجدت مجموعة من الأعداد مثل $\lambda_1 , \lambda_2 , ...\lambda_n$ التي تحقق المعادلة (1) أي

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 , ..., a_n\lambda_n = b$$

فإننا نسمي هذه المجموعة المرتبة $(\lambda_1 , \lambda_2 , ... , \lambda_n)$ حلاً للمعادلة الخطية (1) .

تعريف ٢ : إن جملة المعادلات الخطية لها الشكل التالي :

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = b_1 \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2 \\
&..... \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n = b_m
\end{aligned}$$

وهي بشكل عام تحوي m معادلة بـ n مجهولاً . أما أمثال (معاملات) الجملة فهي a_{ij} ($i = 1,2 , ... m , j = 1,2 , ... , n$) والتي تحوي الدليلين i و j حيث i يدل على رقم المعادلة ، و j يدل على رقم المجهول x_j . أما الثوابت الحرة فهي b_i ($i = 1,2 , ... , m$) تحوي دليلاً واحداً i يدل على رقم المعادلة فقط . في الحالة العامة لايكون لهذه الجملة حل مشترك وحيد إلا إذا كانت المعادلات مستقلة خطياً وكان عددها m مساوياً لعدد المجاهيل n .

II – الشكل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية :

يمكن أن نكتب معاملات الجملة a_{ij} على شكل مصفوفة A تسمى مصفوفة

الأمثال وهي من المرتبة m × n على الشكل التالي :

$$A = A_{m\,n} = \left[a_{ij}\right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ويمكن أن نكتب المجاهيل x_j ($j = 1,2, \ldots, n$) في مصفوفة عمود X كما يلي:

$$X = X_{n\,1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (4)$$

كما يمكن أن نكتب الثوابت الحرة b_i ($i = 1,2, \ldots, m$) في مصفوفة عمود B على الشكل :

$$B = B_{m\,1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (5)$$

بذلك نستطيع كتابة الجملة (2) بالشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (6)$$

[عند إجراء عملية الضرب في الطرف الأيسر ووضع العناصر الناتجة مساوية لعناصر العمود الأيمن نحصل على جملة المعادلات (2) واحدة بعد الأخرى].

وبشكل عام يمكننا كتابة المعادلات (6) بالشكل المصفوفيّ المختصر التالي :

$$AX = B \qquad (7)$$

كما يمكننا أن نضع أمثال الجملة a_{ij} وثوابتها الحرة في مصفوفة موسعة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (8)$$

وهي مصفوفة تحوي m سطرا و $(n+1)$ عمودا وبالتالي فهي من المرتبة $m\times(n+1)$.

إذا كانت مصفوفة أمثال الجملة A مربعة فإن $m = n$ ، وعندئذ نستطيع إيجاد معينته $|A|$ التي تسمى معينة جملة المعادلات الخطية .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ولهذه المعينة أهمية خاصة في البحث عن حلول جملة المعادلات الخطية (2) .

III – حل جملة المعادلات الخطية :

تعريف ١ : إن حل جملة المعادلات الخطية (2) هو مجموعة من الأعداد المرتبة $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ تقابل المجاهيل $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ وتحقق جملة المعادلات الخطية المفروضة (2) . أي إذا كانت $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ حلاً للجملة (2) وكتبنا ذلك الحل على شكل مصفوفة عمود C

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

فإن C تحقق المعادلة المصفوفيّة (7) ونكتب ذلك كما يلي :

$$AC = B$$

وكمثال على ذلك نأخذ جملة المعادلتين التاليتين :

$$2x_1 - 3x_2 = 8$$
$$x_1 + 5x_2 = -9$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ حلا لها وبذلك يكون $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix}$

في الحياة العملية يمكن أن نصادف جمل معادلات خطية ليس لها أي حل مثل الجملة التالية :

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 = 0$$

التي ليس لها أي حل يحقق معادلتي الجملة . والسبب في ذلك هو أن لمعادلتي الجملة نفس الطرف الأيسر بينما الطرفان الأيمنان مختلفان . وبذلك لايمكن أن نجد زوجا من الأعداد (α_1, α_2) يحقق كلتا المعادلتين في آن واحد .

تعريف ٢ : تسمي جملة المعادلات الخطية (2) ، جملة قابلة للحل إذا وجد لها حل واحد على الأقل . كما تسمى جملة غير قابلة للحل إذا تعذر وجود أي حل لها .

تعريف ٣ : تسمّى الجملة القابلة للحل ، جملة محدودة ، إذا وجد لها حل واحد فقط ؛ كما تسمّى ، جملة غير محدودة ، إذا كان يوجد لها أكثر من حل واحد .

إذا كانت الجملة غير محدودة ، فإن كل حل لها يسمى حلاً خاصاً .إن مجموعة الحلول الخاصة ، تسمى الحل العام للجملة . فمثلاً جملة المعادلات :

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 6$$

التي تكتب بالشكل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

هي جملة غير محدودة ، لأنه يوجد لها عدد لانهائي من الحلول ، منها الحلان :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ldots\ldots$$

وذلك لأن المعادلة الثانية $2x_1 + 4x_2 = 6$ تنتج عن المعادلة الأولى $x_1 + 2x_2 = 3$ بضربها بعدد محدّد λ يساوي 2 أي أن المعادلة الأولى غير مستقلة عن المعادلة الثانية.

تعريف ٤: نقول عن جملتين ، أو عدة جمل ، من المعادلات الخطية ، أنها متكافئة ، إذا

كان أي حل لإحدى الجمل هو حل للجمل الأخرى . أو إذا كانت هذه الجمل غير قابلة للحل .

نظرية ١: إذا كانت لدينا جملة المعادلات الخطية التالية :

$$AX = B \qquad (10)$$

وكانت D مصفوفة مربعة ونظامية من المرتبة $n \times n$ فإن الجملة

$$D.AX = D.B \qquad (11)$$

هي جملة مكافئة للجملة (10)

البرهان : ليكن X_0 حلا للجملة (10) أي :

$$AX_0 \equiv B \qquad (a)$$

لنضرب المعادلة المصفوفيّة (a) من اليسار بالمصفوفة D ، نجد :

$$DAX_0 = DB \qquad (b)$$

إذن X_0 هو أيضاً حل للجملة (11)

بالعكس إذا كان X_1 حلاً للجملة (11) ، فإن

$$DAX_1 \equiv DB \qquad (c)$$

لنضرب (c) من اليسار بـ D^{-1} مقلوب المصفوفة D ، نحصل على :

$$D^{-1} DAX_1 = D^{-1}DB$$

أو

$$I.AX_1 = IB$$

أو

$$AX_1 = B$$

إذن X_1 أيضاً هو حل للجملة (10) وبالتالي فإن الجملتين (10) و (11) متكافئتان

IV - العمليات البسيطة على جمل المعادلات الخطية

يمكن أن ننفذ على جملة المعادلات الخطية ، العمليات البسيطة التالية ، دون أن يؤثر ذلك على حلها :

١- يمكن تبديل موضعي معادلتين في الجملة .

٢ - يمكن ضرب طرفي إحدى معادلات الجملة بعدد $(\lambda \neq 0)$.

٣ – يمكن ضرب طرفي احدى المعادلات بعدد ($\lambda \neq 0$) ، ثم إضافة الناتج إلى معادلة أخرى طرفا إلى طرف .

نظرية ٢ : إذا طبقنا بعض أو كل العمليات البسيطة على جملة معادلات خطية ، فإننا نحصل على جملة جديدة مكافئة للأولى .

البرهان : لتكن لدينا جملة معادلات خطية موضوعة بالشكل المصفوفي التالي :

$$AX = B$$

إن تنفيذ العمليات البسيطة 1 و 2 و 3 على معادلات الجملة $AX = B$ يكافئ تنفيذها على المصفوفتين A و B . ومن المعروف أن تنفيذ تلك العمليات البسيطة على مصفوفة يعطينا مصفوفات متكافئة . وبذلك نثبت صحة النظرية .

· الإستقلال والإرتباط الخطي في جملة المعادلات الخطية :

تعريف٥ : نقول عن جملة معادلات خطية أنها مرتبطة خطياً ، إذا وجد فيها معادلة واحدة على الأقل مرتبطة خطياً بمعادلة أخرى أو أكثر من معادلات الجملة . وبكلام آخر ، إذا كان أحد أسطر المصفوفة الموسعة (8) عبارة عن تركيب خطي من الأسطر الأخرى ، أو بعض منها ، ونقول عن جملة المعادلات الخطية أنها مستقلة خطياً ، إذا لم يكن فيها أية معادلة مرتبطة بالمعادلات الأخرى ، أو ناتجة عنها .

نظرية ٣ : إذا حذفنا من جملة معادلات خطية مفروضة ، المعادلات المرتبطة خطياً ، فإننا نحصل على جملة جديدة مكافئة للأولى . (تقبل بدون برهان) .

تعريف ٦ : نقول عن جملة من المعادلات الخطية ، إنهاغير متجانسة ، إذا كان واحد على الأقل من الثوابت الحرة (b_i) يختلف عن الصفر .

أما إذا كانت جميع الثوابت b_i معدومة ، فإننا نسمي جملة المعادلات الخطية ، جملة متجانسة .

ثانياً – طرائق حل جمل المعادلات الخطية غير المتجانسة :

I – طريقة كرامر (G.Grammer , 1704 - 1752) : حالة (m = n)

تتناول هذه الطريقة إيجاد حل لجملة المعادلات الخطية ، التي يكون فيها عدد

المعادلات m مساويا لعدد المجاهيل n ، (n = m) والتي هي من الشكل :

$$\begin{aligned} a_{1} x_1 + a_{11} x_2 + \; \dots \; + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \; \dots \; + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \; \dots \; &\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \; \dots \; + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

والتي تكتب بالشكل المصفوفيّ التالي :

$$AX = B \qquad (2)$$

حيث A بـ مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ و B مصفوفة عمود من المرتبة $n \times 1$

$$A_{n \cdot n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \; \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \; ; \; X_{n \cdot 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \; ; \; B_{n \cdot 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

إن معينة المصفوفة A هي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \; \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \; \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

تسمى معينة جملة المعادلات الخطية غير المتجانسة (1) . إذا بدلنا في المعينة Δ عناصر العمود j ، بعناصر عمود الثوابت الحرة B ، نحصل على معينة جديدة ، نرمز لها بـ $\Delta_j(B)$ أو بـ Δ_j أي أن :

$$\Delta_j(B) = \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

وإذا أردنا حساب قيمة Δ_j من خلال مفكوكه حسب عناصر العمود b_j نجد أن :

$$\Delta_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + b_3 A_{3j} + \dots + b_n A_{nj}$$

نظرية كرامر : إذا كانت لدينا جملة معادلات خطية غير متجانسة وكان فيها $\Delta \neq 0$ ، فإن الجملة قابلة للحل ، ولها حل وحيد ، يعطى بعلاقات كرامر التالية :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad ; \quad (j = 1,2 ,\ldots ..,n)$$

البرهان : ١ً – وجود الحل :

لنفرض لدينا الجملة $AX = B$ ، ولنفرض أن المصفوفة A نظامية ، معينها $\Delta \neq 0$. بالتالي يوجد لها مقلوب A^{-1} . سنبرهن أن مصفوفة العمود $C_0 = A^{-1}B$ هي حل للجملة المفروضة $AX = B$. لذلك نعوض C_0 في تلك الجملة فنجد أن :

$$AC_0 = A(A^{-1}B) = (A.A^{-1})\,B = I.B = B$$

وهذا يعني أن C_0 هو حل للجملة (I) ، وبالتالي فالجملة المفروضة قابلة للحل .

٢ً – وحدانية الحل :

لنفرض أن مصفوفة العمود C هي حل آخر للجملة $AX= B$ ، أي $AC = B$

ولنبرهن أن $C = C_0$. بالحقيقة ، إذا ضربنا من اليسار طرفي المعادلة $AC = B$ بالمصفوفة A^{-1} ، نحصل على :

$$A^{-1}\,AC = A^{-1}\,B \Rightarrow IC = A^{-1}B \Rightarrow C = C_0$$

من ذلك نرى ، أن الحل C ينطبق على الحل $C_0 = A^{-1}B$ ، أي أن للجملة المفروضة حل وحيد .

البرهان على علاقات كرامر :

من المعلوم أن المصفوفة العكسية A^{-1} لها الشكل التالي :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots . A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots . A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \quad A_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث $\Delta = |A|$ و A_{ij} هي العوامل المرافقة للعناصر a_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots\ldots,n)$ في المصفوفة A . وحسب قاعدة ضرب المصفوفات نحصل على :

$$X = C_n = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots\ldots A_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots\ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots\ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots\ldots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

ومن خواص نشر المعينات نجد :

$$A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ldots + A_{nj}b_n = \Delta_j \quad (j = 1,2, \ldots, n)$$

وبالتالي فإن حل الجملة هو

$$X = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \ldots \\ \Delta_j \\ \ldots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

أو $$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; ; \; (j = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

مثال : أوجد حل جملة المعادلات التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

الحل : الجملة تحوي ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل ، لنكتب مصفوفة الأمثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

لنحسب المعينة $|A|$

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \ ,$$

بما ان $\Delta = -5 \neq 0$ ، فان للجملة حل وحيد ، يعطى بعلاقات كرامر :

$$x_j = \frac{\Delta j}{\Delta} \ , \ (j = 1,2,3) \ .$$

نحسب Δ_j

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \ ; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10 \ , \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

وبالتالي :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1 \ , \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2 \ , \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3$$

II – طريقة الحذف المتتالي للمجاهيل – طريقة غوص :

(G.F .Gaus , 1777 - 1855)

ان نظرية كرامر تعطي إمكانية لحل جملة معادلات خطية ، في الحالة الخاصة، عندما يكون عدد معادلات الجملة m مساوياً لعدد المجاهيل n أي (m = n) ، ومعينة مصفوفة الأمثال Δ غير معدومة . بالطبع عندما لا يتحقق أحد هذين الشرطين، فإن طريقة كرامر لا تصلح لحل جملة المعادلات الخطية . ولكن كثيراً ما نصادف جملاً من المعادلات الخطية فيها $(m \neq n)$ وخصوصاً في البرمجة الخطية . ومن هنا نشأت الحاجة إلى إيجاد آلية رياضية ، تسمح بدراسة جمل معادلات خطية في حالتها العامة .

لتكن لدينا جملة معادلات خطية في شكلها العام حيث $m \neq n$:

$$\begin{aligned} &a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ &a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

تعتبر طريقة غوص من الطرق الأكثر استخداماً لإيجاد حلول الجملة (1)، عندما $m \neq n$ ، وتعتمد هذه الطريقة على الحذف المتتالي للمجاهيل ، وتحويل الجملة إلى شكل مثلثي أو مدرج ، وفي هذه الحالة تصبح مصفوفة أمثالها مثلثية أو مدرجة. وسنطبق طريقة غوص على الجملة (1) ، بشرط أن تكون $a_{11} \neq 0$ (في الحالة المعاكسة أي عندما تكون $a_{11} = 0$ ، نغير ترتيب المعادلات بحيث نحصل على جملة مكافئة فيها $a_{11} \neq 0$)

وسنوضح خطوات هذه الطريقة من خلال الأمثلة التالية :

مثال : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} 0.14\,x_1 + 0.24\,x_2 - 0.84\,x_3 &= 1.11 \\ 1.07\,x_1 - 0.83\,x_2 + 0.56x_3 &= 0.48 \\ 0.64\,x_1 + 0.43\,x_2 - 0.38x_3 &= -0.83 \end{aligned} \qquad (A)$$

لإيجاد الحل المشترك لمعادلات هذه الجملة نقوم بالخطوات التالية :

١ – نقسم المعادلة الأولى على أمثال x_1 فنحصل على المعادلة المكافئة :

$$x_1 + .7143\,x_2 - 6.0000\,x_3 = 7.926 \qquad (1)$$

٢ – لحذف x_1 من المعادلة الثانية نضرب هذه المعادلة (1) بأمثال x_1 من المعادلة الثانية (1.07) ثم نطرح الناتج من المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة المكافئة :

$$0 - 2.6643\,x_2 + 6.98\,x_3 = -8.0036 \qquad (2)$$

٣ – لحذف x_1 من المعادلة الثالثة نضرب المعادلة (1) بأمثال x_1 في المعادلة الثالثة (0.64) ونطرح الناتج من المعادلة الثالثة فنحصل على المعادلة المكافئة :

$$0 + 0.6672\,x_2 - 3.4600\,x_3 = -5.9043 \qquad (3)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على جملة مكافئة للجملة الأساسية ومؤلفة من المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} .x_1 + 1.7143\,x_2 - 6.0000\,x_3 &= 7.926 \\ -2.6643\,x_2 + 6.98x_3 &= -8.0036 \\ +0.6672\,x_2 - 3.4600\,x_3 &= -5.9043 \end{aligned} \qquad (B)$$

٤ – نتابع معالجة الجملة (B) ونقسم المعادلة الثانية على أمثال x_2 فيها . ثم نضرب الناتج بأمثال x_2 في المعادلة الثالثة ونطرح الحصيلة من المعادلة الثالثة . فنحصل بنتيجة ذلك على جملة المعادلات المكافئة التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 1.7143\,x_2 - 6.0000\,x_3 &= 7.926 \\ x_2 + 2.6198\,x_3 &= 3.0040 \\ 1.7121\,x_3 &= -3.9000 \end{aligned} \qquad (C)$$

وهي جملة لها شكل مثلثي يساعدنا مباشرة في الحصول على الحل المشترك . فمن المعادلة الثالثة نجد أن :

$$x_3 = \frac{-3.9000}{1.7121} = -2.2779$$

وبتعويض قيمة x_3 في المعادلة الثانية من الجملة (C) نجد أن :

$$x_2 = 3.0040 + 2.6198\,(-2.2779) = -2.9636$$

وبتعويض قيمتي x_2 و x_3 في المعادلة الأولى من الجملة (C) نجد أن :

$$x_1 = 7.926 - 1.7143\,(-2.9636) + 6.0000\,(-2.2779) = -0.6582$$

وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المشترك التالي :

$$x_1 = -0.6582 \quad , x_2 = -2.9636 \quad , x_3 = -2.2779$$

مثال آخر :

أوجد الحلول المشتركة لجملة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 15 \end{aligned} \qquad (A)$$

لايجاد الحلول المشتركة نقوم بعمليات لحذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة لذلك نضرب المعادلة الأولى بـ 2 ونطرح الناتج من المعادلة الثانية ، ثم نضربها بـ 3 ونطرح الناتج من المعادلة الثالثة فنحصل على الجملة المكافئة التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \\ 0 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= -15 \\ 0 - 10x_2 + x_3 + 8x_4 &= -15 \end{aligned} \qquad (B)$$

ثم نقوم باجراء عمليات لحذف x_2 من المعادلة الأخيرة فنقسم المعادلة الثانية على (3-) ونضرب الناتج بـ (10-) ثم نطرح الحصيلة من المعادلة الثالثة فنحصل على الجملة المكافئة التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= +5 \\ 9x_3 - 2x_4 &= +35 \end{aligned} \qquad (C)$$

وهكذا نجد أن عمليات الحذف أصبحت غير ممكنة لأن عدد المعادلات أقل من عدد المتحولات . ولكن يمكننا أن نحسب ثلاثة متحولات بدلالة المتحول الرابع كما يلي :

$$x_3 = \frac{35}{9} + \frac{2}{9}x_4$$

$$x_2 = +5 - \left(\frac{35}{9} + \frac{2}{9}x_4\right) + x_4 = \frac{10}{9} + \frac{7}{9}x_4$$

$$x_1 = 10 - 2\left(\frac{10}{9} + \frac{7}{9}x_4\right) - \left(\frac{35}{9} + \frac{2}{9}x_4\right) + x_4 = \frac{35}{9} - \frac{7}{9}x_4$$

وهكذا نجد أن قيم المتحولات x_1 , x_2 , x_3 تتعلق بقيم المتحول x_4.وبما أن x_4 يمكن أن يأخذ قيماً اختيارية في مجال تحوله وإن عددها يكون لانهائياً . فإننا نستنتج أن للجملة السابقة لانهاية من الحلول المشتركة . ومن هذه الحلول نذكر مثلاً :

عندما يكون $x_4 = 0$ فإننا نحصل على $x_3 = \frac{35}{9}$, $x_2 = \frac{10}{9}$, $x_1 = \frac{35}{9}$

وعندما يكون $x_4 = 1$ فإننا نحصل على $x_3 = \frac{37}{9}$, $x_2 = \frac{17}{9}$, $x_1 = \frac{28}{9}$

.....

ملاحظة : عندما يكون عدد المعادلات m أكبر من عدد المتحولات n فإن عمليات الحذف تستمر لتشمل جميع المتحولات والمعادلات وستتحول المعادلات الأخيرة إلى معادلات من الشكل : $o = b_i$ (خيث $i > n$)

فإذا كان أحد هذه الثوابت $b_i \neq 0$ فإن الجملة تكون غير قابلة للحل بسبب التناقض بين طرفي المعادلة .

نتيجة هامة : إذا ظهرت لدينا بنتيجة تطبيق طريقة غوص المعادلة $0 \neq b = 0$ ، فإن الجملة المفروضة (I) تكون غير قابلة للحل . وإذا آلت الجملة إلى شكل مثلثي فلها حل وحيد ، وإذا آلت إلى شكل مدرج فلها لانهاية من الحلول .

ملاحظة : عند التطبيق العملي لطريقة غوص لإيجاد حلول جملة معادلات خطية، يُفضل التعامل مع المصفوفة الموسعة للجملة (I)، حيث نجري عدداً من العمليات البسيطة عليها حتى نحصل على مصفوفة موسعة مثلثة أومدرجة مكافئة للأولى .

مثال : أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

الحل : نكتب المصفوفة الموسعة

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ضرب السطر الأول بالأعداد (-3) و (-2) و (1) ثم نضيفه على التوالي إلى الأسطر الثاني والثالث والرابع . فنجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(بادلنا السطر الثاني بالثالث) .

نضرب السطر الثاني بـ (-3) ثم بـ (+2) ونضيفه إلى السطرين الثالث والرابع نجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

ضربنا السطر الثالث بـ $\frac{1}{4}$ والسطر الرابع بـ $\frac{1}{2}$ في المصفوفة الأخيرة) .

وأخيرا نضيف السطر الثالث إلى الرابع ، فنجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة الأخيرة تمثل مصفوفة موسعة للجملة المثلثة التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 &= -1 \\ -x_4 &= 1 \end{aligned}$$

إن هذه الجملة مثلثة ، فهي قابلة للحل ، ولها حل وحيد ، نحصل عليه من المعادلات السابقة. فنجد أن المعادلة الأخيرة تعطينا فوراً : $x_4 = -1$

نعوض ذلك في المعادلة الثالثة فنجد :

$$x_3 + 3(-1) = -1 \Rightarrow x_3 = 2$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$$-2x_2 - 3(2) - 4(-1) = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

نعوض النتائج في المعادلة الأولى فنجد :

$$x_1 + 3(-2) + 2(2) + (-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 4$$

وبذلك نكون قد حصلنا عن الحل الوحيد التالي :

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -1$$

III-حل جملة معادلات خطية بطريقة مقلوب المصفوفة : لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية فيها عدد المعادلات m مساوياً لعدد المجاهيل nأي $m = n$ وموضوعة بالشكل المصفوفي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

أوبالشكل المصفوفي المختصر التالي :

$$AX = B \qquad (2)$$

لنفرض أن المعينة $|A| \neq 0$. لنضرب من اليسار طرفي المعادلة المصفوفية (2) بـ A^{-1} مقلوب المصفوفة A (A^{-1} موجودة لأن $|\tilde{A}| \neq 0$) ، نجد

$$A^{-1}.AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

المعادلة الأخيرة هي حل لجملة المعادلات الخطية المفروضة . وحيث أن مقلوب المصفوفة A^{-1} يُحسب بالعلاقة التالية :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

و $\tilde{A}$ هي المصفوفة المساعدة .

مثال: أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

الحل : لنحسب معينة الأمثال

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

لحساب مقلوب المصفوفة A ، نحسب مصفوفة العوامل المرافقة D ثم المصفوفة المساعدة $\tilde{A}$ فنجد أن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -3 & \\ -3 & 1 & \\ -1 & 2 & - \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

اذن $x_1 = 1 \qquad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 3$

مثال٢ : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات التالية :

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 20$$
$$2x_1 - x_2 \qquad = 40$$

لنحسب محددة الأمثال فنجد أن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

وإن مصفوفة العوامل المرافقة D والمصفوفة المساعدة $\tilde{A}$ تساويان

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -4 \\ +3 & +6 & +5 \\ -1 & -4 & -3 \end{vmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$X = A^{-1} B = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -40 \\ -30 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على الحل المشترك التالي : $x_1 = 0 \qquad x_2 = -40 \qquad x_3 = -30$

٢ - حل جملة المعادلات خطية بطريقة المعاملات المنفصلة (**المصفوفة الواحدية**)

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

نشكل المصفوفة الموسعة $[AB]$

$$[AB] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

نجري عددا من العمليات البسيطة على أسطر المصفوفة الموسعة $[AB]$ بحيث تتحول A إلى المصفوفة الواحدية I من المرتبة n وتتحول B إلى مصفوفة L عندئذ تكون L هي حل الجملة . أي :

$$[AB] \rightarrow [IL] \Rightarrow IX = L \Rightarrow X = L$$

يتم الانتقال من المصفوفة $[AB]$ إلى المصفوفة $[IL]$ باتباع الخطوات التالية :

١ - إذا لم يكن العنصر الأول في السطر الأول يساوي الواحد أي $a_{11} \neq 1$ يجب أن نضرب السطر الأول بعنصر مغاير للصفر للحصول على $a_{11} = 1$.

٢ - نضرب عناصر السطر الأول بأعداد مناسبة وإضافتها إلى الأسطر الأخرى للحصول على أصفار العمود الأول .

٣ - يجب اتمام العمل بالشكل السابق للحصول على الواحد في المكان الـ من القطر الرئيسي في كل عمود وعلى أصفار في بقية المواضع .

مثال :أوجد حلول جملة المعادلات الخطية التالية :

$$2x + y - 3Z = 1$$
$$3x - y - 4Z = 7$$
$$5x + 2y - 6Z = 5$$

الحل : نشكل المصفوفة $[AB]$ وننتقل منها إلى المصفوفة $[IL]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \underset{R_{12}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \underset{R_{13}(-5)}{\underset{R_{12}(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & -12 & 1 & -25 \end{bmatrix}$$

$$R_2\left(\frac{1}{5}\right) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 12 & 1 & 35 \end{bmatrix} \underset{R_{23}(-12)}{\underset{R_{21}(2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

$$R_3\left(\frac{5}{7}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_{23}(\frac{1}{5})}{R_{13}(\frac{7}{5})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن $x = 3 \quad , \quad y = -2 \quad , \quad Z = 1$

V-حل جملة معادلات خطية بطريقة المعاودة *

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد حلول تقريبية وبالدقة التي نريدها لجملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

نختصر خطوات هذه الطريقة كما يلي :

---

* تستخدم هذه الطريقة كثيراً في إيجاد حلول المعادلات الخطية لسهولة برمجتها على الحاسب

١- نكتب المعادلات الخطية السابقة على الشكل التالي :

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2 &= b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (2)$$

أو بالشكل المصفوفي التالي :

$$X = B + A.X$$

٢ - نعطي جميع المتحولات في الطرف الأيمن القيمة صفراً فنحصل على حل ابتدائي نسميه الحل الصفري وهو يساوي :

$$x_1^{(0)} = b_1 \ , \ x_2^{(0)} = b_2 \ldots\ldots, x_n^{(0)} = b_n \qquad (3)$$

٣ - نعوض قيم هذا الحل في المعادلات (2) فنحصل على حل أخر نسميه الحل الأول وهو يساوي :

$$x_i^{(1)} = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(0)}$$

حيث $(i = 1,2,\ldots\ldots n)$

٤- نعود ونعوض قيم الحل الأول في نفس المعادلات (2)فنحصل على حل ثانٍ وهو:

$$x_i^{(2)} = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(1)} \qquad (5)$$

٥ - نتابع هذا العمل حيث نعوض قيم الحل الثاني في (2) فنحصل على حل ثالث.....الخ . وهكذا نحصل على الحل ذي الرقم k والذي يساوي :

$$x_i^{(k)} = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)} \qquad (6)$$

والذي يكتب بشكل مصفوفي كما يلي :

$$x^{(k)} = B + AX^{(k-1)} \qquad (7)$$

وبتكرار هذه العملية عدداً معيناً من المرات ، يتضح لنا فيما إذا كانت الحلول تقترب من

قيمة معينة لكل من المتحولات أم لا. وإذا كان للتقريبات $x_i^{(k)}$ نهاية محددة فإن هذه النهاية هي حل لجملة المعادلات الخطية (1) . ولقد تم البرهان على أن هذه الطريقة تكون متقاربة إذا كانت القيمة المطلقة للعناصر القطرية a_{ii} في كل سطر أكبر من مجموع القيم المطلقة للعناصر غير القطرية لذلك السطر .

أي إذا كان $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

كما تكون هذه الطريقة متقاربة إذا كانت القيمة المطلقة للعنصر القطري a_{ii} في كل عمود أكبر من مجموع القيم المطلقة للعناصر غير القطرية لذلك العمود . لذلك ينصح عندما نتعرض لمشكلات في التقارب ، أن نقوم بإعادة ترتيب أوتركيب تلك المعادلات الخطية ، بحيث تكون العناصر القطرية بقيمتها المطلقة أكبر من مجموع القيم المطلقة للعناصر الأخرى في كل سطر أوفي كل عمود .

مثال (١) أوجد بطريقة المعاودة حلاً لجملة المعادلات التالية :

$$4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8$$
$$0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9$$
$$0{,}04x_1 + 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20$$

الحل : نلاحظ أولاً العناصر القطرية بقيمتها المطلقة أكبرمن مجموع العناصر الأخرى في كل سطر ، لذلك نكتب جملة المعادلات السابقة على الشكل التالي :

$$x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3$$
$$x_2 = 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3$$
$$x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2$$

نعطي قيمة الصفر لجميع المتحولات التي في الطرف الأيمن ، فنحصل على الحل الصفري التالي :

$$x_1^{(o)} = 2 \quad , \quad x_2^{(o)} = 3 \quad , \quad x_3^{(o)} = 5$$

نعوض هذه القيم في المعادلات السابقة فنحصل على الحل الأول التالي :

$$x_1^{(1)} = 2 - 0{,}06(3) + 0{,}02\,(5) = 1{,}92$$

$$x_2^{(1)} = 3 - 0{,}03(2) + 0{,}05\,(5) = 3{,}19$$
$$x_3^{(1)} = 5 - 0{,}03(2) + 0{,}02\,(3) = 5{,}04$$

نعود ونعوض قيم الحل الأول في المعادلات السابقة نفسها فنحصل على الحل الثاني التالي :

$$x_1^{(2)} = 1{,}9094 \quad , \quad x_2^{(2)} = 3{,}1944 \quad , \quad x_3^{(2)} = 5{,}0446$$

وبتعويض قيم الحل الثاني في نفس المعادلات نحصل على الحل الثالث

$$x_1^{(3)} = 1{,}90923 \quad , \quad x_2^{(3)} = 3{,}19495 \quad , \quad x_3 = 5{,}04485$$

وهكذا يمكننا أن نتابع عمليات المعاودة حتى نحصل على نتيجة تحقق الدقة المطلوبة. وهنا نلاحظ أن الحل الثالث يؤمن لنا نتيجة بدقة 10^{-3} . لأن الرقم الثالث بعد الفاصلة بقي ثابتاً مقارنة مع الحل الثاني .

مثال ٢ : أ,جد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية التالية بطريقة المعاودة :

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} 2\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 &= 0 \qquad (A) \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 &= 0 \qquad (B) \to (3) \\ 5\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 &= 0 \qquad (C) \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 &= 0 \qquad (D) \to (1) \end{aligned}$$

حتى لانتعرض لمشكلات في التقارب ، نقوم أولاً بإعادة ترتيب أو تركيب هذه المعادلات ، لتصبح ملائمة لتطبيق طريقة المعاودة ، وذلك بجعل العناصر القطرية بقيمتها المطلقة ، أكبر من مجموع القيم المطلقة للعناصر غير القطرية في أسطرها ، أو أعمدتها .

نلاحظ أولا أن المعادلة (D) تصلح لأن تكون معادلة أولى في الجملة ، لأن أمثال x_1 فيها بقيمها المطلقة أكبر من مجموع القيم المطلقة لبقية عناصرها . وكذلك نلاحظ أن المعادلة (B) تصلح لأن تكون معادلة ثالثة ، لأن أمثال x_3 فيها بقيمتها المطلقة أكبر من مجموع القيم المطلقة لبقية عناصرها . ولتشكيل المعادلة الثانية في الجملة الجديدة يجب أن نجعل أمثال x_2 بقيمتها المطلقة ، أكبر من مجموع القيم المطلقة لبقية

العناصر المتبقية فيها . ولذلك نقوم بتشكيل المعادلة التالية من طرح B من A ، فنحصل على المعادلة الثانية التالية :

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 0.x_4 - 1 = 0 \qquad (2)$$

ولتشكيل المعادلة الرابعة من المعادلة المتبقية (C) نقوم بإجراء العمليات التالية $(2.A - B + 2(C - D))$ فنحصل على المعادلة الرابعة التالية :

$$3x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 - 9x_4 - 10 = 0 \qquad (4)$$

وبذلك نحصل على جملة معادلات خطية مكافئة للجملة السابقة وهي

II
$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 0.x_4 - 1 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 &= 0 \\ 3x_1 + 0.x_2 + 0x_3 - 9x_4 - 10 &= 0 \end{aligned}$$

وهو الشكل الذي يحقق شرط أعظمية القيم المطلقة للعناصر القطرية وبتقسيم كل معادلة على عنصرها القطري وإخراج المتحول القطري إلى الطرف الأيسر نحصل على جملة المعادلات المباشرة التالية :

III
$$\begin{aligned} x_1 &= 0.x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 - 0{,}2x_4 - 0{,}4 \\ x_2 &= -0{,}2x_1 + 0.x_2 - 0{,}2x_3 - Ox_4 + 0{,}2 \\ x_3 &= 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 - 0.x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}4 \\ x_4 &= 0{,}333x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 - 1{,}111 \end{aligned}$$

وتبديل كل من المتحولات في الطرف الأيمن بالقيمة الصفرية نحصل على الحل الإبتدائي التالي :

$$x_1^{(0)} = -0{,}4 \;\; ; \;\; x_2^{(0)} = 0{,}2 \;\; ; \;\; x_3^{(0)} = -0{,}4 \;\; ; \;\; x_4^{O} = -1{,}111$$

وبإعادة تعويض ذلك الحل في الجملة III نحصل على الحل الأول التالي :

$$x_1^{(1)} = 0 - 0{,}2(0{,}2) + 0{,}1(-0{,}4) - 0{,}2(-1{,}111) - 0{,}4 = -0{,}2578$$

$$x_2^{(1)} = -0{,}2(-0{,}4) + 0 - 0{,}2(-0{,}4) + 0{,}2 = 0{,}36$$

$$x_3^{(1)} = 0{,}2(-0{,}4) - 0{,}4(0{,}2) + 0 + 0{,}2(-1{,}111) - 0{,}4 = -0{,}7822$$

$$x_4^{(1)} = 0{,}333(-0{,}4) + 0 + 0 + 0 - 1{,}111 = -1{,}2442$$

وبتعويض هذا الحل في الجملة III نحصل على الحل الثاني التالي :

$$x_1^{(2)} = 0 - 0{,}2(0{,}36) + 0{,}1(-0{,}7822) - 0{,}2(\ 1{,}2442)\ \ 0{,}4 = -0{,}30138$$

$$x_2^{(2)} = -0{,}2(-0{,}2578) + 0 - 0{,}2(-0{,}7822) - 0 + 0{,}2 = 0{,}408$$

$$x_3^{(3)} = 0{,}2(-0{,}2578) - 0{,}4(0{,}36) - 0 + 0{,}2(\ 1{,}2442) - 0{,}4 = -0{,}8444$$

$$x_4^{(3)} = 0{,}333(-0{,}2578) + 0 + 0 \qquad -1{,}111 = -1{,}19685$$

وبتكرار هذه المعاودة عدة مرات أخرى نحصل على الحل المشترك التالي :

$$x_1 = -0{,}33333\ ;\ x_2 = 0{,}4444\ ;\ x_3 = -0{,}88889\ ;\ x_4 = -1{,}2222$$

VI- شروط وجود الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية

نظرية كرونكر -كابيلي :

إن نظرية كرونكر- كابيلي تحدد لنا ما إذا كانت جملة المعادلات الخطية قابلة للحل أو ليست قابلة للحل

نظرية كرونكر - كابيلي : إن الشرط اللازم والكافي لتكون جملة معادلات خطية قابلة للحل ، هو أن تكون رتبة مصفوفة الأمثال [A] مساوية لرتبة المصفوفة الموسعة [AB] .

لتكن لدينا جملة معادلات خطية ذات m معادلة بـ n مجهولاً :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

لنكتب مصفوفتي الأمثال A والموسعة AB

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \ ;\ AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

من الواضح أن كل مصغر للمصفوفة A هو مصغر في AB . وبالتالي فإن رتبة المصفوفة A لايمكن أن تكون أكبر من رتبة AB . وفي الحالة العامة ستكون رتبة A

أصغر أوتساوي رتبة AB . أي

$$rang\ \ A \le rang\ \ AB$$

وحسب نظرية كرونكر – كابيلي تكون الجملة قابلة للحل عندما يكون :

$$rang\ \ A = rang\ \ AB$$

وتكون الجملة غير قابلة للحل إذا كان

$$\mathbf{rang\ \ A < rang\ \ AB}$$

سنقبل هذه النظرية بدون برهان

مثال : ادرس قابلية حل الجملة

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$$
$$8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21$$
$$2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21$$

وإذا كانت قابلة للحل فأوجد حلولها .

الحل نوجد رتبة المصفوفة A والمصفوفة الموسعة AB .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & -1 \\ 2 & 11 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 14 & -21 \\ 0 & 14 & -21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 14 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

يوجد سطر صفري وبالتالي فإن رتبة A أصغر من 3 . لنوجد قيمة المصغر الثنائي

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 14 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

إذن $r(A) = 2$

$$AB = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -1 & 21 \\ 2 & 11 & -16 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 14 & -21 & 21 \\ 0 & 14 & -21 & 21 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 14 & -21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نلاحظ وجود سطر صفري وبالتالي فإن $r(AB) < 3$. لنوجد قيمة المصغر الثنائي

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 14 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

إذن $r(AB) = 2$. وحسب نظرية كرونكر-كابيلي ، بما أن $r(A) = r(AB) = 2$ فإن الجملة قابلة للحل . لنفرض أن x_1 ، x_2 متحولان أساسيان من الشكل المدرج للجملة نجد :

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \qquad (1)$$
$$14x_2 - 21x_3 = 21 \qquad (2)$$

من (2) نجد

$$2x_2 - 3x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(1 + x_3)$$

بالتعويض في (1) نجد

$$x_1 = \frac{1}{4}(9 - x_3)$$

لدينا لانهاية من الحلول لهذه الجملة حسب القيم الممكنة للمتحول الحر x_3 .

ثالثاً ـ جمل المعادلات الخطية المتجانسة :

I – تعريف : جملة المعادلات المتجانسة هي جملة معادلات خطية تكون فيها جميع الثوابت الحرة مساوية للصفر . ولها الشكل العام التالي :

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

والشكل المصفوفي لها هو

$$AX = 0 \qquad (2)$$

حيث 0 هو مصفوفة عمود صفرية .

هنا لدينا $b_1 = b_2 = \ldots\ldots\ldots = b_m = o$. وبالتالي فإن المصفوفة الموسعة A_0 تختلف عن المصفوفة A فقط بوجود العمود الأخير الصفري وهذا لايؤثر على رتبتها.

اذن

$$r(A) = r(A_0)$$

وحسب نظرية كرونكر –كابيلي ، فإن جملة المعادلات الخطية المتجانسة ، هي دائما قابلة للحل . من البديهي أن يكون الحل الصفري أحد حلول هذه الجملة .أي

$$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$$

II – نظريات وحلول عامة :

سندرس الآن شروط وجود حلول غير صفرية لجملة المعادلات الخطية غير المتجانسة . هذه الشروط تُعطى بالنظريات التالية :

نظرية ١: الشرط اللازم والكافي ليكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة ، حل غير صفري ، هو أن تكون رتبة مصفوفة الأمثال A أصغر من عدد متحولات الجملة n .

البرهان : ضرورة الشرط :

لنفرض أن للجملة حل غير صفري . رتبة مصفوفة الأمثال $r(A)$ لايمكن أن تكون أكبر من عدد المتحولات n (المصفوفة تحوي n عموداً) .إذا كان r = n ، حسب النتيجة الأولى لنظرية كرونكر - كابيلي ، فإن الجملة قابلة للحل ولها حل وحيد ،وهو الحل الصفري . ولكن بحسب الفرض للجملة حل غير صفري ، من ذلك نجد ضرورة الشرط $r < n$.

كفاية الشرط : لنفرض أن رتبة مصفوفة الأمثال r أصغر من عدد المتحولات n $(r < n)$، حسب النتيجة الثانية لنظرية كرونكر –كابيلي ، فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول المختلفة ، وبالتالي يوجد حل واحد على الأقل مختلف عن الصفر .

نتيجة : كل جملة معادلات خطية متجانسة فيها عدد المعادلات m أقل من عدد المجاهيل n لها حل غير صفري .

بالحقيقة ، إذا كان في الجملة (1) ، $m < n$ ، ومن المتراجحة $r \le \min(m,n)$ ينتج أن $r < n$ ، وهذا يعني أن للجملة حل غير صفري .

أما في حالة كون عدد المعادلات m يساوي عدد المجاهيل n أي m = n فإن النظرية السابقة تأخذ الشكل التالي :

نظرية ٢ : الشرط اللازم والكافي ليكون لجملة معادلات خطية متجانسة فيها عدد المعادلات m يساوي عدد المتحولات n حل غير صفري ،هو أن تكون معينة مصفوفة الأمثال مساوية للصفر .

البرهان : إن الشرط اللازم والكافي الوارد في النظرية 1هو $r < n$ ، سيصبح هنا $|A| = o$ ،وحيث أن A هي مصفوفة مربعة من المرتبة n ، عندئذ سيكون $r < n$ لأن $|A| = o$.

نظرية ٣: إذا كان لجملة المعادلات الخطية المتجانسة n حلاً من الشكل $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ **حيث** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **فإن كل تركيب خطي من هذه الحلول من الشكل**

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n X_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j$$

هو حل أيضاً للجملة المفروضة $AX = 0$.

البرهان : حسب الفرض ، المصفوفات $X_j \; (j = 1,2,\ldots,n)$ هي حلول للجملة $AX = 0$ ، بالتالي فإن $AX_j = 0 \; (j = 1,2,\ldots\ldots,n)$ ولنبرهن أن Y هو حل للجملة . لدينا :

$$\begin{aligned} A.Y &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n X_n) \\ &= A(\lambda_1 X_1) + A(\lambda_2 X_2) + \ldots\ldots\ldots + A(\lambda_n X_n) \\ &= \lambda_1 (AX_1) + \lambda_2 (AX_2) + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n (AX_n) = o \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $AY = 0$ وبذلك يتم البرهان .

III- العلاقة بين حلول جمل معادلات خطية متجانسة وغير متجانسة (حالة $m \neq n$ **) :**

يمكن أن نحول جملة معادلات خطية غير متجانسة من الشكل

$$AX = B \qquad (1)$$

إلى جملة معادلات خطية متجانسة ، وذلك بوضع جميع الثوابت الحرة

$b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ، فنحصل على الجملة

$$AX = 0 \qquad (2)$$

يمكن أن نجد بعض العلاقات بين حلول الجملتين (1) و (2) ، تعطى بالنظريتين التاليتين :

نظرية ١ : مجموع أحد حلول الجملة $AX = B$ مع أحد حلول نظيرتها $AX = 0$ هو حل للجملة $AX = B$.

البرهان : ليكن لدينا الحلان

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

للجملتين (1) و (2) ، اذن :

$$AC = B \quad ; \quad AD = 0$$

وحسب خواص جميع المصفوفات

$$A(C + D) = AC + AD = B$$
$$\Rightarrow A(C + D) = B$$

وهذا يعني أن $(C + D)$ هو حل للجملة (1).

نظرية ٢ : إن الفرق بين حل الجملة غير المتجانسة $AX = B$ وحل نظيرتها الجملة المتجانسة $AX = 0$ هو حل للجملة $AX = 0$.

البرهان : مشابه للنظرية السابقة .

خاتمة : يمكن أن نحصل على حل عام للجملة غير المتجانسة $AX = B$ وذلك بإضافة حل خاص للجملة $AX = B$ إلى حل عام لنظيرتها المتجانسة $AX = 0$.

تمارين

اولاً -- ادرس امكانية حل الجمل الذ ، وأوجد حلولها إذا كانت قابلة للحل :

$$\begin{aligned} 3x_1 &\cdot 5x \quad 2x_{,} \quad 3 \\ 2x_1 &- x \quad 3x_{,} \quad 5 \\ 5x_1 &- 6x \quad x_{,} \quad 4 \end{aligned} \qquad (١)$$

جواب : غير قابلة للحل

جواب : قابلة للحل

$$x = \frac{1}{5}(11 \quad z)$$

$$y = \frac{2}{5}(z - 1)$$

$$\begin{aligned} x - 2y &\cdot z - 3 \\ 3x + y &- z \cdot 0 \\ 4x - 3y &+ z = \cdot \end{aligned} \qquad (٢)$$

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 2 \\ 3x + \ y - z &= 0 \\ 4x - 3y + z &= - \end{aligned} \qquad (٣)$$

جواب :غير قابلة للحل

جواب : قابلة للحل

$$\begin{aligned} 3x - 6y + z &= 15 \\ x + 5y + 3z &= -9 \\ 2x - y + 4z &= 4 \end{aligned} \qquad (٤)$$

$(x = 1 , y = -2 \ , z = 0)$

ثانياً -- حل جمل المعادلات التالية بطريقة غوص :

جواب :

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= -4 \end{aligned} \qquad (٥)$$

$x = 1 , \ y = -2 \ , \ z = -1$

جواب :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &- x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &+ x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 &- 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &- 5x_4 = 3 \end{aligned} \qquad (٦)$$

$(1,2,-1,2)$

جواب :

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 &= -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22 \end{aligned} \qquad (٧)$$

$(1,3,-2,2)$

جواب :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3 &= 0 \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 &= 0 \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 &= 0 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 &= 0 \end{aligned} \qquad (٨)$$

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 2, -3\right)$

ثالثاً - حل جمل المعادلات المتجانسة التالية :

جواب :

$$\begin{aligned} 7x - 3y + 2z &= 0 \\ 3x + 5y - 3z &= 0 \\ 7x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned} \qquad (٩)$$

$(0,0,0)$

جواب :

$$\begin{aligned} 7x - 2y + 3z &= 0 \\ 10x - 2y + z &= 0 \\ 3x + 4y - 2z &= 0 \end{aligned} \qquad (١٠)$$

$x = -8t$
$y = 23t \ , \ z = 34t$

رابعاً - أوجد قيم λ بحيث للجمل التالية حلول غير صفرية .

جواب :

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x + 2y + 3z &= 0 \\ x + (\lambda + 1)y - z &= 0 \\ (2\lambda - 1)x + y + 4z &= 0 \end{aligned} \qquad (١١)$$

$\lambda_1 = -\frac{3}{2}, \ \lambda_2 = 2$

جواب :

$$\begin{aligned} (5 - \lambda)x - 3y + 2z &= 0 \\ 6x - (4 + \lambda)y + 4z &= 0 \\ 4x - 4y + (5 - \lambda)z &= 0 \end{aligned} \qquad (١٢)$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

الفصـــــل الرابـــــع

المعادلات والمتراجحات الجبرية

أولاً – المعادلات الجبرية :

المعادلة هـي تركيب جبري يتضمن متحولاً مجهولاً (أو عدة مجاهيل) . تتألف المعادلة من طرفين تربط بينهما إشارة مساواة (=) . لايمكن لهذه المساواة أن تتحقق إلا من أجل عدد معين من القيم الممكنة للمتحول المجهول . وتسمى هذه القيم التي تجعل المعادلة محققة جذور المعادلة أو حلولها . سنستعرض فيما يلي أهم المعادلات الجبرية ذوات المجهول الواحد والمعادلات متعددة المجاهيل .

I – معادلات المجهول الواحد : وهي على أنواع ، وتختلف عن بعضها بحسب درجاتها وتراكيبها ، وسنميز منها الأنواع التالية :

١– معادلة الدرجة الأولى :

وهي المعادلات التي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$ax + b = o \qquad a \neq o$$

ولها حل وحيد هو :

$$x = -\frac{b}{a}$$

مثال : أوجد حل المعادلة :

$$4x - 57 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$$

نضرب الطرفين بـ 6 فنحصل على المعادلة :

$$24x - 342 = 3x + 2x$$
$$19x - 342 = o$$

حل وحيد

$$x = \frac{342}{19} = 18$$

٢– معادلات الدرجة الثانية :

وهي المعادلات التي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$ax^2 + bx + c = o \qquad ; \qquad a \neq o$$

لإيجاد العلاقة العامة التي تعطينا جذور هذه المعادلات نقسم الطرفين على a ثم نكمل الطرف الأيسر إلى مربع كامل بإضافة وطرح المقدار $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ فنحصل على المعادلة التالية :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهكذا نجد أن لهذه المعادلة حلين هما :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وإذا رمز للمقدار الذي تحت الجذر بـ Δ ، أي $\Delta = b^2 - 4ac$ ، فإننا سنميز بين الحالات الثلاث التالية :

أ – إذا كان $\Delta > 0$ يكون لمعادلة الدرجة الثانية حلان حقيقيان هما :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب – إذا كان $\Delta = 0$ يكون لمعادلة الدرجة الثانية حل وحيد مضاعف هو :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

جـ – إذا كان $\Delta < 0$ يكون لمعادلة الدرجة الثانية حلان مركبان ومترافقان ، وبوضع Δ بالشكل :

$$\Delta = (-\Delta) = -1(-\Delta) = i^2(-\Delta)$$

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

وذلك لأنه إذا كان $\Delta < 0$ فإن $-\Delta > 0$ ويصبح الجذر التربيعي ممكناً وحيث أن i العدد التخيلي $i = \sqrt{-1}$

مثال : أوجد حلي المعادلة : $3x^2 - 24x + 45 = 0$

نقوم أولاً بحساب قيمة Δ فنجد أن :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4.3.45 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

وبذلك نجد أن الحلين المطلوبين :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{24 + 6}{6} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{24 - 6}{6} = 3$$

مثال آخر : أوجد حلي المعادلة :

$$5x^2 + 40x + 80 = 0$$

نحسب قيمة Δ فنجد أن :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (40)^2 - 4.5.80 = 0$$

وهكذا نجد أن للمعادلة حل وحيد مضاعف هو :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{10} = -4$$

مثال ثالث : أوجد حلي المعادلة : $2x^2 + 3x + 2 = 0$

نحسب قيمة Δ فنجد أن :

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 9 - 4.2.2 = -7$$

وهكذا نجد أن للمعادلة جذرين مركبين ومترافقين هما :

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{4} = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{4} = -\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}$$

ملاحظة هامة : يمكننا بناء على كل ما سبق كتابة معادلة الدرجة الثانية على شكل جداء قوسين يتضمنان الجذرين x_1 ، x_2 **كما يلي** :

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

وباجراء عملية الجداء على ما يلي :

$$ax^2 - a(x_1+x_2).x + ax_1.x_2 = 0$$

وبمقارنة ذلك بالشكل العام لمعادلة الدرجة الثانية :

$$ax^2+bx+c=o$$

نستنتج ان مجموع الجذرين x_1 ، x_2 يساوي

$$x_1 + x_. = -\frac{b}{a}$$

وان جداء الجذرين x_1 ، x_2 يساوي :

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

يمكن الاستفادة من هاتين العلاقتين للتحقق من صحة جذري معادلات الدرجة الثانية .

٣ – معادلات الدرجة النونية ذات الأمثال الصحيحة :

إن لمعادلات الدرجة n الشكل العام التالي :

$$a_o x'' + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots a_{n-1}x + a_{,,} = 0 \qquad (A)$$

حيث $a_{,,} \neq o$ وذلك حتى لاتصبح المعادلة من درجة أقل من n ، و كذلك $a_{,,} \neq o$ وذلك حتى لايكون $x = o$ حلاً لهذه المعادلة المفروضة ، وبالتالي يمكن تقسيم المعادلة على x فتصبح من الدرجة (n-I) .لإيجاد حلول مثل هذه المعادلات ، ننطلق من نظريات التحليل الرياضي ، التي تبرهن على أن عدد جذور المعادلة يساوي درجتها ، فمعادلة الدرجة الأولى ، لها جذر وحيد ، ومعادلة الدرجة الثانية لها جذران ، ومعادلة الدرجة الثالثة لها ثلاثة جذور ، (وقد يكون بعضها مضاعفا أو مكررا) . وكذلك نجد أنه سيكون لمعادلة الدرجة النونية n جذراً ، (بعضها مختلف وبعضها مكرر . ومنها الحقيقي ومنها المركب) . ولهذا نقوم بالبحث عن هذه الجذور جذرا جذرا , ونشترط في البداية أن تكون الأمثال a_o . a_1 . a_2 , ... a_{n-1} . a_n صحيحة " ، ولتسهيل عملية البحث سنورد النظريتين التاليتين اللتين تساعدانا في عملية البحث عن الجذور المطلوبة

نظرية ١ : إذا كان x_0 جذراً صحيحاً ومختلفاً عن الصفر للمعادلة المفروضة ، فإن ذلك الجذر سيكون من قواسم الحد الحر a_n .

البرهان : بما أن a جذر للمعادلة فإنه يحقق العلاقة التالية :

$$a_0x_0^{\,n} + a_1 x_0^{\,n-1} + a_2 x_0^{\,n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x_0 + a_n \equiv 0$$

وبتقسيم الطرفين على x_0 نحصل على أن :

$$a_0 x_0^{\,n-1} + a_1x_0^{\,n-2} + a_2x_0^{\,n-3} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} \equiv \frac{-a_n}{x_0}$$

وبما أن الطرف الأيسر يشكل مجموع وجداءات أعداد صحيحة فإن الناتج سيكون عدداً صحيحا . ومن المطابقة لابد وأن يكون الطرف الأيمن والمساوي لـ $\left(\frac{a_n}{x_0}\right)$ عدداً صحيحاً . أي أن a_n يقبل القسمة على x_0 دون باق وهذا يعني أن x_0 هو أحد قواسم الحد الحر a_n . وهو المطلوب .

نظرية ٢ : إذا كان x_0 جذراً ما للمعادلة النونية المفروضة فإن كثير الحدود في الطرف الأيسر يقبل القسمة على $(x- x_0)$ وبالعكس ! إذا كان كثير الحدود يقبل القسمة على $(x- x_0)$ فإن العدد x_0 هو جذر المعادلة النونية المفروضة .

(تقبل هذه النظرية بدون برهان)

ملاحظة هامة : إذا لم تكن الأمثال : $a_0 , a_1 , a_2 \ldots\ldots a_{n-1} , a_n$ أعداداً صحيحة فإننا نقوم بتوحيد المقامات وذلك بضرب الطرفين بأعداد مناسبة حتى نجعلها جميعاً صحيحة ثم نطبق النظرية الأولى على الحد الحر الجديد a_n^* .

إذا لم نجد بين قواسم الحد الحر a_n (أو a_n^*) أي جذر للمعادلة المفروضة فإن هذا يعني أنه لايوجد للمعادلة جذور صحيحة وإن جميع جذورها أعداد كسرية أو مركبة وعندما نجد أي جذر x_0 للمعادلة المفروضة نستفيد منه لتخفيض درجة المعادلة من n إلى $(n- x_0)$ وذلك بتقسيم الطرف الأيسر على $(x- x_0)$ فنحصل على معادلة جديدة من الدرجة $(n-1)$. لإيجاد الحلول الصحيحة للمعادلة النونية نتبع الخطوات التالية :

١ – نجعل جميع الأمثال $a_0 , a_1 , a_2 , \ldots\ldots , a_n$ أعداداً صحيحة ، إذا لم تكن كذلك ،

بضرب طرفيها بالمقام المشترك للكسور ، ثم نكتب المعادلة على شكل كثير حدود مساوٍ للصفر .

٢- نبحث عن قواسم الحد الحر a_o ، a_n ، بما فيها القواسم المتطرفة ± 1 . إن جذور المعادلة هي بعض الأعداد الناتجة عن قسمة قواسم a_o على قواسم a_n .

٣- نقوم بتجريب كل من هذه الأعداد واحداً بعد الآخر للتحقق فيما إذا كان يحقق المعادلة المفروضة .

٤- إذا كان أحد الأعداد وليكن القاسم x_0 يحقق المعادلة فإننا نقسم الطرفين على $(x-x_0)$ فنحصل على كثير حدود من الدرجة $(n-1)$ وإذا كان لدينا أكثر من عدد مثل m و k يحققان المعادلة فإننا نكرر تقسيم كثير الحدود الناتج عن التقسيم السابق على $(x-m)$ ثم نكرر التقسيم على $(x-k)$ حتى نحصل على كثير حدود من درجات أدنى . ونتابع العمل حتى نصل (إذا أمكن) إلى كثير حدود من الدرجة الثانية فنطبق عليه طريقة حل معادلة الدرجة الثانية .

٥ - إن الأعداد التي تحقق المعادلة هي جذور للمعادلة المفروضة .

ملاحظة : لايمكن الحصول على الجذور المركبة للمعادلة المفروضة بواسطة هذه الطريقة وهناك طرق أخرى لإيجاد هذه الحلول سنتعرض لبعضها لاحقاً .

مثال : أوجد حلول المعادلة :

$$\frac{1}{2}x^4 - \frac{23}{2}x^2 - 9x + 20 = o$$

نقوم قبل كل شيء بجعل الأمثال صحيحة ، وبضرب الطرفين بـ 2 ، فنحصل على المعادلة المكافئة التالية :

$$x^4 - 23x^2 - 18x + 40 = o$$

وبذلك نجد أن قواسم الحد الحر (40) هي : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20$

نقوم بتجريب هذه القواسم فنجد أن القاسم (+1) يحقق المعادلة الأخيرة لأن :

$$(1)^4 - 23\,(1)^2 - 18\,(1) + 40 = 0$$

أي أن $x = +1$ هو جذر للمعادلة المفروضة .

وقبل أن نجري عملية التقسيم على (x-1) ، نجرب بقية القواسم فنجد أيضا أن كلا من الأعداد (-2) و (-4) و (5) تحقق المعادلة الأخيرة أي : $x = -2$, $x = -4$, $x = 5$ هي جذور للمعادلة المفروضة . وبذلك نكون قد حصلنا على الجذور الأربعة لها ، دون أن نضطر إلى تخفيض مرتبتها ، وبما أن المعادلة من الدرجة الرابعة فليس لها أكثر من أربعة جذور وهي :

$$x_1 = +1 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -4 \qquad x_4 = 5$$

مثال آخر : أوجد حلول المعادلة :

$$2x^3 + 2x^2 - 15x + 6 = 0$$

نلاحظ مباشرة أن جميع الأمثال أعداد صحيحة وأن قواسم الحد الحر (6) هي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ وبتجريب هذه القواسم واحداً بعد الآخر نجد أن العدد (2) يحقق المعادلة المفروضة لأن : $2(2)^3 + 2(2)^2 - 15(2) + 6 = 0$

أي أن $x = 2$ هو جذر للمعادلة المفروضة .

وبما أن القواسم الأخرى لاتحقق المعادلة المفروضة نستفيد من الجذر السابق بتخفيض درجة المعادلة فنقسم الطرف الأيسر على (x-2) فنجد أن :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 2x^2 - 15x + 6 & x - 2 \\ \hline -2x^3 \pm 4x^2 & 2x^2 + 6x - 3 \\ \hline 0 \quad 6x^2 - 15x + 6 & \\ -6x^2 \pm 12x & \\ \hline -3x + 6 & \\ \pm 3x \mp 6 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

أي أن :

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 15x + 6}{x - 2} = 2x^2 + 6x - 3$$

نضع الناتج الأخير مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة التالية :

$$2x^2 + 6x - 3 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية نحلها بواسطة المميز Δ الذي يساوي :

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 36 - 4.2(-3) = 60$$

وبذلك نجد أن الحلين الآخرين هما :

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{60}}{4} = 0.44$$

$$x_3 = \frac{-6 - \sqrt{60}}{4} = -3.44$$

وبذلك تكون حلول المعادلة المفروضة هي :

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 0.44 \qquad x_3 = -3.44$$

٤- طريقة خاصة لإيجاد حلول تقريبية للمعادلات الجبرية من الدرجة n (طريقة عزل الجذور والمعاودة) : وتعتمد هذه الطريقة على النظريات التالية :

نظرية ٣ : إن عدد حلول المعادلة الجبرية من الدرجة n يساوي n حلاً .

يمكن أن تكون هذه الجذور حقيقية أو مركبة . فالجذورالحقيقية قد تكون صحيحة أو عادية أو غير عادية . أما الجذورالمركبة فهي مترافقة مثنى مثنى ، وعددها زوجي .

نظرية ٤ : إذا رمزنا للطرف الأيسر للمعادلة النونية بـ $P_n(x)$ فإنها تكتب على شكل كثير حدود كما يلي :

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

حيث : $a_o \neq 0$ و $a_n \neq 0$ وإذا كان x_k جذراً حقيقياً أو مركباً للمعادلة السابقة فإن طويلته $|x_k|$ تحقق المتراجحة :

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}} < |X_K| < 1 + \frac{A}{|a_o|}$$

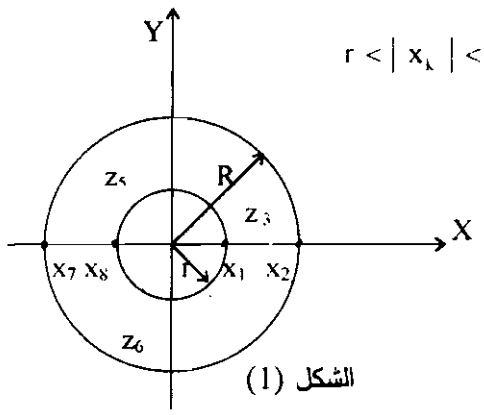
حيث أن :

$$B = \max\{|a_o|, |a_1|, \ldots\ldots\ldots\ldots, |a_{n-1}|\}$$

$$A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots, |a_{n-1}|, |a_n|\}$$

وهذا يعني أن جذور المعادلة $P_n(x)$ تقع بين دائرتين نصفا قطريهما

$R = 1 + \frac{A}{|a_o|}$, $r = \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}}$ كما هو موضح على الشكل رقم (1).وبالتالي



الشكل (1)

فإن أي جذر x_k يحقق العلاقة : $r < |x_k| < R$

وهذا يعني أن R ، r سيكونان الحدان الأعلى والأدنى للجذور الحقيقة الموجبة لـ $p_n(x)$. كما أن -r ، -R سيكونان الحد الأعلى والأدنى للجذور الحقيقة السالبة . لذلك يستفاد من هذه النظرية في إيجاد الحدود الدنيا ، والعليا ، للجذورالحقيقة ، والبحث في ذلك المجال عن الجذور الحقيقية المطلوبة .

نظرية ٥ : إذا كانت قيمة كثير الحدود $p_n(x)$ موجبة (سالبة) ، عند النقطة $x = a$ ، وكانت قيمته سالبة (موجبة) عند النقطة $x = b$ ، وكانت $a < b$ فإن لكثير الحدود $p_n(x)$ جذراً واحداً على الأقل في المجال $[a , b]$.

تفيدنا هذه النظرية في البحث عن الحلول التقريبية الحقيقة لـ $p_n(x)$ ، ضمن المجال $[a , b]$ فإننا نعطي x قيماً متتالية إعتباراً من a ثم $a + h$ ثم $a + 2h$ ..... الخ ، حيث h هو مقدار صغير يسمى الدقة نتحكم بها كما نريد ، ثم نعوضها في $p_n(x)$ ونراقب تغيرات إشارته ، فاذا كانت $p_n(a + 2h) > 0$ ثم أصبحت $(a + 3h) < 0$ هناك جذراً حقيقياً في $[a + 2h , a + 3h]$ و يمكن إعـ حد بتصغير مقدار الدقة h بالقدر الذي نريد ، فنحصل في $x \approx a + 2$.

يمكن تطبيق هذه الطريقة بواسطة الحاسـ الج بسرعة عالية وبدقة متناهية في الصغر . وهكذا يمكننا أن نطبـق عـ ة يع المجالات الأخرى التي يحدث فيها تغيير لإ شارة $p_n(x)$.

يستفاد من الحصول على الجذور الحقيقية ، لتخفيض درجة كثير الحدود $p_n(x)$ ، لأنه إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ جذورا لـ (x) p_n فإنه يمكننا كتابته على الشكل التالي :

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_m)\, Q_{n\,m}(x)$$

حيث $Q_{n\,m}(x)$ هو كثير حدود من الدرجة (n - m) ، ينتج من تقسيم $p_n(x)$ على كل من $(x - x_k)$ ، (k = 1,2 ... , m) على التوالي . كما يمكن معالجة $Q_{n\,m}(x)$ وإيجاد جذوره المركبة من خلال التجريب أيضاً ولكن باستخدام طرق أكثر تعقيدا .

إذا كان $Q_{n\,m}(x)$ من الدرجة الثانية فيمكننا إيجاد جذريه بتطبيق ماورد سابقا بشأن معادلات الدرجة الثانية .

ملاحظة : إذا لم يغير(x) p_n إشارته من أجل جميع قيم $|x|$ التي تحقق المتراجحة $r < |x| < R$ فهذا يعني أنه لا توجد جذورحقيقية لـ (x) p_n .

مثال : أوجد جذور المعادلة :

$$p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 2 = 0$$

نبدأ أولاً بالبحث عن الحد الأعلى والأدنى فنجد :

الحد الأدنى
$$r = \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{3}} = \frac{1}{3}$$

الحد الأعلى
$$R = 1 + \frac{A}{|a_0|} = 1 + \frac{6}{1} = 7$$

أي أن الجذور الحقيقية للمعادلة المفروضة موجودة في أحد المجالين $\left[\frac{1}{3}, 7\right]$ و $\left[-7, -\frac{1}{3}\right]$ لذلك نبدأ بإعداد جدول لإشارات $P_{3(x)}$ في المجال الأول وعند بعض القيم المتتالية لـ x فنحصل على الجدول التالي :

x	1/3	1	2	3	4	5	6	7
إشارة (x) p	+	−	−	−	−	−	+	+

ومن الجدول نلاحظ أن $P_3(x)$ يغير إشارته في المجالين $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ و $[5, 6]$. أي أنه هناك جذراً حقيقياً واحداً على الأقل ، يقع في كل من هذين المجالين . وإذا كنا نريد الحصول على قيمة تقريبية للجذر في المجال الأول بدقة $h = 0,01$ ، فإننا نقوم بحساب قيم $p_n(x)$ ، من أجل جميع القيم $1/3 + k(0,01)$ المتتالية ، حتى نحصل على أقرب قيمة لـ $p_n(x)$ من الصفر فتكون قيمة x المقابلة لتلك القيمة هي الجذر المطلوب .

ولكن إختصاراً للعمليات الحسابية نبدأ بحساب $p_3\left(\frac{1}{3}\right)$ ، ثم نقفز مباشرة إلى $p\left(\frac{1}{2}\right)$ ، ثم إلى $p\left(\frac{3}{4}\right)$ وبعد ذلك إلى $p_1(1)$ ، وندرس الإشارات فنجد أن :

x	1/3	$\frac{1}{2}$	3/4	1
اشاره $p_3(x)$	+	+	+	−

أي أن الجذر الذي نبحث عنه يقع في المجال $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. وهكذا نجد أن القيم المتتالية لـ $p_n(x)$ في هذا المجال تساوي :

$$P_3\left(\frac{3}{4}\right) = 0,046875$$

$$p\left(\frac{3}{4} + 0,01\right) = -0,026624$$

أي أن اشاره $p_n(x)$ تغيرت في المجال $[0,75 \ , \ 0,76]$ وهذا يعني وجود جذر في هذا المجال . لذلك يمكننا إعتبار القيمة

$$x \approx \frac{0,75 + 0,76}{2} = 0,755$$

جذراً تقريبياً للمعادلة المفروضة يحقق الدقة المطلوبة . يستفاد من هذا الجذر لتخفيض درجة المعادلة . لذلك نقوم بتقسيمها على $(x - 0,755)$

فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية من الشكل :

$$x^3 - 6x^2 + 3 \;\Big|\; \frac{x - 0{,}755}{x^2 - 5{,}245x - 3{,}96}$$

$$x^3 \mp 0{,}755x^2$$

$$-5{,}245x^2 + 3$$

$$-5{,}245x^2 \mp 3{,}96x$$

$$3 \quad -3{,}96x + 3$$

$$-3{,}96x + 3$$

$$0 \quad 0$$

وهكذا نجد أن معادلة الدرجة الثانية الناتجة هي

$$x^2 - 5{,}245x - 3{,}96 = 0$$

وأن مميزها $\Delta = b^2 - 4a.c = 43{,}35$

وإن جذريها الحقيقيين هما :

$$x' = +\frac{5{,}245 + \sqrt{43{,}35}}{2} = 5{,}91455$$

وهو الجذر الواقع في المجال $[5\ ,\ 6]$

$$x'' = \frac{+5{,}245 - \sqrt{43{,}35}}{2} = -0{,}6695$$

وهو الجذر الواقع في المجال السالب . وبذلك نكون قد حصلنا على الجذور الثلاثة المطلوبة بشكل تقريبي وهي

$$x_1 \approx 0{,}755 \;;\quad x_2 \approx 5{,}9145 \quad ;\quad x_3 \approx -0{,}6695$$

٥ - حلول المعادلات الكسرية

وهي المعادلات التي تكون معطاة على شكل كسور جبرية مختلفة . ولإيجاد جذور مثل هذه المعادلات نقوم بإصلاحها حتى نحصل على كسر واحد ذي بسط مؤلف من كثير حدود ومقام مؤلف من كثير حدود أيضاً ، ومكتوب على الشكل التالي :

$$\frac{p_n(x)}{Q_m(x)} = 0$$

بفرض أن $Q_m(x) \neq 0$ ، لذلك يجب حذف جميع قيم x تجعل $Q_m(x) = 0$ من مجال

التعريف والحلول . وبناء على ذلك للحصول على حلول المعادلة الكسرية نضع البسط مساويا للصفر

$$p_n(x) = o$$

ثم نقوم بإيجاد حلوله بإستخدام الطرائق السابقة ، مع الإنتباه إلى ضرورة استثناء قيم x التي تعدم المقام $Q_m(x)$. سنشرح كيفية إيجاد تلك الحلول من خلال المثال التالي :

مثال : أوجد حلول المعادلة

$$\frac{x+2}{x-8} - \frac{3}{2} = \frac{x-1}{x-8}$$

بتوحيد المقامات نجد أن : $\frac{2(x+2)-3(x-8)-2(x-1)}{2(x-8)} = 0$

وبفرض أن $x \neq 8$ نضع البسط مساوياً للصفر فنجد أن :

$$2x+4-3x+24-2x+2=0$$

$$3x+30=0$$

$$x=-10$$

حل وحيد .

مثال آخر :أوجد حلول المعادلة

$$\frac{2x+1}{x-3} + \frac{4x+2}{2x-5} = 15$$

نقوم بتوحيد المقامات فنجد أن

$$\frac{(2x-5)(2x+1)+(x-3)(4x+2)-15(x-3)(2x-5)}{(x-3)(2x-5)} = 0$$

وبفرض $x \neq 3$ ، $x \neq \frac{5}{2}$ ، وبإصلاح البسط ووضعه مساوياً للصفر نحصل على المعادلة التالية :

$$-22x^2 + 147x - 236 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية ، مميزها

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 841 \qquad \sqrt{\Delta} = 29$$

وبالتالي فإن جذريها الحقيقيين هما :

$$x_1 = \frac{-147 + \sqrt{841}}{2(-22)} = 2,6818$$

$$x_2 = \frac{-147 - \sqrt{841}}{2(-22)} = 4$$

وهما مقبولان لأنهما يختلفان عن القيمتين 3 ، $\frac{5}{2}$ المستثنتين .

٦ - حلول المعادلات الصماء (الجذرية) :

إن المعادلات الصماء هي المعادلات التي تتضمن جذورا لبعض التراكيب فيها ، ولإيجاد حلول مثل هذه المعادلات نقوم بإزالة تلك الجذور عن طريق تربيعها أوتكعيبها .....الخ . وسنشرح ذلك من خلال المثال التالي .

مثال : أوجد حلول المعادلة

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} - \sqrt{3x-2} = 0$$

وذلك بشرط أن تكون جميع المقادير التي تحت الجذور موجبة ، أي يشترط أن يكون $x > 0$ و $x > 5$ و $x > \frac{2}{3}$. نلاحظ أن الشرط $x > 5$ يغني عن الشرطين الآخرين.

لمعالجة الجذور ننقل أحدها وليكن $\sqrt{3x-2}$ إلى الطرف الأيمن ونربع الطرفين فنحصل على :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{3x-2}$$

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{x-5} + (x-5) = 3x - 2$$

$$x + 3 = 2\sqrt{x}\sqrt{x-5}$$

نربع مرة ثانية فنجد أن

$$x^2 + 6x + 9 = 4x(x-5)$$

$$3x^2 - 26x - 9 = 0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية ، مميزها :

$$\Delta = b^2 - 4a.c = (-26)^2 - 4.3.(-9) = 784 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{784} = 28$$

وإن جذريها الحقيقيين هما :

$$x_1 = \frac{+26+\sqrt{784}}{2.3} = 9$$

$$x_2 = \frac{+26-\sqrt{784}}{2.3} = -\frac{1}{3} \qquad \text{(غير مقبول)}$$

و يلاحظ أن الجذر الثاني $x_2 = -\frac{1}{3}$ يقع خارج الشرط السابق $x > 5$ و هذا ما يجعله جذرا غير مقبول في المعادلة الأساسية .

ملاحظة هامة : إن السبب الحقيقي وراء الجذر غير المقبول $x = -\frac{1}{3}$ هو إن عملية التربيع التي أجريناها على الحدود أدت إلى إدخال جذور جديدة إلى المعادلة . لذلك ننصح دائماً عند الحصول على جذور المعادلة الصماء التحقق من صلاحية أو عدم صلاحية هذه الجذور .

٧- حلول المعادلات الأسية و اللوغارتيمية :

وهي المعادلات التي تتضمن تراكيب أسية أو لوغارتيمية ، و يتم التعامل معها حسب قواعد إستخدام اللوغارتيم . و سنشرح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال : أوجد حلول المعادلة :

$$5^x - 6x - 3 = 0$$

لإيجاد جذور هذه المعادلة نعتمد على طريقة المعاوده لإيجاد الجذور التقريبية ، و لذلك نقوم بدراسة تغيرات الإشارة عند بعض القيم السهلة فنجد أن :

X	$-\infty \ldots -2$	-1	0	$+1$	$+2$	3	$4 \ldots +\infty$
إشارة $5^x - 6x - 3$	$+ \ldots +$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+ \ldots +$

أي يوجد لهذه المعادلة حلان حقيقيان الأول في المجال $[0\ ,-1]$ ، والثاني في المجال $[1,2]$.لإيجاد الجذر الأول نرمز للطرف الأيسر بـ $f(x)$ ونبدأ بتعويض القيم التالية لـ x ، فنجد :

$$x_1 = -0,1 \Rightarrow f(-0,1) = -1,54866 \quad -0,41446 \quad -0,9$$
$$x_2 = -0,2 \Rightarrow f(-0,2) = -1,075 \quad 1,5633$$
$$x = -0,3 \Rightarrow f(-0,3) = -0,5830$$
$$x = -0,4 \Rightarrow f(-0,4) = -0,0767$$
$$x = -0,41 \Rightarrow f(-0,41) = -0,0230$$
$$x = -0,414 \Rightarrow f(-0,414) = -0,0024 \approx 0$$

و هكذا يمكننا اعتبار القيمة $x = -0,414$ جذراً تقريبياً للمعادلة المفروضة لأنها جعلت قيمة $f(x)$ قريبة جداً من الصفر .

و لإيجاد الجذر الثاني في المجال الثاني نتبع نفس الأسلوب فنجد أن :

$$x = 1,1 \qquad f(1,1) = -3,727$$
$$x = 1,5 \qquad f(1,5) = -0,8197$$
$$x = 1,55 \qquad f(1,55) = -0,1828$$
$$x = 1,56 \qquad f(1,56) = -0,04617$$
$$x = 1,563 \qquad f(1,563) = -0,0045 \approx 0$$

لذلك يمكننا اعتبار القيمة $x = 1,563$ جذراً تقريبياً آخر للمعادلة المفروضة ، لأنه يجعل قيمة $f(x)$ قريبة جداً من الصفر .

٨- حلول المعادلات ذات المجهولين :

إذا كانت المعادلة تتضمن مجهولين x و y فلا يمكن حلها إلا بوجود معادلة ثانية مستقلة عنها ، وتتضمن نفس المجهولين أو أحدهما على الأقل ، وعندئذ يكون لهما حلول مشتركة تحقق كلتا المعادلتين . و يتألف كل حل مشترك من قيمة محددة لكل من المجهولين مثل $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.....الخ .

سنشرح كيفية التعامل مع هذه المعادلات من خلال الأمثلة التالية :

مثال ١: أوجد الحلول المشتركة للمعادلتين :

$$x^2 - 3xy + 4y^2 - 6x + 2y = 0$$
$$x - 2y = 3$$

نقوم بتطبيق طريقة التعويض فنحسب x من المعادلة الثانية ونعوضه في الأولى فنجد :

أن :

$$x = 3 + 2y$$

$$(3+2y)^2 - 3(3+2y)y + 4y^2 - 6(3+2y) + 2y = 0$$

$$9 + 12y + 4y^2 - 9y - 6y^2 + 4y^2 - 18 - 12y + 2y = 0$$

$$2y^2 - 7y - 9 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية ، مميزها :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-7)^2 - 4.2(-9) = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$$

و إن جذريها الحقيقيين هما :

$$y_1 = \frac{+7+\sqrt{121}}{4} = 4.5$$

$$y_2 = \frac{+7-\sqrt{121}}{4} = -1$$

و بالتعويض في المعادلة الثانية نجد أنه مقابل كل قيمة لـ y نحصل على قيمة محددة لـ x ، وهي :

$$y_1 = 4,5 \Rightarrow x_1 = 3+2(4.5) = 12$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 3+2(-1) = 1$$

و الحلان المشتركان للمعادلتين المفروضتين هما :

$$(12,4.5) \qquad (1,-1)$$

مثال ٢ : أوجد الحلول المشتركة للمعادلتين التاليتين :

$$\begin{array}{c|l} 2 & x^2 + xy + 2y^2 = 74 \\ 1 & 2x^2 + 2xy + y^2 = 73 \end{array}$$

لمعالجة هاتين المعادلتين نضرب الأولى بـ 2 و نطرح الثانية منها فنحصل على المعادلة التالية :

$$3y^2 = 75$$

$$y^2 = 25$$

و منها نحصل على الحلين التاليين :

$$y_1 = +5 \quad ; \quad y_2 = -5$$

بتعويض الحل الأول $y_1 = 5$ في المعادلة الأولى نحصل على المعادلة

$$x^2 + 5x + 2\,(25) = 74$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية . مميزها

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 25 - 4.(-24) = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$$

حلاها الحقيقيان هما :

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{121}}{2} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{-5-\sqrt{121}}{2} = -8$$

و بتعويض الحل الثاني $y_1 = -5$ في المعادلة الأولى نحصل على المعادلة

$$x^2 - 5x + 2(-5)^2 = 74$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية ، بتحليلها نجد :

$$(x+3)\,(x-8) = 0$$

ومنه نجد الجذرين التاليين للمعادلة :

$$\Rightarrow x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = 8$$

و هكذا نجد أن الحلول المشتركة للمعادلتين المفروضتين هي الحلول الأربعة التالية :

$$(3,5) \quad , \quad (-8,5) \quad , \quad (8,-5) \quad , \quad (-3,-5)$$

ثانياً – المتراجحات :

تعريف :المتراجحة هي علاقة ترتيب بين طرفين يتضمن كل منهما تراكيب جبرية.

لذلك يمكننا أن نميز بين نوعين أساسيين من المتراجحات هما :

المتراجحات العددية : و هي التي تشكل علاقة ترتيب بين الأعداد فقط . فإذا كان لدينا عددان حقيقيان a و b و كان $a \neq b$ ، توجد بينهما إحدى العلاقتين التاليتين :

a أصغر من b ونكتب ذلك على الشكل $a < b$

a أكبر من b ونكتب ذلك على الشكل $a > b$

وإذا أخذنا الحالة الأولى $a < b$ فإننا نجد أن هذه المتراجحة تتمتع بالخواص التالية :

إذا كان c عدداً ما فإن $a + c < b + c$

اذا كان $c > 0$ فإن	$c \cdot a < c \cdot b$
إذا كان $c < 0$ فإن	$c \cdot a > c \cdot b$
إذا كان $c < d$ فإن	$a + c < b + d$
إذا كان $\|x\| \le a$ فهذا يكافئ	$-a \le x \le a$

المتراجحات الجبرية : و هي التي تتضمن مجهولاً أو أكثر في أحد أو كلا طرفيها

و سنجد ضمن هذا النوع عددا من المتراجحات مثل : متراجحات بمجهول واحد ، متراجحات بمجهولين او أكثر .

سنعالج كيفية ايجاد حلول هذه المتراجحات وفق ما هو وارد في الفقرات التالية :

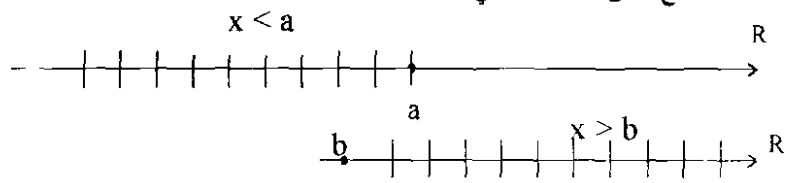
أ - متراجحات المجهول الواحد و حلولها :

لنفترض أن المتراجحة تتضمن متحولا مجهولاً x . و هنا سنميز بين الأنواع التالية لهذه المتراجحات :

١- **المتراجحات البسيطة** : و هي التي يمكننا كتابتها على أحد الشكلين التاليين :

$x < a$ أو $x > b$

و يمكننا تمثيل قيم x التي تحقق هذه المتراجحة على محور الأعداد الحقيقية بالمجال $]-\infty, a[$ في حالة $x < a$ ، و بالمجال $]b, +\infty[$ في حالة $x > b$ كما هو موضح على الشكل التالي :



الشكل (2)

نسمي جزء المحور الحقيقي الذي تتحقق فيه المتراجحة بمجال حلول المتراجحة ، وهو يشمل عدداً لا نهائياً من الحلول التي تحقق المتراجحة المفروضة .

مثال : أوجد مجال حلول المتراجحة : $2x - \frac{5x+1}{2} < 3x - 1$

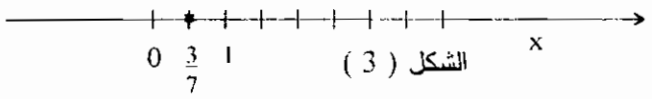
نضرب طرفي المتراجحة بـ 2 فنحصل على :

$$4x - 5x + 1 < 6x - 2$$

$$7x > 3 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{7}$$

إذن حلها يشمل جميع الأعداد الواقعة في المجال $\left]\frac{3}{7}, +\infty\right[$

كما هو مبين على الشكل (٣)



الشكل (3)

٢- **المتراجحات المزدوجة** : و هي المتراجحات التي تكون على الشكل

$$a < f(x) < b$$

و من الواضح أنه يمكننا إعتبار هذه المتراجحة مؤلفة من متراجحتين بسيطتين هما :

$$f(x) > a \qquad \text{و} \qquad f(x) < b$$

فإذا كان المجال I_1 حلاً للأولى ، و كان المجال I_2 حلاً للثانية فإن الحل المشترك لهما هو المجال $I = I_1 \cap I_2$ و هو يمثل مجال حلول المتراجحة المزدوجة

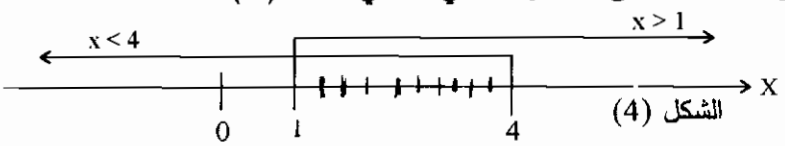
مثال : أوجد مجال حلول المتراجحة $2x - 3 < 4x - 5 < x + 7$

لإيجاد مجال حلولها ، نأخذ المتراجحتين البسيطتين ونوجد مجالي حلولهما :

$2x - 3 < 4x - 5$	$4x - 5 < x + 7$
$2 < 2x$	$3x < 12$
$1 < x$	$x < 4$

و هكذا نجد أن مجال حلول الأولى $I_1 =]1, +\infty[$ و إن مجال حلول الثانية هو $]-\infty\ 4[$ و إن حلهما المشترك هو المجال : $I = I_1 \cap I_2 =]1, 4[$

يمكن تمثيل ذلك على المحور الحقيقي كما في الشكل (4)



الشكل (4)

٣- **متراجحات الدرجة الثانية** : و هي متراجحات لها الشكل التالي :

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad a \neq 0 \quad (A)$$

لحل مثل هذه المتراجحات نكمّل الطرف الأيسر إلى مربع كامل كما يلي :

$$a x^2 + b x + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

إذا رمزنا بـ $\Delta = b^2 - 4ac$ (مميز معادلة الدرجة الثانية) فإننا نجد أن

$$a x^2 + b x + c = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad (B)$$

و هنا سنميز بين ثلاث حالات لإشارة Δ و هي .

١ - إذا كان $\Delta < 0$ ، فعندها يكون ما داخل القوس موجباً ، وبالتالي تكون إشارة الطرف الأيسر من إشارة a . فإذا كان $a > 0$ فالمتراجحة A تكون محققة من أجل جميع قيم x من R . أما إذا كانت $a < 0$ فالمتراجحة A تكون مستحيلة .

٢ - إذا كان $\Delta = 0$ فإن ما داخل القوس يكون موجباً إلا في النقطة $x = -\frac{b}{a}$ حيث يصبح مساوياً للصفر . و تكون إشارة الطرف الأيسر من إشارة a . و هي تشبه الحالة السابقة . فتكون المتراجحة (A) محققة من أجل جميع x حيث $x \in R \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ إذا كان $a > 0$. و تكون مستحيلة عندما $a < 0$.

٣ - إذا كان $\Delta > 0$ ، نكتب الطرف الأيسر على شكل جداء قوسين كما يـ

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (٢)$$

حيث أن x_1 و x_2 هما جذرا ثلاثي الحدود في الطرف الأيسر

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

و اللذان يعطيان بواسطة العلاقتين :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لدراسة إشارة المتراجحة (A) في هذه الحالة ، نـدرس جدول تقـاطع الإشـارات لكل من العامل a و القوس ($x - x_1$) و القوس ($x - x_2$) و سنوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال : أوجد حلول المتراجحة

$$-x^2 - 7x - 12 > 0$$

نحسب أولا المميز Δ فنجد أن :

$$\Delta = b^2 - 4a.c = (-7)^2 - 4(-1)(-12) = 1$$

لذلك نبحث عن جذري الطرف الأيسر فنجد أن

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{-2} = -3$$

و بذلك يمكننا كتابة المتراجحة السابقة على الشكل التالي :

$$-x^2 - 7x - 12 = -(x+4)(x+3) > 0$$

و لدراسة إشارات الطرف الأيسر ننشأ الجدول التالي :

x	$-\infty$		- 4		-3			$+\infty$
a = -1	–		–	–	–	–	–	
(x + 4)	–	–	0	+	+	+	+	+
$x + 3$	–	–	–	–	0	+	+	+
- (x + 4) (x + 3)	–	–	0	+	0	–	–	–

من هذا الجدول يتضح لنـا أن المتراجحـة محققـة وتـأخذ الإشـارة (+) فقط فـي المجـال [3- و 4 -] وهو مجال حلولها المطلوب .

مثال آخر : أوجد حلول المتراجحة

$$x^2 - 4x + 12 > 0$$

نلاحظ أولاً أن قيمة Δ تساوي

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 16 - 4.12 < 0$$

و هذا يعني أن إشارة الطرف الأيسر من إشارة a و بما أن $a = 1 > 0$ فالمتراجحة محققة من أجل جميع x من R

مثال ثالث : أوجد حلول المتراجحة

$$-x^2 + 4x - 4 > 0$$

نحسب أولا قيمة المميز Δ فنجد :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 16 - 4(-1)(-4) = 0$$

و هذا يعني أن إشارة الطرف الأيسر من إشارة a و بما أن $a < 0$ فالمتراجحة المفروضة مستحيلة .

ب – المتراجحات ذات المجهولين : سنميز منها نوعين خطية و غير خطية .

١- المتراجحة الخطية بمجهولين :

و هي المتراجحة التي يمكن كتابتها على الشكل التالي

$$ax + by + c > 0 \qquad a \neq 0, b \neq 0$$

لإيجاد حلول هذه المتراجحة في المستوي XOY نبحث عن المنطقة التي تجعل الطرف الأيسر موجبا ، لذلك نقوم بوضع الطرف الأيسر مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة الخطية التالية :

$$ax + by + c = 0$$

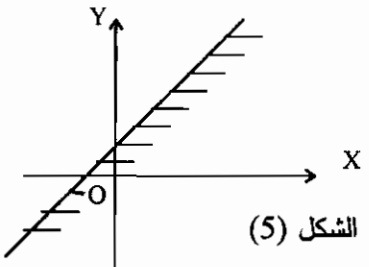
و هي معادلة مستقيم في X OY . و يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + c_1$$

حيث أن $m = \frac{-a}{b}$ و هو ميل المستقيم و أن $c_1 = \frac{-c}{b}$ و هو ترتيب نقطة تقاطع المستقيم مع المحور o y . ثم نرسم المستقيم السابق على المستوي XOY وذلك بتحديد نقطتين يمر بهما . إن أفضل نقطتين لتحديد المستقيم هما نقطتا تقاطعه مع المحورين OX و OY ، لتحديد هاتين النقطتين نضع $x = 0$ فيكون $y = \frac{-c}{b}$ و هكذا نحصل

على النقطة $\left(0 , \frac{-c}{b}\right)$ ثم نضع $y = 0$ فنجد $x = \frac{-c}{a}$ وبذلك نحصل على النقطة $\left(\frac{-c}{a} , 0\right)$. أما إذا كان $c = 0$ (المستقيم يمر من المبدأ) فيمكننا أن نضع $x = 1$ فنجد أن $y = \frac{-a}{b}$ فنحصل على النقطة $\left(1 , \frac{-a}{b}\right)$.

بصورة عامة يمكننا إعطاء أية قيمة مثل x_0 فنحصل على قيمة مقابلة لها لـ y و لتكن y_0 و بالتالي نحصل على النقطة (x_0 , y_0) التي يمر منها المستقيم المفروض . و الشكل البياني رقم (5) يبين ذلك .



الشكل (5)

ومن الواضح أن المستقيم المذكور يقسم المستوي XOY إلى ثلاثة مناطق منفصلة هي:

١- **منطقة موجبة** : و هي تشمل نصف المستوي الذي يجعل المتراجحة الموجبة محققة ، لأنه إذا بدلنا إحداثيات أية نقطة من نقاطها في المتراجحة المفروضة أعطتنا نتيجة موجبة . و هي تشكل منطقة الحلول المقبولة .

٢- **منطقة سالبة** : و هي تشمل نصف المستوي الذي يجعل المتراجحة الموجبة غير محققة ، لأنه إذا بدلنا إحداثيات أية نقطة من نقاطها في المتراجحة المفروضة أعطتنا نتيجة سالبة .

٣- **منطقة فاصلة** : و هي تشمل جميع نقاط المستوي التي تقع على المستقيم الفاصل بين المنطقتين السابقتين . إن تلك النقاط تجعل الطرف الأيسر للمتراجحة معدوماً .

ملاحظة:إذا كانت المتراجحة تتضمن مساواة أي كانت على الشكل $ax + by + c \geq 0$ فإن منطقة الحلول المقبولة تشمل المنطقتين الموجبة والفاصلة أي تشمل ضمناً جميع نقاط

المستقيم الفاصل بين المنطقتين الموجبة و السالبة .

و هكذا نجد أنه يمكننا تحديد منطقة تحقق المتراجحة الخطية بإتباع الخطوات التالية :

١ – نرسم المستقيم : $ax + by + c = 0$ على المستوي xoy باستخدام نقطتين مناسبتين يمر منهما ذلك المستقيم .

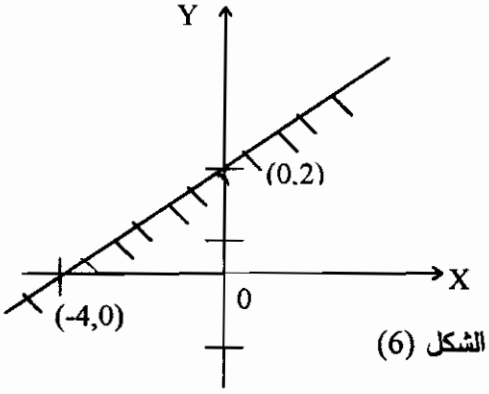
٢ – نختار نقطة ما من المستوي (غير واقعة على المستقيم) ولتكن $A_1 (x_1, y_1)$ ونعوض إحداثياتها في المتراجحة الخطية ، وإن أسهل النقاط التي يمكن إستخدامها لهذا الغرض هي نقطة المبدأ (0,0) 0 .

فإذا كانت النتيجة موجبة ، أي المتراجحة محققة ، فإن المنطقة (نصف المستوي) التي تحوي النقطة ، هي منطقة حلول المتراجحة ، وإذا كانت سالبة أي المتراجحة غير محققة ، فإن المنطقة المقابلة لها هي منطقة حلول المتراجحة المفروضة .

٣ – نؤشر بخطوط شعرية صغيرة على جانب المستقيم الفاصل باتجاه منطقة الحلول المقبولة و ننوه إلى أن منطقة الحلول تضم عدداً لانهائياً من الحلول المقبولة .

مثال : أوجد منطقة حلول المتراجحة . $2x - 4y + 8 > 0$

أولاً نرسم المستقيم $2x - 4y + 8 = 0$ و ذلك بواسطة تحديد نقطتين يمرمنهما : نضع $x = 0$ فيكون $y = +2$ فنحصل على النقطة (0 , 2) ، ثم نضع $y = 0$ فيكون $x = -4$ فنحصل على النقطة (0 , -4) ، نصل بين هاتين النقطتين و نمدد المستقيم فنحصل على المستقيم الفاصل كما في الشكل (6)



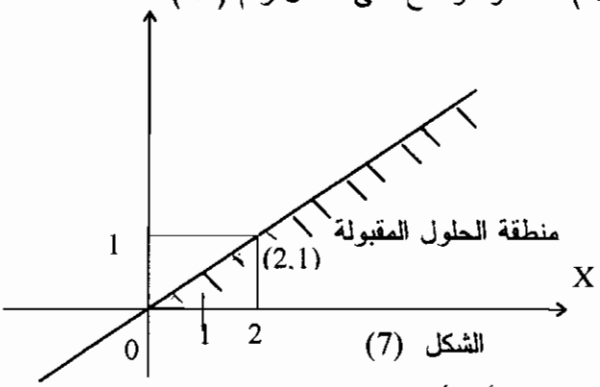
الشكل (6)

و لتحديد منطقـه الحلـول المقبولـة . نـأخذ ايـه نقطـه مـن الجهـة اليمنـى و لتكـن النقطـة (0,0)O و نعوض إحداثياتها في المتراجحة المفروضة ، فنجد أنها تجعل المتراجحـة محققة . أي منطقة حلول المتراجحة هي المنطقـة التـي تقـع علـى يميـن المسـتقيم وهـي المشار إليها بخطوط شعرية لتميزها عن المنطقة اليسرى .

مثال آخر : أوجد حلول المتراجحة

$$5x - 10y > 0$$

نقوم برسم المستقيم $5x - 10y = 0$ بواسـطة تحديـد نقطتيـن واقعتيـن عليـه . لذلـك نضع $x = 0$ فنجد أن $y = 0$ و النقطة الأولى هي : المبدأ (0 ,0) . ثم نضـع $x = 2$ فنجد أن $y = 1$ و النقطة الثانية (1 ،2) و بالرسم نحصل على مستقيم مـار مـن المبدأ (0 , 0) كما هو موضح على الشكل رقم (7) .



الشكل (7)

و لتحديد منطقة الحلول نأخذ أية نقطة غير واقعة على المستقيم مثل النقطة (1 , 1) [إن النقطة (0 , 0) لا تصلح لعمليـة الإختبـار لأنهـا تقـع علـى المسـتقيم] الواقعـة فـي الجهـة اليسـرى و نعـوض إحداثييهـا فـي المتراجحـة المفروضـة فنجـد أنهـا لا تحقـق المتراجحة . أي أن المنطقة اليسرى ليست منطقة الحلول المقبولة و بالتالي تكون الجهة اليمنى هي منطقـة الحلـول المقبولـة . و لقد أشـرنا إليهـا بخطـوط شـعرية علـى جـانب المستقيم الفاصل .

٢- جملة متراجحات خطية بمجهولين :

نقصـد بجملـة المتراجحـات الخطيـة وجـود عدة متراجحـات تتضمن نفـس

المجهولين x و y، ومكتوبة بشكل نموذجي بطلب إيجاد منطقة الحلول المشتركة لها.

الشكل النموذجي لجملة هذه المتراجحات هو :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 > 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 > 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 > 0$$

لإيجاد منطقة الحلول المشتركة لهذه المتراجحات نقوم بما يلي :

١- نحدد منطقة الحلول المقبولة لكل منها على انفراد ، وذلك بإتباع نفس الخطوات و التعليمات السابقة لحالة متراجحة خطية واحدة . لنفترض منطقة حلول المتراجحة الأولى هي D_1 و منطقة حلول المتراجحة الثانية هي D_2 و منطقة حلول المتراجحة هي D_3 ... الخ .

٢- نحدد منطقة الحلول المشتركة لجملة المتراجحات بأخذ المنطقة الناتجة عن تقاطع المناطق المنفردة السابقة . فنحصل على منطقة الحلول المشتركة D و التي تساوي

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \ldots.$$

ملاحظة : إذا كانت المناطق D_1 و D_2 و D_3 غير متقاطعة فإن المنطقة D تكون عبارة عن مجموعة خالية ، أي أن $D = \varnothing$ ، و هذا يعني أنه لا توجد حلول مشتركة لجملة المتراجحات المفروضة ، وعندها نقول أن الجملة مستحيلة الحل (أو متعارضة) .

مثال : أوجد منطقة الحلول المشتركة لجملة المتراجحات

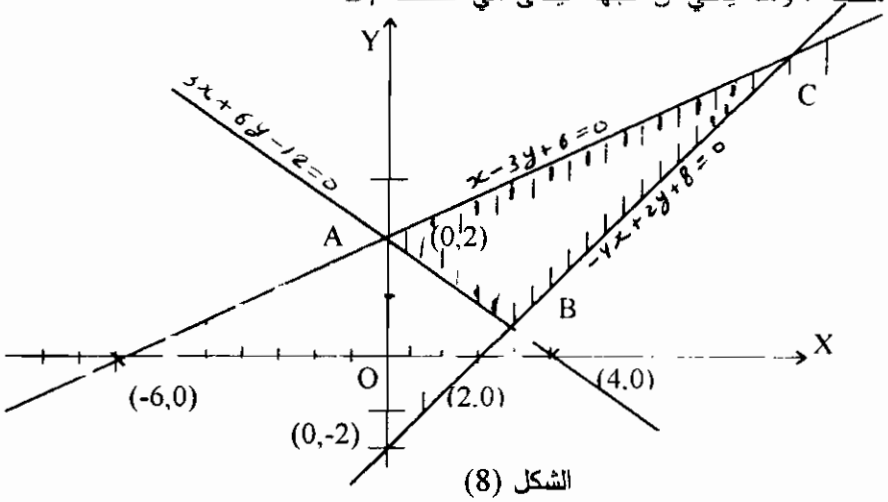
$$x - 3y + 6 > 0$$
$$3x + 6y - 12 > 0$$
$$-4x + 2y + 8 > 0$$

نقوم أولاً بتحديد منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة الأولى ، فنرسم المستقيم الأول

$$x - 3y + 6 = 0$$

بواسطة النقطتين (2 , 0) و (0 , 6 -) الواقعتين عليه .

و بتحديد منطقة الحلول المقبولة نأخذ النقطة (0, 0) فنجد أنها تجعل المتراجحة الأولى محققة . وهذا يعني أن الجهة اليمنى هي المنطقة D_1



الشكل (8)

وبنفس الطريقة نحدد منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة الثانية . فنرسم المستقيم الثاني

$$3x + 6y - 12 = 0$$

المار بالنقطتين (0 , 2) ، (4, 0) ونحدد منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة الثانية بواسطة النقطة (0, 0) الواقعة في الجهة اليسرى فنجد أنها لا تجعل المتراجحة الثانية محققة . و هذا يعني أن المنطقة اليمنى هي المنطقة D_2 .

و كذلك نحدد منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة الثالثة ، برسم المستقيم الثالث

$$-4x + 2y + 8 = 0$$

المار بالنقطتين (2 - , 0) و (2, 0) وبذلك تكون الجهة اليسرى التي تحوي النقطة (0 , 0) هي منطقة الحلول D_3 .

ولإيجاد منطقة الحلول المشتركة نأخذ تقاطع هذه المناطق فنحصل على المنطقة D وهي المثلث ABC المبين على الشكل (8)

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \overset{\Delta}{ABC}$$

ملاحظة : يمكن أن تكون منطقة الحلول المشتركة مفتوحة إلى اللانهاية من إحدى جهاتها .

٣- المتراجحة غير الخطية بمجهولين .

وتكتب هذه المتراجحة بشكل عام على الشكل التالي

$$f(x, y) > 0$$

حيث f تابع من الدرجة الثانية لكل من x و y .

يتم تحديد منطقة الحلول المقبولة لهذه المتراجحة بيانيا بواسطة إختبار إحداثيات نقطة معينة من المستوي مثل O (0 , 0) أو A_1 (1 , 1) أو غيرهما .

سنعالج كيفية إيجاد منطقة الحلول المقبولة من خلال الأمثلة التالية :

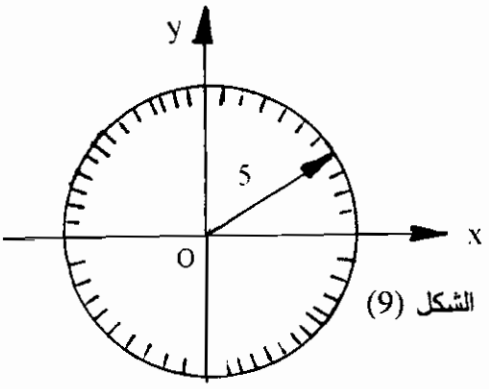
مثال : أوجد منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة .

$$-x^2 - y^2 + 25 > 0$$

لتحديد المنطقة المطلوبة نضع الطرف الأيسر مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة

$$-x^2 - y^2 + 25 = 0$$

و هي معادلة دائرة مركزها المبدأ (0 , 0) ، و نصف قطرها $r = \sqrt{25} = 5$ كما هو مبين في الشكل رقم (9) .



الشكل (9)

لتحديد منطقة الحلول المقبولة نأخذ النقطة O (0, 0) فنجد أنها تحقق المتراجحة المفروضة ، أي أن منطقة الحلول المقبولة تقع ضمن الدائرة المرسومة و هي المنطقة المشار إليها بخطوط شعرية .

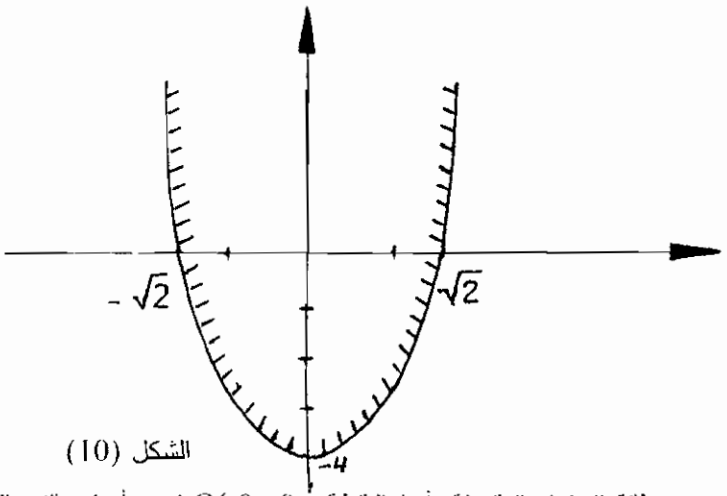
مثال آخر : أوجد منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة

$$y - 2x^2 + 4 > 0$$

نضع الطرف الأيسر مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة التالية

$$y - 2x^2 + 4 = 0$$

و هي معادلة قطع مكافئ كما هو مبين في الشكل (10) .



الشكل (10)

لتحديد منطقة الحلول المقبولة نأخذ النقطة O(0 ، 0) فنجد أنها تحقق المتراجحة. أي أن المنطقة الواقعة ضمن جوف القطع هي منطقة الحلول المقبولة .

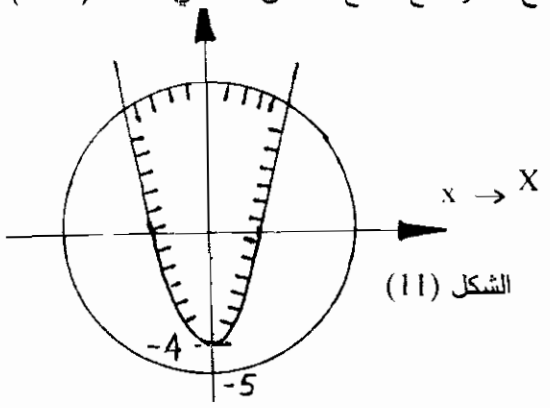
٤- جملة متراجحات غير خطية بمجهولين .

يتم معالجة هذه الجملة لإيجاد الحل المشترك لجملة المتراجحات ، من خلال إيجاد تقاطع مناطق حلول كل متراجحة على حدة ، وسنعالج ذلك بالمثال التالي :

مثال : أوجد منطقة الحلول المشتركة للمتراجحتين .

$$-x^2 - y^2 + 25 > 0$$
$$y - 2x^2 + 4 > 0$$

من خلال المثالين السابقين نجد أن منطقة الحلول المشتركة هي المنطقة المخططة ، والتي هي تقاطع الدائرة مع القطع المكافئ ، كمافي الشكل (11) التالي .



الشكل (11)

تمارين :

أ - أوجد حلول المعادلات التالية :

- 1 $4(x+3)^2 \quad (x \quad 2) - 3(x \quad 4)^2$
- 2 $(2-x)(x+2) \quad (3- x)(x+3) - \quad 14 + 3x$
- 3 $\frac{4x^2-9}{2} - \frac{5x^2+9}{6} \quad + 3 = 0$
- 4 $5x^2 - 8x + 3 - 0$
- 5 $3+\frac{2x-1}{x-5} = \frac{29}{x-5} \quad \frac{4x}{}$
- 6 $\frac{2x-1}{x-5} = 12+\frac{29-5x}{x-5}$
- 7 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{30}$
- 8 $\frac{2x+1}{x-3} + \frac{4x+2}{2x-5} = 15$
- 9 $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$
- 10 $x^3 - 4x^2 + 6x + 6 = 0$
- 11 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$
- 12 $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$
- 13 $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x+9}$
- 14 $\sqrt{9x+13} = \sqrt{13x+9}$
- 15 $\sqrt{3x} - \sqrt{3x-5} = 1$
- 16 $\sqrt{4x^2-7 \quad x-6} = 9-2x$

أوجد مجال حلول المتراجحات التالية :

- 1 $\frac{x-3}{2x+5} + 5 > 3x$

$$\frac{x-3}{2x+5}+5>3x \qquad -1$$

$$\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{x^2-1}<\frac{1}{x+1} \qquad -2$$

$$\frac{\left(x^2+3x+5\right)\left(2x-1\right)}{\left(3x+2\right)\left(x^2+1\right)}>0 \qquad -3$$

$$\frac{6x^2-x-2}{15x^2-26x-21}>0 \qquad -4$$

أوجد منطقة الحلول المشتركة لجمل المتراجحات التالية :

$$\left.\begin{array}{l} -x+3x<5 \\ 2x-y<3 \end{array}\right\} \quad -1 \qquad \left.\begin{array}{l} x+2y<4 \\ 3x+2y<6 \\ x+y<4 \end{array}\right\} \quad -2$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y<6 \\ 2x-y<2 \\ x-2y>-5 \end{array}\right\} \quad -3 \qquad \left.\begin{array}{l} x-y<4 \\ x+2y\geq -2 \\ 2x+y<-4 \end{array}\right\} \quad -4$$

أوجد منطقة الحلول المشتركة لجمل المتراجحات التالية :

$$\left.\begin{array}{l} y-x^2+1>0 \\ y-\sin x>0 \end{array}\right\} \quad -1 \qquad \left.\begin{array}{l} x^2+y^2-9>0 \\ x^2+y^2-16<0 \end{array}\right\} \quad -2$$

الفصـــل الخامـــس

التوابـع لمتحول حقيقي واحد

أولاً : أنواع التوابع :

I – تعريف :

التابع هو علاقة رياضيه معرفه على مجموعتين غير خاليتن A و B من R بحيث يرتبط كل عنصر $x \in A$ بعنصر واحد فقط $y \in B$ ،

نسمي A مجموعة تعريف التابع ، و B مجموعة قيم التابع ، نرمز للتابع بالشكل $f : A \to B$ أو $A \xrightarrow{f} B$.

كما نسمي العنصر $y \in B$ صورة العنصر $x \in A$ وفق العلاقة f،عندئذ نستطيع أن نكتب التابع بالشكل $y = f(x)$. في هذه الحالة نسمي x المتغيّر المستقل (المتحول) و y المتغير التابع (التابع) .

مثال ١: التابع $y = x^2 + 5$ معرف على R لأنه مقابل كل $x \in R$ ، يأخذ y قيمة معينة في R أي $y \in R$ ، أي أننا نربط كل عدد حقيقي $x \in R$ بصورة له $y \in R$ هي مربع العدد x مضافاً إليه العدد 5 أي : $\forall x \in R : x \to x^2 + 5 \in R$

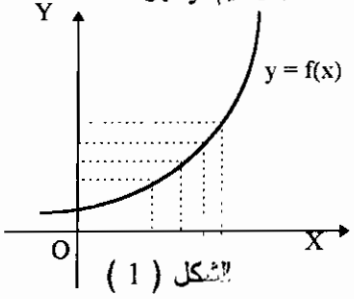
مثال ٢ : التابع $y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

نلاحظ أن هذا التابع غير معرف في النقطتين $x = +3$ و $x = -3$ ولذلك نستطيع أن نقول أن منطقة تعريف y هي $R \setminus \{3 , -3\}$ أما مجال قيم y فهو كامل R .

II – التمثيل البياني للتابع :

ليكن $y = f(x)$ تابعاً حقيقياً .

إن مجموعة النقاط $(x , f(x))$ أو (x , y) في المستوي الحقيقي $R \times R$ تمثل بياناً للتابع $f(x)$ ، يسمى الخط البياني للتابع وهو إما خط مستقيم أو منحني كالشكل (١) .



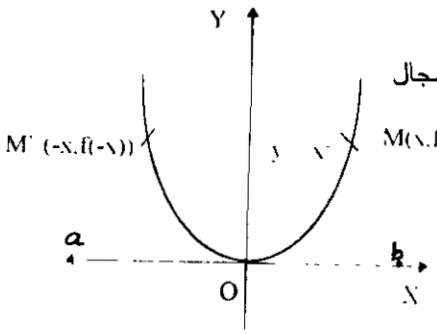
الشكل (١)

III - أنواع التوابع :

يمكن أن نجد في التوابع أنواعا متعددة ، منها التوابع الزوجية ، الفردية،الدورية ، المتزايدة ، المتناقصة ، المرتبة ، العكسية ... سندرس هذه الأنواع بشيء من التفصيل.

١- التابع الزوجي :

نقول عن تابع f(x) معرف على المجال I = (a,b) المتناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات O ، أنه تابع زوجي ، إذا تحقق ما يلي : f(-x) = f(x)



الخط البياني للتابع $y = x^2$

الشكل (2)

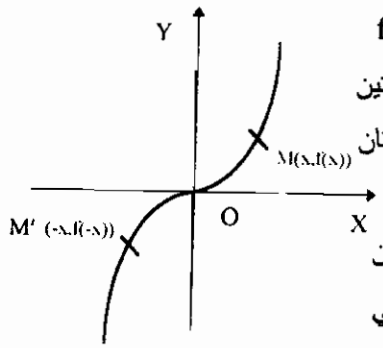
ونلاحظ أنه في التابع الزوجي ، تكون النقطتان (x , f(x)) ، (-x , f(-x)) متناظرتين بالنسبة للمحور oy .

مثال ٣ : التابعان $y = x^2$ ، $y = \cos x$ زوجيان وهما معرفان على R .

٢- التابع الفردي :

نقول عن التابع f(x) المعرف على مجال I = (a , b) المتناظر بالنسبة للمبدأ O، أنه فردي إذا تحقق الشرط : f(-x) = -f(x)

ونلاحظ أنه عندما يكون التابع فرديا ، فإن النقطتين M (x , f(x)) ، M′ (-x , -f(x)) متناظرتان بالنسبة للمبدأ O .



الخط البياني للتابع $y = x^3$

الشكل (3)

مثال ٤: التابعان $y = x^3$ ، $y = \sin x$ فرديان

ملاحظة : إذا كان التابع زوجيا أو فرديا ، فيكفي دراسته من أجل القيم الموجبة لـ x ، وبعد ذلك نستنتج سلوكه من أجل القيم السالبة لـ x من التناظر .

٣- التابع الدوري :

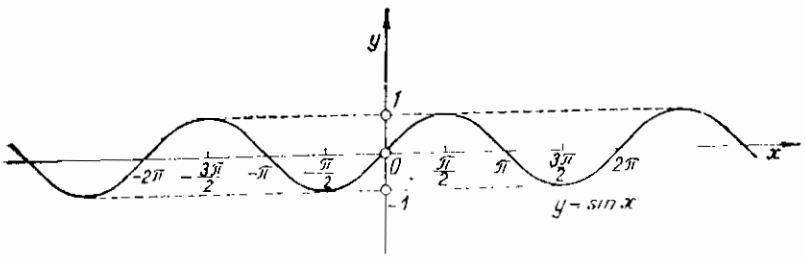
نقول عن تابع $f(x)$ أنه دوري ودوره $k \neq 0$ ، إذا كان $f(x+k) = f(x)$.

أي أن التابع يكرر سلوكه كل k مرة . يسمى k دور التابع ، ونلاحظ أنه إذا كان k دورا للتابع $f(x)$ ، فان كل عدد nk حيث $n \in Z \quad n \neq 0$ هو دور أيضا للتابع $f(x)$.

ونلاحظ أنه إذا كان $f(x)$ دوريا ، فانه **يكفي دراسته في مجال طوله يساوي الدور k أي في** $[x_0 , x_0 + k]$ ورسم بيانه في هذا المجال ، ثم نرسم بيانه بشكل تكراري في مجال تعريف التابع .

مثال ٥ : التابعان $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ دوريان ودور كل منهما $k = 2\pi$

أما التابع $f(x) = \operatorname{tg} x$ فهو دوري دوره $k = \pi$.



الشكل (4) الخط البياني للتابع $y = \sin x$

٤- التابع المتزايد - والتابع المتناقص :

نقول عن تابع $f(x)$ معرف على المجال $I \subseteq R$ ، أنه متزايد في I إذا تحقق الشرط :

$$\forall x_1 , x_2 \in I \; ; \; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

أو الشرط

$$\forall x_1 , x_2 \in I \; ; x_1 > x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$$

وإذا كانت المتراجحة من الشكل ($>$) بدلا من ($\geq$) نقول أن التابع متزايد تماماً .

ويكون التابع $f(x)$ متناقصا على المجال $I \subseteq R$ ، إذا تحقق الشرط :

$$\forall x_1 , x_2 \in I \; ; \; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

أو الشرط :

$$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 > x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$$

وإذا كانت المتراجحة من الشكل ($<$) بدلا من ($\leq$) ، نقول أن التابع متناقص تماماً .

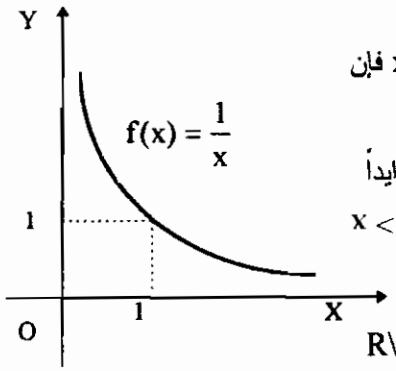
٥- التابع المرتب :

يكون التابع $f(x)$ المعرف على $I \subseteq R$ مرتباً على I ، إذا كان متزايداً أو متناقصاً في I .

ونلاحظ أنه في التابع المرتب ، إذا كان $x_1 \neq x_2$ فإن $f(x_1) \neq f(x_2)$.

مثال ٦ : التابع $f(x) = x^2$ المعرف على R متزايداً تماماً من أجل $x > o$ ومتناقص تماماً من أجل $x < o$ ولكنه غير مرتب على R .

مثال ٧ : التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ المعرف على $R\backslash\{o\}$ متناقص تماماً من أجل كل قيم x .



الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الشكل (5)

٥- التابع الصريح :

وهو العلاقة الواضحة التي تفصل بين المتحول المستقل x والمتحول التابع y، ويكتب على الشكل $y = f(x)$.

مثال ٨: التابع $y = f(x) = 3x + 4$

الذي يظهر تماماً x كمتحول و y كتابع .

٦- التابع الضمني :

وهو التابع الذي لايفصل بين المتحول المستقل x والمتحول التابع y ، وشكله العام $F(x, y) = o$

مثال ٩ : التابع $F(x,y) = \sqrt{3x^2 + 2y^2} + 2 = o$

هنا لانستطيع بسهولة الفصل بين x كمتحول و y كتابع .

٧- التابع العكسي :

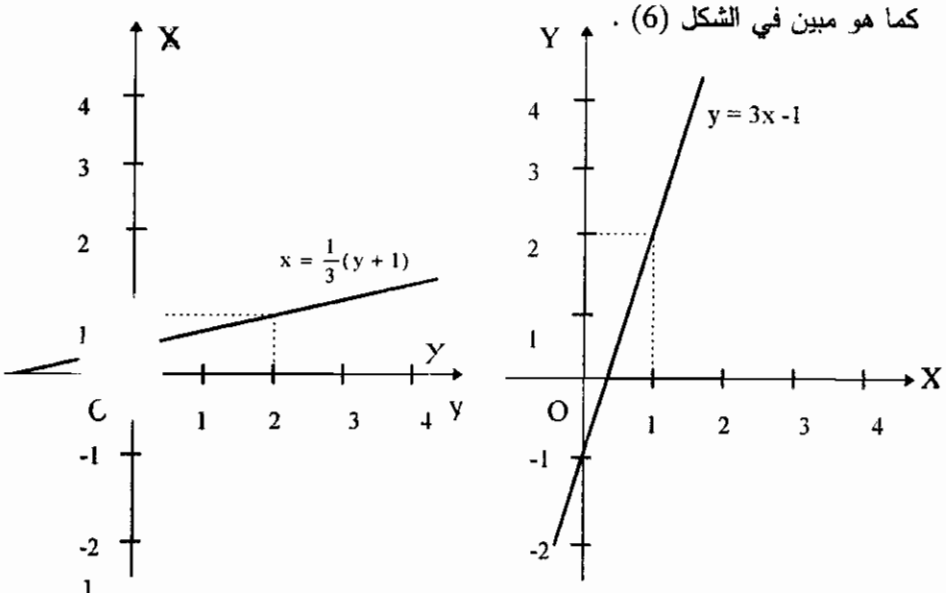
إذا كان التابع $y = f(x)$ ، وكان بالإمكان حل هذه المعادلة ، بحيث نحصل على قيمة x بدلالة y ، أي نحصل على علاقة من الشكل $x = g(y)$ ، وهو التابع العكسي للتابع $y = f(x)$ ويُكتب على الشكل التالي : $x = f^{-1}(y) = g(y)$

عند رسم الخط البياني للتابع العكسي $x = f^{-1}(y)$ نكتبه بالشكل $x = g(y)$ وعندئذ يصبح المحور الشاقولي هو محور التابع x والمحور الأفقي هو محور المتحول y . ولكي نحافظ على جملة المحاور كما كانت عليه في الحالة الطبيعية ، نكتب هذا التابع العكسي بالشكل $y = g(x)$ وذلك بتغيير أسماء المتحولات فقط .

مثال١٠ : التابع $y = 3x - 1$ التابع العكسي له هو : $x = \frac{1}{3}(y + 1)$

لنكتب هذا التابع بالشكل $y = g(x)$ أي $y = \frac{1}{3}(x + 1)$

فنجد أن الخطين البيانيين للتابع والتابع العكسي متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول كما هو مبين في الشكل (6) .



الخط البياني للتابع $y = 3x - 1$ الخط البياني للتابع العكسي $x = \frac{1}{3}(y + 1)$

الشكل (٦)

٨- **التابع الصحيح :**

وهو تابع كثير الحدود من الشكل العام :

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

حيث a_0 ، a_1 ..... ، a_{n-1} ، a_n أعداد حقيقية . و n عدد صحيح موجب يسمى درجة التابع ، فمثلا عندما :

$n = 1$ يكون التابع من الدرجة الأولى $y = a_1 x + a_0$

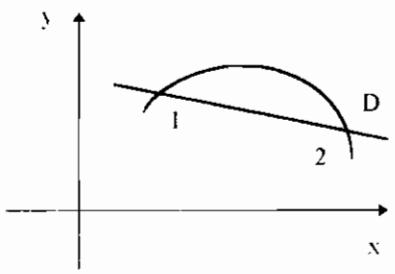
$n = 2$ يكون التابع من الدرجة الثانية $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$n = 3$ يكون التابع من الدرجة الثالثة $y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

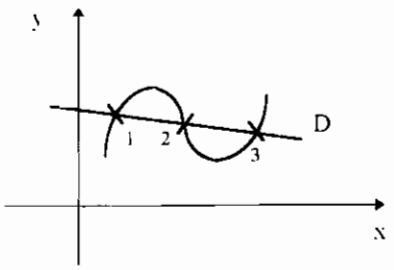
وهكذا ، يأخذ التابع درجات مختلفة حسب العدد n .

إن منطقة تعريف التابع الصحيح هي مجموعة الاعداد الحقيقية R أي $(-\infty , +\infty)$ ويأخذ قيمه في R أيضا .

تتصف التوابع الصحيحة بالخاصة التالية : يمكن ايجاد مستقيم D يقطع منحني التابع ذي الدرجة n في n نقطة على الأكثر . وعلى ذلك يقطع المستقيم D الخط البياني لتابع الدرجة الأولى وهو مستقيم في نقطة واحدة ، ويقطع منحني تابع الدرجة الثانية في نقطتين ، ومنحني الدرجة الثالثة في ثلاث نقط ..... وهكذا . مما يعطينا تصوراً مبدئيا عن شكل منحني التابع الصحيح، أو معرفة درجة التابع من شكل خطه البياني .



تابع الدرجة الثانية



تابع الدرجة الثالثة

الشكل (7)

٩- التابع العادي :

وهو تابع كسري شكله العام : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

حيث $g(x)$ و $h(x)$ تابعان لـ x ، ويشترط دوما ألا يكون $h(x)$ مساويا للصفر $[\ h(x) \neq 0\ ]$ ، لكي يكون التابع $f(x)$ معرفا . فاذا كان التابعان $g(x)$ و $h(x)$ صحيحين فإن التابع $f(x)$ يكون معرفا على مجموعة الأعداد الحقيقية R ، باستثناء قيم x التي تعدم تابع المقام $h(x)$.

مثال ١١ : التابع $\frac{x^2 + 1}{2x}$ معرف في $R \setminus \{0\}$.

١٠- التابع الأصم (التابع الجذري) :

وهو تابع شكله العام : $y = \sqrt{f(x)}$

منطقة تعريفه هي مجموعة قيم x التي تجعل ما تحت الجذر مقدارا موجبا أو مساويا للصفر ، أي هي حلول المتراجحة :

$$f(x) \geq 0$$

وذلك لكي تأخذ y قيما حقيقية .

مثال ١٢: التابع $y = \sqrt{x + 2}$ معرف من أجل $x + 2 \geq 0$ ، أي أن مجال تعريفه $[-2, +\infty[$.

١١ - التابع اللوغاريتمي[*] الطبيعي :

وهو من الشكل العام $y = \text{Ln } f(x)$ حيث Ln هو اللوغاريتم الطبيعي الذي أساسه العدد النيبري e .

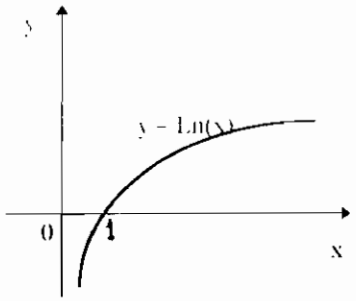
إن منطقة تعريف هذا التابع هي مجموعة قيم x التي تحقق المتراجحة $f(x) > 0$. أي أن التابع $f(x)$ يجب أن يبقى موجبا دوما ، ولذلك غالبا ما نضع التابع $f(x)$ بالقيمة

[*] ينسب اكتشاف اللوغاريتمات الطبيعية للعالم الاسكتلندي جون نيبر John Napier (1550 1617) ولكن اللوغاريتمات العشرية تنسب إلى العالم العربي الخوارزمي .

المطلقة حتى نضمن تعريف y ، لأنه لايوجد لوغاريتم حقيقي للأعداد السالبة والصفر

مثال ١٣: التابع $y = Ln|x|$ معرف من أجل جميع قيم $x \neq 0$ أي في المجال $(-\infty , 0) \cup (0 , +\infty)$.

الخط البياني للتابع اللوغاريتمي مبين في الشكل (8) ، وذلك لأن لوغاريتم الصفر يتناهى إلى $-\infty$ ولوغاريتم الواحد يساوي الصفر .



وأما لوغاريتمات الأعداد الأكبر من الواحد فهي قيم موجبة ولوغاريتمات الأعداد ما بين الصفر والواحد هي أعداد سالبة .

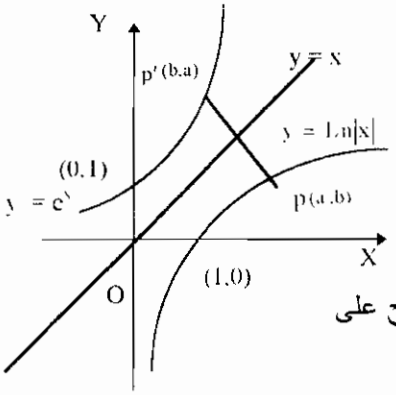
١٢- التابع الأسي :

وهو من الشكل العام $y = a^{f(x)}$

الشكل (8)

حيث a عدد حقيقي و $a \neq 0$ أو $a \neq 1$. إن التابع $y = a^{f(x)}$ معرف في مجال تعريف التابع $f(x)$. من التوابع الأسية الشهيرة التابع $y = e^{f(x)}$ حيث e العدد النيبري. إن أبسط هذه التوابع على الإطلاق التابع $y = e^{x}$ وهو معرف من أجل أي $x \in R$ أي على المجال $(-\infty , +\infty)$.

ومن الجدير بذكره هنا : أن التابع $y = e^{x}$ يعتبر تابع عكسي للتابع اللوغاريتمي $y = Ln|x|$. وعلى ذلك يكون الخطان البيانيان للتابعين $y = Ln|x|$ و $y = e^{x}$ متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول $y = x$ كما هو موضح على الشكل (9) .



الخط البياني للتابعين e^{x} . $Ln|x|$

نتيجة هامة : إن التابع الأسي $y = e^{f(x)}$ هو تابع عكسي للتابع اللوغاريتمي $y = Ln|f(x)|$

الشكل (9)

١٣ - تابع التابع :

إذا كان التابع $f(u)$ y ، وكان u تابعا لـ x من الشكل $u = g(x)$ ، فإننا نلاحظ أن y هو تابع غير مباشر للمتحول x . يمكن أن نجعل y تابعا مباشرا لـ x ، وذلك بتعويض u بقيمته في عبارة y ، وبذلك نحصل على تابع جديد $y = F(x)$ يختلف بشكله الجبري عن كل من f و g . تسمى هذه العملية عملية تركيب التوابع ويرمز لها بالشكل (fog) وتعرف بـ

$$(fog)(x) \quad f(g(x)) \quad F(x)$$

مثال ١٤: ليكن $y = f(u) = 2u^2 - 3u + 2$

و $u = g(x) = x^2 + 1$

إن التابع المباشر $y = F(x)$ هو

$$y = f(g(x)) = 2(x^2 + 1)^2 - 3(x^2 + 1) + 2$$
$$y = F(x) = 2x^4 + x^2 + 1$$

نلاحظ أن شكل التابع $F(x)$ يختلف عن كل من f و g .

IV - العمليات الجبرية على التوابع :

١- المساواة :

تعريف : نقول عن تابعين f و g أنهما متساويان ، إذا وفقط إذا كان لهما نفس منطقة التعريف ، أي $D_f = D_g = D$ ، وكان $f(x) = g(x)$ من أجل جميع قيم x في منطقة التعريف D .

مثال ١٥ : إن التوابع التالية متساوية :

$$f(x) = \frac{x - 2x^2}{x} \quad ; \quad g(x) = 1 - 2x$$

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x^3}{x^2} \quad ; \quad w(x) = \frac{(x^3 + x)(1 - 2x)}{x(1 + x^2)}$$

مثال١٦ : التابعان $f(x) = |x|$; $g(x) = \sqrt{x^2}$ متساويان .

٢- الجمع والطرح :

ليكن $f(x)$ ، $g(x)$ تابعين معرفين على المنطقتين D_f ، D_g . إن التابع

$f(x) \pm g(x)$ هو مجموع (طرح) التابعين $f(x)$ و $g(x)$ ، وهو تابع معرف على المنطقة D التي هي تقاطع المنطقتين D_1 و D_2 أي $D = D_1 \cap D_2$.

مثال ١٧: التابع $f(x) = \sqrt{x}$ المعرف على المنطقة $D_1 = \{x : x \geq 0\}$ والتابع $g(x) = \sqrt{1-x}$ المعرف على المنطقة $D_2 = \{x : x \leq 1\}$.

ان مجموع التابعين f و g هو التابع

$$f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

المعرف على المنطقة D ، حيث :

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

وكذلك فرق التابعين f و g هو التابع :

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$$

معرف على المنطقة D نفسها .

٣- ضرب تابعين :

إن حاصل ضرب التابعين $f(x)$. $g(x)$ المعرفين على المنطقتين D_1 و D_2 على التوالي هو التابع $f(x) \cdot g(x)$ المعرف على المنطقة D حيث :

$$D = D_1 \cap D_2$$

مثال ١٨ : حاصل ضرب التابعين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ الواردان في المثال السابق ، هو التابع :

$$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{x(1-x)}$$

المعرف على المنطقة $D = [0, 1]$

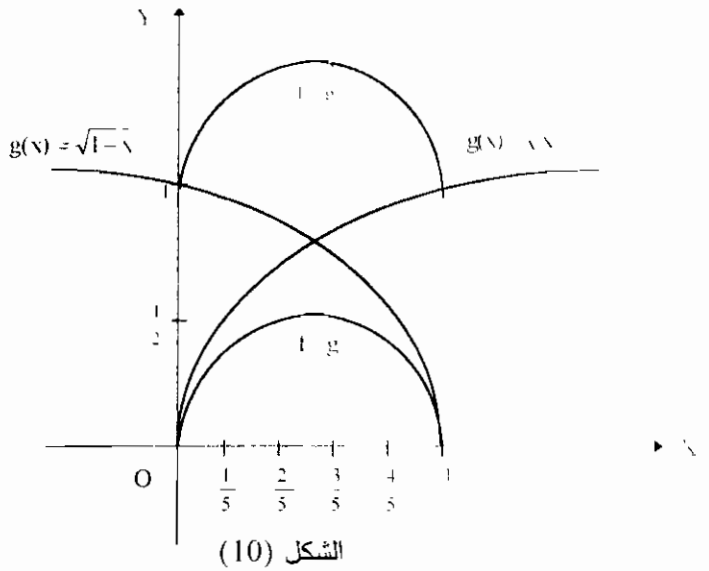
إن المنحنيات البيانية للتوابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ ، وحاصل جمعهما

$$f + g = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

وحاصل ضربهما

$$f \cdot g = \sqrt{x(1-x)}$$

موضحه على الشكل (10) التالي :



الشكل (10)

مثال ١٩ : ليكن التابع $f(x) = x$ المعرف على $D_f = (-\infty, +\infty)$

والتابع $g(x) = \frac{1}{x}$ المعرف على $D_g = \{x \mid x \neq 0\}$

إن منطقة تعريف التابع f.g هي مجموعة الأعداد الحقيقية R ما عدا الصفر :

لايمكننا القول أن f.g هو التابع الثابت $y = 1$ لأن منطقة تعريف هذا التابع هو $(-\infty, +\infty)$، وهو مختلف عن منطقة تعريف التابع f.g . التي هي $R \setminus \{0\}$.

٤- قسمة تابعين :

إن حاصل قسمة التابع f(x) على التابع g(x) هو التابع $\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث $g(x) \neq 0$.

فإذا كانت D_f منطقة تعريف f و D_g منطقة تعريف g ، فإن منطقة تعريف $\frac{f(x)}{g(x)}$ هي D حيث $D = D_f \cap D_g$. ويستثنى من D النقاط التي تجعل $g(x) = 0$.

مثال ٢٠ : التابع $f(x) = 2x^2 - 1$ المعرف على المجال $(-\infty, +\infty)$.

والتابع $g(x) = x - 1$ المعرف أيضا على المجال $(-\infty, +\infty)$.

ار حاصل قسمة التابعين $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$ معرف على المحال

.(,) { 1 }

واما التابع $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x - 1}{2x^2 - 1}$ فهو معرف على المحال $R \setminus \left\{ \frac{-1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

ثانيا – نهايات التوابع

1- تعريف نهاية تابع في نقطة a :

نقول عن تابع f معرف على مجموعة $D_f \subseteq R$ انه ينتهي إلى العدد الحقيقي ℓ عندما تنتهي x الى نقطة ثابتة a [ليس من الضروري أن تنتمي a الى مجموعة التعريف D_f] ، ونرمز لذلك بـ $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

أو بالرمز $f(x) \to \ell$ عندما $x \to a$

إذا تحقق الشرط التالي :

من أجل عدد صغير موجب $\varepsilon > 0$ ، يوجد جوار* للنقطة a نصف قطره δ ، بحيث عندما تكون x في هذا الجوار ، فإن $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ أو $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

بإضافة ℓ إلى طرفي المتراجحة ، نجد :

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

يمكن كتابة الشرط السابق بالشكل المختصر التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

مثال ١ : أوجد $\lim_{x \to 1} (5x - 3)$ ، وتحقق من صحة جوابك .

الحل : إن القيمة المحتملة لـ ℓ عندما تتناهى x إلى 1 هي 2 ، كما هو واضح من عبارة التابع $f(x) = 5x - 3$.

---

* جوار نقطة a : هو مجال مفتوح مركزه a ونصف قطره مقدار صغير موجب δ .

لنبرهن أن هذه النهاية 2 ℓ ، وذلك اعتمادا على تعريف النهاية . نفرض ε عدد موجب مفروض . لنعوض في الشرط :

$$\ell - \varepsilon \quad f(x) \quad \ell \quad \varepsilon$$

(1) $$2 - \varepsilon \quad 5x - 3 \quad 2 + \varepsilon$$

بإضافة 3 إلى أطراف هذه المتراجحات نجد :

(2) $$5 - \varepsilon \quad 5x \quad 5 + \varepsilon$$

وبالتقسيم على 5 نجد :

(3) $$1 \quad \frac{\varepsilon}{5} \quad x \quad 1 \quad \frac{\varepsilon}{5}$$

إن المتراجحات الأخيرة تبين أن المجال المفتوح $\left(1 \quad \frac{\varepsilon}{5} \quad , \quad 1 \quad \frac{\varepsilon}{5}\right)$ هو جوار للنقطة $a = 1$ ، بإضافة (-1) إلى أطراف المتراجحات (3) نجد :

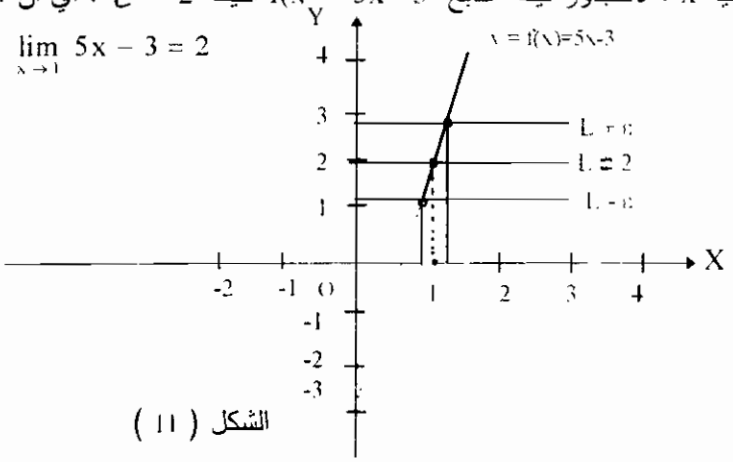
(4) $$-\frac{\varepsilon}{5} \quad x - 1 \quad \frac{\varepsilon}{5}$$

وحسب خواص القيمة المطلقة ، يمكن كتابة المتراجحات السابقة بالشكل

$$|x - 1| \quad \frac{\varepsilon}{5}$$

أي أمكننا إيجاد $\delta \quad \frac{\varepsilon}{5}$ ، بذلك نجد أن أي جوار للنقطة $a = 1$ نصف قطره δ ، تنتمي إليه x ، لاتتجاوز قيمة التابع $f(x) = 5x - 3$ القيمة $\ell = 2$. أي أن :

$$\lim_{x \to 1} 5x - 3 = 2$$



الشكل (11)

ملاحظة ١ : نلاحظ أن نصف قطر جوار النقطة a هو $\frac{\varepsilon}{5}$ ، أي هو بدلالة ε ، وبالتالي كلما صغر ε ، كلما صغر الجوار .

ملاحظة ٢ : إن نصف قطر الجوار $\frac{\varepsilon}{5}$ هو أكبر نصف قطر محور لـ a ، a مستقر، وبالتالي فإن أي جوار آخر أصغر منه و بالتالي محتوى فيه ، تكون مناسبا لحساب النهاية السابقة ، كالجوارات :

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{6} \quad , \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{10}$$

وفي هذه الجوارات فإن قيمة f ستقع محدودة بالقيمتين $\varepsilon - 2$ ، $\varepsilon + 2$.

مثال ٢ : اثبت أن :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2}{x - 3} - \frac{9}{x - 3} = 6$$

الحل : إن مجموعة تعريف هذا التابع هي $A = R \setminus \{3\}$

إذا كان $x \in A$ ، فإن :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

. الشرط الذي يجب أن يتحقق هو :

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = |(x + 3) - 6| = |x - 3| < \varepsilon$$

ويكفي أن نأخذ نصف قطر جوار النقطة $a = 3$ العدد $\delta = \varepsilon$ لنجد أن :

$$\forall x \in A \ , \ 0 < |x - 3| < \delta \rightarrow \left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \varepsilon$$

وهذا يثبت صحة النهاية المفروضة .

II - نظريات حول النهايات :

١ - وحدانية النهاية : هل يمكن لتابع أن يتناهى إلى نهايتين مختلفتين عندما تتناهى x إلى a ؟ . إن النظرية التالية تجيب على هذا السؤال بالنفي .

نظرية ١ . إذا كان للتابع f(x) نهاية عندما $x \to a$ فإن هذه النهاية وحيدة .

البرهان : نبرهن هذه النظرية بطريقة نقض الفرض . نفرض f(x) معرفاً في I جوار a ، إذا لم تكن نهاية f(x) وحيدة عند النقطة a ، فيوجد له نهايتان ℓ_1 و ℓ_2

أي $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ ، $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_2$

فإذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن $|\ell_1 - \ell_2| \neq 0$ = مقداراً موجباً لنطبق شرط النهاية على كلا النهايتين .

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta_1 > 0 , \forall x \in I , \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta_2 > 0 ; \forall x \in I , \quad |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

إذا وضعنا $\delta = \min \{\delta_1 , \delta_2\}$ ، وكتبنا :

$$\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2$$

بأخذ القيم المطلقة للطرفين نجد :

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

وذلك من أجل $|x - a| < \delta$ حيث $x \in I$

بما أن ℓ_1 و ℓ_2 عددان ثابتان و $\varepsilon > 0$ كيفي ، وإذا كتبنا $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$ فإن :

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq 2 \times \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$$

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - \ell_2|$$

المتراجحة الأخيرة لاتتحقق إلا إذا كان $\ell_1 = \ell_2$. أي أن للتابع f(x) نهاية وحيدة عند النقطة a وهو المطلوب .

٢ - النهاية من اليمين :

نقول عن تابع f(x) ، أنه ينتهي إلى نهاية ℓ عندما ينتهي x إلى a من اليمين إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 ; a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

نرمز للنهاية من اليمين بالرمز : $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0)$

٣ - النهاية من اليسار :

نقول عن تابع f(x) أنه ينتهي الى نهاية ℓ عندما ينتهي x ومن اليسار إلى النقطة a إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ , \ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

نرمز للنهاية من اليسار بالرمز :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0)$$

مثال ٣ : ليكن التابع f المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & x \geq 0 \\ -1 ; & x < 0 \end{cases}$$

برهن أن :

1) $\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1$

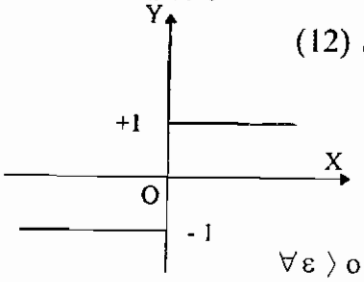
و

2) $\lim_{x \to 0-0} f(x) = -1$

الحل : إن الخط البياني للتابع f(x) مبين في الشكل (12)

١ - إذا كان $x \leq 0$ نجد الشرط $|f(x) - 1| < \varepsilon$ محققاً من أجل كل x من المجال $(0 , \delta)$ مهما كان العدد الموجب δ أو بعبارة أخرى :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta , 0 < x < 0 + \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$



الشكل (12)

إذن النهاية الأولى محققة .

٢ - إذا كان $x < 0$ نجد الشرط $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ محققاً أيضاً من أجل كل نقطة x من المجال $(-\delta , 0)$ أو

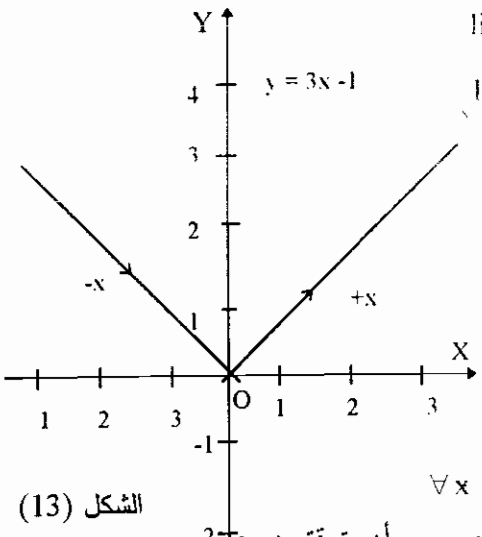
$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , 0 - \delta < x < 0 \Rightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon$$

أي أن النهاية الثانية محققة .

مثال ٤ :

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة :

$f(x) = |x| , \forall x \in R$ أثبت أن :



الشكل (13)

١- $\lim_{x \to o} f(x) = o$

٢- $\lim_{x \to o} f(x) = o$

الحل :

١- ليكن $\varepsilon > o$ أي عدد مفروض

إذا كان $o < x$ ، فإن الشرط الذي يجب

أن يتحقق هو :

$$|f(x) - o| = ||x| - o| = x < \varepsilon$$

ويكفي أن نأخذ $\delta = \varepsilon$ لنجد أن :

$$\forall x \; ; \; o < x < \delta \Rightarrow |f(x) - o| < \varepsilon$$

٢ - إذا كان $o > x$ ، نجد أن الشرط الذي يجب أن يتحقق هو :

$$|f(x) - o| = ||x| - o| = -x < \varepsilon$$

أو $x > -\varepsilon$. وإذا أخذنا $\delta = \varepsilon$ مرة أخرى ، نجد أن :

$$\forall x \; ; \; o - \delta < x < o \Rightarrow x > -\varepsilon \Rightarrow |f(x)| - o| < \varepsilon$$

ملاحظة : نلاحظ من المثالين السابقين ، أن نهاية التابع عند نقطة a من اليسار ، قد تختلف عن نهايته عندها من اليمين ، وقد تتساوى هاتان النهايتان .

نظرية ٢ : يكون للتابع f المعرف على المجموعة $E \subseteq R$ نهاية l عندما تنتهي x إلى a ، عندما وفقط عندما ، يكون للتابع f نهاية من اليمين ونهاية من اليسار في النقطة a ، والنهايتان متساويتان .

مثال ٥ : ليكن f تابع معرف على المجال $[o , 1] \subseteq R$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} o & : \; o \le x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & : \; x = \dfrac{1}{2} \\ 1 & : \; \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

إن :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}-o} f(x) = o$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}+o} f(x) = 1$$

إن النهايتين في a مختلفتان . وبالتالي لانستطيع أن نقول أن للتابع f نهاية واحدة عندما $x \to \frac{1}{2}$ ، حسب النظرية 2 .

III - خواص النهايات :

نظرية ٣ : ليكن f و g تابعين معرفين على المجموعة $E \subseteq R$ ولهما نهايتين ℓ_1 و ℓ_2 على التوالي عندما $x \to a$. عندئذ يكون :

1) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

3) $\lim_{x \to a} [A f(x)] = A \lim_{x \to a} f(x) = A \cdot \ell_1 \ , \ \forall A \in R$

4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

وذلك بشرط أن $g(x) \neq o$ و $\ell_2 \neq o$.

كما أن النتيجة التالية مستخدمة بكثرة في التطبيقات إذا كان

$f(x) \leq g(x)$ فإن $\ell_1 \leq \ell_2$

نظرية ٤ : إذا كان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

وكان h (x) تابع ما يحقق المتراجحات :

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

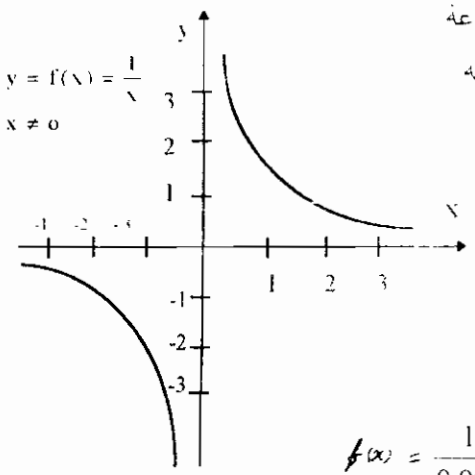
في جوار ما للنقطة a ، فإن :

$$\lim_{x \to a} h(x) = \ell$$

IV - اللانهاية :

لندرس التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$

إن مجموعة تعريف هذا التابع هي مجموعة الأعداد الحقيقية R ما عدا الصفر ، وبيانه كما في الشكل (14) وهناك بعض الحقائق الواضحة عن $\frac{1}{x}$:



الشكل (14)

أ – إذا كانت x عدداً موجبا صغيرا ، فإن $\frac{1}{x}$ عدد موجب كبير .

مثال ذلك :

إذا كان $x = 0{,}001$ فإن $f(x) = \frac{1}{0{,}001} = 1000$

ب - إذا كانت x عدداً كبيراً ، فإن $\frac{1}{x}$ عدد صغير .

مثال ذلك ، إذا كانت $x = 10\,000$ فإن $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$

جـ – إذا كانت x سالبه ، فإن $\frac{1}{x}$ سالبه أيضا ، مثال ذلك :

$$f(x) = \frac{1}{-0{,}001} = -1000$$

د – إذا كان x كبيرا سالبا فإن

$$f(x) \quad \frac{1}{0\,000} = -0{,}0001$$

ونختصر هذه الحقائق أحياناً بالقول :

أ – تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر عندما تسعى x إلى $\infty +$ أو إلى $\infty -$.

ب – تسعى $\frac{1}{x}$ إلى $(+\infty)$ عندما تقترب x من الصفر بقيم موجبة .

جـ – تسعى $\frac{1}{x}$ إلى $(-\infty)$ عندما تقترب x من الصفر بقيم سالبة .

ويقرأ الرمز (∞) لانهاية ، ولكنه لايمثل اي عدد حقيقي .

ملاحظة : يُستعمل أحياناً في الرياضيات الأكثر تقدما منظومة (مجموعة) جديدة تتكون من الأعداد الحقيقية ومن عنصرين اضافيين يُسميان $+\infty$ و $-\infty$ ، وتدعى هذه المنظومة ، منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة . غير أنه لابد ، عندئذ ، من بعض القواعد الخاصة ، مثل :

$$a + (+\infty) = +\infty$$
$$a - (+\infty) = -\infty$$
$$a \cdot (+\infty) = +\infty \quad ; \quad a > 0$$
$$a \cdot (+\infty) = -\infty \quad ; \quad a < 0$$

غير أن عمليات مثل :

$$(+\infty) + (-\infty) \quad ; \quad 0 \cdot (+\infty) \, , \, (+\infty) / (+\infty)$$

غير مسموح بها ، لأنه لايمكن أن نُنسب لها قيماً موافقة (وحيدة) وهذه الأشكال ، تسمى حالات عدم تعيين .

وسنتجنب إلى حد بعيد ، استعمال منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة في هذا الكتاب ، كذلك نستبعد ، حتى في تلك المنظومة ، عملية القسمة على الصفر ، إذا رغبنا الحفاظ على القوانين العادية للحساب والجبر .

تعريف : إذا كان $f(x)$ معرفاً من أجل القيم الكبيرة لـ x ، وكان $f(x)$ يقترب من العدد الحقيقي ℓ كنهاية له ، عندما تسعى x إلى اللانهاية ، فإننا نقول إن $f(x)$ ينتهي إلى ℓ عندما x تنتهي إلى اللانهاية ونكتب ذلك كما يلي :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$$

ويتم ذلك إذا قابل كل عدد موجب ε عدداً كبيراً M بحيث يكون :

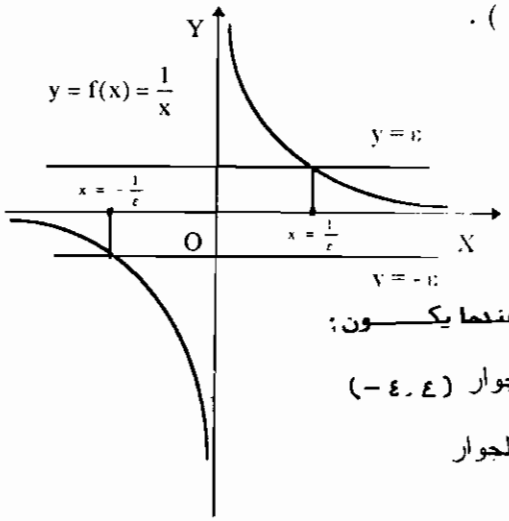
$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{عندما} \quad x > M$$

ملاحظة ١ : تعني المتراجحة السابقة بيانيا ، أن المنحني $y = f(x)$ ينحصر بين الخطين $y = L - \varepsilon$, $y = L + \varepsilon$ عندما تكون x كبيرة بقدر كاف .

ويمكن كتابة $x > M$ بالشكل $M < x < \infty$ أو $x \in (M , \infty)$ إن مجالاً مفتوحاً ،

كهذا ، والذي يتكون من جميع الأعداد التي تكبر عددا ثابتاً M يسمى جواراً لـ ∞ .

وعلى هذا كان بإمكاننا القول أن $f(x)$ يأخذ قيمة داخل المجال $(\ell - \varepsilon \ , \ \ell + \varepsilon)$ عندما تكون x في الجوار $(M \ , \infty)$.



مثال ٥ : $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

لأن :

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

$$\rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، ونجد انـــه عندما يكـــون :

$|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ فإن $f(x)$ يقع في الجوار $(\varepsilon ، -\varepsilon)$

وهو ينتهـــى الى الصفر عندما يكون x في الجوار

$(1/\varepsilon \ , \infty)$ أو الجوار $\left] -\infty, \frac{-1}{\varepsilon} \right[$

مثال٦ :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)} = 1$$

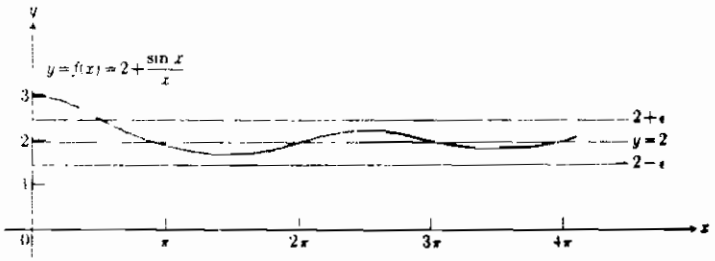
مثال ٧ :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right)}{3 + \left(\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}$$

مثال ٨ :

ادرس نهاية التابع :

$$f(x) = 2 + \frac{\sin x}{x}$$



الشكل (16)

من الشكل نجد أن بيان التابع يتذبذب حول المستقيم $y = 2$ ، وأن سعة التذبذب تتناهى نحو الصفر عندما $x \to \infty$ ، ويقع المنحني بين $y = 2 + \varepsilon$ و $y = 2 - \varepsilon$.

عندما $x > \frac{1}{4}$ عندما تكون x كبيرة فإن $\frac{\sin x}{x} \to 0$ و $f(x) \to \ell = 2$.

نظرية ٥ : إذا كان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1 \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = \ell_2$$

حيث ℓ_1 و ℓ_2 عددان حقيقيان (منتهيان) فعندئذ يكون :

1) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \ell_1 \pm \ell_2$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$

3) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad , \quad g(x) \neq 0 \ , \ \ell_2 \neq 0$

IV – نهاية تابع إلى اللانهاية عندما $x \to a$:

يمكن أن نجد أشكالاً من النهايات من أمثال :

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

4) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

ـ ويعني الرمز ∞ في كل حالة تماما كما في :

$$f(x) \to +\infty$$

أو أنه من أجل أي عدد حقيقي معطى M ، مهما كان هذا العدد كبيراً ، يتحقق الشرط :

$$f(x) > M$$

من أجل جميع قيم x في مجموعة محددة ، مرتبطة عادة بـ M . إن المجموعة المناسبة في (1) هي جوار ما لـ a . ونعني $x \to a^+$ في (2) أن x تتقارب من a بأعداد أكبر من a نفسه (نهاية من اليمين) ، أي المجال من الشكل $(a \ , \ a + h)$ حيث h عدد موجب ما . ونعني بـ $x \to a^-$ في (3) أي x قريبة من a وهي أصغر من a (نهاية من اليسار) ، أي في مجال من الشكل $(a - h \ . \ a)$ حيث $h > o$. وأما الجوار في (4) فهو من الشكل $(c \ , \infty)$ ، أي من أجل قيم x الكبيرة ، أو من أجل $x > c$ حيث c عدد ما .

V – التوابع المحدودة :

تعريف : نقول عن تابع f(x) معرف على مجموعة $E \subseteq R$ ، أنه محدود من الأدنى، إذا وجد عدد حقيقي b بحيث يكون :

$$f(x) \geq b \ ; \quad \forall \ x \in E$$

وإذا وجد عدد حقيقي a بحيث يكون :

$$f(x) \leq a \ ; \quad \forall \ x \in E$$

فعندئذ نقول أن f(x) محدوداً من الأعلى .

وإذا وجدت أعداد حقيقية a و b و c بحيث يكون :

$$a < f(x) < b \ ; \quad \forall \ x > c$$

فإن f(x) محدود من الأدنى والأعلى ونقول باختصار إنه محدود .

مثال ٩ : التابع :

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x}$$

محدود ، عندما تكون x كبيرة ، لأن : $\forall \ x > 1$; $o < f(x) < 2$

نظرية ٦ : إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ **و** $g(x)$ **تابعاً محدوداً من الادنى من أجل** x **كبيرة ، فإن :**

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) + g(x)] = \infty$$

مثال ١٠ : إن :

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty \quad , \quad \sin x \geq -1$$

فإن

$$\lim_{x \to \infty} (x + \sin x) = \infty$$

على الرغم من أنه ليس لـ $\sin x$ نهاية لما $x \to \infty$.

نظرية ٧ : إذا كان

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

و $g(x)$ **تابع محدود لما** x **كبيرة ، فإن**

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

مثال ١١ :

إن $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ و $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، أي أن $\cos x$ محدود ، إذن

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

VI - حالات عدم التعيين ومعالجتها :

حالة عدم التعيين هي النهاية التي لانستطيع التعبير عنها بشكل محدد . ونصادف كثيراً من حالات عدم التعيين منها :

$$\frac{0}{0} \ , \ 0 \cdot \infty \ , \ \infty - \infty \ , \ \frac{+\infty}{-\infty} \ , \ \frac{\infty}{\infty} \ , \ \infty^0 \ , \ (\infty)^\infty \ , \ 0^\infty \ , \ 1^\infty$$

عند مصادفتنا لإحدى هذه الحالات يجب أن نعمل على إزالتها ، وهناك عدة طرق تساعدنا في ذلك ، منها : إعادة صياغة التركيب الجبري للتابع ، وكتابته بشكل مناسب ، أو بالاستخدام المباشر لبعض النهايات الشهيرة (المبرهن على صحتها) ، أو باتباع خواص اللوغاريتم ، أو باتباع قاعدة أوبيتال ، التي سنؤجل دراستها إلى حين بحث مشتقات التوابع . سندرس هذه الطرق مع بعض الأمثلة .

١- إعادة صياغة التركيب الجبري :

نحاول بهذه الطريقة ، وضع التابع في صيغة مناسبة ، نتجنب بها الوقوع في إحدى حالات عدم التعيين . سنوضحها من خلال المثال التالي :

مثال ١٢ : أوجد النهاية

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$$

نلاحظ بالإنهاء المباشر ، وجود حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

إذا حللنا البسط والمقام ، نجد :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

٢ - النهايات الشهيرة :

سنتعرض هنا إلى ثلاث من النهايات الشهيرة ، دون البرهان على صحتها ، وسوف نستخدمها في إزالة بعض الحالات المشابهة لعدم التعيين .

1) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x \to o} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_o} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & ; \quad n = m \\ o & ; \quad n < m \\ \infty & ; \quad n > m \end{cases}$$

كما توجد بعض النهايات الخاصة ، منها :

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{Ln\ x} = 1$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{Ln\ (1+x)}{x} = 1$

٣- استخدام قواعد اللوغاريتم :

إن حالات عدم التعيين ذات الأنماط 1^{∞} , 0^{0} , ∞^{0} هي أشكال تعترضنا غالباً ، عند البحث عن نهاية من الشكل $\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$

بما أن التابع y هو من الشكل $y = f(x)^{g(x)}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن :

$$Ln\ y = g(x)\ Ln\ f(x)$$

وحسب تعريف اللوغاريتم [$Ln\ b = a \Leftrightarrow e^a = b$] يمكن أن نكتب :

$$y = e^{g(x)\ Ln\ f(x)}$$

وعندئذ فإن النهاية $g(x)\ .\ Ln\ f(x)$ تتحول إلى الشكل $0\ .\ \infty$ ، والتي يمكن معالجتها بواسطة قاعدة أوبيتال (كما سنرى لاحقا) .

مثال ١٣ :

إن النهاية $\lim_{x \to 0} x^x$ هي من الشكل 0^0

بتطبيق خواص اللوغاريتم وبفرض أن $y = x^x$ ، نجد :

$$L_n\ y = x\ .\ L_n\ x$$

أو $y = e^{x\ Ln\ x} = e^{\frac{L_n\ x}{\frac{1}{x}}}$

بأخذ نهاية الطرفين : $\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} e^{\frac{L_n\ x}{\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

النهاية الأخيرة تحسب حسب قاعدة أوبيتال : نهاية $\frac{\text{مشتق البسط}}{\text{مشتق المقام}}$

عندئذ نجد : $\lim_{x \to 0} y = e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \to 0} -x} = e^0 = 1$

مثال ١٤ :

احسب النهاية $\lim_{x \to 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

الحل : نعيد صياغة التابع :

$$\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{3}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{x - 1}$$

$$= \frac{3 - (x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{-(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{-(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{-(x + 2)}{x^2 + x + 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = -\lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = -\frac{3}{3} = -1$$

مثال ١٥ :

أحسب النهاية $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt[3]{x} - 2}$

الحل :

بالاستفادة من المطابقة : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

وبوضع $a = \sqrt[3]{x}$ و $b = 2$. نكتب المطابقة :

$$\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right) = \sqrt[3]{x^3} - 2^3 = x - 8$$

وبالتالي :

$$\frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{\sqrt{x+1}-3}{1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$\cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} = \frac{x+1-9}{\sqrt{x+1}+3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+1}+3}$$

إذن :

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+1}+3} = \frac{4+4+4}{3+3} = 2$$

ثالثاً – استمرار التوابع :

I – تعاريف :

– **تعريف ١** : نقول عن التابع $f(x)$ المعرف في جوار نقطة x_0 من R ، أنه مستمر في x_0 ، إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ينتج من التعريف ، أن استمرار التابع $f(x)$ في x_0 يتطلب شرطين :

١– أن يكون التابع معرفاً في x_0 وله فيها قيمة محددة $f(x)$.

٢– أن يكون للتابع نهاية واحدة في x_0 عندما $x \to x_0$ تساوي قيمة التابع فيها ، أي :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

وإذا كان التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[a\ .\ b]$ أو أي مجال آخر فإنه يكون مستمراً في مجال تعريفه ، إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط المجال .

مثال ١ : التابع $f(x) = x^2$ مستمر في أي نقطة $x_0 \in R$ ، لأنه معرف في R ، وفي كل نقطة له قيمة $f(x_0) = x_0^2$ وله نهاية تساوي x_0^2 .

مثال ٢ : التابع $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ غير مستمر في النقاط $x = k\pi$ ، حيث $k \in z$ ،

لأنه غير معرف فيها أيضاً . في حين ، أن التابع $\frac{\sin x}{x}$ مستمر في جميع نقاط المجال $(-\infty , +\infty)$.

إذا أخذنا بعين الاعتبار تعريف نهاية تابع ، نستطيع صياغة تعريف آخر لاستمرار التابع بالشكل .

تعريف ٢ : ليكن $f(x)$ تابع معرف في مجموعة $E \subseteq R$. وليكن $x_o \in E$. نقول عن التابع f إنه مستمر في x_o ، إذا وفقط إذا ، قابل كل $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

طالما أن :

$$\forall\ x \in E\ ,\ |x - x_o| < \delta$$

ملاحظة ١ : إذا وضعنا $\Delta x = x - x_o$

و $\Delta f = f(x)-f(x_o)=f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$

نجد أن الشرط في التعريف (٢) ، يمكن أن يكتب بالشكل :

$$\forall x \in E\ ,\ \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f \to 0$$

أو على الشكل :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

ملاحظة ٢ : يفضل استخدام التعريف الأول لاستمرار التابع ، لأنه يمكننا من تطبيق جميع نظريات النهايات مباشرة ، خاصة إذا قصرنا تحولات x على منطقة تعريف التابع .

مثال ٣ : التابع $f(x) = x^2 + 3x + 1$

مستمر في كل نقطة $x_o \in R$ ، لأنه معرف في جميع نقاط R ، حيث

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = x_o^2 + 3x_o + 1 = f(x_o)$$

وبصورة عامة ، كل تابع على شكل كثيرة حدود ، أي من الشكل :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

حيث $a_o , a_1 , ... a_n \in R$ هو تابع مستمر في كل نقطة x_o من R .

مثال ٤ : إن التابع $f(x) = e^x$ مستمر في كل نقطة من R ، لأنه معرف على R ،

وذلك لأن :

$$\Delta f = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \quad e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)$$

إذن $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = e^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} (e^{\Delta x} - 1) = 0$

II – الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار :

تعريف : نقول إن التابع $f(x)$ مستمر في النقطة x_0 من اليمين ، إذا كان

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

وأنه مستمر في x_0 من اليسار ، إذا كان

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

مثال ٥ : التابع $f(x)$ المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

مستمر في المبدأ من اليمين ، وغير مستمر فيه من اليسار وذلك لأن :

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = -1 \neq f(0)$$

مثال ٦ : التابع $f(x)$ المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

إذا كان $x > 0$ نجد أن $|f(x)| \leq |x| = x$

و $\lim_{x \to 0+0} |f(x)| \leq \lim_{x \to 0+0} f(x) = 0 = f(0)$

إذن $f(x)$ مستمر في المبدأ من اليمين .

أما إذا كان $x < 0$ ، فإننا نجد :

$$\lim_{x \to 0-0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0+0} \left(-x \sin \frac{1}{-x} \right) = \lim_{t \to 0+0} t \sin \frac{1}{t} = 0 = f(0)$$

ن f(x) مستمر في الصفر من اليسار أيضاً ، فهو مستمر في الصفر .

نظرية ١ : الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع f(x) مستمراً في النقطة x_0 هو أن يكون مستمراً في x_0 من اليسار ومن اليمين .

البرهان : التابع f(x) مستمر في x_0 ، إذا

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

إذاً f(x) مستمر في x_0 من اليمين ومن اليسار .

نظرية ٢ : إذا كان التابعان f(x) و g(x) مستمرين في النقطة x_0 فإن :

١- التابع $[\alpha f(x) + \beta g(x)]$ مستمر في x_0 من أجل كل $\alpha , \beta \in R$.

٢- التابع g(x) . f(x) مستمر في x_0 .

٣ - التابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ مستمر في x_0 بشرط أن $g(x) \neq 0$.

نظرية ٣ : إذا كان التابع f(x) مستمراً في كل نقطة x من المجال المفتوح (a,b) وكان مستمراً في النقطة a من اليمين وفي النقطة b من اليسار فإنه يكون مستمراً في المجال المغلق [a,b] (البرهان ينتج من التعريف) .

نظرية ٤ : إن تركيب تابعين مستمرين في نقطة هو تابع مستمر في نفس النقطة . وإذا كانا مستمرين في مجال مشترك فإن تركيبهما يكون مستمر في ذلك المجال .

أمثلة :

١- التابع $f(x) = tg(x + 1)$ مستمر في كل نقطة من R ، لأنه تركيب تابعين مستمرين $V = tgu , u = x + 1$.

٢- التابع $f(x) = e^{\sin x}$ مستمر أيضا في كل نقطة من R ، لأنه مركب من تابعين مستمرين $V = e^u , u = \sin x$.

٣- التابع $f(x) = Ln \sin x$ مستمر على المجال $(0 , \pi)$ لأنه مركب من التابعين المستمرين $V = Ln u , u = \sin x$ في نفس المجال .

نظرية ٥ : إذا كان التابع $f : A \to B$ مستمراً في النقطة x_0 من A .

وكان التابع $g : B \to C$ مستمراً في النقطة $f(x)$ من B .

فإن التابع المركب $gof : A \to C$ يكون مستمراً في النقطة x_0 .

III - التوابع المنقطعة :

إذا كان f تابعاً معرفاً في جوار x_0 وكان غير مستمر في x_0 ، نقول أن f منقطع في هذه النقطة ، ونسمي x_0 نقطة انقطاع للتابع f .

يمكن التعبير عن التابع المنقطع عند x_0 كما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$$

نماذج من التوابع المنقطعة :

١- التوابع التي ليس لها نهاية عند نقطة ما x_0 مثل التابع

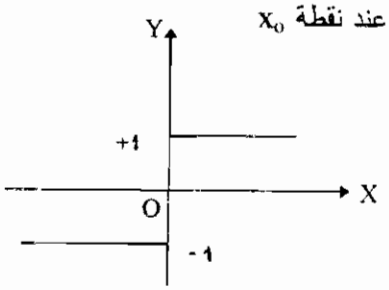
$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

من أجل $x \neq 0$ ، فهو غير مستمر عند النقطة 0 .

٢- كل تابع نهايتاه من اليمين واليسار مختلفتان عند نقطة x_0

مثال التابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$



الشكل (17)

٣- كل تابع له نهاية عند x_0 مختلفة عن قيمته فيها $f(x_0)$.

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

غير مستمر عند النقطة x_0 ، لأننا نعلم أن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$$

١٧ - خواص التوابع المستمرة :

١- إن الصورة المباشرة لأي تابع مستمر على مجال من R هي مجال من R أيضاً.
أي أنه إذا كان x من المجال [a.b] ، فإن قيم التابع f(x) تقع في مجال مقابل [c.d] .

٢ - يكون للتابع f(x) المستمر في [a.b] قيمة عظمى M وقيمة صغرى m في ذلك المجال . وهو يأخذ جميع القيم الواقعة بين هاتين القيمتين .

٣- إذا كان f(x) مستمراً في المجال [a.b] وكانت قيمته العظمى موجبة $M > o$ وقيمته الصغرى سالبة $m < o$ فإنه لابد من وجود نقطة x_o من [a.b] ، بحيث يكون $f(x_o) = o$.

نتيجة : إذا كان للتابع f(x) قيمة موجبة (سالبة) عند x_1 وكان له قيمة سالبة (موجبة) عند x_2 وكانت $(x_1 < x_2)$ فإنه توجد قيمة لـ x مثل x_o ، حيث $x_1 < x_o < x_2$ ، وبحيث يكون $f(x_o) = o$.

مثال : برهن أن للتابع $f(x) = x^3 - 2$ جذر في المجال [1،2] .

نلاحظ أن التابع مستمر في المجال [1،2] . نلاحظ أنه يأخذ عند طرفي هذا المجال قيمتين مختلفتين في الإشارة :

$$f(1) = -1 = m < o \qquad f(2) = 6 = M > o$$

إذن لابد وأن يكون هناك قيمة من المجال [1،2] مثل x_o بحيث يكون $f(x_o) = o$

وفي الحقيقة نجد أنه لو وضعنا :

$$f(x) = x^3 - 2 = o$$

فإننا نجد أن قيمة x التي تحقق هذه المعادلة هي $x = \sqrt[3]{2}$ وهو عدد واقع في المجال [1،2] السابق ويجعل التابع معدوماً .

أي أن $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = o$

تمارين

١ - أوجد نهاية كل من التوابع التالية في النقاط المقابلة لكل منها :

$f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 20}$ عندما $x \to 2$

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 250}{x^2 - 4x - 5}$ عندما $x \to -5$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ عندما $x \to 2$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}$ عندما $x \to 36$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 1}$ عندما $x \to \pm\infty$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{x + 2}$ عندما $x \to \pm\infty$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ عندما $x \to \pm\infty$

$f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - x$ عندما $x \to \pm\infty$

٢ - أوجد مجال تعريف كل من التوابع التالية :

$$y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$$

٣ - أوجد التابع العكسي لكل من التوابع التالية :

$y = 1 - 3x$ ، $y = x^2 + 1$ ؛ $y = \dfrac{1}{1-x}$; $(x \neq 1)$

$y = 10^{x-1}$ ؛ $y = \lg(x+2) + 1$ ؛ $(x > -2)$

- أوجد مجال استمرار ونقاط انقطاع كل من التوابع :

$$y = \frac{x^2}{x-2} \quad ; \quad y = \frac{1}{(x-2)^2} \quad , \quad y = \frac{x^2+1}{x+2}$$

$$y = \frac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-4} \quad ; \quad y = e^{-\frac{1}{x}} \quad ; \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

الفصـــــل الســـــــادس

مشتقات التوابع

I – مشتق النا بع :

إن مفهوم مشتق التابع هو من أهم مواضيع التحليل الرياضي ، لما له من دور في دراسة تحولات التابع وايجاد قيمه العظمى والصغرى ، وغيرها ....

تعريف : ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,b]$ ، ولتكن x نقطة من المجال $[a,b]$ و $x_0 \in (a,b)$ حيث $x_0 \neq x$.

نشكل النسبة $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

إن نهاية النسبة السابقة عندما $x \to x_0$ هي مشتق التابع $f(x)$ في النقطة x_0 ونرمز للمشتق بـ $f'(x_0)$ أي :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad (2)$$

إذا كان مشتق التابع $f(x)$ موجوداً في كل نقطة من المجال $[a\ ,\ b]$ ، عندئذ نقول أن للتابع $f(x)$ مشتقاً $f'(x)$ في $[a\ ,\ b]$.

نستطيع إعطاء تعريف آخر لمشتق التابع $y = f(x)$ بالشكل :

لنفرض $h = \Delta x = x - x_0$ وتسمى تزايد المتحول ، حيث h مقدار صغير موجب يسمى خطوة المتحول و $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ وتسمى تزايد التابع،عندئذ نعرف مشتق $f(x)$ بالعلاقة :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

أمثلة هامة :

١– مشتق التابع الثابت $f(x) = C$ هو الصفر دوماً لأن :

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

٢- لنوجد مشتق التابع $f(x) = |x|$ في نقطتين مختلفتين :

1) $x_0 = 2$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|2 + h| - |2|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 2}{h} = 1$$

2) $x_0 = 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 ; & h > 0 \\ -1 ; & h < 0 \end{cases}$$

إذن لاتوجد لدينا نهاية محددة ووحيدة ، وبالتالي ليس للتابع $f(x) = |x|$ مشتق في النقطة $x = 0$.

٣- مشتق التابع $y = x^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب .

إذا أعطينا لـ x تزايداً قدره Δx (حيث $\Delta x \neq 0$) ، فإن y تأخذ مقابل ذلك تزايداً قدره Δy ، ويكون :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

بتطبيق دستور ذي الحدين لنيوتن نجد أن :

$$y + \Delta y = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \overline{\Delta x}^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} x^{n-k} \cdot \overline{\Delta x}^k + \ldots + \overline{\Delta x}^n$$

ومنه

$$\Delta y = \frac{n}{1!} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \overline{\Delta x}^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} x^{n-k} \cdot \overline{\Delta x}^k + \ldots + \overline{\Delta x}^n$$

بالقسمة على Δx نجد :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\overline{\Delta x}^{2} +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\cdot\overline{\Delta x}^{(k-1)} + \ldots + \overline{\Delta x}^{(n-1)}$$

وبأخذ نهاية المقدار السابق عندما $\Delta x \to 0$ نجد :

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} = y'$$

وذلك لأن بقيّة الحدود معدومة لاحتوائها Δx المتناهي إلى الصفر إذن .

إذن $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$

٤- اعتماداً على المثال السابق ، نستطيع أن نجد مشتقات التوابع من درجات مختلفة ، فمثلاً نجد :

إذا كان $y = ax$ فإن $y' = a$ ، (حيث a عدد ثابت) .

وإذا كان $y = ax^2$ فإن $y' = 2ax$

و $y = ax^3$ فإن $y' = 3ax^2$

وهكذا يمكن إيجاد مشتقات جميع قوى x الصحيحة .

٥- مشتق التابع $f(x) = \sqrt{x}$ في النقطة x_0

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

وبشكل عام فإن مشتق التابع $y = \sqrt{x}$ في أية نقطة x هو $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

٦- مشتق التابع $f(x) = \sin x$

$$f(x) - f(x_0) = \sin(x) - \sin x_0$$

$$= 2\cos\frac{x + x_0}{2}\quad \sin\frac{x - x_0}{2}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{\cos \frac{x - x_0}{2} \times 2 \sin \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x - x_0}{2} \cdot \lim \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}$$

$$= \cos x_0 \times 1 = \cos x_0$$

إذن مشتق التابع $y = \sin x$ في النقطة x هو $y' = \cos x$.

II - المشتق من اليمين والمشتق من اليسار :

كما وجدنا في بحث النهايات ، أنه توجد نهاية من اليمين ، ونهاية من اليسار ، كذلك وبشكل مشابه ، يوجد مشتق للتابع من اليمين ، ومشتق من اليسار في نقطة محددة .

تعريف : ليكن $y = f(x)$ تابع ما . إذا كان يوجد للكسر $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية عندما $x \to x_0$ من اليمين . عندئذ تسمى هذه النهاية المشتق من اليمين ويكتب بالشكل :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

وإذا كان للكسر السابق $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية عندما $x \to x_0$ من اليسار ، عندئذ نقول أن للتابع $f(x)$ مشتق من اليسار ، ونكتب :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

الرمز $x \to x_0^-$ يعني أن x يتناهى إلى x_0 بقيم أصغر من x_0 .

والرمز $x \to x_0^+$ يعني أن x تتناهى إلى x_0 بقيم أكبر من x_0 .

نظرية ١ : يكون للتابع $y = f(x)$ مشتق في النقطة x_0 ، إذا وفقط إذا كان ، له في x_0 مشتق من اليسار ومشتق من اليمين وهذان المشتقان متساويان

$$f'_- = f'_+$$

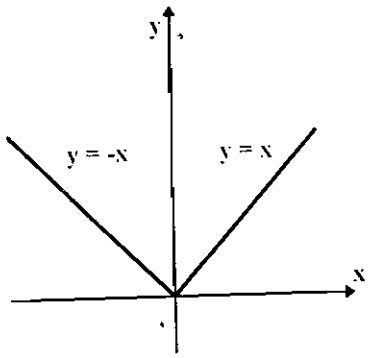
أمثلة :

٧- وجدنا في المثال (٢) السابق ، أنه ليس للتابع $f(x) = |x|$ مشتق في $x_0 = 0$ ، ولكن له مشتق من اليسار ومشتق من اليمين هما :

$$f'_- = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

ولكن هذين المشتقين غير متساويين إذن لايوجد للتابع $f(x) = |x|$ مشتق في المبدأ (الشكل ١) .



الشكل (1)

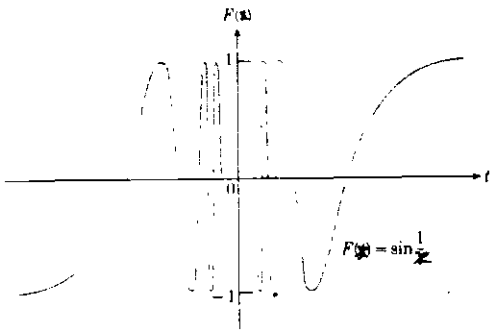
٨- التابع المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x \neq 0 \end{cases}$$

ليس له مشتق من اليسار أو من اليمين عند $x_0 = 0$ ، وذلك لأن :

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \sin \frac{1}{x}$$

ليس للتابع $\sin \frac{1}{x}$ نهاية عندما $x \to 0$ ، وذلك لأن $\frac{1}{x} \to \infty$ ، والتابع $\sin \frac{1}{x}$ في هذه الحالة يتذبذب بين العددين (-1) و (+1) فلا نستطيع تحديد نهاية محددة له .



الشكل (2)

٩- نفس المناقشة تصح على التابع f(x) المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & ; \quad x \neq o \\ o & ; \quad x = o \end{cases}$$

١٠- التابع f(x) المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \leq o \\ x \cos \frac{1}{x} & , \quad x > o \end{cases}$$

له مشتق من اليسار ، ولكن ليس له مشتق من اليمين في النقطة $x_o = o$ ، وذلك لأن :

$$\lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to o^-} \frac{\sin x - o}{x - o} = \lim_{x \to o^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'_-(o)$$

أما المشتق من اليمين فهو غير موجود لأن :

$$\lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to o^+} \frac{x \cos \frac{1}{x} - o}{x - o} = \lim_{x \to o^+} \cos \frac{1}{x}$$ (غير موجودة)

النهاية الأخيرة غير موجودة ، وبالتالي لايوجد مشتق من اليمين للتابع المعطى f(x) .

III - التفاضل :

تفاضل المتحول : إذا أعطي المتحول x تزايداً مقداره Δx ، وإذا كان Δx يتناهى إلى الصفر ولايساوي الصفر ، فنقول إن التزايد يتناهى إلى التفاضل ، ونرمز لتفاضل المتحول x بـ dx .

تفاضل التابع : إن الجداء $f'(x).\lambda$ حيث $\lambda \neq o$ عدد ثابت ، يسمى تفاضل التابع $y = f(x)$ ويرمز له بـ df(x) أو dy ، أي $dy = f'(x) . \lambda$

يُختار الثابت λ بشكل وحيد لجميع التوابع ولجميع قيم x .

إذا كان التابع $f(x) = x$ ، فإن :

$$df(x) = dx = (x)' . \lambda = \lambda . 1 = \lambda$$

عندئذ ، نستطيع أن نكتب تفاضل التابع بالشكل :

$$dy = f'(x)dx$$

وباعتبار أن $dx = \lambda \neq 0$ ، نستطيع أن نكتب مشتق التابع انطلاقاً من العلاقة السابقة بالشكل :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

من المفيد أن نذكر هنا ، أن وضع المشتق بالشكل $\frac{dy}{dx}$ ، كان لأول مرة من قبل لايبنتز .

مثال ١١ : ليكن لدينا التابع $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 10$

عندئذ يكون $f'(x) = 3x^2 + 4x + 4$

لنحسب Δy و dy في النقطة $x_0 = 2$ ، ولنفرض أن $dx = h = \Delta x = 0.01$

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) =$$
$$\Delta y = f(2 + 0.01) - f(2) = 0.240801$$
$$dy = f'(x_0)\, dx = f'(2) \cdot 0.01 = 0.240$$

بمقارنة Δy و dy ، نجد تطابق بين Δy و dy بثلاثة أرقام بعد الفاصلة .

من هذا المثال ، نستنتج أن حساب dy هو أسهل بكثير من حساب Δy . ويمكن أن نضع المعادلة التقريبية التالية $\Delta y \approx dy$ أو المعادلة :

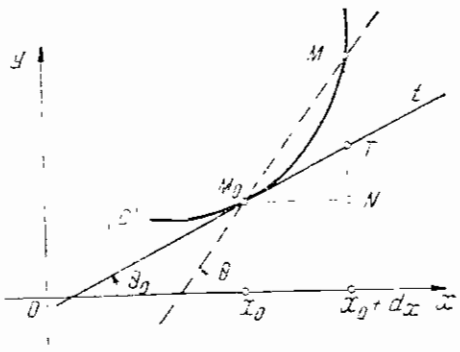
$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

وفي مثالنا نجد :

$$f(2 + 0.01) \approx f(2) + f'(2)(0.01)$$
$$\approx 34 + 24\,(0.01) = 34.24$$

IV – المعنى الهندسي للمشتق والتفاضل :

ليكن التابع $y = f(x)$ المعرف والمستمر على المجال $[a,b]$. وليكن (c) المنحني البياني لهذا التابع الموضح في الشكل (3) . ولتكن النقطة $M(x, f(x))$ واقعة على (c) لنرسم منها مستقيماً يقطع المنحني (c)



الشكل (3)

في نقطة $M_o(x_o, f(xo))$ ويصنع زاوية α مع المحور ox .

لنثبت النقطة M_o ونجعل M تتحرك على المنحني (c) ، عندئذ يصنع القاطع M_oM زوايا مختلفة مع المحور ox ، الى أن تنطبق النقطة M على M_o ، عندئذ ينطبق القاطع M_oM على المماس T للمنحني في النقطة M_o .

من الشكل (3) نجد أن : $\Delta x = x - x_o$

$$\Delta y = f(x) - f(x_o) = \Delta f(x)$$

إن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **هي ميل القاطع** M_oM . أي :

$$(I) \qquad tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

عندما $x \to x_o$ فإن النقطة M تنطبق على M_o ، ويتناهى المستقيم القاطع M_oM إلى المماس T في النقطة M_o . إذا أخذنا نهاية النسبة السابقة (I) ، نجد أن :

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

إذن من هنا نستنتج أن مشتق التابع في نقطة ما x_o يساوي ميل المماس لمنحني التابع في النقطة x_o نفسها . وأيضاً يمكن أن نعرف التابع القابل للاشتقاق في نقطة مثل x_o تنتمي إلى مجال تعريفه ، بأنه التابع الذي يوجد لخطه البياني مماس في النقطة x_o وميله يساوي $f'(x_o)$. إذن نجد أن مشتق التابع في نقطة x_o يتعلق بميل المماس فيها أي بالزاوية α. فإذا كانت α منفرجة ، أي $tg\alpha < o$ ، فإن $y' < o$ ، وإذا كانت α حادة ، فإن $tg\alpha > o$ وبالتالي $y' > o$ ، أما إذا كانت α مساوية للصفر فعندها يكون المشتق معدوماً ، والمماس موازياً للمحور OX .

V - علاقة الاشتقاق بالاستمرار :

إن النظرية التالية توضح العلاقة بين قابلية الاشتقاق لتابع ما f(x) واستمراره في نقطة ما x_o تنتمي إلى مجال تعريفه .

نظرية ٢: إذا كان التابع f(x) قابلاً للاشتقاق في النقطة x_o ، فإنه مستمر في هذه النقطة .

البرهان : إن f(x) معين في النقطة x_0 لأنها نقطة من مجال تعريفه ، لنفرض أن f(x) يقبل الاشتقاق في x_0 وليكن $f'(x_0)$ مشتقه فيها . ولنبرهن أن f(x) مستمر في x_0 .

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

إذن لـ f(x) نهاية محددة في x_0 وبالتالي فهو مستمر فيها .

إن عكس هذه النظرية غير صحيح ، بمعنى أن استمرار التابع في نقطة هو شرط لازم لوجود المشتق ولكنه غير كافٍ . ولقد وجدنا سابقاً أنه حتى يكون التابع f(x) قابلاً للاشتقاق في نقطة x_0 ، يجب أن يكون له مشتق من اليمين $f'_{x_0^+}$ ومشتق من اليسار $f'_{x_0^-}$ ، والمشتقان متساويان . (النظرية 1) .

من الأمثلة على ذلك التابع $f(x) = \sqrt{x}$ المستمر عند $x_0 = 0$ ، ولكنه غير قابل للاشتقاق عند x_0 ، لأن ليس له مشتق من اليسار في $x_0 = 0$.

ووجدنا سابقاً في المثال (2) التابع $f(x) = |x|$ المستمر عند $x_0 = 0$ ولكن ليس له مشتق فيها .

وأخيراً نذكر أنه حتى يكون التابع f(x) المعرف على المجال $I \subseteq R$ قابلاً للاشتقاق في I ، يجب أن يكون قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاط I .

VI – قواعد الاشتقاق :

توجد مجموعة من القواعد التي تساعد على إيجاد مشتقات التوابع بسرعة ، إلا أن هذه القواعد تنتج جميعها من التعريف الأساسي لمشتق تابع . ولقد وجدنا في الأمثلة من (1) إلى (6) بعضاً منها ، وسنورد هنا جميع القواعد المتعلقة بالاشتقاق بما فيها الأمثلة المذكورة سابقاً :

١– مشتق التابع الثابت يساوي الصفر دوماً .

إذا كان $f(x) = c$ حيث c ثابت .

فإن $f'(x) = o$

٢- مشتق تابع الدرجة الأولى يساوي أمثال x .

إذا كان $f(x) = ax + b$ حيث a عدد ثابت .

فإن $f'(x) = a$

٣- مشتق تابع الدرجة n .

إذا كان $f(x) = x^n$

فإن $f'(x) = n x^{n-1}$

هذه القاعدة صحيحة سواء كانت n عدد صحيح أو كسري ، موجب أو سالب

مثال ١٢ : أوجد مشتق التابع $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad ; \quad x \neq o$$

مثال ١٣ : أوجد مشتق التابع $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$$f'(x) = -n\, x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}} \quad ; \quad x \neq o$$

٤- مشتق مجموع توابع يساوي مجموع مشتقات هذه التوابع .

إذا كان $f(x) = g_1(x) \pm g_2(x) \pm \ldots\ldots\ldots \pm g_n(x)$

فإن $f'(x) = g_1'(x) \pm g_2'(x) \pm \ldots\ldots\ldots \pm g_n'(x)$

مثال ١٤ : التابع $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 15$

مشتقه هو $f'(x) = 9x^2 - 4x$

٥ - مشتق جداء تابعين يساوي مشتق الأول فى الثانى + مشتق الثاني في الأول .

إذا كان :

$f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$

فإن $f'(x) = g_1'(x) \cdot g_2(x) + g_1(x) \cdot g_2'(x)$

يمكن تعميم هذه القاعدة على جداء عدة توابع . فإذا كان

$f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \ldots\ldots g_n(x)$

فإن : [illegible]

مثال ١٥ : أوجد مشتق [illegible] :

$$f(x) = (3x - 1)(5x^2 - 6x + 4)$$

$$f'(x) = 3(5x^2 - 6x + 4) + (3x - 1)(10x - 6)$$

$$= 15x^2 - 18x + 12 + 30x^2 - 6x - 10x + 6$$

$$= 45x^2 - 34x + 18$$

٦- مشتق التابع العادي (التابع الكسري) يساوي :

$$\frac{\text{مشتق البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتق المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

فإذا كان $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ حيث $h(x) \neq 0$

فإن $$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{[h(x)]^2}$$

مثال ١٦ : أوجد مشتق التابع :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{5x} \quad ; \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{\left(6x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot 5x - 5\left(3x^2 + 2\sqrt{x}\right)}{25x^2}$$

$$= \frac{30x^2 + 5\sqrt{x} - 15x^2 - 10\sqrt{x}}{25x^2} = \frac{15x^2 - 5\sqrt{x}}{25x^2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5\sqrt{x^3}}$$

٧- مشتق تابع التابع :

إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فان $y = f(g(x))$ ، يسمى y تابع التابع .

إن مشتق التابع y بالنسبة لـ x يُعطى بالعلاقة :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

وإذا استخدمنا عبارة التفاضل في حساب مشتق تابع التابع ، فإن العلاقة السابقة تكتب بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال ١٧ : أوجد مشتق التابع $y = u^n$ حيث $u = 2x + 1$

الحل : إن y تابع لـ x بشكل غير مباشر . إذن بتطبيق قاعدة مشتق تابع التابع نجد :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n u^{n-1} \cdot (2)$$

$$= n(2x + 1)^{n-1} \cdot (2) = 2n(2x + 1)^{n-1}$$

٨- مشتق التابع الضمني :

الشكل العام للتابع الضمني هو $f(x , y) = o$ ، أي لا توجد علاقة صريحة بين التابع y والمتحول x . يمكن إيجاد مشتق هذا التابع دون أن نجعله صريحاً (ظاهرياً) بتطبيق العلاقة :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = - \frac{\frac{d}{dx} f(x,y)}{\frac{d}{dy} f(x,y)}$$

مثال ١٨ : أوجد مشتق التابع y بالنسبة لـ x من التابع الضمني التالي دون أن تجعله ظاهرياً :

$$f(x , y) = y^5 + 2 x^2 y^2 + x y - 42 = o$$

بتطبيق قاعدة اشتقاق التابع الضمني نجد :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = - \frac{4xy^2 + y}{5y^4 + 4x^2 y + x}$$

٩- مشتق التابع العكسي :

إذا كان التابع f(x) قابلاً للقلب ، أي له تابع عكسي مثل $x = g(y)$. فإن مشتق y بالنسبة لـ x يرتبط بمشتق x بالنسبة لـ y بالعلاقة $y'_x \cdot x'_y = 1$

أو $$x'_y = g'_y = \frac{1}{y'_x}$$

وإذا استخدمنا رمز التفاضل ، نجد :

$$\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} \qquad \text{أو} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

سنجد تطبيقات كثيرة لمشتق التابع العكسي حين حساب مشتقات التوابع العكسية للتوابع المثلثية .

١٠ - مشتقات التوابع المثلثية :

أ - مشتق تابع الجيب $y = \sin x$

إن هذا التابع معرف ومستمر على كامل R ، ولذلك فإن مشتقه موجود ، ويعطى بالعلاقة التالية :

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

وإذا كانت الزاوية u(x) فإن المشتق يصبح بالشكل

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

لقد حسبنا مشتق التابع sin x في المثال (6) حسب تعريف المشتق .

ب - مشتق تابع تمام الجيب $y = \cos x$

أيضاً التابع cos x معرف ومستمر على كامل R . ومشتقه هو

$$y' = (\cos x)' = - \sin x$$

وإذا كان التابع y تابعاً لـ u و u تابع لـ x أي $y = \cos u$ حيث $u = u(x)$

فإن $y` = (\cos u)` = - u` \sin u$

جـ - مشتق تابع الظل $y = tg\ x$

هذا التابع معرف ومستمر على R باستثناء النقاط $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ أي أنه معرف على $\left\{R - (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ حيث k عدد صحيح .

لحساب مشتق التابع $y = tg\,x$ نطبق قاعدة مشتق التابع الكسري لأن :

$$y = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

وإذا كانت الزاوية عبارة عن تابع u لـ x أي $u(x)$ يكون التابع

$$y = tg\,u$$

ومشتقه

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + tg^2 u)$$

د – مشتق تابع تمام الظل $y = \cot g\,x$

إن هذا التابع معرف ومستمر على المجموعة $\{ R - k\pi \}$ وذلك مهما يكن العدد الصحيح k .

يُحسب مشتق التابع $y = \cot g\,x$ بقاعدة مشتق التابع الكسري

$$y = \cot g\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot g^2 x\right)$$

وإذا كانت الزاوية تابعاً لـ x مثل $u(x)$ فإن $y = \cot g\,u$ ومشتقه

$$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'\left(1 + \cot g^2 u\right)$$

ملاحظة : إذا كان لدينا تابع مثلثي من الشكل $y = \sin^n u$ حيث $u(x)$ ، فإنه يكتب بالشكل $y = (\sin u)^n$

ويطبق عليه قاعدة اشتقاق القوة ، أي :

$$y' = n(\sin u)^{n-1} \cdot u' \cos u$$

تطبق هذه القاعدة على جميع التوابع المثلثية الأخرى .

مثال ١٩ : أوجد مشتق التابع : $y = \sin^5 (2x^2)$

الحل : اعتماداً على الملاحظة السابقة نجد :

$$y' = 5 \sin^4 (2x^2) \cdot 4x \cdot \cos (2x^2)$$
$$= 20x \sin^4 (2x^2) \cos (2x^2)$$

مثال ١٦ : أوجد مشتق التابع $y = tg (3x^2 + 7)$

لدينا هنا $y = tg\, u \; ; \; u = 3x^2 + 7$

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \frac{6x}{\cos^2 (3x^2 + 7)}$$

١١ – مشتقات التوابع العكسية للتوابع المثلثية :

أ – تابع قوس الجيب $y = \arcsin x$ أو $y = \sin^{-1} x$ الذي هو تابع عكسي للتابع $x = \sin y$ حيث y هي الزاوية وهي المتحول أيضاً .

إن التابع $y = \arcsin x$ معرف على المجال $[1 , -1]$ ومجموعة قيمه $(-\infty, +\infty)$

لنشتق العلاقة $x = \sin y$ بالنسبة لـ x فنجد :

$$1 = \cos y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

حتى يكون الجذر $\sqrt{1 - \sin^2 y}$ موجبا يجب أن يكون $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

بتعويض $\sin y = x$ نجد $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

إذن مشتق التابع العكسي $y = \arcsin x$ أو $y = \sin^{-1} x$

هو $\mathbf{y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$

وإذا كانت لدينا الزاوية $u(x)$ تصبح العلاقة السابقة :

$$\mathbf{(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}}$$

مثال ٢٠ : أوجد مشتق التابع $y = \arcsin x^2$. بفرض أن $u = x^2$

وبتطبيق القاعدة $y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ نجد ان $y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

ب – مشتق التابع العكسي لجيب التمام $y = \arccos x$ أو $y = \cos^{-1} x$

لنفرض لدينا التابع $x = \cos y$ حيث y الزاوية ، وهي المتحول أيضاً . إن هذا التابع معين من أجل $0 \leq y \leq \pi$ ، عندئذ تأخذ x قيمها في المجال $-1 \leq x \leq 1$ ، حيث يكون لكل قيمة y ضمن هذا المجال قيمة وحيدة لـ x ضمن المجال $-1 \leq x \leq 1$. أي أن : $-1 \leq \cos y \leq 1$. إن التابع العكسي للتابع $x = \cos y$ هو $y = \cos^{-1} x$ ، أو $y = \arccos y$ وهو القوس y مقدرة بالراديان التي تقابل زاوية جيب تمامها x .

لإيجاد مشتق التابع $y = \arccos x$ حيث $y \in [0, \pi]$ ، أي إيجاد y'_x نشتق العلاقة $x = \cos y$ بالنسبة لـ x فنجد :

$$1 = -\sin y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{+\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

الجذر $\sqrt{1-\cos^2 y}$ موجب عندما $0 < y < \pi$. إذن

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

عوضنا $x = \cos y$

إذن :

$$\left(\cos^{-1}(x)\right)' = (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وإذا كانت الزاوية $u(x)$ ، فيكون :

$$(\cos^{-1} u)' = (\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

مثال ٢١ : أوجد مشتق التابع :

$$y = \arccos \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\frac{-1}{4\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{-1}{\frac{4\sqrt{x}}{2}\sqrt{4-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$

جـ – مشتق التابع العكسي لتابع الظل $y = \text{arc tg } x$ أو $y = tg^{-1} x$

لنفرض لدينا التابع $x = tg\, y$. هذا التابع معرف من أجل $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

عندئذ تكون $-1 \le x \le 1$ ، حيث يكون لكل قيمة لـ y ضمن هذا المجال قيمة وحيدة لـ x ، أي أن :

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \exists\, x \;:\; x = tg\, y < \infty$$

إن التابع العكسي للتابع $x = tg\, y$ هو القوس y مقدرة بالراديان التي ظلها x ونرمز له بـ

$$y = tg^{-1} x \quad \text{أو} \quad y = \text{arc tg } x$$

لإيجاد مشتق التابع $y = \text{arc tg } x$ ، نشتق التابع $x = tg\, y$ بالنسبة لـ x فنجد :

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = \left(1 + tg^2 y\right) \cdot y'$$

ومنه

$$y' = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

وإذا كانت الزاوية $u(x)$ فإن :

$$(\text{arc tg } u)' = (tg^{-1} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

مثال ٢٢ : أوجد مشتق التابع $y = \text{arc tg } (2x)$

$$y' = \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{2}{1 + 4x}$$

د – مشتق التابع العكسي لتابع ظل تمام الزاوية أي $y = \text{arc cotg } x$ أو $y = cotg^{-1} x$

لنفرض لدينا التابع $x = \text{cotg } y$. هذا التابع معرف من أجل $y \in (0, \pi)$ حيث $-1 \le x \le 1$. ضمن المجال $(0, \pi)$ يكون لكل قيمة معينة لـ y قيمة وحيدة لـ x . عندئذ $-\infty < x < \infty$ – أي أن $-\infty < \text{cotg } y < +\infty$ –

التابع العكسي للتابع $x = \text{cotg } y$ هو القوس y مقدرة بالراديان التي ظل تمامها x ويكتب بالشكل :

$y = \cot g^{-1} x$ او $y = \text{arc cotg } x$

نشتق العلاقة $x = \cot g\, y$ بالنسبة لـ x

$$1 = -\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' \qquad \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\sin^2 y}$$

$$1 = -\left(1 + \cot g^2 y\right) \quad y'$$

ومنه $$y' = \frac{-1}{1 + \cot g^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

إذن $$\left(\cot g^{-1} x\right)' = \left(\text{arc cotg } x\right)' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

وإذا كانت لدينا الزاوية u(x) يكون عندئذ :

$$\left(\cot g\, u\right)' = \left(\text{arc cotg } u\right)' = \frac{-u'}{1 + u^2}$$

مثال ٢٣ : أوجد مشتق التابع $y = \cot g^{-1} \frac{x}{3}$

لدينا $u = \frac{x}{3}$

$$y' = \frac{-u'}{1 + u^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{x^2}{9}} = \frac{-1}{3\left(\frac{9 + x^2}{9}\right)} = \frac{-3}{9 + x^2}$$

١٢ - مشتق التابع اللوغاريتمي :

الشكل العام للتابع اللوغاريتمي هو $y = \log x$ حيث $x > 0$.

لإيجاد مشتق التابع اللوغاريتمي نميز نوعين منه هما :

أ - التابع اللوغاريتمي ذي الأساس الطبيعي e ونرمز له بـ $\mathbf{Ln\ x = \log_e x}$

لإيجاد مشتق التابع $y = \ln x$ نعطي x تزايداً صغيراً Δx $(\Delta x \neq 0)$ ، فيأخذ التابع y تزايداً صغيراً Δy ويكون :

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$$

ومنه $$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$$

وحسب خواص اللوغاريتم ، نكتب :

$$\Delta y = \text{Ln}\frac{x + \Delta x}{x} = \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

بتقسيم الطرفين على Δx $(0 \neq \Delta x)$ ، نجد أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

نضرب الطرف الثاني بـ x ونقسم على x نجد :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

وحسب خواص اللوغاريتم (خاصة $\text{Ln } x^n = n \text{ Ln } x$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

بأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ ، نجد :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

نعلم من النهايات أن :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \text{Ln } e = 1$$

إذن :

$$y'_x = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

إذن مشتق التابع اللوغاريتمي $y = \text{Ln } x$ هو $y' = \frac{1}{x}$. وإذا أخذنا ما تحت اللوغاريتم تابعاً لـ x مثل f(x) ، أي :

$$y = \mathrm{Ln}\,[f(x)]$$

هو $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ... نستطيع القول أن مشتق التابع

... مشتق اللوغاريتم مقسوماً على ... اللوغاريتم .

... التابع اللوغاريتمي في الأساس ... حيث a عدد موجب لايساوي الواحد ، هو من الشكل العام : $y = \log_a x$. نستطيع حساب مشتق التابع $y = \log_a x$ اعتماداً على تعريف اللوغاريتم . أي :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للعلاقة السابقة نجد :

$$\mathrm{Ln}\, x = y\, \mathrm{Ln}\, a$$

باشتقاق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة لـ x ، نجد :

$$\frac{1}{x} = y'_x\, \mathrm{Ln}\, a$$

ومنه :

$$y'_x = \frac{1}{x \cdot \mathrm{Ln}\, a}$$

مثال ٢٤ : أوجد مشتق التابع : $y = \mathrm{Log}_a (3x^2 + 2x)$

... : $u = 3x^2 + 2$ وبالتالي فإن $u' = 6x + 2$

... مشتق ... اللوغاريتمي :

... مشتق التابع الأسي :

... العام للتابع الأسي هو a^x ... حيث a عدد موجب ...

... التابع معرف من أجل ...

... صيغة التابع ...

...

$y' = 1 \cdot \text{Ln}\, a$

ومنه :

$y' = y \,\text{Ln}\, a = a^x \,.\, \text{Ln}\, a$

وإذا أخذنا التابع $y = a^u$ حيث $u = u(x)$ نكون :

$y' = (a^u)' = u' \,.\, a^u \,\text{Ln}\, a$

إن أبسط التوابع الأسية هو التابع $y = e^x$ ، ومشتقه

وإذا كان التابع $y = e^u$ **حيث** $u = u(x)$ **فإن**

$y' = u' \,.\, e^u$

مثال ٢٥ : أوجد مشتق التابع

$y = 3^{x^2}$

في هذا التابع لدينا :

$u' = 2x \Leftarrow u = x^2 \;,\; a = 3$

بتطبيق القاعدة :

$y' = u' a^u \,.\, \text{Ln}\, a$

$y' = 2x \,.\, 3^{x^2} \,.\, \text{Ln}\, 3$

٤ - الاشتقاق اللوغاريتمي :

يفضّل استخدام الاشتقاق اللوغاريتمي في الحالتين التاليتين :

أ - إذا كان التابع $y = f(x)$ على شكل جداء عدة توابع ، يمكن أن نشتق التابع بطريقة الاشتقاق اللوغاريتمي ، لذلك نأخذ لوغاريتم التابع $y = f(x)$ كما يلي :

$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, f(x)$

نشتق الطرفين نجد :

$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

ومنه :

$y' = y \,\frac{f'(x)}{f(x)}$

مثال ٢٦ : أوجد مشتق التابع :

$y = (x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4$

نأخذ لوغاريتم الطرفين نجد :

$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\,[(x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4]$

$\text{Ln}\, y = 3 \,\text{Ln}\,(x^2 + 2) + 4 \,\text{Ln}\,(1 - x^3)$

نشتق الطرفين :

$\frac{y'}{y} = \frac{6x}{x^2 + 2} - \frac{12x^2}{1 - x^3}$

منه :

$$y' = (x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4 \left[\frac{6x}{x^2 + 2} - \frac{12x^2}{1 - x^3} \right]$$

$$y' = 6x(x^2 + 2)^2 (1 - x^3)^4 - 12x^2 (x^2 + 2) (1 - x^3)^3$$

يمكن إيجاد هذا المشتق اعتماداً على قاعدة مشتق جداء تابعين .

ب – إذا كان التابع f(x) عبارة عن تابع كسري في بسطه ومقامه جداء عدة توابع أي من الشكل :

$$f(x) = \frac{h_1(x) \cdot h_2(x) \ldots\ldots h_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \ldots\ldots g_n(x)}$$

نأخذ لوغاريتم طرفي هذه العلاقة ونشتق الناتج بالطرق المعروفة .

١٦ – المشتقات المتتالية :

ليكن $y = f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً ويقبل الاشتقاق على المجال $I \subseteq R$. إن مشتق التابع $y = f(x)$ هو y' ، أو $f'(x)$ ، أو $\frac{dy}{dx}$. إن هذا المشتق ما هو إلا تابع جديد . إذا كان يقبل الاشتقاق ، نقوم باشتقاقه فنحصل على المشتق الثاني للتابع الأساسي $y = f(x)$. وهو $(y')'$ أو $(f'(x))'$ أو $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. ويرمز للمشتق الثاني بأحد الرموز التالية :

$$y'' \text{ أو } f''(x) \text{ أو } \frac{d^2y}{dx^2}$$

وللحصول على المشتق الثالث ننطلق من المشتق الثاني . فإذا كان y'' أو $f''(x)$ يقبل الاشتقاق مرة أخرى ، نقوم باشتقاقه فنحصل على المشتق الثالث y''' أو $f'''(x)$ أو $\frac{d^3y}{dx^3}$.

وهكذا يمكننا متابعة الاشتقاق n مرة فنحصل على المشتق من المرتبة n والذي يسمى المشتق النوني للتابع $y = f(x)$. وذلك بشرط أن يكون المشتق من المرتبة $(n - 1)$

موجوداً ويقبل الاشتقاق . نرمز للمشتق النوني بأحد الرموز $y^{(n)}$ أو $f^{(n)}(x)$ أو $\frac{d^n y}{dx^n}$.

مثال ٢٧ :

أوجد المشتق من المرتبة الخامسة للتابع $y = Ln|x|$

إن المشتق الأول هو $y' = \frac{1}{x}$

والمشتق الثاني هو $y'' = \frac{-1}{x^2}$

المشتق الثالث هو $y''' = \frac{2}{x^3}$

المشتق الرابع هو $y^{(4)} = \frac{-6}{x^4}$

المشتق الخامس $y^{(5)} = \frac{24}{x^5}$

تمارين عامة

١- أوجد كلا من $\frac{dy}{dx}$ ، y' و $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، y'' للتوابع التالية :

1) $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5$ ، 2) $y = 5x^3 - 3x$

3) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 3$ ، 4) $y = x^3(x^3 - 1)$

5) $y = (3x - 1)(2x + 5)$ ، 6) $y = (x^2 - 2)(x^3 + 3)$

٢- أوجد المستقيم المماس للمنحني :

$y = 2x^2 - 4x - 3$ في النقطة $(1,3)$

٣- أوجد نقط المنحني : $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ التي يكون المماس عندها موازيا للمحور ox .

٤- أوجد مشتقات التوابع التالية :

1) $y = (x+1)^2(x^2+1)^3$ ، 2) $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

3) $y = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$ ، 4) $y = \left(x^2 - x\right)^{-2}$

5) $y = t^2(t + 1)^{-1}$ ، 6) $y = (t^2 + 3t)^3$

٥- أوجد مشتقات التوابع التالية :

1) $x^2 + y^2 = 1$ ، 2) $y^2 = \frac{x - 1}{x + 1}$

3) $x^2 + xy = 2$ ، 4) $x^2y + xy^2 = 6$

5) $y^2 = x^3$ ، 6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

7) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ، 8) $x^2 = \frac{x - y}{x + y}$

9) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ ،

10) $(x + y)^3 + (x - y)^3 = x^4 + y^4$

٦- أوجد $\frac{dy}{dx}$ في التوابع التالية :

1) $y = tg^2(\cos x)$ ، 2) $y = tg(3x^2)$

3) $y = \sqrt{\cos x}$ ، 4) $y = \sin^2 x - tg^2 x$

5) $y = 2\sin^3 3x$ ، 6) $y = \cos^3 \frac{x}{3} - 3\cos \frac{x}{3}$

7) $x^2 = \sin y + \sin^2 y$ ؛ 8) $y = 2\sin \frac{x}{2} - x\cos \frac{x}{2}$

9) $y = \frac{1}{3}\sin^3 5x - \sin 5x$ ، 10) $y = x + tg(x \cdot y) = o$

11) $y = \frac{1}{3} tg \frac{x}{3}$ ، 12) $y = \sin^{-1} \frac{x}{2}$

13) $y = \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1}$ ، 14) $y = \cot g^{-1} \frac{2}{x} + tg^{-1} \frac{x}{2}$

15) $y = x \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

16) $y = \text{arc}\,tg \frac{x-1}{x+1}$

17) $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\ \arcsin x$

18) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

٧- أوجد $\frac{dy}{dx}$ في التوابع التالية :

1) $y = Ln(\cos x)$ ؛ 2) $y = (Ln\, x)^3$

2) $y = Ln(x^2 + 2x)$ ، 4) $y = Ln(3x\sqrt{x+2})$

5) $y = Ln(tg x + \sin x)$ ، 6) $y = \frac{1}{2} Ln \frac{1+x}{1-x}$

7) $y = x^3 Ln(2x)$ ، 8) $y = x Ln\, x - x$

9) $y = Ln(x^2 + 4) - x\, tg^{-1} \frac{x}{2}$ ؛ 10) $y = \frac{1}{3} Ln \frac{x^3}{1+x^3}$

11) $y = x\,(\mathrm{Ln}\,x)^3$

12) $y = \mathrm{Ln}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,(1 + x^2) - \frac{\mathrm{tg}^{-1}\,x}{x}$

13) $y = \mathrm{Ln}\,(\mathrm{Ln}\,x)$

14) $y = x\left[\sin(\mathrm{Ln}\,x) + \cos(\mathrm{Ln}\,x)\right]$

15) $y = x\,\mathrm{Ln}\,(a^2 + x^2) - 2x + 2a\,\mathrm{tg}^{-1}\,\frac{x}{a}$

الفصـــل السابـــع

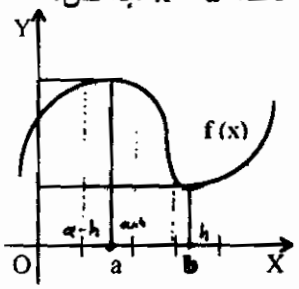
بعـــض تطبيقـــات مشتقـــات التوابـع

أولاً – تطبيقات المشتقات في دراسة القيم القصوى (العظمى والصغرى) للتابع :

تعريف ١ : نقول أن التابع f(x) يبلغ قيمة عظمى محلية في النقطة x = a ،إذا كان:

$$f(a) \geq f(a \pm h)$$

من أجل جميع قيم h (الموجبة والسالبة) الصغيرة بقدر كاف .



الشكل (١)

كما نقول أن التابع f(x) يبلغ قيمة صغرى محلية في النقطة x = b ، إذا كان

$$f(b) \leq f(b \pm h)$$

من أجل جميع قيم h الصغيرة بقدر كاف .

تعريف ٢ : نقول أن التابع f(x) يبلغ قيمة عظمى مطلقة في النقطة x = a ، إذا كان

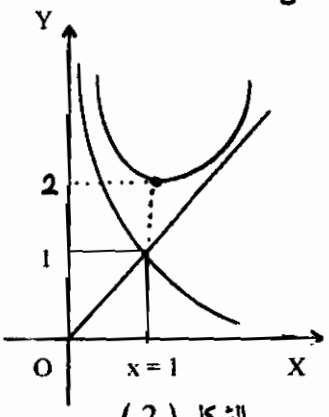
$$f(a) \geq f(x)$$

وذلك مهما تكن x من منطقة تعريف التابع f(x) .

كما يبلغ التابع قيمة صغرى مطلقة في النقطة x = b إذا كان

$$f(b) \leq f(x)$$

مهما تكن x من منطقة تعريف التابع f(x) .



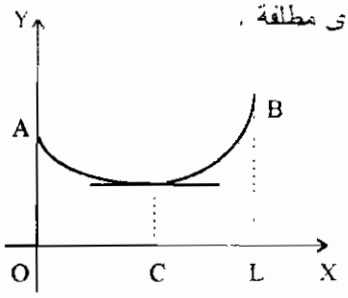
الشكل (2)

مثال ١ : للتابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ قيمة صغرى محلية في النقطة x = 1 لأن f (1) = 2

ولأن $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

من أجل جميع قيم x القريبة من 1 . ولكن هذه

المتراجحة ، بينما x هي عدد من أجل القيم الممكنة لـ x . وفي الحقيقة ليس للتابع $f(x)$ أية x أية قيمة عظمى مطلقة أو قيمة صغرى مطلقة .



الشكل (3)

مثال ٢ : التابع $y = f(x)$ في الشكل (3) المعرف على المجال $[o , L]$. نلاحظ أن للتابع $f(x)$ قيمة صغرى محلية في النقطة $x = c$ ، وهي قيمة صغرى مطلقة . كما أن له قيمتين أعظميتين محليتين في A , B . وأما قيمته الكبرى في B فهي محلية ومطلقة في آن واحد .

نظرية ١ : إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المجال I من R فإن هذا التابع يكون متزايداً في النقطة c من I ، إذا كان مشتقه في تلك النقطة موجباً ، أي إذا كان $f'(c) > o$ ويكون متناقصاً فيها إذا كانت $f'(c) < o$.

تنتج هذه النظرية من تعريف التوابع المتزايدة والمتناقصة الواردة في الفصل الخامس ومن المعنى الهندسي للمشتق في الفصل السادس .

نظرية ٢ : إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المجال I من R وكان له قيمة عظمى (أو صغرى) محلية في النقطة $x = c$ حيث $c \in I$ ، وكان مشتقه $f'(x)$ موجوداً ومحدوداً في c ، عندئذٍ يكون $f'(c) = o$.

البرهان : استناداً إلى النظرية (١) يكون $f(x)$ تابعاً متزايداً في c إذا كان $f'(x)$ موجباً ويكون متناقصاً في c إذا كان $f'(x)$ سالباً،ولكن $f(x)$ ليس متزايداً ولامتناقصاً في c لأن له قيمة عظمى أو صغرى محلية في c حسب الفرض . لذلك لايمكن أن يكون $f'(c)$ موجباً ولاسالبا . إذن $f'(c) = o$. وهو المطلوب .

ملاحظة ١ : إن عكس هذه النظرية ليس صحيحاً دائماً ، لأنه ليس بالضروري أن يكون لـ $f(x)$ قيمة عظمى (أو صغرى) في أية نقطة ينعدم فيها مشتقه .

ملاحظة ٢ : قد توجد قيمة عظمى أو صغرى في نقطة ما مثل $x = c$ ولايوجد فيها مشتق . وكذلك في طرفي مجال تعريف التابع .

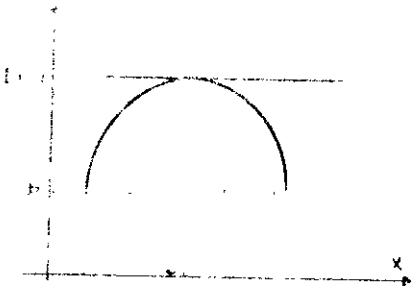
نظرية (رول) ٣ : (Michel Rolle 1652 - 1719)

إذا كان f(x) معرفاً ومستمراً في المجال المغلق [a , b] ويقبل الاشتقاق في المجال المفتوح (a , b) ، وكانت قيمتاه عند طرفي المجال متساويتين أي f(a) = f(b) ، عندئذ يوجد نقطة واحدة على الأقل مثل c من المجال [a , b] يكون فيها $f'(c) = 0$ أي يكون $f'(c) = 0$ من أجل $a < c < b$.

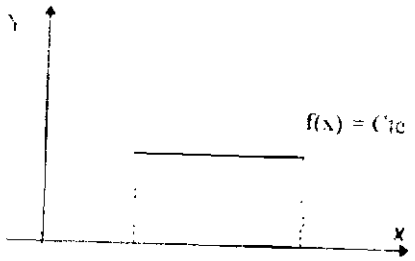
البرهان : سنميّز الحالتين التاليتين :

١- إذا كان f(x) ثابتاً أي كان f(x) = Cte فإن $f'(x) = 0$ من أجل جميع قيم المجال [a , b] .

٢- أما إذا لم يكن f(x) ثابتاً ، وحيث أن f(x) مستمر على المجال [a , b] حسب نص النظرية ، فإن f(x) يبلغ في [a , b] قيمة عظمى



الشكل (5)



الشكل (4)

نرمز لها بـ $M = \max f(x)$ أو قيمة صغرى $m = \min f(x)$ ، عندئذ ومن أجل أي نقطة $x \in [a , b]$ فإن $m \le f(x) \le M$.

وبما أن f(x) ليس ثابتاً في المجال المذكور لذلك فإننا سنعتبر أن $m \neq M$. ومن الفرض f(a) = f(b) ، إذن يجب أن يبلغ f(x) قيمته M أو m في نقطة داخلية في المجال [a , b] ، [يجب ألا يبلغ التابع f(x) القيمة M أو m في طرفي المجال ، لأنه سيكون m = M ، وهذا مناقض للفرض] .

لنفرض لدينا قيمة عظمى M في النقطة الداخلية c ، أي $f(c) = M$ كما هو موضح في الشكل (5) . بما أن $f(c)$ قيمة عظمى للتابع $f(x)$ فإن $f(x)-f(c) \leq o$ من أجل كل $x \in [a , b]$.

فإذا كان $x > c$ ، فإن $x - c \geq o$ وبالتالي فإن النسبة :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq o$$

وبأخذ النهاية :

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq o \qquad (1)$$

وإذا كان $x < c$ ، فإن $x - c > o$ و $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq o$ ، وبأخذ النهاية :

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq o \qquad (2)$$

وبما أن $f(x)$ مستمر فرضاً ، ويقبل الاشتقاق في كل نقطة داخلية من المجال $[a,b]$ ، وبالأخص في c ، فإنه يكون :

$$f'_+(c) = f'(c) = f'(c)$$

ولكن من المتراجحتين (1) , (2) ، لايمكن أن يتساوى المشتقان الأيمن والأيسر ، إلا إذا كانا مساويين للصفر . إذن لابد وأن يكون $f'(c) = o$ ، وهو المطلوب .

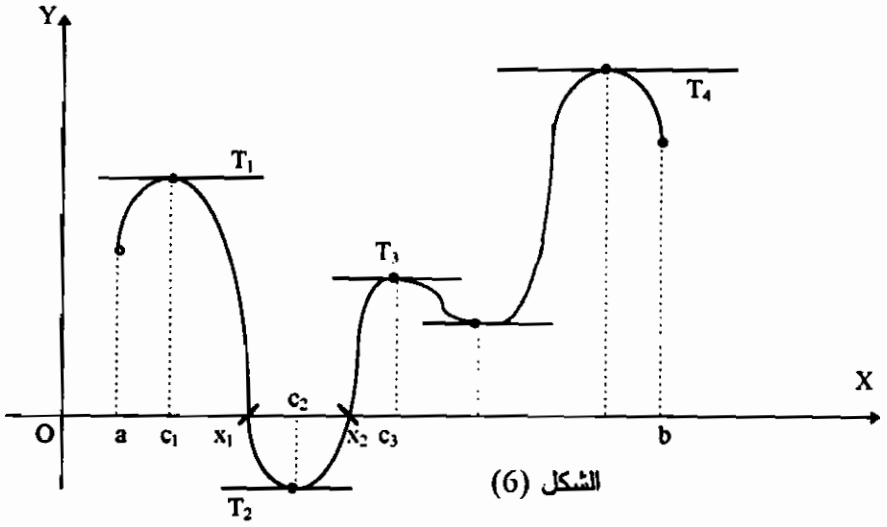
[يمكن البرهان بنفس الطريقة في حالة وجود قيمة صغرى m للتابع في $[a , b]$.

المعنى الهندسي لنظرية رول : نعلم أن قيمة المشتق في نقطة هي ميل المماس فيها ، وبما أن $f'(c) = o$. فإنه يوجد مماس T للمنحني $y = f(x)$ ، ميله يساوي الصفر ، فهو يوازي محور السينات كما في الشكل (5) .

ملاحظات على نظرية رول :

١- يبرهن في النظرية على وجود نقطة واحدة على الأقل ، يكون من أجلها $f'(c) = o$.

وهذا يعني إمكانية وجود أكثر من نقطة ، أو عدد لانهائي من النقط . كما في التابع الموضح في الشكل (6) .



الشكل (6)

حالة خاصة لنظرية رول :

إذا كان $f(x)$ معرفاً ومستمراً على المجال $[x_1 , x_2]$ ، وقابلاً للاشتقاق على المجال المفتوح (x_1 , x_2) ، وكانت قيمتاه عند الطرفين متساويتين وتساويان الصفر ، أي إذا كانت $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ، فعندها توجد نقطة واحدة على الأقل مثل c من $[x_1 , x_2]$ بحيث يكون $f'(c) = 0$ ، وهذا يعني أنه يوجد بين كل جذرين للتابع $f(x)$ جذر واحد على الأقل للمشتق $f'(x)$.

ومن جهة أخرى ، إذا لم يكن التابع $f(x)$ ثابتاً ، فإنه يوجد له بين كل جذرين قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) واحدة على الأقل .

مثال ١ : ليكن لدينا تابع كثير الحدود

$$y = x^3 - 4x = f(x)$$

مستمر وقابل للاشتقاق من أجل جميع قيم x ، حيث $-\infty < x < \infty$ ، فإذا اخترنا القيمتين $a = -2$, $b = +2$ طرفين لمجال مغلق $[+2 , -2]$ فإننا نجد أن شروط

نظرية رول محققة ، لأن $f(-2) = f(+2) = 0$

ولذا فإنه يجب أن ينعدم المشتق $f'(x) = 3x^2 - 4$

مرة واحدة على الأقل في المجال [2 ، -2] ، وفي الحقيقة نجد أن جذري معادلة المشتق $3x^2 - 4 = 0$ هما :

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{+2\sqrt{3}}{3}$$

٢- إن نظريه رول غير صحيحة ، اذا كان $f(x)$ مستمراً على المجال (a , b) وغير مستمر في a من اليمين ، وفي b من اليسار .

٣- إن نظرية رول غير صحيحة أيضا إذا كان التابع $f(x)$ غير قابل للاشتقاق في نقطة ما من المجال المفتوح (a , b) .

مثال ٢ : التابع

$$f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right) & , \ a < x < b \\ 0 & , \ x = a = b \end{cases}$$

معرف على المجال [a , b] ، وقابل للاشتقاق في كل نقطة من المجال (a , b) ، ونقطة [illegible] $f(a)$

$$f'(x) = \frac{\quad}{(x-\quad)} \qquad (x-b)^2$$

[illegible] المجال (a,b).

مثال ٣ : التابع $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ المعرف على المجال [+1 , -1] وهو مستمر [illegible] $f(-1) = f(1) = 0$

[illegible] غير قابل للاشتقاق في النقطة $x = 0$ ، لأن :

$$f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

إذن المشتق غير موجود عند النقطة $x = 0$ ، وكذلك $f'(x)$ لا يعدم في أية نقطة من المجال $(+1 , -1)$.

نظرية التزايدات المحدودة ، أو نظرية لاغرانج

(J . L . Lagrange , 1736 - 1813)

ليكن التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[a , b]$ ، المستمر والقابل للاشتقاق في كل نقطة من المجال (a , b) . عندئذ توجد نقطة واحدة على الأقل مثل c من المجال (a , b) ، بحيث تتحقق المعادلة :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

البرهان : لنأخذ التابع المساعد :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

إن $\varphi(x)$ **يحقق جميع شروط رول** ، حيث أنه مستمر في $[a , b]$ ، وقابل للاشتقاق في (a , b) و $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ وبالتالي حسب نظرية رول ، توجد نقطة واحدة على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث يكون فيها :

$$\varphi'(c) = 0$$

[illegible] $\varphi'(c)$ ينتج لدينا مشتق $f(x)$ في النقطة [illegible] أي

[illegible]

[illegible]

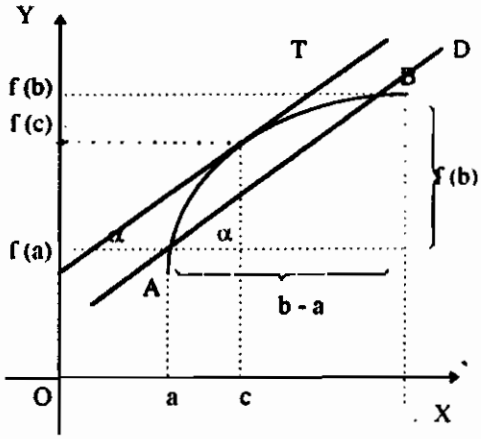
$$= \frac{f(a)}{a} \qquad f'(c)$$

التفسير الهندسي لنظرية التزايدات المحدودة

[illegible] $f(x)$ كما في الشكل (7) وليكن [illegible]

[illegible] من القوس $\overset{\frown}{AB}$

[illegible] $A(a , f(a))$ و $B(b , f(b))$



فتوجد نقطة واحدة على الأقل مثل C ، إحداثياتها (c , f(c)) ، من القوس AB يكون فيها المماس موازياً للوتر المار بالنقطتين A و B .

حيث أن ميل الوتر $\overline{AB}$ يساوي :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

الشكل (7)

نتيجة : دستور التزايدات المحدودة :

ليكن f(x) تابعاً معرفاً على مجال كيفي $I \subseteq R$ ، وقابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاطه . عندئذ يوجد من أجل كل نقطتين مختلفتين x_2 و x_1 من I , $(x_1 < x_2)$ ، نقطة ما مثل c حيث $x_1 < c < x_2$ وتحقق العلاقة :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$$

تسمى العلاقة الأخيرة دستور التزايدات المحدودة .

يتم البرهان بالتطبيق المباشر لنظرية التزايدات المحدودة .

ملاحظة : من السهل أن نرى أن كل نقطة مثل c محصورة بين x_1 و x_2 يمكن كتابتها بالشكل :

$$c = x_1 + \theta\ (x_2 - x_1) = x_1 + \theta\ h$$

حيث $0 < \theta < 1$ وأن $h = x_2 - x_1$.

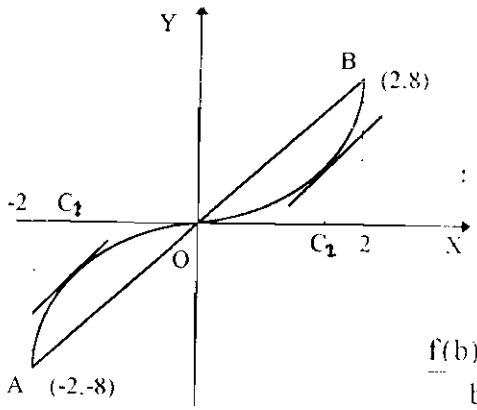
نستطيع بفضل هذا التمثيل للنقطة c ، كتابة دستور التزايدات المحدودة على النحو التالي

$$f(x + h) - f(x) = h\ .\ f'(x + \theta\ h)$$

حيث $0 < \theta < 1$ و h مقدار موجب صغير بمقدار كافٍ .

مثال ٤ : ليكن $f(x) = x^3$ ، معرف على المجال [2+ , 2-] أي a = 2- و b = 2+

عندئذ نجد أن :



الشكل (8)

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(c) = 3c^2$$

وبما أن قيمتي التابع عند الطرفين تساويان :

$$f(b) = 2^3 = 8$$

$$f(a) = (-2)^3 = -8$$

يكون لدينا

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{8 - (-8)}{2 - (-2)} = \frac{16}{4} = 4$$

وبما أن $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

فإن $3c^2 = 4$

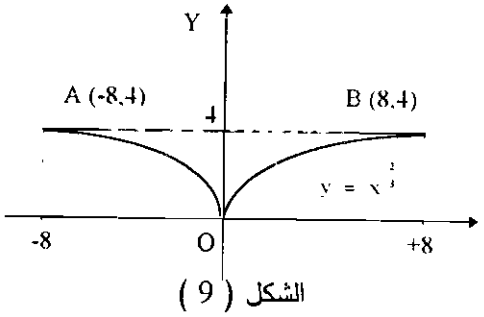
ومنه نستنتج أنه يوجد قيمتان لـ c بين a و b هما

$$C_1 = \frac{-2}{3}\sqrt{3} \quad , \quad C_2 = +\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

يكون المماس للمنحني $y = x^3$ عندهما موازياً للوتر المار بالنقطتين A(-2,-8) ، B(2 , 8) .

مثال ٥ : ليكن التابع $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ معرف على المجال [8+ , 8-] أي

$a = -8$ و $b = +8$ لنحسب المشتق :



الشكل (9)

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

إن هذا المشتق موجود في كل نقطة من المجال [8+ , 8-] ما عدا النقطة $x = o$

لنحسب نسبة التزايدات المحددة :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(8)^{\frac{2}{3}} - (-8)^{\frac{2}{3}}}{8 - (-8)} = \frac{4 - 4}{16} = o$$

في حين نجد أن :

$$f'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$$

المشتق لايساوي الصفر مهما كانت $c \in [-8 \, . \, +8]$

إن سبب عدم تحقق النظرية هنا ، هو عدم وجـود المشـتق f' فـي $x = 0$. كمـا هـو موضح في الشكل (9) .

نظرية التزايدات المحددة المعممة : أو نظرية كوشي ٥ :

إذا كان $f(x)$, $g(x)$ تابعين مستمرين على المجـال المغلـق $[a \, , \, b]$ ولهمـا مشتقات محدودة $f'(x)$, $g'(x)$ حيث $g'(x) \neq 0$. عندئـذ توجـد نقطـة واحـدة على الأقل مثل c حيث $c \in [a \, , \, b]$ ، تتحقق عندها المعادلة :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

البرهان : بما أن $g'(x) \neq 0$ ، من أجل كل $x \in (a \, , \, b)$ ، فيكون $g(b)-g(a) \neq 0$ [لأن $g(x)$ يحقق جميع شروط نظرية رول] .

لنفرض $$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ولنعرف التابع المساعد $\varphi(x)$ بالعلاقة :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - A\left[g(x) - g(a)\right]$$

إن $\varphi(x)$ مستمر على المجال $[a \, , \, b]$ وقابل للاشتقاق في كل نقطة $x \in (a \, , \, b)$

ويحقق الشرط $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

وحسب نظرية رول ، توجد نقطة واحدة على الأقل $c \in (a \, , \, b)$

يتحقق فيها : $\varphi'(c) = 0$

وبما أن :

$$\varphi'(x) = f'(x) - A\, g'(x)$$

بالتعويض نجد :

$$\varphi'(c) = f'(c) - A\, g'(c) = 0$$

عندئذ يكون :

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f\,(c)}{g'(c)}$$

وهو المطلوب .

ثانياً – تطبيقات المشتقات في إزالة عدم التعيين :

يستفاد من المشتقات في إزالة حالات عدم التعيين التي من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

أو $(\infty - \infty)$ أو 1^{∞} أو 0^{0} أو ∞^{0} أو $0 . \infty$

أ – إزالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

تعريف : لتكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعين معرفين في نقطة ما a أو في أي جوار حولها.

لنفرض أن $f(a) = g(a) = 0$ ، وأن $g(x) \neq 0$ عندئذ يُمثل التابع $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ في النقطة $x = a$.

تُعتبر النقطة a نقطة انقطاع للتابع $\phi(x)$. ولكن إذا وجدت النهاية $\lim_{x \to a} \phi(x)$ ، عندئذ تُعتبر النقطة a مغزولة الانقطاع .

لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ ، تعتمد على قاعدة أوبيتال المعطاة في النظرية التالية :

نظرية أوبيتال (G . F . Hospi tal , 1661 - 1704) :

ليكن $f(x)$, $g(x)$ تابعين يحققان الشروط التالية :

١- معرفان ومستمران في النقطة a وفي أي جوار قريب لها .

٢- $f(a) = g(a) = 0$

٣- يقبلان الاشتقاق في كل نقطة على الأقل $x \neq a$ و $g'(a) \neq 0$ عندئذ :

إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة ، فإن النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ تكون موجودة وتكون هاتان النهايتان متساويتين . أي يكون لدينا :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (1)$$

البرهان :

لنأخذ المجال [a ، x] ، ولنطبق نظرية كوشي على التابعين f(x) و g(x) فنجد أن :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

حيث $a < c < x$ وذلك بفرض $a < x$ ،

وبما أن $f(a) = g(a) = 0$ ، إذن :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$$

وحسب الفرض فإن النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ موجودة .

وبالتالي تكون النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$ موجودة أيضاً .

لأنه عندما $x \to a$ فإن $c \to a$ أيضاً .

من (2) نجد أن النهاية

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

موجودة أيضاً وتساوي A إذن :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نتيجة هامة :

لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ ، نأخذ النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ، ويمكن تطبيقها أكثر من مرة على التابع نفسه إذا كان المشتقان $f'(x)$ و $g'(x)$ يحققان شروط النظرية .

مثال ٦ : أوجد النهاية : $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

لنفرض $f(x) = x - \sin x$ و $g(x) = x^3$

إن التابعين $f(x)$ و $g(x)$ يحققان شروط نظرية أوبيتال في جوار الصفر $(a = 0)$.

بتطبيق نظرية أوبيتال ثلاث مرات ، نجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{+ \sin x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

مثال ٧ : أوجد النهاية :

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$$

بتطبيق قاعدة أوبيتال نجد :

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \lim_{x\to a} \frac{n x^{n-1}}{m x^{m-1}} = \frac{n}{m} \cdot a^{n-m}$$

ملاحظة ١ : نلفت انتباه القارئ ، إلى أن النهاية : $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

قد لاتكون موجودة ، في حين أن النهاية : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

تكون موجودة .

بكلام آخر ، إن وجود النهاية $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ هو شرط لازم لوجود النهاية

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال ٩ : النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

موجودة ، لأن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

وإذا طبقنا قاعدة أوبيتال ، نجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

النهاية الأخيرة غير موجودة .

ملاحظة ٢ : لقد فرضنا أن a نقطة محدودة (عند برهان النظرية) ، ولكن نظرية أوبيتال تبقى صحيحة حتى ولو كانت a نقطة لانهائية ($a=\infty$) **في الحقيقة إذا فرضنا** في العلاقة (1) أن $x=\frac{1}{t}$ عندما $x\to\infty$ فإن $t\to 0$ ، إذن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ١٠ : أوجد النهاية :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

ملاحظة ٣ : إن نظرية أوبيتال صحيحة حتى لو كانت النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة ولانهائية (يمكن البرهان بنفس طريقة برهان النظرية) .

ملاحظة ٤ : إذا كانت المشتقات المتتالية لـ $f(x)$ و $g(x)$ تحقق شروط النظرية .

عندئذٍ يكون :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots\cdots$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

هذا يعني أن قاعدة أوبيتال يمكن تطبيقها أكثر من مرة ، حتى نتمكن من الحصول على نتيجة محددة للنهاية :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال ١١ :

$$\lim_{x\to o}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to o}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to o}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to o}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

ب – إزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

تعريف : ليكن f(x) و g(x) تابعين معرفين في جوار ما للنقطة x=a و $g(x)\neq o$، ولكن $f(a) = g(a) = \infty$ عندئذ نقول أن العلاقة : $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

هي عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عند النقطة a . تسمى النقطة a نقطة انقطاع للتابع $\phi(x)$ فإذا كانت النهاية $\lim_{x\to a}\phi(x)$ موجودة ، عندئذ تسمى النقطة a معزولة الانقطاع .

نستطيع تطبيق قاعدة أوبيتال لإزالة هذه الحالة من عدم التعيين وذلك لأننا نستطيع تحويلها إلى الشكل $\frac{o}{o}$ بكتابة :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{o}{o}$$

مثال ١٢ : بفرض $x > o$ ، أوجد النهاية : $\lim_{x \to \infty} \frac{Ln\, x}{x^n}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Ln\, x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n x^n} = \frac{1}{n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = o$$

من هذا المثال نستنتج أنه عندما $x \to \infty$ ، فإن التابع $Ln\, x$ يزداد بسرعة أبطء من كل تابع قوة لـ x مثل x^n حيث $x > o$.

مثال ١٣ : بفرض $x > o$ ، أوجد النهاية $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ بتطبيق قاعدة أوبيتال m مرة نجد:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-(m+1))\, x^{n-m}}{e^x} = o$$

لأنه عندما يكون n ثابتاً فإن تكرار تطبيق القاعدة m مرة بجعل الأس $n - m < o$ وبالتالي فإن نهاية الكسر الأخير تساوي الصفر .

يدل هذا المثال ، على أنه عندما $x \to \infty$ ، فإن x^n تزداد بسرعة أقل من سرعة ازدياد e^x .

جـ - حالات عدم التعيين من الأشكال 1^∞ ، ∞^o ، o^o ، $\infty - \infty$ ، $o \cdot \infty$ يمكن إرجاع هذه الحالات إلى أحد الشكلين $\frac{o}{o}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ، وذلك بإجراء بعض العمليات الجبرية المناسبة عليها .

١- إزالة الحالة $o \cdot \infty$:

إذا كان $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ ، وكان $f(a) = o$ و $g(a) = \infty$ أي يكون لدينا الحالة $o \cdot \infty$.

فإذا كان $g(x) \neq o$ عندما $x \neq a$ ، فإنه يمكننا كتابة التابع $\phi(x)$ على الشكل :

$$\phi(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

وهذا يؤدي إلى الحالة $\frac{0}{0}$ عندما $x = a$ وتطبق عليه قاعدة أوبيتال أصولا . وعندما يكون $f(x) \neq 0$ عندما $x \neq a$ ، يمكننا كتابته على الشكل :

$$\phi(x) = f(x)\ g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

وهذا يؤدي إلى الحالة $\frac{\infty}{\infty}$ والتي يمكن معالجتها كما سبق .

٢ - إزالة عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$:

ليكن لدينا التابع $\phi(x) = f(x) - g(x)$ ، وإنه عندما $x = a$ ، يكون $f(a) = \infty$ و $g(a) = \infty$ أي لدينا الحالة $\infty - \infty$.

عندما يكون $x \neq a$ ، يمكن إعادة صياغة التابع $\phi(x)$ بالشكل :

$$\phi(x) = f(x) - g(x) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\ \frac{1}{g(x)}}$$

والذي يؤدي إلى حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. والتي يمكن معالجتها كما أشرنا سابقا

مثال ١٤ : احسب النهاية : $\lim_{x \to 0} (x\ \ln x)$

$$\lim_{x \to 0} (x\ \ln x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

٢ - معالجة الحالات : ∞^0 ، 1^∞ ، 0^∞ ، 0^0 ،

ليكن لدينا التابع $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$ ، وكان للتابعين $f(x)$ ، $g(x)$ عندما x القيمتان $f(a) = \infty$ ، $g(a) = 0$ ، فإننا نكون أمام الحالة ∞^0 . أما إذا كانت القيمتان $f(a) = 1$ ، $g(a) = \infty$ ، فإننا نكون أمام الحالة 1^∞ أما إذا كانت $f(a) = 0$ ، $g(a) = \infty$ فإننا نكون أمام الحالة 0^0 .

إذا فرضنا أن $f(x) > o$ فإنه يمكننا أخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن

$$\ln|\phi(x)| = g(x) \ln|f(x)|$$

وبالتالي يمكن كتابة $\phi(x)$ على الشكل التالي :

$$\phi(x) = e^{g(x) \ln|f(x)|} \Rightarrow \lim \phi(x) = e^{\lim g(x) \ln|f(x)|}$$

وبالتالي تتحول هذه الحالات إلى الحالة $\infty \cdot o$ والتي يمكن تحويلها إلى الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ أو إلى الشكل $\frac{o}{o}$ ، ثم تطبيق قاعدة أوبيتال على الشكل الأخير .

مثال ٩ : بفرض أن $x > o$ ، أوجد النهاية :

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot \ln x} = e^{\lim \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1}} = e^{o} = 1$$

مثال ١٠ : بفرض أن $x > o$ ، أوجد النهاية :

$$\lim_{x\to o^+} x^{x} = \lim_{x\to o} e^{x \ln x} = e^{\lim \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to o^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim_{x\to o^+} -x} = e^{-o} = \frac{1}{e^{o}} = 1$$

ملاحظة : إن قاعدة أوبيتال لاتعطينا نتيجة محددة إلا إذا كانت للنسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ نهاية محددة . وكمثال على ذلك نأخذ النهاية $\lim \frac{x + \sin x}{x}$ ، فإذا قمنا بتطبيق أوبيتال عليها نحصل على النهاية $\lim \frac{1 + \cos x}{1}$ وهذه ليست لها قيمة محددة لأن $\cos x$ يتراوح بين (-1) , (+1) والنهاية السابقة تأخذ القيم بين (o) . (2) ولكن إذا درسنا النهاية الأساسية بطريقة أخرى نجد أن :

$$\lim \frac{x + \sin x}{x} = \lim \left[1 + \frac{\sin x}{x}\right] = 1 + \lim \frac{\sin x}{x} = 1$$

ثالثاً – تطبيقات المشتقات في نشر التوابع :

يقصد بنشر تابع وضعه في شكل سلسلة قوى من الشكل $\sum_{n=o}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$ وفي هذه الحالة يسمى النشر في جوار x_o ، وهذا النشر يسمى نشر تايلور ، وتسمى السلسلة $\sum_{n=o}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$ سلسلة تايلور ، حيث أن a_n أعداد حقيقية $(n = 1,2, ...)$. وعندما نضع $x_o = o$ يكون النشر في جوار الصفر فنحصل على سلسلة القوى $\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ ، يسمى هذا النشر نشر ماكلوران والسلسلة تسمى سلسلة ماكلوران .

سلسلة تايلور – نشر تايلور للتوابع :

ليكن $f(x)$ تابعاً يمثل مجموع سلسلة القوى $\sum_{n=o}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$ في مجال تقاربها أي أنه يمكننا كتابته على الشكل :

$$f(x) = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + a_3 (x - x_o)^3 ....$$
$$.....+ a_n(x - x_o)^n + .. \qquad (1)$$

وإذا قمنا باشتقاق هذه السلسلة حداً حداً في مجال تقاربها المتناظر بالنسبة لـ x_o نجد أن :

$$f'(x)=1.a_1 + 2\, a_2(x - x_o) + 3a_3(x - x_o)^2 + \ldots + n a_n (x - x_o)^{n-1} + \ldots$$
$$f''(x)=2.1.a_2 +3.2\, a_3(x-x_o)+4\, 3a_4(x-x_o)^2 + n(n-1)a_n(x-x_o)^{n-2} +$$
$$f'''(x)= 3.2.1.a_3 +4\, 3.2\, 1.a_4(x-x_o)+ \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_o)^{n-3}$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3\,2.1\,a_n + \ldots + (n)n\ldots 3\,2.1.a_{n+1}(x - x_o)$$

نعوض $x = x_o$ في هذه المشتقات وبالتابع نحصل على :

$$f(x_o) = a_o$$
$$f'(x_o) = 1.a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f'(x_o)}{1!}$$

$$f''(x_0) = 2!\, a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x_0) = 3\,2!\, a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

إذا عوضنا في السلسلة (1) العوامل a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_{n-1} ، a_n نجد

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \quad (2)$$

تسمى هذه السلسلة سلسلة تايلور للتابع $f(x)$ ، وهي تعطي منشور $f(x)$ في جوار x_0 . وطبعاً نفترض أن التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق عدداً غير منته من المرات .

سلسلة ماكلوران – منشور ماكلوران للتوابع :

إذا عوضنا في سلسلة تايلور $x_0 = 0$ فإننا نحصل على السلسلة التالية :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (3)$$

وتسمى هذه السلسلة بسلسلة ماكلوران للتابع $f(x)$ القابل للاشتقاق عدداً غير منته من المرات .

تقارب سلسلة تايلور (أو ماكلوران) :

ان سلسلة تايلور لانهائية . إذا رمزنا بـ $S_n(x)$ لمجموع الـ n حداً الأولى وبـ $R_n(x)$ لمجموع باقي حدود السلسلة ، فإننا نجد أنه يمكننا كتابة التابع $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

من في التحليل الرياضي أن سلسلة تايلور تكون متقاربة – (أي يكون

لمجموعها نهاية محددة) إذا كانت

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

ويمكن التأكد من ذلك عند كل حالة على حدة باستخدام معايير التقارب المعروفة في التحليل الرياضي المعمق .

مثال ١ : أوجد منشور التابع e^x حسب سلسلة (ماكلوران) :

نعلم أن سلسلة ماكلوران هي

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

وبما أن : $f(x) = e^x$ فإن :

$$f(0) = e^0 = 1 \ , \ f'(0) = e^0 = 1 \ , \ f''(0) = e^0 = 1 \ \ldots f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

وإن المنشور السابق يأخذ الشكل التالي

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

وبإهمال الباقي $R_n(x)$ لأنه ينتهي الى الصفر عند تكبر n ، فإن قيمة تقريبية لـ تحسب من العلاقة :

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

وبوضع $x = 1$ ، وجعل $n = 5$ ، فقط نحصل على ان :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = 2.71828$$

وهي قيمة العدد النيبري e المعروفة .

مثال ٢ : انشر التابع $\sin x$ في جوار الصفر :

$f(x) = \sin x$; $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$; $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$; $f''(0) = 0$

$$f'''(x) = -\cos x \quad , \quad f'''(0) = -1$$

$$f''''(x) = \sin x \quad , \quad f''''(0) = 0$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

إذن سلسلة النشر :

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

مثال ٣ : نشر التابع $\cos x$ في جوار الصفر .

بما أن $\cos x = (\sin x)'$ ، إذن يمكننا الحصول على منشور $\cos x$ من اشتقاق سلسلة ماكلوران للتابع $\sin x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

مثال ٤ : انشر التابع $(1+x)^m$. إن هذا التابع هو دستور ذي الحدين لنيوتن . حيث m عدد صحيح موجب .

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots + x^m$$

يمكننا الحصول على نفس النتيجة باشتقاق التابع $(1+x)^m$ ، n مرة وا[illegible]ض في سلسلة ماكلوران .

حالات خاصة :

١- بفرض $m = \frac{1}{2}$ يكون التابع $f(x) = \sqrt{1+x}$

نعوض في السلسلة $(1+x)^m$ كل m بـ $\frac{1}{2}$ ، فنجد :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2.1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}x^n + \ldots$$

وبالتالي نجد أن :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots\ldots$$

٢ – بفرض $m = -\frac{1}{2}$ يكون $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

نعوض في دستور ذي الحدين كل m بـ $-\frac{1}{2}$ فنجد :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 +$$
$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 +$$
$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^4 + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \ldots\ldots$$

رابعاً – تطبيقات المشتقات في دراسة تغيرات التوابع :

إن دراسة مشتقات التابع ، وخاصة المشتقين الأول والثاني ، تساعدنا كثيراً في دراسة تغيرات التابع ، ومعرفة تزايده وتناقصه وقيمته العظمى ونقاط انعطافه وتحديد الخطوط المقاربة ، ثم رسم خطه البياني .

٤ - دراسة اشارات وتغيرات المشتقات .

١ - دلالة اشارة المشتق الأول $f'(x)$ أو y'

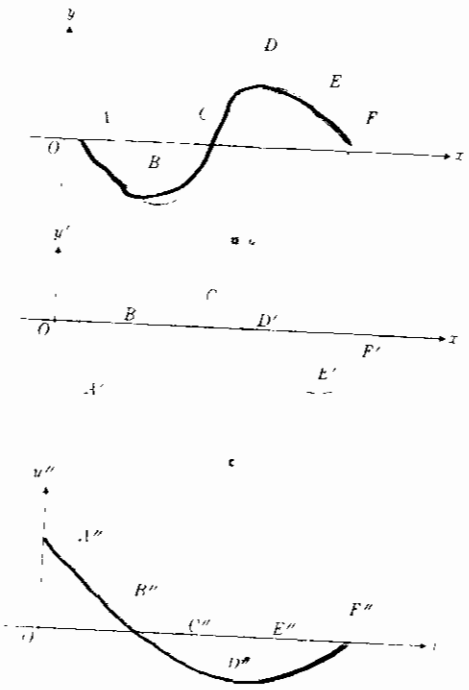
نعلم أنه إذا كان التابع $f(x)$ أو y تابعاً مستمراً في المجال I من R ، فإن قيمة مشتقه الأول في اية نقطة من مجال تعريفه تساوي ميل المماس لمنحني ذلك التابع في تلك النقطة .

فإذا كان منحني التابع $f(x)$ كما هو موضح في الشكل (a - 10) فإنه عندما ننتقل من اليسار إلى اليمين ، نلاحظ أن ميل المماس في المجال الجزئي $]A , B[$ ، يأخذ قيمة سالبة ، ويكون $f'(x) < o$ ، وهذا يدل على أن التابع يتناقص في هذا المجال . اما في المجال الجزئي $]B , C[$ فيصبح الميل موجباً ، ويكون $f'(x) > o$ ، وهذا يعني أن التابع يتزايد في هذا المجال . وكذلك نجد أن التابع يتابع تزايده في المجال $]C , D[$ ثم يعود ويتناقص في المجال $]D , E[$ .....

ونلاحظ أن المشتق الأول يغير إشارته وينعدم عندما $x = B$ ، وبذلك نحصل على قيمة صغرى محلية للتابع . وكذلك يغير إشارته وينعدم عندما $x = D$ ، وبذلك نحصل على قيمة عظمى محلية للتابع .

٢- دلالة إشارة المشتق الثاني $y'' = f''(x)$

وبما أن المشتق الأول $y' = f'(x)$ هو نفسه تابع لـ x ، فإنه يمكن دراسة تغيراته في مجال تعريفه . فإذا قمنا بأخذ مشتق $f'(x)$ أي المشتق الثاني $f''(x)$. فإن دراسة تغيرات إشارة $f''(x)$ ، تدلنا على كيفية تزايد أو تناقص $f'(x)$. فمن الشكل (b - 10) نلاحظ أن $f''(x) > o$ في المجال $]A , C[$ ويكون f' في $< o$ المجال $]C , F[$ ويكون $f''(x) = o$ في النقطة $x = c$ ، وتسمى هذه النقطة نقطة انعطاف لأن التابع $f(x)$ يغير اتجاه تقعره فيها .



الشكل (10)

٣- نقاط الانعطاف :

نسمي النقطة التي يغير فيها منحني التابع تقعره فيها من الأعلى إلى الأسفل أو بالعكس ، نقطة انعطاف مثل النقطتين E ، C على الشكل (a - 10) .

وتتميز هذه النقط بتغير إشارة d^2y / dx^2 ، ويحصل هذا التغير في الحالتين التاليتين:

١ - عندما يكون $d^2y / dx^2 = o$.

٢ - عندما يكون d^2y / dx^2 غير موجود (كأن يصبح مثلاً لانهائي في تلك النقطة)

إن الحالة الأولى موضحة على الشكل (c - 10) حيث نرى أن $y'' = o$ في النقطتين E″ , C″ لنوضح الحالة الثانية بالمثال التالي :

مثالَ : ليكن التابع $y = x^{\frac{1}{3}}$ نشتق التابع مرتين

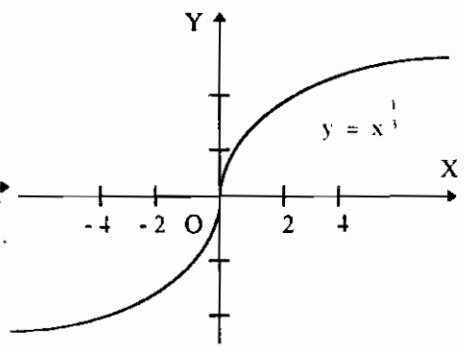
$$y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 x^{\frac{2}{3}}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9 x^{\frac{5}{3}}}$$

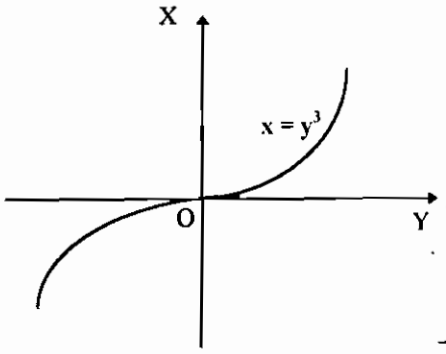
وبذلك نجد أن كلاً من y' , y'' يسعى إلى اللانهاية عندما $x \to 0$. بتعبير آخر ، إن y' موجب دوماً سواء من أجل قيم x الموجبة أو السالبة ، وبالتالي فإن المنحني متصاعد دوماً وله مماس شاقولي في النقطة (0 . 0) ، كذلك نجد أن :

$$y'' = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \frac{-2}{9y^5}$$

موجب عندما تكون x سالبة ، وسالب عندما تكون x موجبة . وبالتالي فإن النقطة (0, 0) هي نقطة انعطاف كما هو واضح على الشكل (11) .



الشكل (11)



الشكل (12)

ملاحظة : يمكن مناقشة المثال السابق بشكل أبسط ، وذلك إذا كتبنا التابع $y = x^{\frac{1}{3}}$ على الشكل $x = y^3$ عندئذ نجد :

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 \quad ; \quad \frac{d^2x}{dy^2} = 6y$$

وبالتالي يكون في النقطة (0 , 0) :

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(o,o)} = o \qquad \left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{(o,o)} = o$$

ومن الواضح أن dx / dy موجب من أجل جميع قيم y المختلفة عن الصفر وأن إشارة d^2x / dy^2 تتبع إشارة y ، وبالتالي فإنها تتغير عندما $y = o$. فلو بادلنا بين المحور X والمحور Y ، بحيث يصبح المحور X رأسياً ، والمحور Y أفقياً ، فإن المنحني يكون كما في الشكل (12) .

٤- إيجاد المستقيمات المقاربة :

غالباً ما يكون لمنحني التابع f(x) المدروس مستقيمات مقاربة ، ويتم البحث عنها عند أطراف مجال أو مجالات تعريف التابع.فإذا كان f(x) معرفاً على مجالات منفصلة ومفتوحة مثل $]a , b[$ أو $]b , +\infty[$ أو $]-\infty , a[$. فإننا نقوم بالبحث عن نهاية f(x) عند كل طرف . ولذلك فإننا سنميز بين عدة حالات هي :

الأولى : إذا كان $f(x) \xrightarrow[x \to \pm a]{} \pm \infty$ ، فإنه يكون للتابع مستقيم عمودي مقارب معادلته هي $x = a$.

الثانية : إذا كان $f(x) \xrightarrow[x \to \pm \infty]{} C$ عندئذ يكون للتابع مستقيم أفقي مقارب معادلته هي $y = c$.

الثالثة : إذا كان $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} C$ ، فإن للتابع نقطة مقاربة .

الرابعة : إذا كان $f(x) \xrightarrow[x \to \pm \infty]{} \pm \infty$ ، فهذا يعني أن للتابع اتجاه عام في المستوي ، لانستطيع تحديده إلا إذا قمنا بدراسة نهاية النسبة $\frac{f(x)}{x}$ ، والتي تمثل ميل المستقيم المقارب (إن وجد) . وهنا يمكن أن تظهر لدينا ثلاث حالات هي :

١ - إذا كانت $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to \pm \infty]{} o$ ، فهذا يعني أن للتابع f(x) مستقيم مقارب موازٍ لمحور السينات OX .

٢ - إذا كانت $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to \pm \infty]{} \pm \infty$ ، فذلك يعني أن للتابع f (x) مستقيم مقارب موازٍ لمحور العينات OY .

٢ – إذا كانت $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow m$ عندئذ سيكون للتابع $f(x)$ مستقيم مقارب ميله يساوي النهاية m .

لإيجاد معادلة المستقيم المقارب في الحالة الأخيرة ، نفترض أنها من الشكل

$$y = mx + d$$

ولحساب قيمة الفاصلة d نبحث عن نهاية المقدار $\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$ ، وعند دراسة هذه النهاية ، تظهر لدينا إحدى الحالتين التاليتين :

١ – إذا كانت $\lim [f(x) - mx] = \pm \infty$ فهذا يعني أن للتابع $f(x)$ منحني مقارب ميله m وليس له مستقيم مقارب .

٢ – إذا كانت $\lim [f(x) - mx] = d$ ، سيكون للتابع $f(x)$ مستقيم مقارب ومعادلته هي

$$y = mx + d$$

ملاحظة : إذا كان التابع $f(x)$ كسرياً من الشكل $f(x) = \frac{D(x)}{Q(x)}$ ، حيث أن كل من $D(x)$ و $Q(x)$ كثير حدود لـ x ، ولايوجد بينهما عوامل مشتركة . فإنه يمكننا أن نحصل مباشرة على المستقيمات المقاربة العمودية التي من الشكل $x = a$ ، وذلك بوضع المقام مساوياً للصفر أي أن حل المعادلة $Q(x) = o$ يعطينا المستقيمات العمودية المقاربة لـ $f(x)$ الكسري .

ولتوضيح هذه الملاحظة نأخذ التابع :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x} \qquad ; \qquad x^3 - 4x \neq o$$

فنجد أنه معرف على النقاط التي لاتعدم المقام . وإن النقاط التي تجعل المقام معدوماً هي قيم x التي تحقق المعادلة :

$$x^3 - 4x = o$$

وإن حلول هذه المعادلة هي :

$$x = o \qquad x = -2 \qquad x = +2$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x} \quad ; \quad x^3 - 4x \neq 0$$

فنجد أنه معرف على النقاط التي لا تعدم المقام . وإن النقاط التي تجعل المقام معدوما هي قيم x التي تحقق المعادلة :

$$x^3 - 4x = 0$$

وإن حلول هذه المعادلة هي :

$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = +2$$

وهذا يعني أن المستقيمات العمودية المقاربة لمنحني التابع f(x) هي المستقيمات التالية:

$$x = 0 \quad ; \quad x = -2 \quad ; \quad x = +2$$

وهي نقاط انقطاع التابع المفروض .

٤- رسم المنحني :

نستفيد من الدراسة السابقة في رسم منحني التابع $y = f(x)$ ، ويمكن تلخيص هذه الدراسة بالخطوات التالية :

١- نحدد مجال تعريف التابع تحديدا دقيقا .

٢- نحسب المشتقين الأول $\frac{dy}{dx}$ والثاني $\frac{d^2y}{dx^2}$.

٣- نوجد قيم x التي من أجلها يكون $\frac{dy}{dx}$ موجبا ، وقيم x التي يكون من أجلها سالبا. نحسب قيم y و $\frac{d^2y}{dx^2}$ في نقط الانتقال من القيم الموجبة لـ $\frac{dy}{dx}$ إلى القيم السالبة . إن هذه القيم تعطينا النقط العظمى والصغرى على منحني التابع .

٤- نوجد قيم x التي يكون من أجلها $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجبا أو سالباً . نحسب y و $\frac{dy}{dx}$ في نقط الانتقال بين القيم الموجبة لـ $\frac{d^2y}{dx^2}$ والقيم السالبة . فهذه النقط قد تعطي نقط الانعطاف لمنحني التابع f(x) .

٥- نبحث عن المستقيمات المقاربة عند كل طرف من أطراف مجالات تعريف التابع f(x) .

٦- نرسم عدداً من النقط الإضافية ، ونرسم بشكل خاص تلك النقط التي تقع بين نقط الاتصال التي سبق أن عيناها ، أو النقط التي تقع على يمينها جميعاً أو على يسارها جميعاً . كذلك ينبغي أن نتعرف على طبيعة المنحني من أجل القيم الكبيرة لـ | x | والاستفادة من المستقيمات المقاربة السابقة .

٧ - نرسم منحنياً انسيابياً يمر بتلك النقط التي وجدناها ، ما لم يوجد انقطاع في المنحني أو في ميله ، ونجعل المنحني يمر بنقطه صاعداً أو هابطاً حسبما تدلنا إشارة $\frac{dy}{dx}$ ، ونجعل تقعره نحو الأعلى أو نحو الأسفل حسب إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$.

سنوضح هذه الطريقة على بعض الأمثلة .

مثال ١ : ارسم منحني التابع $y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$

الحل : نلاحظ أولاً أن مجال تعريف التابع هو $]-\infty , +\infty[$ ، وبحساب المشتق الأول نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 9)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$$

وبوضع المشتق $\frac{dy}{dx} = 0$ نحصل على الجذور التالية :

$$x = 1 \quad , \quad x = 3$$

وهذا يعني أن المشتق $\frac{dy}{dx}$ يغير إشارته عندما $x = 1$ وكذلك عندما $x = 3$ ، لأنه ينعدم عند هاتين النقطتين ولأن الحد $(x - 1)$ ، يغير إشارته عند $x = 1$ والحد $(x - 3)$ يغير إشارته عندما $x = 3$.

وكذلك نجد أن المشتق الثاني يساوي : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2$

وهو ينعدم عند $x = 2$ ، وبالتالي فهو يغير إشارته عند $x = 2$. إذن النقطة $x = 2$ هي نقطة انعطاف . إن تغيرات إشارات $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ معطاة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x - 1		-	0	+		+		+	
x - 3		-		-		-	0	+	
$y' = (x-1)(x-3)/2$		+	0	-		-	0	+	
$y'' = x - 2$		-		-	0	+		+	

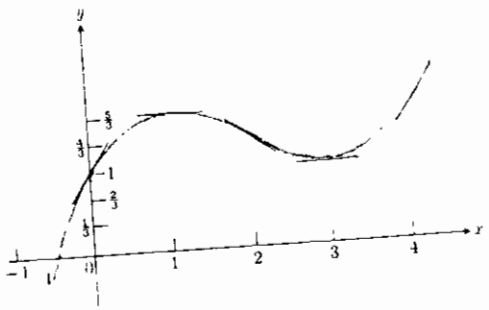
لنحسب قيم y في هذه النقاط ونقاط أخرى اضافية ، ونضع النتائج في الجدول التالي:

x	y	y′	y″	ملاحظات
-1	- 5/3	+ 4	−	صاعد ، التقعر نحو الأعلى
0	1	+ 2/3	−	صاعد ، التقعر نحو الأدنى
1	5/3	0	−	قيمة عظمى
2	4/3	- 1/2	0	هابط ، نقطة انعطاف
3	1	0	+	قيمة صغرى
4	5/3	+ 3/2	+	صاعد ، التقعر نحو الأعلى

نقوم بالبحث عن المستقيمات المقاربة فنجد أن $f(x) \longrightarrow \pm\infty$ $x \to \pm\infty$

وبدراسة النسبة $\frac{f(x)}{x}$ نجد أن $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow \pm\infty$ $x \to \pm\infty$ ، وهذا يعني أن للتابع منحن مقارب فقط في كلا الاتجاهين .

نرسم الخط البياني للتابع y فنحصل على الشكل (13) المقابل :



الشكل (13)

مثال ٢ : ارسم الخط البياني للتابع : $y = x + \frac{1}{x}$

الحل : نلاحظ أن مجال تعريف التابع هو $]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$ ، نحسب المشتقين الأول والثاني :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

من معادلة المشتق الأول $\frac{dy}{dx}$ ، نجد أن اشارته تتحدد من بسط الكسر (لأن المقام x^2 موجب دوماً) وبوضع البسط على شكل جداء حدين كما يلي :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

نجد أن المشتق $\frac{dy}{dx}$ يغير إشارته في النقطتين اللتين تعدمان البسط وهما $x = 1$ و $x = -1$.

كما نلاحظ أن المشتق الثاني $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$ غير معرف في النقطة $x = 0$ ، وهو سالب في المجال $]-\infty , 0[$ وموجب في المجال $]0 , +\infty[$. وعند البحث عن المستقيمات المقاربة نجد الحالات التالية :

$f(x) \longrightarrow \pm\infty$ ، أي للتابع $f(x)$ مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ وهو محور العينات OY .

$f(x) \longrightarrow \pm\infty$ ، وهذا يعني للتابع منحني مقارب ، أو مستقيم مقارب ، ولتحديد ذلك ندرس نهاية النسبة :

$$\lim \frac{f(x)}{x} = \lim \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = m$$

وهذا يعني أن للتابع مستقيم مقارب وميله $m = 1$ ، ولإيجاد معادلة ذلك المستقيم وحساب d في المعادلة $y = mx + d = x + d$ نبحث عن نهاية الفرق :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 = d$$

وهذا يعني أن معادلة المستقيم المقارب هي $y = x$ ، ومن جهة أخرى نلاحظ أن المنحنى متناظر بالنسبة للمبدأ O ، لأنه إذا بدلنا كل x بـ $(-x)$ نحصل على $[-f(x)]$ لذلك يكفي أن ندرس تحولات الفرع الأول ثم نأخذ نظيره في الربع الثالث . وكان من الأسهل لنا أن نقوم بدراسة هذا التابع كمجموع تابعين هما :

$$y_1 = \frac{1}{x} \qquad y_2 = x$$

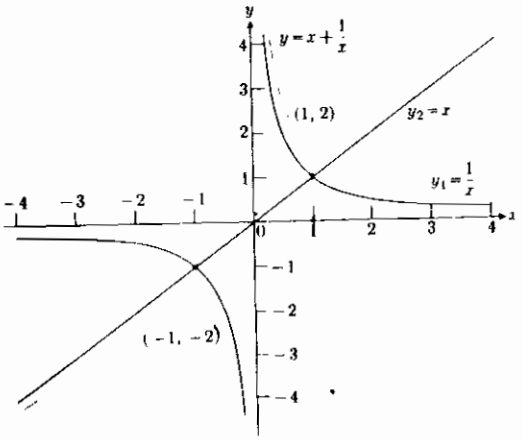
فيكون لدينا $y = x + \frac{1}{x}$ $\quad y' = 1 - \frac{1}{x^2}$

نعد جدول التحولات المتضمن بعض القيم الإضافية للمتحول x ، وقيم التوابع y, y_1, y_2 ثم نخصص عمودين لإشارات كل من y' ، y'' فنحصل على الجدول التالي :

ملاحظات	y''	y'	y	y_2	y_1	x
صاعد ، التقعر نحو الأسفل	-	+	$-\frac{17}{4}$	-4	$-\frac{1}{4}$	-4
صاعد ، التقعر نحو الأسفل		+	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	-2
قيمة عظمى	-2	0	-2	-1	1	-1
هابط ، التقعر نحو الأسفل			$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$
هابط ، التقعر نحو الأسفل			$\frac{17}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-4	$-\frac{1}{4}$
هابط ، التقعر نحو الأعلى	+		$\frac{17}{4}$	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{4}$
هابط ، التقعر نحو الأعلى	+		$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
قيمة صغرى	2	0	2	1	1	1

صاعد ، التقعر نحو الأعلى	+	+	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	2
صاعد ، التقعر نحو الأعلى	+	+	$\frac{17}{4}$	4	$\frac{1}{4}$	4

وبذلك يكون الخط البياني للتابع $y = x + \frac{1}{x}$ كما في الشكل (14) .



الشكل (14)

II – دراسة تحولات بعض التوابع الأساسية :

1 – التابع الصحيح : وهو تابع كثير الحدود من الدرجة n ، ويكتب بالشكل العام التالي :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

إن هذا التابع معرف في جميع النقاط $x \in R$. وهو مستمر عليها ، وله مشتقات متتالية من المرتبة n . يمكن دراسة تحولاته حسب القواعد التي درسناها سابقاً. يتصف خطه البياني بالصفة العامة التالية : يوجد مستقيم ما D يقطع الخط البياني لتابع كثير الحدود في عدد من النقاط يساوي n درجة ذلك التابع .

سنقوم فيما يلي بدراسة تفصيلية لبعض التوابع الصحيحة . كما

الذي خطه البياني خط مستقيم وهو بسيط جدا ، وتابع الدرجة الثانية و

تابع الدرجة الثانية .

أ- دراسة تحولات تابع صحيح من الدرجة الثانية :

لتابع الدرجة الثانية الشكل العام التالي :

$$y = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a \neq 0$$

يمكن أن نوجد له المشتقين الأول والثاني : $y' = 2ax + b$

وهو ينعدم في النقطة $x = -\frac{b}{2a}$ ، وقيمة y المقابلة لهذه النقطة

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + C$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

إذن التابع y يبلغ في النقطة $\left(-\frac{b}{2a} \ , \ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ نهاية عظمى أو نهاية صغرى

وذلك حسب إشارة a . فإذا كان :

* $a > o$ ، وكان $x < -\frac{b}{2a}$ ، فإن $y' < o$ والتابع متناقص دوما .

أما إذا كان $x > -\frac{b}{2a}$ ، فإن $y' > o$ والتابع متزايد دوما .

والنقطة $\left(-\frac{b}{2a} \ , \ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ هي نهاية حدية صغرى .

* $a < o$: فإنه عندما $x < -\frac{b}{2a}$ ، فإن $y' > o$ والتابع متزايد دوما

عندما $x > -\frac{b}{2a}$ ، فإن $y' < o$ والتابع متناقص دوما . وبالتالي فإن النقطة

$\left(-\frac{b}{2a} \ , \ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ هي نهاية حدية عظمى .

نحسب المشتق الثاني : $y'' = 2a$

ليس للتابع y نقاط انعطاف لأن $y'' = 2a \neq 0$ ، ويكون تقعره نحو الأعلى أو نحو الأسفل وذلك حسب إشارة a . فإذا كان :

$a > 0$ فإن $y'' > 0$ وتقعر المنحني نحو الأعلى .

$a < 0$ ، فإن $y'' < 0$ وتقعر المنحني نحو الأسفل .

نهايات التابع y :

* – إذا كان $a > 0$ ، فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} ax^2 + bx + c = +\infty$$

* – إذا كان $a < 0$ ، فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} ax^2 + bx + c = -\infty$$

* – وإن نهاية النسبة $\frac{f(x)}{x}$ تساوي $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = ax + b \longrightarrow +\infty$ ليس للتابع مستقيم مقارب .

التقاطع مع المحاور الاحداثية :

أ – التقاطع مع المحور OX :

يتقاطع منحني التابع $y = ax^2 + bx + c$ مع المحور OX ، عندما $y = 0$ أي عندما يكون لدينا $ax^2 + bx + c = 0$

وبحل المعادلة السابقة نجد أن :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

تتبع هاتان النقطتان المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ ، فإذا كان :

$\Delta > 0$ ، عندئذ للمعادلة جذران حقيقيان x_1 ، x_2 ومنحني التابع يقطع محور السينات في النقطتين $(x_1 , 0)$ ، $(x_2 , 0)$.

$\Delta = 0$ ، للمعادلة جذر مضاعف x_0 ، منحنى التابع يمس المحور ox في النقطة $(x_0 , 0)$.

$\Delta < 0$ ، ليس للمعادلة جذران حقيقيان (لها جذور مركبة) ، وبالتالي منحني التابع لايقطع المحور OX في أية نقطة .

ب - التقاطع مع المحور OY :

يتقاطع منحني التابع y مع محور العينات OY عندما $x = 0$ ، أي في النقطة $y = c$ إذن توجد نقطة تقاطع وحيدة مع $x = 0$ هي النقطة $(0 , c)$.

رسم المنحني البياني : هناك عدة أشكال للخط البياني لتابع الدرجة الثانية . حسب a ونقط تقاطع المنحني مع المحاور الاحداثية . لندرس كمثال على تابع الدرجة الثانية التابع التالي :

مثال : ادرس تحولات التابع $y = 2x^2 - 8x + 6$

لنشتق التابع ونعدم مشتقه

$$y' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

من أجل $x = 2$ نجد $y = -2$

عندما $x < 2$ ، فإن $y' < 0$ والتابع متناقص .

عندما $x > 2$ ، فإن $y' > 0$ والتابع متزايد .

وبالتالي يبلغ التابع نهاية صغرى في النقطة $(2 , -2)$.

المشتق الثاني : $y'' = 4 > 0$

ليس للتابع نقطة انعطاف ، وبما أن $y'' > 0$ ، فإن تقعر المنحني نحو الأعلى . وإن نهاية التابع :

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2x^2 - 8x + 6 = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (2x - 8) = \pm\infty$$

والمنحني يتقاطع مع محور السينات عندما $y = 0$ ، فيكون لدينا :

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{4} \qquad 48 \qquad \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4}$$

$$x_1 = 3 \; ; \qquad x_{\_} \quad 1$$

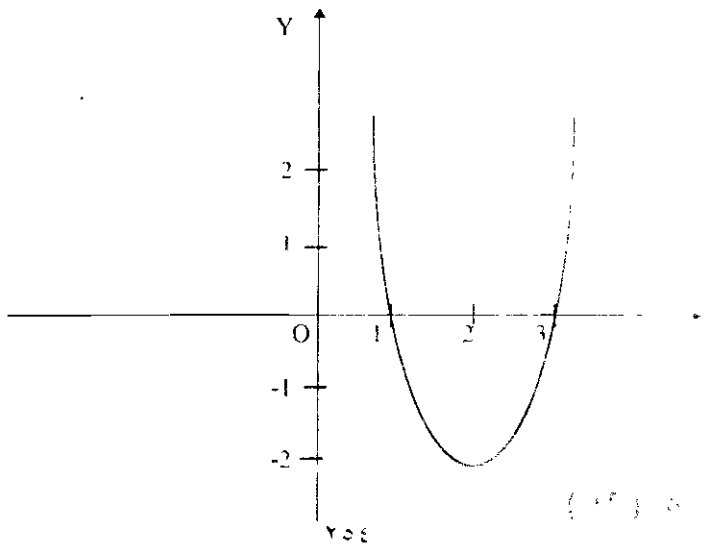
... مع محور السينات في النقطتين (3 ، 0) و (1 ، 0) . ويتقاطع مع ... عندما (x = 0) وهذا يعطينا y = 6 ، وبالتالي يتقاطع مع محور العينات ... (0 ، 6)

... : يمكن أن نضع جدول تحولات التابع ، ونرسم بعد ذلك خطه البياني ...

... التابع $y = 2x^2 - 8x + 6$

x	$-\infty$	1	2	3
$y' = 4x - 8$	−	−	0	+
$y = 2x^2 - 8x + 6$		↘ 0 ↘	− 2	↗ 0

... ، نأخذ بالاعتبار المعلومات السابقة التي حصلنا عليها من دراسة ... وتناقصه ، القيمة الصغرى وغيرها ... فنحصل على الشكل



٢ - دراسة تغيرات التابع اللوغاريتمي :

الشكل العام للتابع اللوغاريتمي هو $y = \log [f(x)]$

وهو معرف من أجل قيم x التي تجعل $f(x)$ موجباً. لنطبق معلوماتنا السابقة في دراسة تغيرات التابع اللوغاريتمي ، ولذلك سنأخذ تابعا محدداً مثل التابع

$$y = \log (x - 2)$$

إن مجال تعريف هذا التابع هو $(2 , + \infty)$ ، حيث يكون التابع y معرفاً من أجل قيم x ضمن هذا المجال .

يتقاطع التابع y مع المحور o x في النقاط التي فيها $y = o$ أي $\log (x - 2) = o$

نعلم أن $\log 1 = o$. إذن

$$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

أي أن التابع y يقطع المحور OX في النقطة $x = 3$ ، أي في النقطة (3,o) . ولكن لايتقاطع التابع $y = \log (x - 2)$ مع المحور OY ، لأن النقطة $x = o$ تقع خارج مجال تعريف التابع $(2 , + \infty)$.

لنوجد المشتق الأول للتابع y :

$$y' = \frac{(x - 2)' \log e}{x - 2} = \frac{\log e}{x - 2} > o$$

وهو موجب دوماً لأن $x > 2$. إذن التابع y متزايد دوماً .

المشتق الثاني :

$$y'' = \frac{- \log e}{(x - 2)^2} < o \qquad ; \qquad x > 2$$

وهو سالب دوماً ولا يساوي الصفر ، فليس للتابع $y = \log (x - 2)$ نقاط انعطاف كما أن تقعره نحو الأسفل .

نهايات التابع :

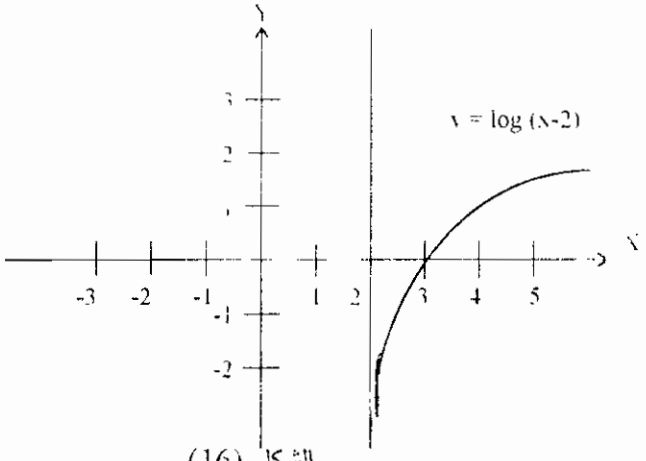
$$\lim_{x \to + \infty} \log(x - 2) = \infty ,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log(x - 2)}{x} = o$$

... مستقيم مقارب . وهذا يعني أن للتابع اتجاه مقارب يوازي محور السينات:

$$\lim_{x \to 2} \log(x - 2) = -\infty$$

... يعني أن نتابع خطاً مقاربا معادلته هي $x = 2$. بهذه المعطيات نستطيع أن نرسم منحني التابع $y = \log(x - 2)$ كما في الشكل (16) التالي :



الشكل (16)

٣ - دراسة تغيرات التوابع الأسية :

الشكل العام للتوابع الأسية هو

$$y = a^{f(x)}$$

حيث a عدد موجب لايساوي الواحد .

مجال تعريف هذا التابع هو مجال تعريف التابع f(x)

مثال ١ : التابع $y = e^x$

إن أبسط التوابع الأسية وأسهلها دراسة هو التابع $y = e^x$ ، حيث e عدد النيبري ($e \approx 2,7182$) ، ومجال تعريفه هو $(-\infty , +\infty)$ ، وهو مستمر على هذا المجال فليس له نقاط انقطاع . لايقطع محور السينات ، لأنه لايوجد عدد محدود يكون من أجله $e^x = 0$. ولكن التابع $y = e^x$ يقطع محور التراتيب OY عندما $x = 0$ أي في النقطة $y = 1$.

المشتق الأول للتابع $y = e^x$ هو $y' = e^x > 0$ وهو موجب دوما . فالتابع متزايد.

المشتق الثاني للتابع $y = e^x$ هو $y'' = e^x > 0$ وهو موجب أيضا مهما تكن x . اذن ليس للتابع نقاط انعطاف وأن تقعره نحو الأعلى .

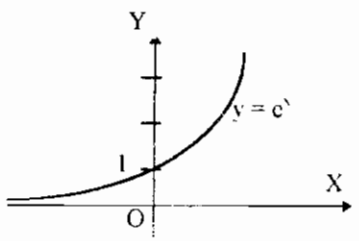
نحسب نهايات التابع $y = e^x$ كما يلي :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

له اتجاه موازٍ لمحور العينات $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

له اتجاه موازٍ لمحور السينات $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

هذا يعني أن فرع المنحني عندما $x \to -\infty$ يصبح موازياً للمحور OX أما الخط البياني للتابع $y = e^x$. فهو كما في الشكل (17) المجاور .



الشكل (17)

مثال ٢ : لندرس التابع الاحتمالي $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

إن هذا التابع معرف ومستمر على المجال $(-\infty , +\infty)$ ، وبالتالي فليس له نقاط انقطاع على هذا المجال . وكما هو الحال بالنسبة للتابع $y = e^x$ فإن التابع $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ لايقطع محور السينات ، لأن المعادلة :

$e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = 0$ غير محققة من أجل أي عدد محدود . ولكن عندما $x \to \pm\infty$ فإن $y \to 0$ أي أن التابع يمس محور السينات عند $\pm\infty$. ولكن التابع يقطع محور العينات عندما $x = 0$. أي في النقطة $y = 1$.

لنوجد المشتق الأول ونعدمه

$$y' = -x\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

إذن $y' = 0$ عندما $x = 0$ ، وتكون قيمة التابع فيها $y = 1$.

لنوجد المشتق الثاني ونعدمه ، للحصول على نقاط الانعطاف

$$y'' = -e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$e^{\frac{x^2}{2}}\left[x^2 - 1\right] = 0$$

ينعدم المشتق الثاني عندما $x^2 - 1 = 0$ أي في $x = \pm 1$. لنحسب قيم التابع عند $x = \pm 1$ ، فنجد :

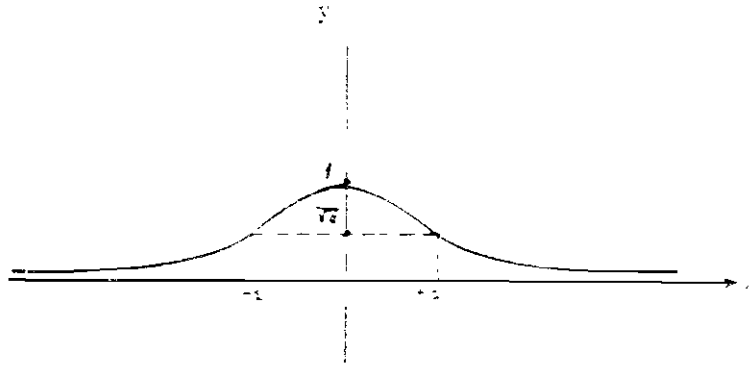
$$x = 1 \Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

لننظم جدول تحولات التابع كما يلي :

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1_{max}	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘	

وبالرسم نحصل على الشكل (18) المقابل :



الشكل (18)

مثال ٣ : تابع التوزيع الطبيعي (أو منحني غاوص)

$$y = e^{\left(\frac{x^2 - 6x + 4}{2}\right)}$$

التابع y معرف ومستمر على المجال ($-\infty$ ، $+\infty$) . وهو لايقطع محور السينات لأن y لايمكن أن يساوي الصفر من أجل أي عدد محدود ، ولكن $y \to 0$ عندما $x \to \pm\infty$. أي أن المنحني البياني للتابع y يمس محور السينات عند اللانهاية الموجبة والسالبة .

يقطع منحني y المحور OY عندما $x = 0$ ، فيكون $y = e^{-2} = 1,65$.لتعيين النهايات العظمى والصغرى ، نأخذ المشتق الأول :

$$y' = -\left(\frac{2x - 6}{2}\right) e^{\left(\frac{x^2 - 6x + 4}{2}\right)}$$

$$y' = -(x - 3)\, e^{\left(\frac{x^2 - 6x + 4}{2}\right)}$$

نجد أن $y' = 0$ عندما $x = 3$. أما قيمة التابع y عند $x = 3$ فهي

$$y = e^{\frac{5}{2}} = 12,18$$

وهي نقطة النهاية ، لتحديد طبيعتها ، نشتق التابع مرة ثانية فنجد أن :

$$y'' = -1\, e^{\left(\frac{x^2 - 6x + 4}{2}\right)} + (x - 3)^2\, e^{\left(\frac{x^2 - 6x + 4}{2}\right)}$$

$$y'' = \left[-1 + (x - 3)^2\right] e^{\left(\frac{x^2 - 6x + 4}{2}\right)}$$

$$y'' = \left[x^2 - 6x + 8\right] e^{\left(\frac{x^2 - 6x + 4}{2}\right)}$$

ينعدم المشتق الثاني عندما $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

ومنه نجد $x_1 = 4$ و $x_2 = 2$ ، إذن سيكون لدينا نقطتا انعطاف عند $x_1 = 4$, $x_2 = 2$

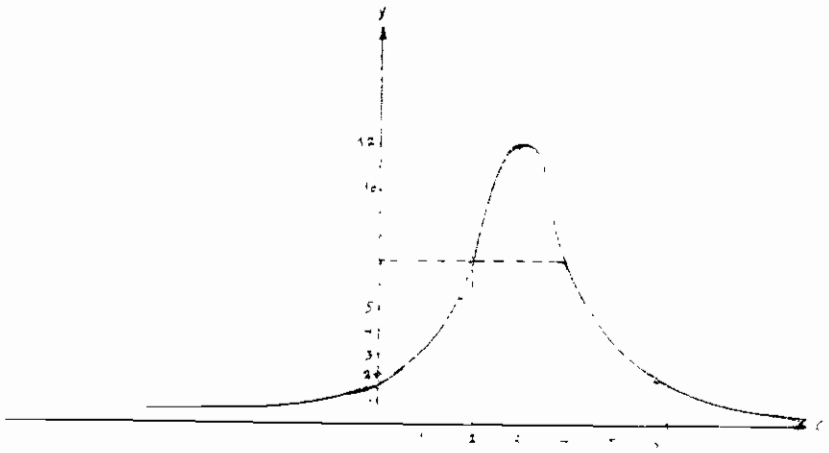
ولإيجاد تراتيب هاتين النقطتين نعوض $x_1 = 4$ في التابع y فنجد :

$$x_1 = 4 \Rightarrow y = e^2 = 7.389$$
$$x_2 = 2 \Rightarrow y = e^2 = 7.389$$

اذن نقطتا الانعطاف هما (4, 7.389) ، (2, 7.389) ننظم جدول تحولات التابع كمايلي :

x	$-\infty$	0	2	3	4	6	$+\infty$
y'		+	+	+	0	−	−	−	
y	0	1.65	7.389 ↗	12.18 max	↘ 7.389	1.65	0

المخطط البياني للتابع هو في الشكل (19) .



الشكل (19)

تمارين عامة

١- أوجد محالات قيم x ، التي يكون من أجلها المنحني صاعداً ، هابطاً ، مقعراً نحو الأعلى ، مقعراً نحو الأسفل ثم ارسم المنحني مبيناً عليه نقط القيم العظمى M والصغرى m ونقط الانعطاف I والخطوط المقاربة للتوابع :

1) $y = x^2 - 4x + 3$; 2) $y = \frac{x}{x+1}$

3) $y = 4 + 3x - x^3$; 4) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$

5) $y = x + \frac{4}{x}$; 6) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

٢- ارسم منحنيات التوابع التالية ، موضحاً عليها نقط القيم العظمى ، الصغرى ، ونقط الانعطاف :

1) $y = 6 - 2x - x^2$; 2) $y = 12 - 12x + x^3$

3) $y = x^4 - 32x + 48$; 4) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

٣- أوجد القيم العظمى والصغرى للتوابع التالية :

1) $f(x) = (x^2 + 2x + 2)$; 2) $f(x) = \sin x \ \sin 2x$

3) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$; 4) $f(x) = \frac{3}{4} L_n \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

5) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{(x-2)^2}$; 6) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$

٤- احسب النهايات التالية باستخدام قاعدة أوبيتال :

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$ 2) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \operatorname{tg} x}$ 4) $\lim_{x \to 1} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$

5) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ 6) $\lim_{x \to \infty} \left[(x+2) e^{\frac{1}{x}} - x \right]$

7) $\lim_{x \to 0} (\sin x)^x$

8) $\lim_{x \to \infty} (x + 4^x)^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

10) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x^2 + 1}$

٥- اكتب الحدود الخمسة الأولى من منشور التوابع التالية :

1) $y = f(x) = \text{arc tg } x$ بجوار $x = 0$

2) $y = f(x) = x \cdot e^x$ بجوار $x = 0$

3) $y = \sqrt{x}$ بجوار $x = 2$

4) $y = f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ بجوار $x = 1$

5) $y = f(x) = \sqrt{1 - x}$ ، $x < 1$ بجوار $x = 0$

الفصل الثامن

تكامل التوابع الحقيقية بمتحول واحد

أولاً – التكامل غير المحدود :

إن عملية التكامل غير المحدود هي عملية معاكسة للاشتقاق ، بمعنى أنه إذا كان لدينا تابع $f(x)$ ، فإننا نفرض أن هذا التابع مشتقاً لتابع آخر $F(x)$. تهدف عملية التكامل إلى إيجاد التابع $F(x)$ الذي يسمى التابع الأصلي للتابع $f(x)$ ، ولذلك فإننا نجد تطابقاً بين تعبيري التكامل غير المحدود وإيجاد التابع الأصلي .

تعريف ١ : ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً في مجال $I \subseteq R$ [حيث I مجال مفتوح ، أو مغلق ، أو نصف مفتوح ، منتهي أو غير منتهي] .

يسمى التابع $F(x)$ – القابل للاشتقاق في المجال $I \subseteq R$ ، تابع أصلي للتابع $f(x)$ إذا كان $F'(x) = f(x)$ من أجل كل $x \in I$.

فمثلاً التابع $\sin x$ المعرف على R ، وهو تابع أصلي للتابع $\cos x$ ، لأن $(\sin x)' = \cos x$. نلاحظ هنا أن التابع الأصلي $F(x)$ للتابع $f(x)$ ليس وحيداً ، بمعنى أنه يوجد عدد لانهائي من التوابع الأصلية من الشكل $F(x) + C$ للتابع $f(x)$ ، حيث C ثابت اختياري يسمى ثابت التكامل . وذلك لأن :

$$[F(x) + C]' = f(x) \qquad (1)$$

تعريف ٢ : إن مجموعة التوابع الأصلية $\{ F(x) + C \}$ للتابع $f(x)$ في مجال ما $I \subseteq R$ ، تسمى التكامل غير المحدود للتابع $f(x)$ في المجال I ، ويرمز له بـ

$$\int f(x)dx \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستطيع أن نكتب :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

نسمي الإشارة $\int$ إشارة التكامل وهي حرف S ممدوداً من كلمة Sum التي

تعني المجموع . يسمى التابع $f(x)$ التابع المُكامل . ويسمى dx بالعنصر التفاضلي للمتحول x .

خواص التكامل غير المحدود :

يتمتع التكامل غير المحدود بالخواص التالية :

$$1- \quad \int \left(f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

$$2- \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$3- \quad \int d\,f(x) = f(x) + c$$

$$4- \quad \int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$$

حيث A ثابت عددي

$$5- \quad \int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

أي أن تكامل مجموع تابعين يساوي مجموع تكاملي التابعين .

طرائق التكامل :

توجد عدة طرائق لحساب التكامل غير المحدود ، نذكر منها :

١ – طريقة التكامل المباشر بالاعتماد على التكاملات الشهيرة التي سنعرضها في جدول خاص يسمى جدول التكاملات الشهيرة .

٢ – طريقة التكامل بتغيير المتحول .

٣ – طريقة التكامل بالتجزئة .

٤ – توجد طرائق خاصة بحساب تكاملات التوابع الكسرية ، والجذرية ، والمثلثية ، والأسية ، وسنتعرض إلى هذه الحالات جميعا في حينها .

سندرس الآن وبالتفصيل كل طريقة على حدة ونبدأ بـ :

أولاً – طريقة التكامل المباشر : وهي تعتمد على إرجاع التابع المتكامل إلى شكل مشابه لأحد التكاملات الشهيرة .

جدول التكاملات الشهيرة :

1) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$

2) $\int \frac{dx}{x} = \text{Ln}\,|x| + C$

3) $\int e^x \, dx = e^x + C$

4) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\text{Ln}\,a} + C \quad , \quad (a > 0 \ , \ a \neq 1)$

5) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\,x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot\text{g}\,x + C$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C = -\text{arc}\cos x + C$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,\text{tg}\,x + C = -\text{arc}\cot\text{g}\,x + C$

11) $\int \text{Sh}\,x \, dx = \text{Ch}\,x + C$

12) $\int \text{Ch}\,x \, dx = \text{Sh}\,x + C$

13) $\int \frac{dx}{\text{Ch}^2 x} = \text{th}\,x + C$

14) $\int \frac{dx}{\text{Sh}^2 x} = -\text{Coth}\,x + C$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arg Sh}\,x + C \quad \text{Ln}\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$

16) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \arg \operatorname{Ch} x + C \quad , \quad |x| > 1$$

17) $$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \begin{cases} \arg \operatorname{th} x + C \\ \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} + C \quad , \quad |x| < 1 \end{cases}$$

ملاحظه هامة : إذا كان المتحول x مضروباً بعدد ثابت a ومضافاً إليه عدداً ثابتـاً آخـر b أي لدينا f(x) معطى بـ f(ax + b) ، فإن :

$$\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b)\, d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b)$$

لندرس بعض الأمثلة على حساب التكامل بالطريقة المباشرة :

مثال ١ : احسب التكامل :

$$\int \left(3x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 3x^4\, dx + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= 3 \int x^4\, dx + \int x^{-2}\, dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{3x^5}{5} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + C$$

مثال ٢ : احسب التكامل :

$$\int \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$$

$$I = \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx + \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$$

$$I = \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 + x^2}}\, dx + \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}\cdot\sqrt{1 + x^2}}\, dx$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \arcsin x + \arg \operatorname{Sh} x + C$$

مثال ٣ : احسب التكامل :

$$\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\operatorname{Ln}|\cos x| + C$$

مثال ٤ : احسب التكامل :

$$\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \operatorname{Ln}|\sin x| + C$$

مثال ٥ : احسب التكامل :

$$\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$2\sqrt{1+x^2} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

مثال ٦ : احسب التكامل

نلاحظ أن درجة البسط أعلى من درجة المقام

فنحصل على تابع صحيح وتابع كسري

إذن

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}\,d(x^2)}{1-x^2}$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \operatorname{Ln}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c \quad , \quad |x| < 1$$

مثال ٧ : احسب التكامل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1+(2x)^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right| + c$$

ثانيا - طريقة تغيير المتحول :

تعطي النظرية التالية الأساس النظري لهذه الطريقة :

نظرية : إذا كان F(x) التابع الأصلي للتابع f (x) في المجال $[\alpha,\beta]$ ، وإذا كان $\varphi(t)$ تابع قابل للاشتقاق على المجال $[a,b]$ ، و $\varphi(t)$ يحقق الشرط

$$\alpha \le \varphi(t) \le \beta$$

حيث $\alpha \le f(t) \le \beta$ ، فان تابع التابع $F(f(t))$ هو تابع أصلي للتابع $F(f(t))f'(t)$ في المجال [a , b] أي

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + c$$

يمكننا عند بتغيير المتحول x بمتحول جديد t حسب العلاقة $x = \varphi(t)$.

عند اختيار المتحول الجديد t بحيث يصبح التكامل $\int f(x)dx$ أبسط من حيث حساب التكامل $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

مثال ٨ : احسب التكامل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}$$

نغير المتحول ، فنفرض **t = 1-3x** ومنه **dt = -3dx** أي $dx = \frac{-dt}{3}$ نعوض في التكامل فنجد :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t}} = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{4}}dt$$

$$= \frac{-1}{3}\times\frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}} + c = -\frac{4}{9}\sqrt[4]{(1-3x)^3} + c$$

مثال ٩ : أحسب التكامل :

$$\int \sqrt{(5-2x)^{\square}}\,dx$$

نفرض

$$dx = -\frac{dt}{2}$$

نعوض في التكامل فنجد :

$$\int \sqrt{(5-2x)^{\square}}\,dx = -\frac{1}{2}\int t^{\square}\,dt \quad -\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}\times t^{\frac{11}{5}}+c$$

$$= -\frac{5}{22}(5-2x)^{2}\quad \sqrt[5]{5-2x}+c$$

مثال ١ : أحسب التكامل :

$$\int \frac{3^{2x}-1}{\sqrt{3^{x}}}\,dx$$

نفرض $3^{x}=t \quad , \quad dt = 3^{\square}\ \text{Ln}\,3\,dx$

ومنه

$$dx = \frac{dt}{\text{Ln}3\ t}$$

نعوض في التكامل :

$$\int \frac{3^{2x}-1}{\sqrt{3^{\square}}}\,dx = \frac{1}{\text{Ln}3}\int \frac{t^{2}-1}{\sqrt{t}}\ \frac{dt}{t} = \frac{1}{\text{Ln}3}\int \frac{t^{2}-1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\text{Ln}3}\left[\int\left(t^{\square}-\overline{t}^{\square}\right)dt\right] = \frac{1}{\text{Ln}3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{t^{\frac{1}{2}}}\right]+c$$

$$= \frac{1}{\text{Ln}3}\left[\frac{2}{3}\left(3^{\square}\right)^{\square}+\frac{2}{\sqrt{3^{\square}}}\right]+c = \frac{1}{\text{Ln}3}\left[\sqrt{3^{3x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right]+c$$

ثالثاً – طريقة التكامل بالتجزئة :

لنفرض أن التابعين $u(x)$ و $v(x)$ معرفان وقابلان للأشتقاق على مجال ما $I \subseteq R$. لنأخذ تفاضل جداء هذين التابعين فنجد :

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

يُرمز التكامل
أسهل
. توجد

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx \quad , \quad \int P(x)\, \cos ax\, dx$$

ثم $u(x) = P(x)$

$$dv(x) = e^{ax}\, dx \quad \text{أو} \quad dv(x) = \cos ax\, dx$$

(*) لانجاز عملية

$$\int A(x)\, \mathrm{Ln}x\, dx \quad , \quad \int A(x) \arcsin x\, dx$$

حيث نفرض ،

$$dv(x) = A(x)\, dx \Rightarrow v(x) = \int A(x)\, dx$$

$$u(x) = \mathrm{Ln}x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$u(x) = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$u(x) = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

مثال ١١ : أحسب التكامل :

$$I = \int x^2 e^{3x}\, dx$$

نكامل هذا التابع بالتجزئة ، لذلك نفرض

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx$$

$$dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

نعوض في العلاقة (*) فنجد

$$I = u\, v - \int v\, du$$

$$I = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x\, e^{3x}dx$$

نكامل هذا التابع بالتجزئة ، لذلك نفرض

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx$$

$$dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

نعوض في العلاقة (*) فنجد

$$I = u.v - \int v\, du$$

$$I = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}dx$$

نطبق قاعدة التكامل بالتجزئة مرة أخرى على التكامل $\frac{2}{3}\int e^{3x}dx$ لذلك نفرض :

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad ; \quad dv = e^{3x}\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

نعوض في I فنجد

$$I = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}\, x e^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx$$

$$I = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}\, x\, e^{3x} + \frac{2}{27}\, e^{3x} + c$$

$$I = \frac{1}{3}\, e^{3x}\left[x^2 - \frac{2}{3}\, x + \frac{2}{9}\right] + c$$

مثال١٢ : أحسب التكامل :

$$I = \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

نكامل بالتجزئة ، فنفرض $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{-d(\cos x)}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}$$

بالتعويض في العلاقة (*) نجد :

$$I = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x}$$

نحسب التكامل الجديد

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \int \frac{2d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2\operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}} + c = \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|$$

نعوض في I ، فنجد :

$$I = \frac{x}{\cos x} - \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + c$$

III – اذا كانت لدينا تكاملات من الشكل

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx \quad , \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

من المفيد إجراء تغيير في المتحول ، مثل $x = t - \frac{b}{2a}$. يسمى هذا التغيير (تغير هورنر) بذلك يتحول التكاملان السابقان إلى الشكل

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{A_1 t + B_1}{a_1 t^2 + b_1}\,dt$$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{A_1 t + B_1}{\sqrt{a_1 t^2 + b_1}}\,dt$$

والتكاملان الجديدان اسهل من التكاملين السابقين .

مثال ١٣ : أحسب التكامل :

$$I = \int \frac{3-6x}{x^2+4x-5}\,dx$$

هنا $a = 1$ و $b = 4$ ، حسب تغيير هورنر ، نفرض

$$x = t - \frac{b}{2a} = t - \frac{4}{2} = t - 2 \Rightarrow t = x + 2$$

ومنه

$$dt = dx$$

بالتعويض في التكامل I ، نجد :

$$\int \frac{3-6x}{x^2+4x-5}\,dx = \int \frac{3-6t+12}{(t-2)^2+4(t-2)-5}\,dt$$

$$= \int \frac{15-6t}{t^2-4t+4+4t-8-5}\,dt = \int \frac{15-6t}{t^2-9}\,dt$$

$$= 15\int \frac{dt}{t^2-9} - 6\int \frac{t\,dt}{t^2-9} = -\frac{15}{9}\int \frac{dt}{1-\frac{t^2}{9}} - 3\int \frac{d(t^2)}{t^2-9}$$

$$= -\frac{5}{3}\int \frac{dt}{1-\left(\frac{t}{3}\right)^2} - 3\int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9} = -5\int \frac{d\left(\frac{t}{3}\right)}{1-\left(\frac{t}{3}\right)^2} - 3\int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9}$$

$$= -5\,\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{1+\frac{t}{3}}{1-\frac{t}{3}}} \quad 3\,\mathrm{Ln}\left|t^2-9\right| + c$$

$$= \quad 5\,\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{3+t}{3-t}} - 3\,\mathrm{Ln}\left|(x+2)^2-9\right| + c$$

$$= -5\,\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{5+x}{1-x}} \quad 3\,\mathrm{Ln}\left|x^2+4x-5\right| + c$$

مثال ١٤ : أحسب التكامل

$$\int \frac{dx}{-x^2-2x+3}$$

نضع المقام على شكل فرق مربعي حدين كما يلي :

$$-x^2 - 2x + 3 = -(x^2+2x-3+1-1) = -[(x+1)^2-4]$$

$$= 4 - (x+1)^2$$

$$\int \frac{dx}{-x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{4-(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x+1)}{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x+1}{2}\right)}{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{3+x}{1-x}\right| + c$$

مثال ١٥ : أحسب التكامل :

$$\int \frac{8x+5}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,dx$$

باجراء تغيير هورنر ، نفرض : $x = t - \frac{b}{2a}$

$$x = t + 3 \Rightarrow t = x - 3$$

ومنه

$$dx = dt$$

$$\int \frac{8x+5}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,dx = \int \frac{8(t+3)+5}{\sqrt{7+6(t+3)-(t+3)^2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{8t+29}{\sqrt{7+6t+18+t^2-6t-9}}\,dt = \int \frac{8t+29}{\sqrt{16-t^2}}\,dt =$$

$$= 8\int \frac{t\,dt}{\sqrt{16-t^2}} + 29\int \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} = -4\int \frac{d(t^2)}{\sqrt{16-t^2}} + \frac{29}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{4}\right)^2}}$$

$$= -4\int \frac{d(16-t^2)}{\sqrt{16-t^2}} + 29\int \frac{d\left(\frac{t}{4}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{4}\right)^2}}$$

$$= -8\sqrt{16-t^2} + 29 \arcsin\frac{t}{4} + c$$

$$= -8\sqrt{16-(x-3)^2} + 29 \arcsin\frac{x-3}{4} + c$$

$$= -8\sqrt{7+6x-x^2} + 29 \arcsin\frac{x-3}{4} + c$$

رابعاً – طرائق خاصة لحساب تكاملات ذات طبيعة خاصة :

سندرس منها التكاملات الآتية :

I – التكاملات الكسرية :

نستخدم لحساب التكاملات الكسرية ، ما يسمى طريقة تفريق الكسور . نعالج في هذه الفقرة تكاملات من الشكل

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتا حدود . اذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام . نقسم البسط على المقام ، فيتحول التابع المكامل الى الشكل :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

حيث $R(x)$ هو كثير حدود صحيح و $P_1(x)$ كثير حدود درجته أقل من

درجة (x) Q . نسمي الكسر $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ كسراً نظامياً ، لأن درجة بسطه P_1 (x) أصغر من درجة مقامه (x) Q . وحسب نظرية كثيرات الحدود ، يمكن تفريق الكسر النظامي إلى مجموع كسور بسيطة من الشكل :

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad , \quad \frac{Mx+n}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^s}$$

حيث الأعداد a ، α ، β هي أصفار كثير الحدود (x) Q . ان عملية تفريق الكسور هي عملية معاكسة لعملية توحيد مقامات الكسور . وعند تفريق كسر عادي يمكن أن نصادف الحالات الأربع التالية :

الحالة الأولى : تفريق الكسر العادي ذي المضاريب الخطية غير المكررة في المقام.

في هذه الحالة نفرق الكسر الى مجموع كسور مقام كل منها أحد العوامل الخطية للمقام وصورته عدد ثابت . أي نضع الكسر بالشكل

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{c}{x-c} + \ldots.$$

حيث a, b, c, هي أصفار كثير الحدود (x) Q غير المكررة . و A , B , C ثوابت عددية يطلب حساب قيمها .

مثال ١٦ : احسب التكامل

$$I = \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\, dx$$

نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام ، لذلك نقسم البسط على المقام ، فنجد :

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$$

باجراء التكامل

$$\int \frac{x^5+n^4-8}{x^3-4x} dx = \int \left(x^2+x+4\right) dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + J$$

حيث

$$J = \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\, dx$$

نحلل المقام إلى عوامل خطية ، ثم نفرق الكسر

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x^2 - 4)} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

لحساب قيم الثوابت A , B , C ، لدينا احدى طريقتين :

الطريقة العامة : نوحد المقامات ونحذفها ، ثم نجري مطابقة بين أمثال القوى المتساوية للمتحول x في طرفي المعادلة الناتجة .

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + (x(x-2)$$
$$= Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + cx^2 - 2cx$$

بالمطابقة نجد

$$4 = A + B + C \qquad (1)$$
$$16 = 2B - 2C \qquad (2)$$
$$-8 = -4A \qquad (3) \quad \Rightarrow A = 2$$

نضرب المعادلة (1) بـ 2 ونضيفها الى المعادلة (2) فنجد

$$24 = 2A + 4B$$
$$24 = 4 + 4B \Rightarrow B = 5$$

نعوض $B = 5$ في المعادلة (2) فنجد :

$$16 - 10 = -2C \Rightarrow C = -3$$

نعوض في التكامل J

$$J = \int \frac{2\,dx}{x} + \int \frac{5\,dx}{x-2} + \int \frac{-3\,dx}{x+2} =$$

$$= 2\,Ln|x| + 5\,Ln|x-2| - 3\,Ln|x+2| = Ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|$$

بالتعويض في التكامل I ، فنجد :

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x-2)^3}\right| + c$$

مثال ١٧ : أحسب التكامل :

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

الحل : نفرق الكسر إلى مجموع كسور بسيطة . نبدأ بتحليل المقام إلى عوامله الخطية البسيطة .

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) \quad x(x+2)(x-1)$$

بعد ذلك نضع الكسر كمجموع كسور ، كما يلي :

$$\frac{2x+3}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

لحساب قيم الثوابت A , B , C نتبع هنا ما يسمى الطريقة الخاصة ، ومفادها : أنه لحساب الثابت A نضرب طرفي المعادلة بمقام A ، أي بالحد x . وبما أن المعادلة محققة من أجل جميع قيم x ، فهي محققة من أجل القيمة الخاصة $x = 0$. فنعوض $x = 0$ بالمعادلة فنحصل مباشرة على قيمة A ، وهي $A = \frac{-3}{2}$.

لحساب B ، نضرب طرفي المعادلة بالمقام $x + 2$ ، ونعوض $x = -2$ ، فنحصل على قيمة B مساوية

$$B = \frac{-1}{6}$$

ولحساب C ، نضرب الطرفين بالمقام $x - 1$ ، ونعوض $x = 1$ ، فنجد $C = \frac{5}{3}$.

نعوض هذه القيم في الكسور البسيطة ، فنجد :

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = -\frac{3}{2x} - \frac{1}{6(x+2)} + \frac{5}{3(x-1)}$$

نكامل طرفي المعادلة السابقة فنجد

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx = \frac{-3}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{3}{2}\mathrm{Ln}|x| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{5}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1}$$

$$= -\frac{3}{2}\mathrm{Ln}|x| - \frac{1}{6}\mathrm{Ln}|x+2| + \frac{5}{3}\mathrm{Ln}|x-1| + c$$

$$= \mathrm{Ln}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^5}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{x+2}} + c$$

الحالة الثانية : تفريق الكسر العادي ذي التراكيب الخطية المكررة في المقام :

اذا أمكن تحليل كثير الحدود $Q(x)$ إلى عوامل خطية من الشكل $(x-a)$ بعضها مكرر وبعضها غير مكرر مثل

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)$$

حيث يكون مجموع الأسس $\alpha+\beta+1$ يساوي درجة $Q(x)$. فاننا نفرق الكسر إلى مجموع كسور كما يلي :

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)} + \frac{c}{x-c}$$

بعد ذلك ، نحسب قيم الثوابت

$$A_1 \ , \ A_2 \ , \ \ldots \ , \ A_{\alpha} \ , \ B_1 \ , \ B_2 \ , \ \ldots \ , \ B_{\beta} \ , \ C$$

ونحسب التكاملات الناتجة بالطرق المعروفة .

مثال ١٨ : أحسب التكامل :

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$$

الحل : نحلل المقام إلى عوامله البسيطة

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

نفرق الكسر بالشكل التالي :

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

نوجد قيم الثوابت A ، B ، C بالطريقة العامة ، حيث نوحد المقامات ونحذفها ، ونجري المطابقة بين طرفي المعادلة الناتجة .

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx + C(x-1)x$$
$$2x^2 - 3x + 3 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx + Cx^2 - Cx$$

$$2 = A + C \qquad (1)$$
$$-3 = -2A + B - C \qquad (2)$$
$$3 = A \qquad (3)$$

بتعويض $A = 3$ في (1) نجد $C = -1$ ، وبالتعويض في المعادلة (2) نجد :

$$-3 = -6 + B + 1 \Rightarrow B = 2$$

بالتعويض والمقارنة ، نجد :

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx = 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 3\,\mathrm{Ln}|x| + 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} - \int \frac{d(x-1)}{x-1}$$

$$= \mathrm{Ln}|x^3| - \frac{2}{x-1} - \mathrm{Ln}|x-1| + c$$

$$= \mathrm{Ln}\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + c$$

الحالة الثالثة : تفريق الكسر الذي يحوي في مقامه تركيباً من الدرجة الثانية .

عند تحليل المقام $Q(x)$ سيظهر لدينا تركيباً من الدرجة الثانية (ثلاثي حدود) وتراكيب خطية أخرى ، أي :

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)(x - d)$$

عندئذ لتفريق الكسر ، نقابل كل ثلاثي حدود في المقام ، تركيباً خطياً في البسط من الشكل $Ax + B$. اذن نكتب :

$$\frac{P_i(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{D}{x - d} + \ldots$$

مثال ١٩ : أحسب التكامل : $\int \frac{x\,dx}{x^3 - 1}$

الحل : نحلل المقام ثم نفرق الكسر إلى مجموع كسور بسيطة كما يلي :

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + c}{x^2 + x + 1}$$

لايجاد قيم الثوابت A , B , C ، نوحد المقامات ونحذفها ، ونطابق أمثال القوى المتساوية لـ x في طرفي المعادلة الناتجة ، فنجد :

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + c)(x - 1)$$

بالمطابقة نحصل على المعادلات التالية :

$$x = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$0 = A + B \qquad (1)$$

$$1 = A - B + C \qquad (2)$$

$$0 = A - C \qquad (3)$$

$$1 = 2A - B$$

بجمع 2 مع 3 نجد :

$$0 = A + B$$

بالجمع مع (1)

$$1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

من (3) نجد $C = \frac{1}{3}$ ومن (1) نجد $B = -\frac{1}{3}$

بالتعويض في التكامل

$$\int \frac{x\,dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}J$$

$$J = \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$$

حيث :

لحساب التكامل J ، نستخدم تحويل هورنر ، فنفرض :

$$x = t - \frac{b}{2a} = t - \frac{1}{2} \Rightarrow t = x + \frac{1}{2}$$

$$dx = dt$$

بإجراء التفاضل نجد :

نعوض في التكامل J ، فنجد :

$$J = \int \frac{t - \frac{1}{2}}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right) + 1}\,dt - \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \int \frac{t\,dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{3}\int \frac{d\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arc\ tg}\frac{2t}{\sqrt{3}}$$

نعود ونبدل $t = x + \frac{1}{2}$ ، فنحصل على :

$$J = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arc\ tg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

اذن :

$$\int \frac{x\,dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\operatorname{Ln}|x - 1| - \frac{1}{3}J$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{Ln}|x - 1| - \frac{1}{6}\operatorname{Ln}\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\ tg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c$$

الحالة الرابعة : تفريق الكسر الذي يحوي في مقامه ثلاثي حدود مكرر n مرة .

اذا حصل عند تحليل $Q(x)$ إلى عواملـه فيظهـر ثلاثـي حـدود $(ax^2 + bx + c)^n$ ، عندئذ نفرق الكسر بالشكل التالي :

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{ax^2 + bx + c}$$

مثال ٢٠ : أحسب التكامل :

$$I = \int \frac{2x^2 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx$$

الحل : نفرق التابع الكسري إلى كسور بسيطة كما يلي :

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1 x + B_1}{(x^2+1)^2} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2+1}$$

بتوحيد المقامات وحذفها والمطابقة نجد :

$$2x^2 + x + 3 = A_1 x + B_1 + (A_2 x + B_2)(x^2+1)$$

$$2x^2 + x + 3 = A_1 x + B_1 + A_2 x^3 + A_2 x + B_2 x^2 + B_2$$

$$0 = A_2 \quad , \quad 1 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = 1$$

$$2 = B_2 \quad , \quad 3 = B_1 + B_2 \Rightarrow B_1 = 1$$

بالتعويض في التكامل ، نجد :

$$I = \int \frac{2x^2 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{(x+1)}{(x^2+1)^2}\,dx + \frac{2\,dx}{x^2+1}$$

$$= \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + 2\arctg x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + 2\arctg x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{2(x^2+1)} + 2\arctg x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

نفرض $J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

قاعدة :

يحسب التكامل J_2 وغيره من التكاملات من الشكل : $J_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$

بتطبيق علاقة التخفيض التدريجي التالية :

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} J_{n-1}$$

في مثالنا هذا ، لدينا $a^2 = 1$ و $n = 2$. لذلك نحتاج إلى تخفيض درجته مرة واحد فقط.

نحسب أولاً J_1 حيث :

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arc tg}\, x$$

$$J_2 = \frac{x}{2.1\,(2-1)\left(1+x^2\right)^{2-1}} + \frac{2\,2-3}{2\,1(2-1)} \text{arc tg}\, x$$

$$J_2 = \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x$$

نعوض في التكامل I ، فنجد :

$$I = \int \frac{2x^2+x+3}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \frac{-1}{2\left(x^2+1\right)} + 2\text{arc tg}\, x + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x + c$$

$$= \frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{2} \text{arc tg}\, x + c$$

II – تكامل التوابع الجذرية :

سندرس طرائق استكمال بعض التوابع الجذرية ومنها :

١ – التكامل من الشكل

$$\int R\left(x\ ,\sqrt[n]{ax+b}\right) dx$$

حيث R تابع كسري متعلق بـ x و $\sqrt[n]{ax+b}$ ، نكامل هذا التكامل بتغيير المتحول ،

وذلك بفرض متحول جديد $t = \sqrt[n]{ax+b}$

ومنه $t^n = ax + b$

نفاضل t ونعوضه في التكامل .

مثال ٢١ : أحسب التكامل :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$$

الحل : نفرض $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1$

ومنه $x = \dfrac{t^2-1}{2}$

$dx = t\,dt$

نعوض في التكامل فنجد :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2-1)t\,dt}{t+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(t-1)(t+1)t\,dt}{t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int (t-1)t\,dt = \frac{1}{2}\int t^2 dt - \frac{1}{2}\int t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right] + c = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} - \frac{2x+1}{2}\right] + c$$

$$= \frac{2x+1}{12}\left[\sqrt{2x+1} - 3\right] + c$$

٢ - التكامل من الشكل

$$\int R\left(x^k, \sqrt[n]{ax^k+b}\right) x^{k-1}\,dx$$

حيث R تابع كسري متعلق بـ x^k و $\sqrt[n]{ax^k+b}$.

أيضاً هنا نغيّر المتحول ، فنفرض

$$t = \sqrt[n]{ax^k+b} \Rightarrow t^n = ax^k + b$$

نفاضل t نعوض في التكامل

مثال ٢٠ : أحسب مل $\int \dfrac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$

نفرض $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow t^3 = x^2+1$

$x = (t^3-1)^{\frac{1}{2}}$

$dx = \dfrac{3}{2}t^2(t^3-1)^{-\frac{1}{2}}\,dt$

ومن نجد :

$$\int \frac{x^{3}\,dx}{\sqrt[3]{x^{2}+1}} = \frac{3}{2}\int \frac{(t^{3}-1)^{3}(t^{3}-1)^{2}\,t^{2}}{t-1}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int (t^{3}-1)\,t^{3}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int (t-1)(t^{2}+t+1)\,t^{3}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int (t^{6}+t^{5}+t^{4})\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{t^{6}}{5}+\frac{t^{5}}{4}+\frac{t^{4}}{3}\right]+c$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt[3]{(x^{3}+1)^{5}}}{5}+\frac{\sqrt[3]{(x^{3}+1)^{4}}}{4}+\frac{\sqrt[3]{(x^{3}+1)^{3}}}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{2}(x^{3}+1)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{\sqrt[3]{(x^{3}+1)^{2}}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^{3}+1}}{4}+\frac{1}{3}\right]+$$

التكامل من الشكل $\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)\sqrt{ax^{2}+bx+c}}\,dx$

، هذا النوع بفرض $x-\alpha=\frac{1}{t}$

٢٣ : أحسب التكامل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^{2}}}$$

$dx = \frac{dt}{\quad}$ لتحويل

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\int \frac{\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{2a\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}}} \qquad \left| \frac{t\,dt}{\sqrt{2at-1}} \right.$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2at-1}} = -\frac{1}{2a}\int \frac{d(2at-1)}{\sqrt{2at-1}}$$

$$= -\frac{1}{a}\sqrt{2at-1} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + c$$

٤ – التكامل من الشكل :

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots\ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_s}{q_s}}\right] dx$$

حيث q_s ، ... ، q_2 ، q_1 ، p_s ، ... ، p_2 ، p_1 هي أعداد صحيحة .

و R تابع كسري ، والمعينه $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ ،

لانجاز هذا التكامل نفرض $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^m$ ، حيث m هي المضاعف المشترك البسيط للاعداد q_s ، ... ، q_2 ، q_1 .

مثال ٢٤: أحسب التكامل

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$$

الحل : نفرض $x = t^6$ ⇐ $dx = 6t^5\,dt$ ، ومنه $t = \sqrt[6]{x}$.

بالتعويض نجد :

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx = 6\int \frac{\left(t^6 + t^4 + t\right)t^5}{t\left(1+t^2\right)} dt$$

$$= 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1+t^2}\,dt - 6\int\left(t^3 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 6\int t^3\,dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}t^4 + 6\,\text{arc tg}\,t + c$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\,\text{arc tg}\,\sqrt[6]{x} + c$$

II – تكامل التوابع المثلثية :

١ – سنستخدم هنا بعض قوانين المثلثات لمكاملة التكاملات من الأشكال الآتية

1 - $\int \sin mx \sin nx\,dx$

2 - $\int \cos mx.\cos nx\,dx$

3- $\int \sin mx.\cos nx\,dx$

ومن أهم قوانين المثلثات المستخدمة لحل هذه التكاملات ، القوانين التالية :

1 - $\sin mx.\sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$

2 - $\cos mx.\cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$

3 - $\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$

4 - $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ، 5 – $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

مثال ٢٥ . أحسب التكامل الآتي :

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$$

بتطبيق العلاقة (3) نجد :

$$\int \sin\frac{x}{3}.\cos\frac{2x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)x + \sin\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)x\right]dx$$

$$\frac{1}{2}\int[\quad]dx \quad \frac{1}{2}\int[\quad]$$

وحسب خواص اللوغاريتم ، نكتب :

$$\Delta y = \text{Ln}\frac{x + \Delta x}{x} = \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

بتقسيم الطرفين على Δx $(\Delta x \neq 0)$ ، نجد أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

نضرب الطرف الثاني بـ x ونقسم على x نجد :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

وحسب خواص اللوغاريتم (خاصة $\text{Ln } x^n = n \text{ Ln } x$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

بأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ ، نجد :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

نعلم من النهايات أن :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \text{Ln } e = 1$$

إذن :

$$y'_x = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

إذن مشتق التابع اللوغاريتمي $y = \text{Ln } x$ هو $y' = \frac{1}{x}$. وإذا أخذنا ما تحت اللوغاريتم تابعاً لـ x مثل $f(x)$ ، أي :

$$y = Ln\,[f(x)]$$

يكون مشتقه $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ **أي بشكل عام نستطيع القول أن مشتق التابع اللوغاريتمي يساوي مشتق ما تحت اللوغاريتم مقسوماً على ما تحت اللوغاريتم .**

ب – التابع اللوغاريتمي ذي الأساس a ، حيث a عدد موجب لايساوي الواحد ، هو من الشكل العام : $y = \log_a x$. نستطيع حساب مشتق التابع $y = \log_a x$ اعتماداً على تعريف اللوغاريتم . أي :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للعلاقة السابقة نجد :

$$Ln\,x = y\,Ln\,a$$

باشتقاق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة لـ x ، نجد :

$$\frac{1}{x} = y'_x\,Ln\,a$$

ومنه :

$$y'_x = \frac{1}{x \cdot Ln\,a}$$

مثال ٢٤ : أوجد مشتق التابع : $y = Log_a\,(3x^2 + 2x)$

لدينا $u = 3x^2 + 2x$ وبالتالي فإن $u' = 6x + 2$

بتطبيق قاعدة المشتق اللوغاريتمي :

$$y' = \frac{u'}{u\,Ln\,a} = \frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x)\,Ln\,a}$$

١٣ – مشتق التابع الأسي :

الشكل العام للتابع الأسي هو $y = a^x$ ، حيث a عدد موجب لايساوي الواحد

إن هذا التابع معرف من أجل $x \in \mathbb{R}$.

لحساب مشتق التابع $y = a^x$

نأخذ لوغاريتم طرفي العلاقة فنجد :

$$Ln\,y = x\,Ln\,a$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد :

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \text{Ln}\, a$$

ومنه :

$$y' = y\, \text{Ln}\, a = a^x \cdot \text{Ln}\, a$$

وإذا أخذنا التابع $y = a^u$ حيث $u = u(x)$ يكون :

$$y' = (a^u)' = u' \cdot a^u \, \text{Ln}\, a$$

إن أبسط التوابع الأسية هو التابع $y = e^x$ ، ومشتقه $y' = e^x$

وإذا كان التابع $y = e^u$ حيث $u = u(x)$ فإن

$$y' = u' \cdot e^u$$

مثال ٢٥ : أوجد مشتق التابع $y = 3^{x^2}$

في هذا التابع لدينا : $u' = 2x \Leftarrow u = x^2 \ , \ a = 3$

بتطبيق القاعدة : $y' = u' a^u \cdot \text{Ln}\, a$

$$y' = 2x \cdot 3^{x^2} \cdot \text{Ln}\, 3$$

١٤ - الاشتقاق اللوغاريتمي :

يفضّل استخدام الاشتقاق اللوغاريتمي في الحالتين التاليتين :

أ - إذا كان التابع $y = f(x)$ على شكل جداء عدة توابع ، يمكن أن نشتق التابع y بطريقة الإشتقاق اللوغاريتمي . لذلك نأخذ لوغاريتم التابع $y = f(x)$ كما يلي :

$$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, |f(x)|$$

باشتقاق الطرفين نجد :

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ومنه :

$$y' = y \, \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال ٢٦ : أوجد مشتق التابع : $y = (x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نجد :

$$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, |(x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4|$$

$$\text{Ln}\, y = 3\, \text{Ln}\, (x^2 + 2) + 4\, \text{Ln}\, (1 - x^3)$$

باشتقاق الطرفين نجد :

$$\frac{y'}{y} = \frac{6x}{x^2 + 2} - \frac{12x^2}{1 - x^3}$$

ومنه :

$$y' = (x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4 \left[\frac{6x}{x^2 + 2} - \frac{12x^2}{1 - x^3} \right]$$

$$y' = 6x(x^2 + 2)^2 (1 - x^3)^4 - 12x^2 (x^2 + 2) (1 - x^3)^3$$

يمكن إيجاد هذا المشتق اعتماداً على قاعدة مشتق جداء تابعين .

ب – إذا كان التابع f(x) عبارة عن تابع كسري في بسطه ومقامه جداء عدة توابع أي من الشكل :

$$f(x) = \frac{h_1(x) \cdot h_2(x) \ldots\ldots h_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \ldots\ldots g_n(x)}$$

نأخذ لوغاريتم طرفي هذه العلاقة ونشتق الناتج بالطرق المعروفة .

١٦ – المشتقات المتتالية :

ليكن $y = f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً ويقبل الاشتقاق على المجال $I \subseteq R$. إن مشتق التابع $y = f(x)$ هو y' ، أو $f'(x)$ ، أو $\frac{dy}{dx}$. إن هذا المشتق ما هو إلا تابع جديد . إذا كان يقبل الاشتقاق ، نقوم باشتقاقه فنحصل على المشتق الثاني للتابع الأساسي $y = f(x)$. وهو $(y')'$ أو $(f'(x))'$ أو $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. ويرمز للمشتق الثاني بأحد الرموز التالية :

$$y'' \text{ أو } f''(x) \text{ أو } \frac{d^2y}{dx^2}$$

وللحصول على المشتق الثالث ننطلق من المشتق الثاني . فإذا كان y'' أو $f''(x)$ يقبل الاشتقاق مرة أخرى ، نقوم باشتقاقه فنحصل على المشتق الثالث y''' أو $f'''(x)$ أو $\frac{d^3y}{dx^3}$.

وهكذا يمكننا متابعة الاشتقاق n مرة فنحصل على المشتق من المرتبة n والذي يسمى المشتق النوني للتابع $y = f(x)$. وذلك بشرط أن يكون المشتق من المرتبة $(n - 1)$

موجوداً ويقبل الاشتقاق . نرمز للمشتق النوني بأحد الرموز $y^{(n)}$ $(x)^{(n)}$

$\frac{d^n y}{dx^n}$.

مثال ٢٧ :

أوجد المشتق من المرتبة الخامسة للتابع $y = \text{Ln}\,|x|$

إن المشتق الأول هو $y' = \frac{1}{x}$

والمشتق الثاني هو $y'' = \frac{-1}{x^2}$

المشتق الثالث هو $y''' = \frac{2}{x^3}$

المشتق الرابع هو $y^{(4)} = \frac{-6}{x^4}$

المشتق الخامس $y^{(5)} = \frac{24}{x^5}$

تمارين

١- أوجد كلاً من $y' = \frac{dy}{dx}$ و $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ للتوابع التالية :

1) $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5$ ، 2) $y = 5x^3 - 3x^5$

3) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3$ ، 4) $y = x^2 (x^3 - 1)$

5) $y = (3x - 1)(2x + 5)$ ، 6) $y = (x^2 - 2)(x^3 + 3)$

٢- أوجد المستقيم المماس للمنحني :

$y = 2x^2 + 4x - 3$ في النقطة $(1,3)$

٣- أوجد نقط المنحني : $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ التي يكون المماس عندها موازياً للمحور ox .

٤- أوجد مشتقات التوابع التالية :

1) $y = (x+1)^2 (x^2+1)^3$ ، 2) $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

3) $y = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$ ، 4) $y = \left(x^2 - x\right)^{-2}$

5) $y = t^2 (t + 1)^{-1}$ ، 6) $y = (t^2 + 3t)^3$

٥- أوجد مشتقات التوابع التالية :

1) $x^2 + y^2 = 1$ ، 2) $y^2 = \frac{x - 1}{x + 1}$

3) $x^2 + xy = 2$ ، 4) $x^2 y + xy^2 = 6$

5) $y^2 = x^3$ ، 6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

7) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ، 8) $x^2 = \frac{x - y}{x + y}$

9) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ ،

10) $(x + y)^3 + (x - y)^3 = x^4 + y^4$

٦- أوجد $\frac{dy}{dx}$ في التوابع التالية :

1) $y = tg^2(\cos x)$; 2) $y = tg(3x^2)$

3) $y = \sqrt{\cos x}$; 4) $y = \sin^2 x - tg^2 x$

5) $y = 2\sin^3 3x$, 6) $y = \cos^3 \frac{x}{3} - 3\cos \frac{x}{3}$

7) $x^2 = \sin y + \sin^2 y$; 8) $y = 2\sin \frac{x}{2} - x\cos \frac{x}{2}$

9) $y = \frac{1}{3}\sin^3 5x - \sin 5x$, 10) $y = x + tg(x \cdot y) = o$

11) $y = \frac{1}{3} tg^{-1} \frac{x}{3}$; 12) $y = \sin^{-1} \frac{x}{2}$

13) $y = \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1}$; 14) $y = \cot g^{-1} \frac{2}{x} + tg^{-1} \frac{x}{2}$

15) $y = x \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

16) $y = \text{arc}\, tg \frac{x-1}{x+1}$

17) $y = x(\text{arc}\sin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\ \text{arc}\sin x$

18) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

٧- أوجد $\frac{dy}{dx}$ في التوابع التالية :

1) $y = Ln(\cos x)$; 2) $y = (Ln\, x)^3$

2) $y = Ln(x^2 + 2x)$; 4) $y = Ln(3x\sqrt{x+2})$

5) $y = Ln(tg x + \sin x)$; 6) $y = \frac{1}{2} Ln \frac{1+x}{1-x}$

7) $y = x^3\, Ln(2x)$, 8) $y = x\, Ln\, x - x$

9) $y = Ln(x^2 + 4) - x\, tg^{-1} \frac{x}{2}$; 10) $y = \frac{1}{3} Ln \frac{x^3}{1+x^3}$

11) $y = x\,(\mathrm{Ln}\,x)^3$

12) $y = \mathrm{Ln}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,(1 + x^2) - \frac{tg^{-1}\,x}{x}$

13) $y = \mathrm{Ln}\,(\mathrm{Ln}\,x)$

14) $y = x\left[\sin(\mathrm{Ln}\,x) + \cos(\mathrm{Ln}\,x)\right]$

15) $y = x\,\mathrm{Ln}\,(a^2 + x^2) - 2\,x + 2\,a\,tg^{-1}\,\frac{x}{a}$

الفصـــل السابـــع

بعـــض تطبيقـــات مشتقـــات التوابـع

أولاً – تطبيقات المشتقات في دراسة القيم القصوى (العظمى والصغرى) للتابع :

تعريف ١ : نقول أن التابع f(x) يبلغ قيمة عظمى محلية في النقطة x = a ،إذا كان:

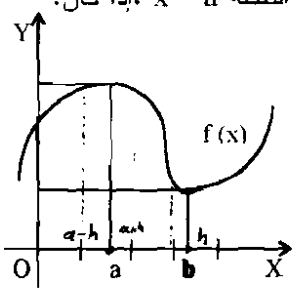
$$f(a) \geq f(a \pm h)$$

من أجل جميع قيم h (الموجبة والسالبة) الصغيرة بقدر كاف .

كما نقول أن التابع f(x) يبلغ قيمة صغرى محلية في النقطة x = b ، إذا كان

$$f(b) \leq f(b \pm h)$$

من أجل جميع قيم h الصغيرة بقدر كاف .



الشكل (1)

تعريف ٢ : نقول أن التابع f(x) يبلغ قيمة عظمى مطلقة في النقطة x = a ، إذا كان

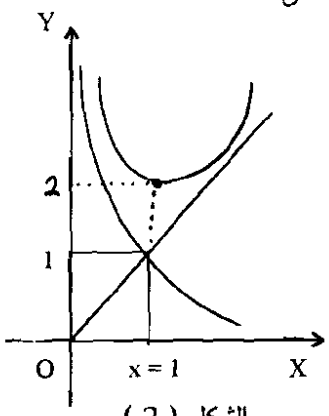
$$f(a) \geq f(x)$$

وذلك مهما تكن x من منطقة تعريف التابع f(x) .

كما يبلغ التابع قيمة صغرى مطلقة في النقطة x = b إذا كان

$$f(b) \leq f(x)$$

مهما تكن x من منطقة تعريف التابع f(x) .



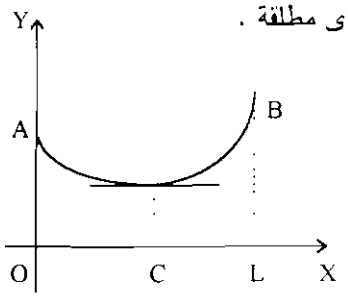
الشكل (2)

مثال ١ : للتابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ قيمة صغرى محلية في النقطة x = 1 لأن f(1) = 2

ولأن $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

من أجل جميع قيم x القريبة من 1 . ولكن هذه

المتراجحة ، ليست صحيحة من أجل القيم السالبة لـ x . وفي الحقيقة ليس للتابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ أية قيمة عظمى مطلقة أو قيمة صغرى مطلقة .



الشكل (3)

مثال ٢ : التابع $y = f(x)$ في الشكل (3) المعرف على المجال $[o , L]$. نلاحظ أن للتابع $f(x)$ قيمة صغرى محلية في النقطة $x = c$ ، وهي قيمة صغرى مطلقة . كما أن له قيمتين أعظميتين محليتين في A ، B . وأما قيمته الكبرى في B فهي محلية ومطلقه في آن واحد .

نظرية ١ : إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المجال I من R فإن هذا التابع يكون متزايداً في النقطة c من I ، إذا كان مشتقه في تلك النقطة موجباً ، أي إذا كان $f'(c) > o$ ويكون متناقصاً فيها إذا كانت $f'(c) < o$.

تنتج هذه النظرية من تعريف التوابع المتزايدة والمتناقصة الواردة في الفصل الخامس ومن المعنى الهندسي للمشتق في الفصل السادس .

نظرية ٢ : إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المجال I من R وكان له قيمة عظمى (أو صغرى) محلية في النقطة $x = c$ حيث $c \in I$ ، وكان مشتقه $f'(x)$ موجوداً ومحدوداً في c ، عندئذٍ يكون $f'(c) = o$.

البرهان : استناداً إلى النظرية (١) يكون $f(x)$ تابعاً متزايداً في c إذا كان $f'(x)$ موجباً ويكون متناقصاً في c إذا كان $f'(x)$ سالباً،ولكن $f(x)$ ليس متزايداً ولامتناقصاً في c لأن له قيمة عظمى أو صغرى محلية في c حسب الفرض . لذلك لايمكن أن يكون $f'(c)$ موجباً ولاسالبا . إذن $f'(c) = o$. وهو المطلوب .

ملاحظة ١ : إن عكس هذه النظرية ليس صحيحاً دائماً ، لأنه ليس بالضروري أن يكون لـ $f(x)$ قيمة عظمى (أو صغرى) في أية نقطة ينعدم فيها مشتقه .

ملاحظة ٢ : قد توجد قيمة عظمى أو صغرى في نقطة ما مثل $x = c$ ولايوجد فيها مشتق . وكذلك في طرفي مجال تعريف التابع .

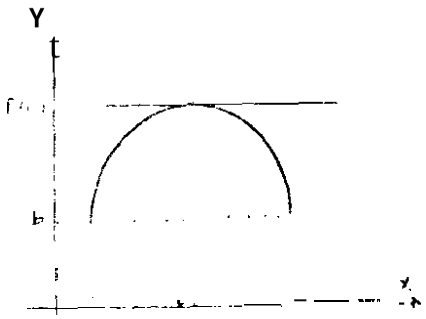
نظرية (رول) ٣ : (Michel Rolle 1652 - 1719)

إذا كان f(x) معرفاً ومستمراً في المجال المغلق [a , b] ويقبل الاشتقاق في المجال المفتوح (a , b) ، وكانت قيمتاه عند طرفي المجال متساويتين أي f(a) = f(b) ، عندئذ يوجد نقطة واحدة على الأقل مثل c من المجال [a , b] يكون فيها $f'(c) = 0$ أي يكون $f'(c) = 0$ من أجل $a < c < b$.

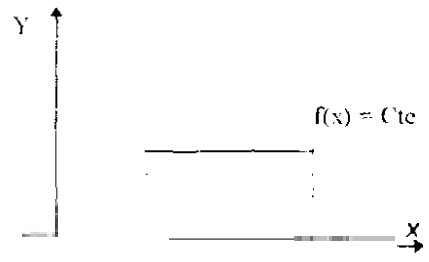
البرهان : سنميّز الحالتين التاليتين :

١- إذا كان f(x) ثابتاً أي كان f(x) = Cte فإن $f'(x) = 0$ من أجل جميع قيم المجال [a . b] .

٢- أما إذا لم يكن f(x) ثابتاً ، وحيث أن f(x) مستمر على المجال [a , b] حسب نص النظرية ، فإن f(x) يبلغ في [a, b] قيمة عظمى .



الشكل (5)



الشكل (4)

نرمز لها بـ $M = \max f(x)$ أو قيمة صغرى $m = \min f(x)$. عندئذ ومن أجل أي نقطة $x \in [a , b]$ فإن $m \le f(x) \le M$

وبما أن f(x) ليس ثابتاً في المجال المذكور لذلك فإننا سنعتبر أن $m \neq M$. ومن الفرض f(a) = f(b) ، إذن يجب أن يبلغ f(x) قيمته M أو m في نقطة د اخلية في المجال [a . b] . يجب ألا يبلغ التابع f(x) القيمة M أو m في طرفي المجال ، لأنه سيكون m = M ، وهذا مناقض للفرض .

لنفرض لدينا قيمة عظمى M في النقطة الداخلية c ، أي $f(c) = M$ كما هو موضح في الشكل (5) . بما أن $f(c)$ قيمة عظمى للتابع $f(x)$ فإن $f(x)-f(c) \leq o$ من أجل كل $x \in [a , b]$.

فإذا كان $x > c$ ، فإن $x - c \geq o$ وبالتالي فإن النسبة :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq o$$

وبأخذ النهاية :

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq o \qquad (1)$$

وإذا كان $x < c$ ، فإن $x - c > o$ و $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq o$ ، وبأخذ النهاية :

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq o \qquad (2)$$

وبما أن $f(x)$ مستمر فرضاً ، ويقبل الاشتقاق في كل نقطة داخلية من المجال $[a,b]$ ، وبالأخص في c ، فإنه يكون :

$$f'_+(c) = f'(c) = f'(c)$$

ولكن من المتراجحتين (1) , (2) ، لايمكن أن يتساوى المشتقان الأيمن والأيسر ، إلا إذا كانا مساويين للصفر . إذن لابد وأن يكون $f'(c) = o$ ، وهو المطلوب .

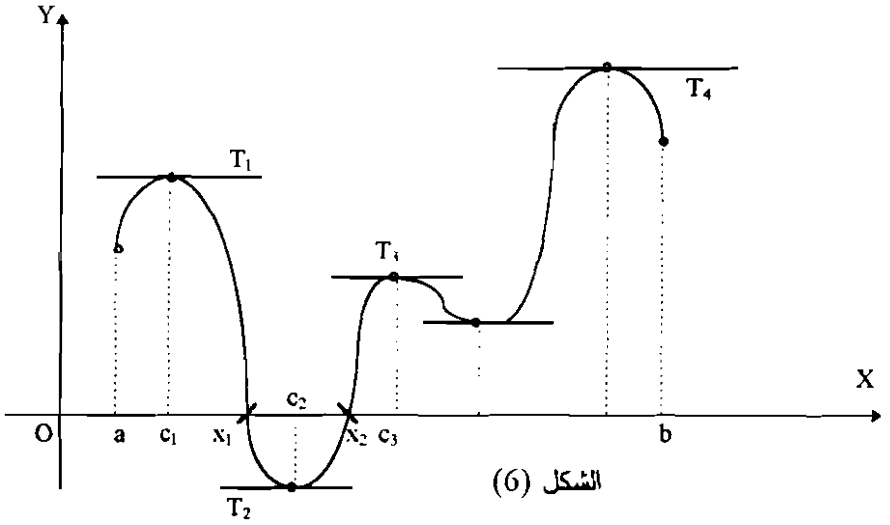
[يمكن البرهان بنفس الطريقة في حالة وجود قيمة صغرى m للتابع في $[a , b]$]

المعنى الهندسي لنظرية رول : نعلم أن قيمة المشتق في نقطة هي ميل المماس فيها ، وبما أن $f'(c) = o$ فإنه يوجد مماس T للمنحني $y = f(x)$ ، ميله يساوي الصفر ، فهو يوازي محور السينات كما في الشكل (5) .

ملاحظات على نظرية رول :

١- يبرهن في النظرية على وجود نقطة واحدة على الأقل ، يكون من أجلها $f'(c) = o$.

وهذا يعنـي إمكانية وجود أكثر من نقطة ، أو عـدد لانهائي من النقط . كما في التابـع الموضح في الشكل (6) .



الشكل (6)

حالة خاصة لنظرية رول :

إذا كان $f(x)$ معرفاً ومستمراً على المجال $[x_1 , x_2]$ ، وقـابلاً للاشـتقاق علـى المجال المفتوح (x_1 , x_2) ، وكانت قيمتاه عند الطرفين متساويتين وتساويان الصفر ، أي إذا كانت $f(x_1) = f(x_2) = o$ ، فعندها توجد نقطـة واحدة علـى الأقـل مثـل c مـن $[x_1 , x_2]$ بحيث يكون $f'(c) = o$ ، وهذا يعني أنه يوجد بين كل جذريـن للتـابع $f(x)$ جذر واحد على الأقل للمشتق $f'(x)$.

ومن جهة أخرى ، إذا لم يكن التابع $f(x)$ ثابتـاً ، فإنـه يوجـد لـه بيـن كـل جذريـن قيمـة قصوى (عظمى أو صغرى) واحدة على الأقل .

مثال ١ : ليكن لدينا تابع كثير الحدود

$$y = x^3 - 4x = f(x)$$

مستمر وقابل للاشتقاق من أجل جميع قيم x ، حيث $-\infty < x < \infty$ ، فـإذا اخترنـا القيمتين $a = -2$, $b = +2$ طرفين لمجال مغلق $[-2 , +2]$ فإننا نجد أن شروط

نظرية رول محققة ، لأن $f(-2) = f(+2) = o$

ولذا فإنه يجب أن ينعدم المشتق $f'(x) = 3x^2 - 4$

مرة واحدة على الأقل في المجال [2 . 2-] ، وفي الحقيقة نجد أن جذري معادلة المشتق $3x^2 - 4 = o$ هما :

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{+2\sqrt{3}}{3}$$

٢- إن نظريه رول غير صحيحة ، إذا كان $f(x)$ مستمراً على المجال $(a\ ,\ b)$ وغير مستمر في a من اليمين ، وفي b من اليسار .

٣- إن نظرية رول غير صحيحة أيضا اذا كان التابع $f(x)$ غير قابل للاشتقاق في نقطة ما من المجال المفتوح $(a\ .\ b)$.

مثال ٢ : التابع

$$f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right) & , a < x < b \\ o & , x = a = b \end{cases}$$

معرف على المجال $[a\ \ b]$ ، وقابل للاشتقاق في كل نقطة من المجال $(a\ .\ b)$ ، وتحقق الشرط $f(a) = f(b) = o$

$f'(x)$

مثال ٣ : التابع $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ معرف على المجال $[+1\ ,\ -1]$ وهو

$f(-1) = f(1) = o$ به ويحقق الشرط

يمكنه غير قابل للاشتقاق في النقطة $x = o$ ، لان :

$$f'(x) = -\frac{2}{3}\ x^{\ \ -} \quad \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

إذن المشتق غير موجود عند النقطة $x = 0$. وكذلك $f'(x)$ لاينعدم في أية نقطة من المجال $(-1 , +1)$.

نظرية التزايدات المحدودة ٤ أو نظرية لاغرانج :

(J . L . Lagrange , 1736 - 1813)

ليكن التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[a , b]$ ، المستمر والقابل للاشتقاق في كل نقطة من المجال (a , b) ، عندئذ توجد نقطة واحدة على الأقل مثل c من المجال (a , b) ، بحيث تتحقق المعادلة :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

البرهان : لنأخذ التابع المساعد :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

إن $\varphi(x)$ يحقق جميع شروط رول ، حيث أنه مستمر في $[a . b]$ ، وقابل للاشتقاق في (a , b) و $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ وبالتالي حسب نظرية رول ، توجد نقطة واحدة على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث يكون فيها :

$$\varphi'(c) = 0$$

بالتعويض $\varphi'(c)$ ينتج لدينا مشتق $f(x)$ في النقطة c ، أي

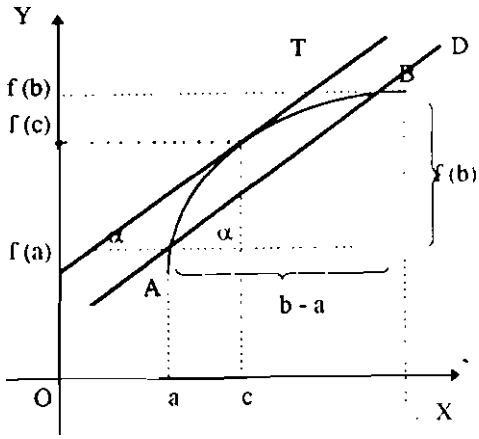
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

التفسير الهندسي لنظرية التزايدات المحدودة

ليكن منحني التابع $f(x)$ كما في الشكل (7) قد كان لدينا

نقطة من القوس $\overset{\frown}{A\,B}$

حيث $A(a , f(a))$ و $B(b , f(b))$



الشكل (7)

فتوجد نقطة واحدة على الأقل مثل C ، إحداثياتها ((c , f(c)) ، من القوس AB يكون فيها المماس موازياً للوتر المار بالنقطتين A و B . حيث أن ميل الوتر $\overline{AB}$ يساوي :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نتيجة : دستور التزايدات المحدودة :

ليكن f(x) تابعاً معرفاً على مجال كيفي $I \subseteq R$ ، وقابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاطه . عندئذ يوجد من أجل كل نقطتين مختلفتين x_2 و x_1 من I , $(x_1 < x_2)$ ، نقطة ما مثل c حيث $x_1 < c < x_2$ وتحقق العلاقة :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$$

تسمى العلاقة الأخيرة دستور التزايدات المحدودة .

يتم البرهان بالتطبيق المباشر لنظرية التزايدات المحدودة .

ملاحظة : من السهل أن نرى أن كل نقطة مثل c محصورة بين x_1 و x_2 يمكن كتابتها بالشكل :

$$c = x_1 + \theta\ (x_2 - x_1) = x_1 + \theta\ h$$

حيث $0 < \theta < 1$ وأن $h = x_2 - x_1$.

نستطيع بفضل هذا التمثيل للنقطة c ، كتابة دستور التزايدات المحدودة على الشكل التالي

$$f(x + h) - f(x) = h\ .\ f'(x + \theta\ h)$$

حيث $0 < \theta < 1$ و h مقدار موجب صغير بمقدار كاف .

مثال ٤ : ليكن $f(x) = x^3$ ، معرف على المجال [2+ , 2-] أي $a = -2$ و $b = +2$ عندئذ نجد أن :

وبذلك تتحقق العلاقة

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

وهو المطلوب

خواص التكامل المحدود

بفرض ان التابع $f(x)$ يقبل المكاملة على المجال $[a\ ,\ b]$ أي $\int_a^b f(x)dx$ موجود . عندئذ يتمتع هذا التكامل بالخواص التالية :

١ – إذا كان $a = b$ فإن $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

٢ – إذا كان $a < b$ فان

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

٣ – يتعلق تكامل ريمن بالتابع المكامل $f(x)$ وبحدي التكامل $a\ ,\ b$ ، ولكنه لايتعلق بالمتحول x ، أي

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b'} f(u)du$$

٤ – إذا كان التابعان $f(x)$ و $g(x)$ قابلين للمكاملة على المجال $[\ a\ ,\ b\ ]$ ، فإن التابع $f(x) \pm g(x)$ هو أيضاً يقبل المكاملة في نفس المجال $[\ a\ ,\ b\ ]$ ، أي :

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

يمكن تعميم هذه الخاصة بالقول :

إن تكامل مجموع عدة توابع يساوي مجموع تكاملات هذه التوابع .

٥ – إذا كان التابع يقبل المكاملة في المجال $[\ a\ ,\ b\ ]$ ، وكان A تابعاً ثابتاً ، فإن التابع $Af(x)$ يقبل المكاملة أيضاً في المجال $[\ a\ ,\ b\ ]$ ، وبالتالي فإن :

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

أي يمكننا إخراج العدد الثابت من تحت اشارة التكامل .

٦ – إذا كان التابع f (x) يقبل المكاملة في المجال [a , b] ، فهو يقبل المكاملة في كل مجال جزئي [α , β] من [a , b] .

٧ – اذا كان التابع f (x) يقبل المكاملة [illegible]
فهو يقبل المكاملة في المجال [a , b] ، [illegible]

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

تفيد هذه الخاصة بإمكانية تجزئة محال التكامل في [illegible] خصوصا في حل
الخط البياني للتابع f (x) يقطع المحور OX في عدة نقاط ، بحيث يقع فوق وتحت المحور OX . من المفيد في هذه الحالة تجزئة المجال [a , b] إلى مجالات جزئية حدودها هي نقاط تقاطع منحني التابع f (x) مع المحور OX ، ثم بعد ذلك يؤخذ مجموع المساحات الناتجة بالقيمة المطلقة .

٨ – إذا كان التابعان f (x) و g (x) يقبلان المكاملة في المحال [a , b] فإن جداءهما f (x) . g (x) تابع يقبل المكاملة أيضا في نفس المحال [a , b] .

٩ – اذا كان التابع f (x) يقبل المكاملة في [a , b] فإن القيمة المطلقة للتابع f (x) أي |f(x)| هي تابع يقبل المكاملة أيضا في [a , b] .

١٠ – إذا كان التابع f (x) يقبل المكاملة وغير سالب في المجال [a , b] فإن

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

١١ – إذا كان التابعان f (x) و g (x) قابلين للمكاملة في المجال [a , b] وإذا كان من أجل كل x تتحقق العلاقة :

$$f(x) \geq g(x)$$

عندئذ يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

١٢ – إذا كان التابع f (x) قابلا المكاملة في [a . b] ، فإن

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)dx|$$

١٣ – إذا كان التابعان f(x) و g (x) قابلين للمكاملة في [a , b] و g (x) تابع غير سالب في [a , b] ، فإن :

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx < M \int_a^b g(x)dx$$

حيث M و m النهايتان العظمى والصغرى للتابع f (x) في المجال [a , b] .

١٤ – إذا كان f (x) زوجياً أي f (- x) = f (x) وقابلاً للمكاملة في المجال[a , -a]، أي حدا التكامل متناظران بالنسبة لمبدأ الإحداثيات ، عندئذ يكون

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

١٥ – إذا كان f(x) فردياً أي f(- x) = - f(x) ، يقبل المكاملة في المجال [a , -a]،

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

١٦ – إن قيمة التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ تحقق المتراجحة المضاعفة

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

حيث M و m النهايتان العظمى والصغرى للتابع f (x) في المجال [a , b] .

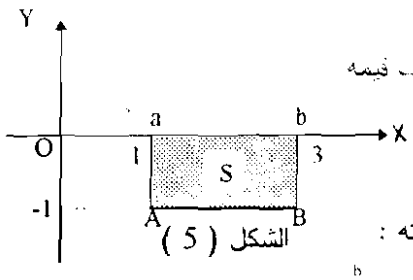
١٧ – متراجحة كوشي – بونيا كوفسكي – شوارتز .

(V. BOUNIACOVCKI , 1804 - 1899 ; H. Schwartz ,1843- 1921)

إذا كان التابعان f (x) و g (x) قابلين للمكاملة في [a , b] فان :

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx}$$

معنى إشارة التكامل :



الشكل (5)

ليكن التابع الثابت $f(x) = -1$ ولنحسب قيمه المساحة بين الخط البياني لهذا التابع ضمن المجال [1 , 3] ، حيث نلاحظ أن هذا التابع مستمر في المجال المعطى وبالتالي يمكن مكاملته :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^3 -dx = -[x]_1^3 = -2$$

وهذا الناتج هو قيمة مساحة المستطيل ab BA ، ونجد أن الإشارة السالبة في ناتج التكامل وهو 2- ، تشير فقط إلى كون المساحة المحسوبة تقع تحت المحور OX (نظراً لأن التابع سالب) .

ملاحظات :

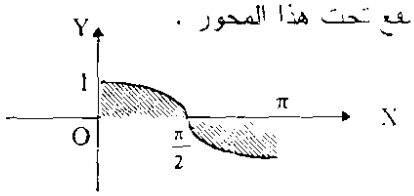
١ – إذا كان التابع سالباً دوماً ضمن المجال [a , b] فإن الإشارة السالبة في ناتج التكامل تشير إلى وقوع السطح تحت المحور OX .

٢ –إذا كان التابع موجباً دوماً ضمن المجال [a , b] ، فإن الإشارة الموجبة تشير إلى وقوع السطح فوق المحور OX

٣ – أما إذا كان التابع سالباً في بعض أجزاء [a , b] وموجباً في أجزاء منه ، فإن قيمة ناتج التكامل تمثل الفرق بين قيمتي السطحين المتوضعين فوق وتحت المحور OX ، وذلك إذا حسب التكامل مباشرة من a إلى b . وهنا تظهر ضرورة تقسيم المجال [a , b] إلى مجالات جزئية بنقاط تقاطع منحنى التابع مع المحور OX ومن ثم تحسب التكاملات الجزئية ويؤخذ المجموع أخيراً بالقيمة المطلقة .

مثال ١ : أحسب التكامل : $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

إن التابع $\cos x$ يقطع المحور OX في النقطة $\frac{\pi}{2}$ ، وهذا يشير الى وقوع قسم من السطح فوق المحور OX والقسم الاخر منه يقع تحت هذا المحور .



الشكل (6)

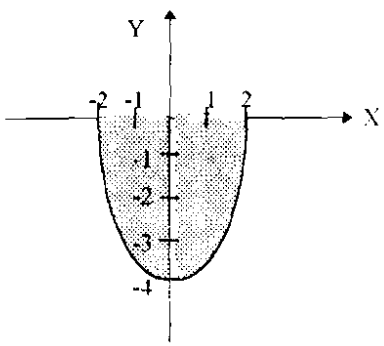
إن حساب التكامل المعطى يعني حساب السطح المظلل في الشكل أعلاه ، وهنا نحسب التكامل بتجزئة المجال كما يلي :

$$\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$$

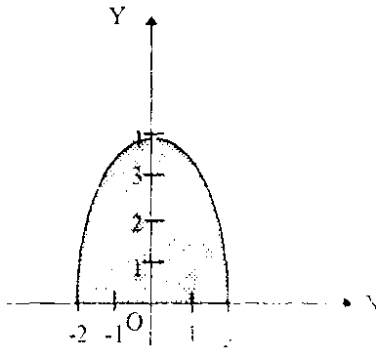
$$= \left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \qquad |s_1| + |s_2| = |1| + |-1| = 2$$

نلاحظ أننا لو حسبنا التكامل مباشرة من 0 إلى π لكان الناتج صفراً .

مثال ٢ : ليكن التابع $f(x) = x^2 - 4$. إن هذا التابع سالب عند $|x| < 2$ الشكل (7 -a) . إذا كاملنا هذا التابع في المجال [2+ ، 2-] نجد :



(7 - a)



(7 - b)

الشكل (7)

$$\int f(x)\,dx = \int (x \quad 4)\,dx$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = \frac{32}{3}$$

نلاحظ أن إشارة ناتج التكامل سالبة ، وهذا يفسر وقوع الخط البياني للتابع تحت المحور OX .

أما إذا أخذنا التابع

$$y = g(x) = -f(x) = -4 + x^2 \quad , \quad -2 \le x \le 2$$

فإن خطه البياني والمساحة التي يحددها يقع فوق المحور OX ، ويمكن أن نراهما معكوسة كما في المرآة للمنحني في الشكل (7-أ) ، باعتبار المحور OX هو المرآة. وتكون المساحة بين بيان $y = g(x)$ والمحور OX هي

$$\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

وهي مساحة موجبة لأنها واقعة فوق المحور OX .

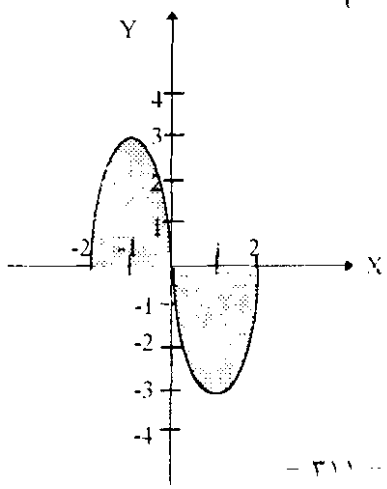
مثال ٣ : أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^3 - 4x$ والمحور OX .

الحل : يقع بيان التابع في الشكل (8) فوق المحور OX من 2- إلى 0 ، وتحته من 0 إلى 2+ .

{ تحدد اشارة التابع $y = x^3 - 4x$ بتحليله إلى جداء عوامل خطية

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$

وأخذ جداء إشارات كل عامل من عوامله } .



الشكل (8)

لحساب هذه المساحة المطلوبة نجزىء المجال [2+ ، 2-] إلى مجالين [o ، 2-] و [2+ ، o] ونكامل التابع $y = x^3 - 4x$ ضمن هذين المجالين :

$$A_1 = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x \right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big|_{-2}^{0}$$

$$= 0 - (4 - 8) = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} \left(x^3 - 4x \right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big|_{0}^{2} = 4 - 8 = -4$$

$$A_1 + |A_2| = 4 + |-4| = 8$$

ملاحظـــات

١ – إذا كان أحد أو كلا طرفي المجال تابعا للمتحول x ، فإن نتيجة التكامل تكون تابعاً لـ x ، أي

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x)\, dx = F\left(h(x) \right) - F\left(g(x) \right) = \phi(x)$$

مثال ٤ : أحسب التكامل

$$\int_{0}^{\sqrt{x}} (t+1)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

من أجل $x > 0$.

الحل : بالتكامل المباشر نجد

$$\int_{0}^{x} (t+1)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{x}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$$

٢ – إذا كان التابع المكامل غير معرف في أحد طرفي المجال ، كالتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ونريد مكاملته في المجال [1 ، o] . نلاحظ أن f (x) غير معرف عند o . ولذلك نأخذ تكامله من ε إلى 1 وننهي $\varepsilon \to o$ ، كما يلي :

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon} \right) = 2$$

٣ – إذا كان أحد أو كلا حدي التكامل لانهاية ، عندئذ نسمي التكامل تكاملا معتلا ، ونوجد قيمته بتكامله من أحد حديه الى حد آخر N وننهي N إلى اللانهاية ، ونحسب النهاية الناتجة .

مثال ٦ : أحسب التكامل

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \to \infty} \int_{0}^{N} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \to \infty} \left[\text{arc tg } x \right]_{0}^{N}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left[\text{arc tg } N - 0 \right] = \frac{\pi}{2}$$

طرائق حساب التكامل المحدود

تتبع نفس طرائق حساب التكامل غير المحدود لحساب التكامل المحدود ، مع الأخذ بعين الاعتبار خصائص التكامل المحدود ، التي سنبحثها فيما يلي :

١ – طريقة تغيير المتحول :

إن النظرية التالية توضح الأساس النظري لهذه الطريقة .

نظرية : ليكن لدينا :

١ – **التابع** $f(x)$ **مستمر على المجال** $[a, b]$.

٢ – **للتابع** $x = \varphi(t)$ **مشتق مستمر في المجال** $[\alpha, \beta]$.

٣ – $a = \varphi(\alpha) < \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$

عندئذ تتحقق المساواة التالية :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t) \right] \varphi'(t)\,dt \qquad (1)$$

البرهان : نشير قبل كل شيء الى ان الشرط الثالث للنظرية يحوي التابع المركب

إذا كان $f(x)$ متصلاً على $[a, b]$ وهو مستمر حسب شرط النظرية .

لتكن $F(x)$ التابع الأصلي للتابع $f(x)$ في المجال $[a, b]$ ، واعتماداً على علاقة نيوتن - لايبنتز نكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

حيث $f(x)$ يقبل الاشتقاق في $[a, b]$ و $\varphi(t)$ يقبل الاشتقاق في $[\alpha, \beta]$ ، وحسب الشرط الثالث فإن التابع $f[\varphi(t)]$ يقبل الاشتقاق في $[\alpha, \beta]$ ، حيث

$$\frac{d}{dt} F[\varphi(t)] = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

أي إن $F[\varphi(t)]$ هو التابع الأصلي للتابع $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ في $[\alpha, \beta]$.

وبالتالي ، وحسب علاقة نيوتن - لايبنتز ، نجد :

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

حيث $a = \varphi(\alpha)$ و $b = \varphi(\beta)$ ، إذن

$$\int_a^b f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

من المساواتين (2) و (3) تنتج صحة المساواة (1) وهو المطلوب .

نتيجة : تكتب غالباً العلاقة (1) بالشكل

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\,d\varphi(t)$$

وهذا يشير إلى أننا غيرنا المتحول x في التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ بالمتحول t حسب العلاقة $x = \varphi(t)$.

أي إنه عند تغيير المتحول x بمتحول t ، يجب تغيير حدي التكامل $[a, b]$ ليصبحا $[\alpha, \beta]$ حسب العلاقتين

$$a = \varphi(\alpha) \qquad , \qquad b = \varphi(\beta)$$

مثال ٧ : أحسب التكامل :

$$J = \int_{o}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

الحل : نجري تغييراً في المتحول ، فنفرض $x = a \sin t$ ومنه نجد

$$dx = a \cos t\, dt$$

لإيجاد حدي التكامل الجديدين ، نحل المعادلتين

$$o = a \sin t \qquad (1)$$

$$a = a \sin t \qquad (2)$$

إن $\alpha = o$ هو حل للمعادلة (1)

و $\beta = \frac{\pi}{2}$ هو حل للمعادلة (2)

وهذان الحلان يحققان شروط النظرية :

١ – التابع $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ مستمر في المجال $[\, o , a \,]$.

٢ – التابع $\varphi(t) = a \sin t$ له مشتق مستمر في المجال $\left[o , \frac{\pi}{2} \right]$

٣ – لاتتجاوز قيم التابع $\varphi(t) = a \sin t$ المجال $[\, o , a \,]$ عندما $o \le t \le \frac{\pi}{2}$

إذن بإمكاننا استخدام العلاقة (1) ، لحل التكامل ، فنجد :

$$\int_{o}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t\, dt$$

$$= a^2 \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = a^2 \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_{o}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

٢ – حساب التكامل المحدود بالتجزئة :

تعتمد هذه الطريقة على النظرية التالية :

نظرية ٢ : اذا كان التابعان (x) u و (x) v مستمرين ، ولهما مشتقين قابلين للمكاملة في المجال [a , b] . فإن

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \qquad (1)$$

البرهان : ان التابعين $u(x)\,v'(x)$ و $v(x)\,u'(x)$ قابلان للمكاملة في المجال $[a,b]$ ، لأن كلاً منهما جداء تابعين قابلين للمكاملة .

اذن التكاملان في العلاقة (1) موجودان . وأما الجداء $u(x)\,v(x)$ فله مشتق قابل للمكاملة ، وذلك لأن :

$$\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] = u(x)v'(x) + u'(x)\,v(x)$$

وبتطبيق علاقة نيوتن – لايبنتز ، نحصل على :

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)]dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b$$

من هذه العلاقة تنتج العلاقة (1) . ويتم بذلك البرهان .

مثال : أحسب التكامل $I = \int x\cos x\,dx$

الحل : تكامل بالتجزئة ، لذلك نفرض

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$I = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x.\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1$$

أمثلة عامة محلولة في التكامل

مثال ١ : أحسب التكامل :

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$$

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \frac{1}{5}\int_{-2}^{1}(11+5x)^{-3}\,d(11+5x) =$$

$$= \frac{-1}{10}\,\frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{-1}{10}\left[\frac{1}{6^2} - \frac{1}{1^2}\right]$$

$$= \frac{-1}{10}\left(\frac{1}{36} - 1\right) = \frac{-1}{10}\left(\frac{1-36}{36}\right) = \frac{35}{360} = \frac{7}{72}$$

مثال ٢ : أحسب التكامل :

$$\int_{0}^{2} |1-x|\,dx$$

الحل : إن تابع القيمة المطلقة يمكن أن يكتب ضمن المجال [0 , 2] كما يلي

$$|1-x| = \begin{cases} (1-x) & (1-x) \geq 0 \Rightarrow \quad 1 \geq x \geq 0 \\ -(1-x) = (x-1) & (1-x) < 0 \Rightarrow \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

بتجزيء مجال التكامل [0 , 2] إلى المجالين [0 , 1] و [1 , 2] نجد

$$\int_{0}^{2} |1-x|\,dx = \int_{0}^{1}(1-x)\,dx + \int_{1}^{2} -(1-x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{1}(1-x)\,d(1-x) + \int_{1}^{2}(x-1)\,d(x-1)$$

$$= -\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} + \frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

مثال ٣ : ليكن a و x عددين حقيقيين أكبر تماما من 1 وبحيث $a < x$. أحسب التكامل التالي :

$$I = \int_{a}^{x} \frac{dt}{t^3(1+t^3)}$$

الحل : يحوي التابع الكسري المخرج $t^3(1+t^3) = t^3(t+1)(t^2-t+1)$ وبالتالي فإن لكثير الحدود $t^3(1+t^3)$ جذرين حقيقيين هما 0 ، 1- وهما يقعان خارج المجال $[a, x]$ ، اذن التابع مستمر على المجال $[a, x]$ وبالتالي فهو قابل للمكاملة .

نفك الكسر كما يلي :

$$\frac{1}{t^3(t^3+1)} = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^3+1}$$

ونفرق الكسر الأخير

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+c}{t^2-t+1}$$

نحسب قيم A , B ,C بتوحيد المحرجين وحذفهما وإجراء المطابقة بين طرفي المعادلة الناتجة فنجد :

$$1 = A(t^2-t+1) + (Bt+c)(t+1)$$
$$= (A+B)t^2 + (-A+B+C)t + A + C$$

$$A + B = 0 \qquad (1)$$
$$-A + B + C = 0 \qquad (2)$$
$$A + C = 1 \qquad (3)$$

بضرب (2) بـ (1-) واضافتها إلى (1) نجد : $+2A - C = 0$

وبالجمع مع (3) نجد :

$$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \ , \ B = -\frac{1}{3} \ , \ C = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{t^3(t^3+1)} = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t+1} + \frac{-t+2}{t^2-t+1}\right]$$

أما الشكل الأخير فيكتب بالشكل :

$$\frac{-t-2}{t^2-t+1}=\frac{-\frac{1}{2}(2t-1)-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}=\frac{\frac{1}{2}(2t-1)}{t^2-t+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

بالتعويض في التكامل نجد :

$$I=\int_a^x\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{3}\left[\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int_a^x\frac{(2t-1)}{t^2-t+1}dt+\int\frac{dt}{\frac{2}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right]$$

$$\frac{-1}{2t^2}-\frac{1}{3}\text{Ln}\left|t+1\right|+\frac{1}{6}\text{Ln}\left|t^2-t+1\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{Arc tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\Bigg]_a^x$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right]-\frac{1}{3}\text{Ln}\frac{1+x}{1+a}+\frac{1}{6}\text{Ln}\frac{x^2-x+1}{a^2-a+1}-$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{2}\right)$$

مثال ٤ : أحسب التكامل

$$\int_0^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx$$

حيث $k \neq n$

لدينا من قوانين المثلثات :

$$\sin kx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(k+n)x+\sin(k-n)x\right]$$

نعوض في التكامل :

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\sin(k+n)x+\sin(k-n)x\right]dx$$

$$\cos(k+n)x \quad \cos(k \quad r)x \Big]^{\pi}$$

$$k+n \quad k \quad n \quad k \quad n \quad k \quad n$$

$$(-1)^{k} \quad (-1) \quad$$

$$k+n \quad k \quad n \quad k \quad n \quad k \quad n$$

وبما ان لـ $k+n$ و $k-n$ نفس الزوجية ، نجد :

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(-1)^{k} \quad \frac{-1}{k+n} + \frac{1}{k \quad n} - \frac{1}{k \quad n} - \frac{1}{k \quad n}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(-1)^{k} \quad \frac{2n}{k^{2} \quad n} - \frac{2n}{k \quad n}$$

$$\frac{n}{k^{2}-n^{2}}\left[(-1)^{k} \quad 1\right]$$

للفرض الان أن $k = n$ عندئذ نجد :

$$\sin nx \cos nx = \frac{1}{2}\sin 2nx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin 2nx = \frac{1}{2}\left[\quad \frac{\cos 2n}{2n} \quad \frac{-1}{2}\right] = 0$$

مثال أحسب التكامل

$$\int t^{4}\left(1+t^{5}\right)^{5}dt$$

حيث n عدد حقيقي .

نفرض $u = t^{5}$ ومنه $du = 5t^{4}dt$

$$\int \frac{1}{5}(1+u)^{5}du = \quad \frac{(1+u)^{6}}{6}\Big]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{30}\left[\left(1+t^{5}\right)^{6}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{30}\left[\left(1+x^{5}\right)^{6}-1\right]$$

تمارين عامة

أولاً – التكامل غير المحدود

١ – حل التكاملات التالية بالتكامل المباشر وبطريقة تغيير المتحول

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x^2}}$

3) $\int \sqrt[5]{(5-2x)^6}\,dx$ ، 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-9x^2}}$

5) $\int \frac{dx}{ax+b}$ ، 6) $\int \frac{3^{2x}-1}{\sqrt{3^x}}\,dx$

7) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$; 8) $\int \frac{\text{arc tg}\frac{x}{3}}{g+x^2}\,dx$

9) $\int \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}}\,dx$ ، 10) $\int \frac{\cos 2x}{2+\sin 2x}\,dx$

11) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx$ ، 12) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 - \sin^2 x}}\,dx$

13) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[4]{\sin x}}$; 14) $\int \frac{e^{\text{arc cotg}x} + x\,Ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$

15) $\int \frac{\arccos(2x) - x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; 16) $\int tg\,x\,dx$. $\int \cot g\,x\,dx$

17) $\frac{dx}{\sqrt[3]{Ln\,n-1}}$: 18) $\int \frac{x^5+2}{x^2+1}\,dx$

19) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$ ، 20) $\int \frac{\sqrt[3]{Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

21) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3-x^2}}$ ، 22) $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ ٢٠ $\int \frac{x\,dx}{(2x-1)^3}$

. $x = 2\sin t$ لحل افرض أن

حل التكاملات الآتية بطريقة التجزئة :

$\int x\, e^{-x}\, dx$ $\int x^2 e^{3x}\, dx$

$\int x^2 \sin 2x\, dx$ $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\, dx$

$\int x\, e^{x^2}\left(x^2+1\right) dx$ $\int \frac{x+\sin 2x}{1+\cos 2x}\, dx$

$\int \sqrt{x}\, \ln^2 x\, dx$ $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+3}}\, dx$

$\int \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

- حل التكاملات التالية بطريقة تفريق الكسور :

1) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$, 2) $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$

3) $\int \frac{x\,dx}{x^3 - 1}$, 3) $\int \frac{2x^2 - x + 3}{(x^2 + 1)}\,dx$

5) $\int \frac{2x + 3}{x^3 - x^2 + 2x}\,dx$; 6) $\int \frac{3x + 2}{(x + 1)^3}\,dx$

7) $\int \frac{x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)}\,dx$; 8) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

9) $\int \frac{5x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$; 10) $\int \frac{x^4}{x^4 - 1}\,dx$

11) $\int \frac{3x - 7}{x^3 + x^2 + 4x + 4}\,dx$; 12) $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 - 6x^2 - 8}\,dx$

13) $\int \frac{2x\,dx}{(1 + x)(1 + x^2)^2}$; 14) $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2}$

15) $\int \frac{3x + 2}{(x^2 - 3x + 3)^2}\,dx$; 16) $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2}$

احسب التكاملات الجذرية التالية :

1) $\int \frac{x + 1}{\sqrt[3]{3x + 1}}\,dx$; 2) $\int x\sqrt{2 - x}\,dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x + 1} - 1}$; 4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2}}$

5) $\int \frac{x^3}{2 + \sqrt{4 - x^2}}\,dx$; 6) $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

7) $\int \frac{dx}{(x + 1)^5\sqrt{x^2 + 2x}}$; 8) $\int \frac{dx}{(x + 1)^3\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$

9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, 10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$

٦ - أحسب التكاملات المثلثية الآتية :

1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sin x\,(2\cos^2 x - 1)}$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$; 4) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

5) $\int \frac{dx}{\cos^4 x . \sin^2 x}$

(توجيه : لحل هذا التمرين بدل العدد (1) في البسط بـ ($\sin^2 x + \cos^2 x$)).

6) $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$; 7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x . \cos x - \cos^2 x}$

(توجيه : لحل التمرين 7 : قسم البسط و المقام على $\cos^2 x$ وضع $tgx = t$)

8) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$; 9) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

[توجيه : لحل التمرين (9) ، إضرب البسط والمقام بـ (1 - sin x)]

10) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$; 11) $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x + 2\sin x)}$

12) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}\,dx$; 13) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}\,dx$

14) $\int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$

[توجيه : لحل التمرين (14) ، فرق الكسر فيصبح بالشكل

$$\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{3-\sin x}$$

ثم افرض $tg\frac{x}{2} = t$

1) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ 2) $\int \sqrt{\quad}$

3) $\int_0^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ 4) $\int_0^{1} \frac{x^3}{1+x^8}\, dx$

5) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 6) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \operatorname{Ln} x}$

7) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\operatorname{Ln} x}}$ 8) $\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

9) $\int_{\quad}^{1} \sqrt{4+x^2}\, dx$ 10) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\quad} \frac{\sin x}{x} dx$

حل التمارين التالية بطريقة تغيير المتحول

1) $\int_0^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$ $|x| < 1$

π

6) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ ، 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$

8) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$ ؛ 9) $\int_{0}^{a} \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$

٣ – أحسب التكاملات المحدودة التالية بطريقة التجزئة :

1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$ ؛ 2) $\int_{0}^{1} xLn\left(1+x^2\right)dx$

3) $\int_{1}^{16} \text{arc tg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$ ؛ 4) $\int_{0}^{1}(x-1)e^{-x}\,dx$

5) $\int_{0}^{\pi} x^3\sin x\,dx$ ، 6) $\int_{0}^{1} x\ \text{arc tg}\ x\,dx$

7) $\int_{0}^{1} \frac{\text{arc sin}\ x}{\sqrt{1+x}}dx$ ؛ 8) $\int_{1}^{e} Ln^3 x\,dx$

9) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$ ، 10) $\int_{0}^{1} x^3e^{2x}dx$

٤ – ليكن a و c عددين حقيقيين غير معدومين ، و a و x عددين حقيقيين بحيث يكون كل من التكاملات التالية معرفا .

1) $\int_a^x \frac{dt}{2 - \cos t}$

2) $\int_a^x \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt$

3) $\int_a^x \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} dt$

4) $\int_a^x \frac{dt}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}$

$\int_a^x \frac{dt}{b^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t}$

أحسب التكاملات السابقة من (1) إلى (5) .

الفصل التاسع

التوابع لمتحولين وعدة متحولات*

١ – مقدمة :

إن التوابع لمتحولين أو لعدة متحولات هي تعميم لفكرة التوابع لمتحول واحد. تعتمد دراستها على ما ورد في الفصول السابقة ، لذلك سنحاول استعراض هذه التوابع بشكل مختصر

١ – تعريف التابع لمتحولين :

إن التابع لمتحولين هو علاقة بين متحول z ومتحولين مستقلين x و y بحيث يكون z معرفاً على منطقة D من المستوى xoy ويكون له قيمة وحيدة مقابلة لكل ثنائية (x , y) . ونكتب تلك العلاقة على الشكل التالي :

$$z = f(x, y) \quad ; \quad \forall (x, y) \in D$$

وكمثال على التوابع لمتحولين نورد الأمثلة التالية مع مجالات تحول كل متحول :

$$z = 2x + y + 5 \quad ; \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad -\infty < y < +\infty$$

$$z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)} \quad ; \quad 25 - (x^2 + y^2) \geq 0$$

$$z = x \ y \quad ; \quad x \in z, y \in z$$

وفي الحياة العملية والإقتصادية يوجد عدد كبير من التوابع لعدة متحولات ، نذكر منها التوابع التالية :

– كمية منتجات سلعة ما z يرتبط بمقادير المواد الأولية الداخلة في الإنتاج .

– تكلفة احدى السلع ترتبط بمقادير وأسعار المواد الداخلة فيها .

– مساحة المثلث ترتبط بطول قاعدته وارتفاعه .

---

* إن معظم ما سيرد في هذا الفصل مأخوذ من كتاب الرياضيات الإقتصادية لمؤلفه الدكتور ابراهيم العلي من منشورات جامعة تشرين عام ١٩٩٣ .

٢ - منطقة تعريف التابع لمتحولين :

بما أن التابع z مرتبط بالمتحولين (x , y) وفق علاقة معينة هي :

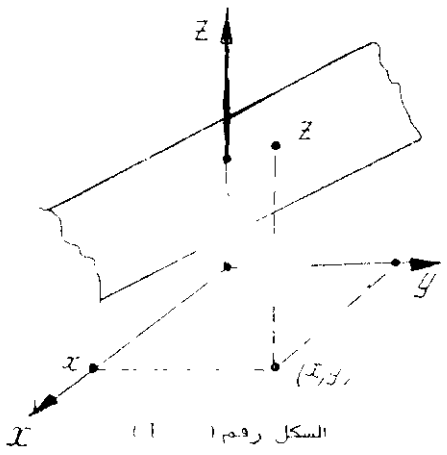
$$z = f(x, y)$$

وبما أن كلا من المتحولين x و y يعتبر متحولاً مستقلا فإن كلا منهما يمثل على محور مستقل ، وان منطقة تعريف التابع z هي مجموعة القيم (x , y) التي تجعل التابع z معينا . ان هذه المجموعة تشكل منطقة في المستوى XOY . أما قيم التابع z فتمثل على المحور الثالث OZ ، وهي تأخذ شكل سطح معين في الفضاء R^3 ، يختلف شكله من علاقة لأخرى .

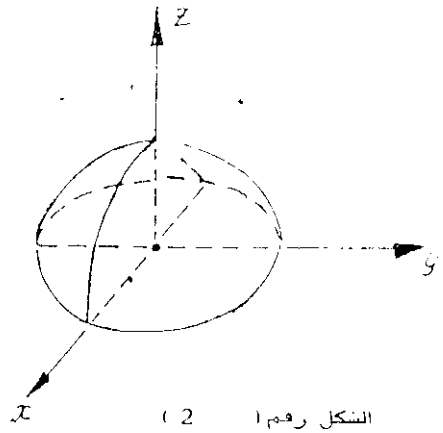
فاذا كانت العلاقة بين z والمتحولين x و y خطية من الشكل :

$$z = ax + by + c \qquad (1)$$

فان منطقة تعريف z تشمل جميع قيم المستوي XOY وان السطح الذي تشكله قيم z هو سطح مستو معرف على كامل XOY . كما هو في الشكل (1) .



الشكل رقم (1)



الشكل رقم (2)

فإن منطقة تعريف z هي المنطقة من XOY التي تحقق الشرط

$$25 - (x^2 + y^2) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

وهي تمثل كامل الدائرة التي مركزها (0 ، 0) ونصف قطرها 5 في المستوى XOY . أما قيم z فتشكل سطح نصف كرة فوق تلك الدائرة (الإشارة الموجبة للجذر) ، كما هو موضح على الشكل رقم (2) . أما إذا كانت العلاقة من الشكل :

$$z = \frac{x}{y-1} + 10$$

فإن منطقة تعريف z هي المستوى XOY ماعدا النقاط التي يكون فيها $y = 1$ ، وان هذه النقاط تشكل مستويا موازيا لـ XOZ ويمر من النقطة (1 ، 0) وان مجموعة هذه النقاط تشكل سطحين يفصل بينهما المستوى $y = 1$. للحصول على قيم z المقبلة لقيم (x ، y) المختلفة والمنتمية لمنطقة التعريف يجب علينا أن نعد جدولا خاصا بذلك كالجدول التالي المعد للتابع $z = x / y - 1$.

Y \ X	1	2	3	4	5	6	7	....
1	1	2	3	4	5	6	7	....
2	2	4	6	8	10	12	14	.....
3	3	6	9	12	15	18	21	.....
4	4	8	12	16	20	24	28	.....
:	.....							

- نهاية التابع لمتحولين :

ان نهاية التابع z عندما ينتهي x الى x_0 وينتهي y الى y_0 من حيث التعريف
هة بنهاية التابع لمتحول واحد ، ونعرفها كما يلي :

نقول عن z_0 انها نهاية التابع $z = F(x, y)$ عندما تنتهي الثنائية (x, y)
، النقطة (x_0, y_0) ، اذا كان مقابل كل متوالية (x_n, y_n) تختلف عن
(x_0, y_0) وتنتهي إلى (x_0, y_0) ، نفسها يوجد متوالية $f(x_n, y_n)$ تنتهي إلى
مة z_0 عندما تنتهي n إلى اللانهاية . ونكتب ذلك كما يلي :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = z_0 \qquad (3$$

على الشكل التالي :

$$f(x, y) \to z_0$$
$$(x, y) \to (x_0, y_0)$$

دما

لأ نجد أن :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2x^2 - y^2) = -2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{5 - xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{1} = 5$$

وهنا نشير الى أن جميع النظريات التي تخص التوابع لمتحول واحد حول
ة مجموع أو فرق أو جداء أو قسمة تابعين هي صحيحة للتوابع لمتحولين ، أي اذا
: ،

$$f(x, y) \to a \qquad g(x, y) \to b$$
$$x \to x_0 \qquad x \to x_0$$
$$y \to y_0 \qquad y \to y_0$$

هذه النهايات تحقق العلاقات التالية :

$$f(x, y) \pm g(x, y) \longrightarrow a \pm b \qquad (4)$$

$$f(x,y)\cdot g(x,y) \to a\cdot b \qquad (5)$$

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \to \frac{a}{b} \qquad (6)$$

حيث أن $g(x,y)\neq 0$ وأن $b\neq 0$

٤ – الاستمرار :

نقول عن التابع $z = f(x,y)$ ، انه مستمر في النقطة (x_0 , y_0) ، اذا كان z معرفا في هذه النقطة ، واذا كانت نهايته تساوي قيمته فيها . أي اذا كان معيناً فيهـا ، وكان :

$$f(x,y) \to f(x_0, y_0) \qquad (7)$$
$$x \to x_0$$
$$y \to y_0$$

وكمثال على ذلك نأخذ التابع :

$$z = \frac{1-xy}{x^2+y^2} = f(x,y)$$

ولنبحث عما اذا كان مستمراً في النقطة $(0,1)$. لذلك نحسب نهايته وقيمته عند هذه النقطة فنجد أنه معين فيها وأن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = 1 = f(0,1)$$

اذن فهو مستمر في $(0,1)$.

٥ – المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى :

بما أن z تابع لمتحولين ، فان تزايد أحدهما أو كلاهما يؤدي الى تزايد z ، وحتى نستطيع معرفة مقدار تزايد z المقابل لتزايد أحد المتحولين نعتبر المتحول الاخـر ثابتا ، ونحسب مقدار تزايد z عندما يتزايد ذلك المتحول .

فاذا اعتبـرنا y ثابتـا و x هو الذي يتغير فان تزايد z عندما يتزايد x بمقدار Δx يساوي :

$$\Delta z_x = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

واذا أخذنا النسبة $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ وبحثنا عن نهايتها عندما تنتهي Δx الى الصفر فإننا نحصل على المشتق الجزئي (النسبي) لـ z بالنسبة للمتحول x . واذا رمزنا لهذا المشتق بـ z'_x فيكون :

$$Z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f'_x \qquad (8)$$

أما اذا اعتبرنا x ثابتا و y هو الذي يتغير فان تزايد z عندما يتزايد y بمقدار Δy يساوي :

$$\Delta z_y = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

واذا أخذنا النسبة $\frac{\Delta z_y}{\Delta y}$ ، وبحثنا عن نهايتها عندما تنتهي Δy الى الصفر ، فاننا نحصل على المشتق الجزئي (النسبي) لـ z بالنسبة لـ y .

واذا رمزنا لهذا المشتق بـ z'_y فيكون :

$$Z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f'_y \qquad (9)$$

كما يرمز عادة لهذين المشتقين الجزئيين z'_x و z'_y بالرمزين $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}$ على الترتيب

مثال ١ : اذا كان لدينا التابع : $Z = x^2y + 4x - 2y - 5$

فلحساب مشتقه الجزئي بالنسبة لـ x ، نعتبر y ثابتا ، ونحسب مشتقه بالنسبة لـ x كتابع لمتحول واحد x ، فنجد أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2xy + 4 - 0 + 0 - 2xy + 4$$

ولحساب مشتقه الجزئي بالنسبة لـ y ، نعتبر x ثابتا ، ونحسب مشتق Z بالنسبة لـ y كتابع لمتحول واحد y ، فنجد أن : $\frac{\partial z}{\partial y} = Z'_y = x^2 - 2$

مثال ٢ : اذا كان لدينا التابع :

$$z = \frac{xy}{x+y} \quad ; \quad x + y \neq 0$$

كان :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Z'_x = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Z'_y = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

مثال٣ : ليكن التابع :

$$Z = a_0 x^{a_1} y^{a_2}$$

حيث a_0 , a_1 و a_2 أعداد ثابتة .

فإن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a_0 a_1 x^{a_1 - 1} y^{a_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a_0 a_2 x^{a_1} y^{a_2 - 1}$$

٦ – المشتقات الجزئية للتوابع الضمنية :

إن التابع الضمني لمتحول واحد هو من الشكل التالي :

$$F(x, y) = 0$$

كما أن :

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (10)$$

[illegible]

[illegible] المشتقين الجزئيين [illegible] التابعين المشابهين لـ (10):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مثال :

$$f(x, y, z) = x^2 + xy - y^2 + 3xz - z^2 + 1 = 0$$

وهنا نلاحظ أن التابع z لايمكن عزله وحسابه بدلالة x و y . لذلك يعتبر هذا التابع تابعاً ضمنياً وأن مشتقاته الجزئية تساوي :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(2x - 3y + 3z)}{3x + 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(3x - 4y)}{3x + 2z}$$

٧ – المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية :

إن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x و y لتابع $z = f(x, y)$ ، هي مشتقات المشتقين الجزئيين $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ فإذا كان z قابلا للاشتقاق ، مرتين وكان كل من $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ قابلا للاشتقاق مرة واحدة في مجال تعريفه ، فإن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x وبالنسبة لـ y تحسب من

العلاقات التالية :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} \qquad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} \qquad (16)$$

إذن هناك أربعة مشتقات جزئية من المرتبة الثانية للتابع z المرتبط بـ x و y

f''_{xx} و f''_{yx} و f''_{xy} و f''_{yy}

وهنا يجب أن نلاحظ أن المشتقين f''_{xy} و f''_{yx} متساويان ، أي أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

وذلك لأن عملية الاشتقاق عملية تبديلية .

مثال ٥ : لنأخذ التابع :

$$z = x^4 - 5x^2y^2 + 3xy^2 + 7 = f(x, y)$$

نقوم أولاً بحساب المشتقين الجزئيين من المرتبة الأولى ، فنجد ان :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -10x^2y + 6xy$$

أما المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية فتساوي :

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -20xy + 6y$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -20xy + 6y$$

$$f'' \quad = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y} = 10x \quad + 6x$$

وهنا نلاحظ أن :

$$f''_{xy} = f''_{yx} = -20xy + 6y$$

مثال ٦ : ليكن لدينا التابع :

$$z = x \cos y - y \sos x = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y - y \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin y - \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \quad \quad \cos x$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

وحسب العلاقتين (8) و (9) نجد أن :

$$\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y \qquad (18)$$

ويمكننا كتابة العلاقة السابقة على الشكل التالي :

$$\Delta z = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}.\Delta x + \frac{\Delta z_y}{\Delta y}.\Delta y \qquad (19)$$

وعندما $\Delta x \to \neq 0$ و $\Delta y \to \neq 0$ فإن $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ و $\Delta z = dz$ كما أن $\frac{\Delta z_x}{\Delta x} \to z'_x$ $\Delta x \to \neq 0$ وإن $\frac{\Delta z_y}{\Delta y} \to z'_y$ $y \to \neq 0$ وبذلك نجد أن العلاقة (19) تأخذ الشكل التالي:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \qquad (20)$$

كما يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (21)$$

يسمى المقدار dz بالتفاضل الكلي للتابع z من المرتبة الأولى .

مثال ٧ :

لنفترض لدينا مخروطاً ارتفاعه h يساوي (30) سم ، ونصف قطر قاعدته r يساوي 10 سم ، فما هو مقدار تغير حجمه اذا ازداد ارتفاعه بمقدار 3 مم ونقص نصف قطر قاعدته بمقدار 1 مم ؟ .

الحل : نعلم ان حجم المخروط V يعطى بدلالة ارتفاعه ونصف قطر قاعدته بالعلاقة:

$$V = \frac{\pi}{3} h r^2$$

ولحساب مقدار تغير الحجم نحسب التفاضل الكلي لـ V ، ولذلك يجب أن نحسب المشتقين الجزئيين لـ V ، فنجد أن :

$$\frac{\partial v}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2\pi hr}{3}$$

وبذلك نجد أن مقدار تغير الحجم يقارب :

$$\Delta v \approx dv = \left(\frac{\pi}{3} r^2\right) dh + \left(\frac{2\pi hr}{3}\right) dr = \frac{\pi}{3}\left[r^2 dh + 2hr\, dr\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[(10)^2(0.3) + 2(30)(10)(-0.1)\right] = -31.42\,cm^3$$

اذن سينقص الحجم V بمقدار 31.42 – سم^3 تقريباً.

٩ – التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع ذي متحولين :

ان التفاضل الكلي من المرتبة الثانيـة هـو التفـاضل الكلـي للتفـاضل الكلـي مـن المرتبة الاولى ، فإذا رمزنا له بـ d^2z فإن :

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y} dy$$

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

وبما أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

فإننا نجد أن :

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \qquad (22)$$

وهي العلاقة التي تعطينا عبارة التفاضل الكلي من المرتبة الثانية للتابع

$$z = f(x, y)$$

مثال ٨ : لنأخذ التابع :

$$z = 2x^2y + 2y^2x + 3xy + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy + 2y^2 + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 4yx + 3x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x + 4y + 3$$

وبذلك نجد أن :

$$d^2 z = (4y) dx^2 + 2 (4x + 4y + 3) dx\, dy + (4x) d y^2$$

١٠ - المشتقات الجزئية لتابع التابع :

لنفترض أن z تابع لمتحولين u و v وفق العلاقة التالية :

$$z = f (u , v)$$

وأن كلاً من u و v تابع للمتحولين x و y وفق العلاقتين .

$$u = g (x , y) \qquad v = h (x , y)$$

والمطلوب : حساب المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع z بالنسبة للمتحولين x و y .

من العلاقة (21) نلاحظ أن التفاضل الكلي لـ z كتابع لـ u و v يساوي :

$$d z = \frac{\partial z}{\partial u} d u + \frac{\partial z}{\partial v} d v$$

وبتقسيم الطرفين على ∂x ثم ∂y نحصل على المشتقين الجزئيين لتابع التابع z بالنسبة لـ x و y التاليين وذلك بعد استبدال dz بـ ∂z و du بـ ∂u و dv بـ ∂v

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (23)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (24)$$

مثال ٩ : نأخذ التابع :

$$z = u \ln v$$

حيث $u = 5x - y$ و $v = x^2 + y^2$

ومن العلاقتين (23) و (24) ، نجد أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln v.(5) + \frac{u}{v} \cdot (2x) = 5\ln(x^2 + y^2) + 2x \frac{5x - y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln v.(-1) + \frac{u}{v} \cdot (2y) = -\ln(x^2 + y^2) + 2y \frac{5x - y}{x^2 + y^2}$$

ملاحظة : عندما يكون كل من u و v تابعا لأحد المتحولين فقط (x مثلاً) ، فإن مشتقه الجزئي بالنسبة لـ y يساوي الصفر ، وبذلك تأخذ العلاقة (23) الشكل التالي :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (23)$$

أما المشتق $\frac{\partial z}{\partial y}$ فيساوي الصفر لأنه في هذه الحالة يكون لدينا :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = o \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = o$$

II – النقاط الحرجة لتابع ذي متحولين :

إن النقاط الحرجة هي مجموعة النقاط المنتمية إلى منطقة التعريف ، والتي تقابل القيم العظمى والصغرى والشاذة للتابع z .

وسنبحث عن هذه النقاط في الحالتين التاليتين :

١– الحالة التي يكون فيها كل من x و y غير مقيد بأي شرط وفي هذه الحالة تسمى النقاط الحرجة بالنقاط الحرجة الموضعية (الحرة) .

٢– الحالة التي يكون فيها المتحولان x و y مرتبطان بعلاقة أو شرط يقيد تحولاتهما وفي هذه الحالة تسمى النقاط الحرجة بالنقاط الحرجة المقيدة أو الشرطية .

أولاً – النقاط الحرجة الموضعية (الحرة) :

نعلم أنه إذا كانت x_0 نقطة حرجة للتابع $f(x)$ ذي المتحول الواحد ، فإنها يجب أن تحقق شروطاً معينة وذلك حسب نوعها :

١- إذا كانت النقطة x_0 تقابل قيمة عظمى لـ $f(x)$ ، فهي تحقق الشرطين :

$$f''(x_0) < 0 \quad , \quad f'(x_0) = 0 \qquad (1)$$

٢- إذا كانت النقطة x_0 تقابل قيمة صغرى لـ $f(x)$ ، فهي تحقق الشرطين :

$$f''(x_0) > 0 \quad , \quad f'(x_0) = 0 \qquad (2)$$

٣- إذا كانت النقطة x_0 شاذة ، أي تقابل قيمة شاذة لـ $f(x)$ ، فهي تحقق الشرطين :

$$f''(x_0) = 0 \quad , \quad f'(x_0) = 0 \qquad (3)$$

أما عندما يكون التابع ذا متحولين ، فإن الشروط التي يجب أن تحققها المشتقات الجزئية للتابع $z = f(x , y)$ حسب أنواع النقاط الحرجة ، هي الشروط التالية :

١- إذا كانت النقطة (x_0 , y_0) تقابل قيمة عظمى للتابع z فهي تحقق الشروط التالية:

$$d^2f(x_0 , y_0) < 0 \quad , \quad f'_y(x_0 , y_0) = 0 \quad , \quad f'_x(x_0 , y_0) = 0 \qquad (4)$$

وكمثال على هذه النقطة وأمثالها ، أوردنا الشكل رقم (3) .

٢- إذا كانت النقطة (x_0 , y_0) تقابل قيمة صغرى للتابع z فهي تحقق الشروط التالية:

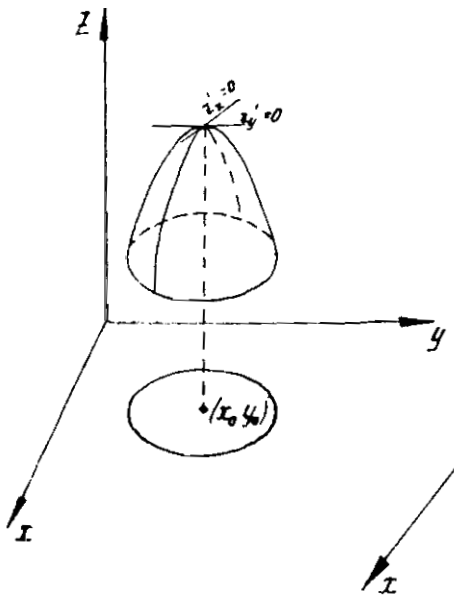
$$d^2f(x_0 , y_0) > 0 \quad , \quad f'_y(x_0 , y_0) = 0 \quad , \quad f'_x(x_0 , y_0) = 0 \qquad (5)$$

وكمثال على هذه النقطة وأمثالها أوردنا الشكل رقم (4) .

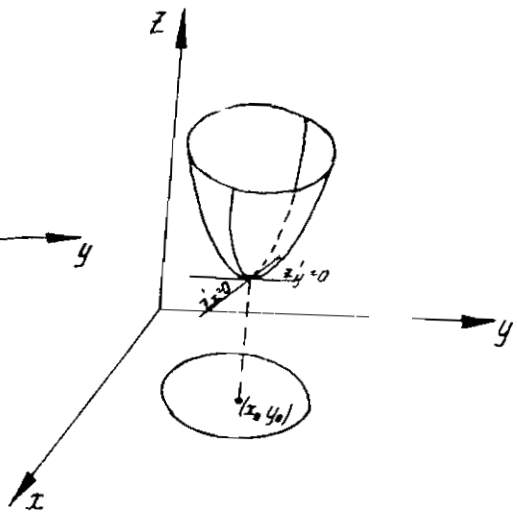
٣- إذا كانت النقطة (x_0 , y_0) تقابل قيمة شاذة للتابع z فهي تحقق الشروط التالية :

$$d^2f(x_0 , y_0) = 0 \quad , \quad f'_y(x_0 , y_0) = 0 \quad , \quad f'_x(x_0 , y_0) = 0 \qquad (6)$$

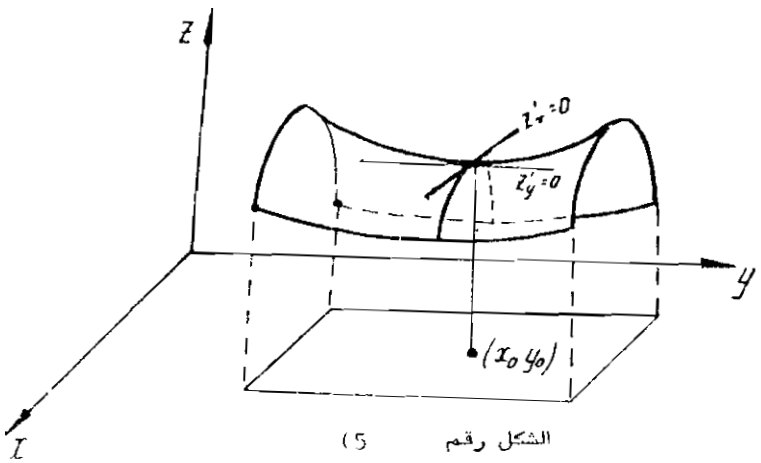
وكمثال على هذه النقطة وأمثالها ، أوردنا الشكل رقم (5) ، الذي يشير إلى النقطة (x_0 , y_0) المقابلة للنقطة $A(x_0 , y_0 , z_0)$ ، والتي تسمى بالنقطة السرجية لأنها تشبه مركز سرج الحصان .



الشكل رقم (3)



الشكل رقم (4)



الشكل رقم (5)

وبذلك يمكننا ان نعبر عن ذلك من خلال النظرية التالية :

نظرية ١ : إذا كان f(x , y) قابلاً للاشتقاق ، وكانت (x_o , y_o) نقطة حرجة من منطقة تعريفه فإنه يجب أن يكون (شرط لازم) .

$$f'_x(x_o , y_o) = o \quad , \quad f'_y(x_o , y_o) = o \qquad (7)$$

وتكون هذه النقطة (x_o , y_o) مقابلة لقيمة عظمى لـ z إذا كان : $d^2f(x_o , y_o) < o$ ومقابلة لقيمة صغرى لـ z إذا كان $d^2 f(x_o , y_o) > o$ ، ومقابلة لقيمة شاذة لـ z إذا كان $d^2 f(x_o , y_o) = o$.

وسنترك هذه النظرية بدون برهان ، ولكننا سنحاول أن نستبدل الشرط الثالث $d^2f(x_o , y_o)$ ، بشرط مكافئ لذلك نحسب قيمة d^2f من العلاقة (22) فنجد أن :

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \qquad (8)$$

وبفرض أن :

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad , \quad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$d^2f = Ad\,x^2 + 2Cdx\,dy + B\,dy^2$$

لنكمل الطرف الأيمن إلى مربع كامل بالنسبة لـ dx ، لذلك نضيف ونطرح $\left(\frac{C^2}{A} dy^2\right)$ فنحصل على :

$$d^2f = Adx^2 + 2Cdx\,dy + \frac{C^2}{A} dy^2 + \left(B - \frac{C^2}{A}\right) dy^2$$

$$d^2f = A\left[dx + \frac{C}{A} dy\right]^2 + \left(\frac{AB - C^2}{A}\right) dy^2 \qquad (9)$$

وبما أن dx و dy غير معدومين إذن فإن التفاضل الكلي d^2f يكون سالباً عندما تتحقق الشروط التالية :

$$A < o \quad , \quad AB - C^2 > o \qquad (10)$$

وبطريقة مشابهة نجد أن d^2f يكون موجبا ، إذا كانت :

$$A > o \quad , \quad AB - C^2 > o \qquad (11)$$

وبكتابة العبارة الأخيرة على شكل معين وبدلالة الرموز الأصلية نجد أن :

$$AB - C^2 = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = H_2$$

إن هذا المعين يسمى معين (هيسان) من المرتبة الثانية ، لذلك رمزنا له بالرمز H_2 . وإذا رمزنا للمقدار A بالرمز H_1 (معين هيسان من المرتبة الأولى) ، فاننا نجد أنه يمكننا التعبير عن الشروط التي يجب أن تحققها النقاط الحرجة من خلال النظرية التالية:

نظرية ٢ : إذا كان $f(x , y)$ قابلاً للاشتقاق وكانت النقطة (x_o , y_o) أحد حلول المعادلتين :

$$f'_y = o \qquad f'_x = o \qquad (12)$$

فإن النقطة (x_o , y_o) تقابل قيمة عظمى موضعية للتابع f ، إذا كانت قيمتا المعينين H_1 , H_2 عند النقطة (x_o , y_o) تحققان مايلي :

$$H_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_o , y_o)} < o \ , \ H_2 = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{matrix} \right|_{(x_o , y_o)} > o \qquad (13)$$

وإن النقطة (x_o , y_o) تقابل قيمة صغرى موضعية للتابع f ، إذا كانت قيمتا المعينين H_1 , H_2 عند النقطة (x_o , y_o) تحققان مايلي :

$$H_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_o , y_o)} > o \ ; \ H_2 = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{matrix} \right|_{(x_o , y_o)} > o \qquad (14)$$

وتكون (y x) مقبلة لنقطة شاذة اذا كانت غير ذلك .

ملاحظة : يجب أن نطبق هذه النظرية على جميع حلول المعادلتين (12) والتي تمثل مجموعة النقاط الحرجة للتابع f ، وبذلك نعرض احداثيات كل نقطة حرجة على انفراد في المعينين H_1 ، H_2 ، حيث نتمكن نوع كل النقاط الحرجة ، نقطة نقطة حسب الشروط الواردة في النظريات السابقة .

مثال ١٠ : اوجد النقاط الحرجة للتابع :

$$z = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4 \quad f(x , y)$$

ثم حدد نوعها وأوجد قيمة التابع عند كل منها .

الحل : لايجاد النقاط الحرجة يجب حساب f'_x ، f'_y ، ثم وضعهما مساويين للصفر فنجد أن

$$f'_x = 3x^2 + 2x - y = 0 \qquad (1)$$

$$f'_y = -x + 2y = 0 \qquad (2)$$

لايجاد الحلول المشتركة لهاتين المعادلتين نحسب x من الثانية ونعوضه في الأولى ($x = 2y$) فنحصل على المعادلة التالية :

$$3(2y)^2 + 2(2y) - y = 0$$

$$12y^2 + 3y = 0$$

$$y(12y + 3) = 0$$

ولها حلان هما : $y = -\frac{1}{4}$; $y = 0$

ويقابلهما قيمتان لـ x : $x = -\frac{1}{2}$; $x = 0$

اذن توجد لدينا نقطتان حرجتان هما $(0 , 0)$ ، $\left(-\frac{1}{2} , -\frac{1}{4}\right)$

ولدراسة نوعية كل من هاتين النقطتين نحسب المشتقات الثانية :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

ثم نقوم بايجاد المعين H_1 ، H_2 فنجد أن :

$$H_1 = [6x+2] \quad ; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 6x+2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بتبديل إحداثيات كل نقطة في H_1 ، H_2 ، فنجد بالنسبة للنقطة $(o\ ,\ o)$ أن:

$$H_1 = [6x+2]_{(o\ ,\ o)} = 2 > o$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 6x+2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{(o\ ,\ o)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > o$$

وبما أن $H_1 > o$, $H_2 > o$ اذن النقطة $(o\ ,\ o)$ تقابل قيمة صغرى للتابع z وإن هذه القيمة تساوي $z = 4$.

ثم نقوم بتبديل إحداثيات $\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{4}\right)$ في H_1 , H_2 ، فنجد أن :

$$H_1 = [6x+2]_{\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{4}\right)} = -1 < o$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 6x+2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{4}\right)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -3 < o$$

و بما أن $H_1 < o$, $H_2 < o$ (وهي حالة غير واردة في النظرية ٢) ، إذن النقطة $\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{4}\right)$ لاتقابل قيمة صغرى ولاقيمة عظمى بل هي تقابل نقطة شاذة للتابع z وأن هذه القيمة تساوي :

$$z = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 4$$

$$= 3.8125$$

ثانياً : النقاط الحرجة المقيدة (الشرطية) :

وهي مجموعة النقاط الحرجة للتابع z عندما يكون المتحولان x, y مرتبطين بشرط ما ، وكمثال على ذلك نأخذ التابع :

$$z = xy + 2x + 2$$

علماً بأن x و y يرتبطان بالشرط :

$$2x + y = 30$$

النقاط الحرجة للتابع z مع وجود شرط واحد فقط .*

لنفترض أن $z = f(x , y)$ قابلاً للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة من منطقة تعريفه ، ونريد إيجاد النقاط الحرجة لهذا التابع مع وجود شرط على x و y معطى بالعلاقة :

$$g(x , y) = c$$

يمكننا معالجة هذه المسألة بطريقتين :

الطريقة الأولى : وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون $g(x , y) = c$ قابلاً للفصل حيث يمكننا حساب y منه ، ولنفترض أنه أمكننا حساب y وكانت $y = h(x)$ ، عندها نعوض y في عبارة التابع z ، فنحصل على :

$$z = f(x , h(x)) = f(x)$$

وهو تابع لـ x فقط ، وفي هذه الحالة تتحول عملية البحث عن النقاط الحرجة لتابع ذي متحول واحد ، وهذا أمر سهل ومعروف .

الطريقة الثانية : طريقة ضارب (لاغرانج Lagrange) . نفترض أن التابع هو $z = f(x , y)$ ، وأن الشرط المفروض على x و y هو :

$$g(x , y) = c$$

مما سبق نعلم أنه حتى تكون النقطة (x_0 , y_0) نقطة حرجة ، فإنه يجب أن تحقق : f'_x و $f'_y = 0$ وهذا يعني أن :

$$dz_{(x_0 , y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

ومنه نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (15)$$

ومن جهة أخرى نجد التفاضل الكلي للشرط المفروض $g(x , y) = c$ يساوي :

---

* إن عدد الشروط m يجب أن يكون أقل من عدد المتحولات المتشكلة n أي أن $m < n$ وبذلك لايمكننا أن نضع على التابع لمتحولين أكثر من شرط واحد فقط .

$$\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy = 0$$

ومنها نجد أن : (16)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}$$

وبمقارنة العلاقتين (15) و (16) نجد أن :

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} \qquad (17)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} \qquad (18)$$

وهذا هو الشرط اللازم الذي يجب أن تحققه النقاط الحرجة • إذا وضعنا :

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = -\lambda$$

حيث λ هو عدد ثابت يسمى بضارب لاغرانج . من العلاقة الأخيرة نجد أن الشروط التي يجب أن تحققها النقاط الحرجة تتألف من المعادلات التالية :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x, y) - c &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

إن الحل المشترك لهذه المعادلات الثلاث يعطينا النقاط الحرجة للتابع (x , y) ، ضمن الشرط $g(x , y) = c$.

إذا أمعنا النظر في المعادلتين الاولى والثانية من (20) ، نجد أنهما المشتقين الجزئيين لتابع مركب من التابعين السابقين بواسطة ضارب لاغرانج λ ، ويأخذ الشكل التالي :

$$L = f(x , y) + \lambda [g(x , y) - c] \qquad (21)$$

نحصل على المعادلات (20) من حساب المشتقات الجزئية للتابع L بالنسبة لـ x و y و λ ثم وضع هذه المشتقات مساوية للصفر . وهكذا نستخلص طريقة جديدة لإيجاد النقاط الحرجة للتابع z مع وجود شرط $g(x , y) = c$ ، تتلخص بما يلي :

١ – نشكل تابع لاغرانج L المؤلف من التابع $f(x , y)$ ومن التابع $[g(x , y) - c]$ مضروباً بـ λ فنحصل على :

$$L(x , y , \lambda) = f(x , y) + \lambda [g(x , y) - c] \qquad (22)$$

٢ – نأخذ المشتقات الجزئية للتابع $L(x , y , \lambda)$ بالنسبة لـ x و y و λ ونضعها مساوية للصفر فنحصل على المعادلات (20) .

٣ – نحل المعادلات (20) ، فنحصل على النقاط الحرجة مثل $(x_0 , y_0 , h,,)$ الموافقة للنقاط الحرجة مثل $(x_0 , y,,)$ التي تحقق الشرط المفروض $g(x , y) = c$.

٤ – لدراسة نوعية هذه النقاط نشكل ما يسمى بمعين هيسان الموسع والذي يكتب على الشكل التالي :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix} \qquad (23)$$

٥ – نعوض إحداثيات كل نقطة حرجة (x_0 , y_0) على حدة في المعين D ،

- فإذا كان : $D_{(x_0 , y_0)} > 0$ ، فإن النقطة (x_0 , y_0) تقابل قيمة عظمى لـ z .

اما اذا كان $D(x_0 , y_0) < 0$ فان النقطة (x_0 , y_0) تقابل قيمة صغرى

- واذا كان $D(x_0 , y_0) = 0$ فان النقطة (x_0 , y_0) تكون نقطة شاذه .

مثال ١١ : إذا كان :

$$z = f(x , y) = x^2 - y^2 + xy + 5x$$

وكان الشرط المفروض :

$$g(x , y) = x - 2y - 1$$

فأوجد النقاط الحرجة لـ z ، وحدد نوع كل منها .

الحل : قبل كل شيء نشكل تابع لاغرانج التالي :

$$L = x^2 - y^2 + xy + 5x + \lambda [x - 2y - 1]$$

ثم نشتقه بالنسبة لـ x ، y ، λ ، ونضع هذه المشتقات مساوية للصفر ، فنحصل على المعادلات التالية :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + y + 5 + \lambda = o \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x - 2\lambda = o \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x - 2y - 1 = o \qquad (3)$$

وبطرح (3) من (2) ينتج لدينا أن $\lambda = \frac{1}{2}$:

ومن (3) نجد أن $x = 2y + 1$ نعوض في (1) فنجد أن :

$$2(2y + 1) + y + 5,5 = o$$

$$5y + 7,5 = o$$

$$y = -1,5$$

ومنها نجد أن :

$$x = -2$$

وبذلك نجد أن النقطة الحرجة الوحيدة هي $\left(-2 , -1.5 , \frac{1}{2}\right)$.

لدراسة نوعها نحسب عناصر المعين D ، فنجد أن :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2$$

والمعين D يساوي :

$$D = \begin{vmatrix} o & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

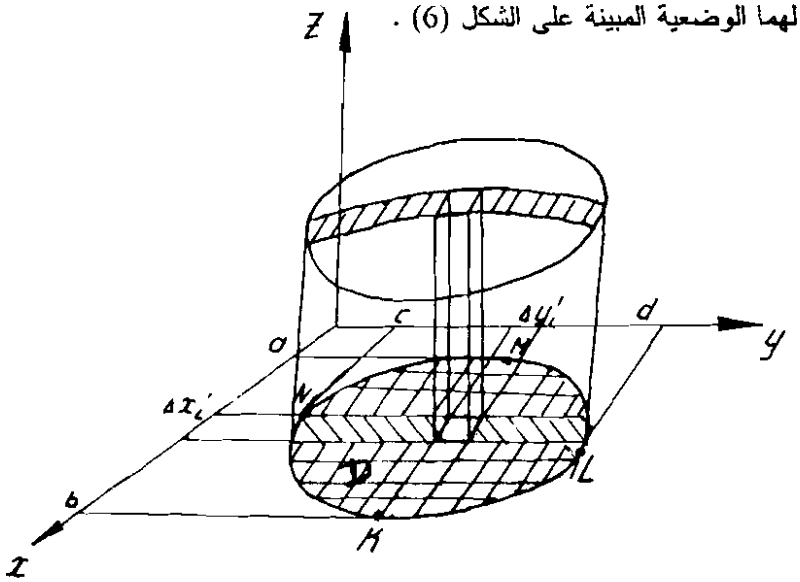
بما أن $D < o$ ، إذن النقطة (1.5- ، 2-) تقابل قيمة صغرى موضعية للتابع z ، وإن قيمته فيها تساوي : $z = -5.25$.

III - التكامل الثنائي المحدود :

إن فكرة التكامل الثنائي المحدود هي تعميم لفكرة التكامل الأحادي ، فالتكامل الأحادي يمثل المساحة التي تقع بين المحور OX ومنحني التابع $f(x)$.

أما التكامل الثنائي المحدود فيمثل الحجم المحصور بين المستوي XOY والسطح الذي يرسمه التابع $f(x , y)$ والمقابل لمنطقة تعريفه أو لمنطقة التكامل D . وسنوضح ذلك كما يلي :

لنفترض أنه لدينا تابعاً $z = f(x , y)$ معرف على منطقة محدودة ومغلقة D وإن z و D لهما الوضعية المبينة على الشكل (6) .



ولنفرض أن $x = a$ و $x = b$ هما المماسان لـ D ، الموازيان للمحور OY في النقطتين M و K على الترتيب $(a < b)$ ، وإن $y = c$ و $y = d$ هما المماسان لـ D الموازيان للمحور OX في النقطتين N و L على الترتيب $(c < d)$ ، وأن معادلة القوس MLK هي :

$$y = g_1(x)$$

وأن معادلة القوس KLN هي :

$$y = g_2(x)$$

ثم نقوم بتقسيم مجال x أي المجال المغلق [a . b] إلى n مجالاً جزئياً أطوالها على الترتيب هي $\Delta x_1 , \Delta x_2 , \Delta x_3 , \ldots , \Delta x_n$.

كما نقسم مجال y أي المجال المغلق [c . d] إلى m مجالا جزئياً أطوالها على الترتيب هي $\Delta y_1 , \Delta y_2 , \Delta y_3 , \ldots , \Delta y_m$.

وكما ننشىء مستقيمات عند طرفي كل مجال جزئي عمودية على المحورين OX و OY مما يقسم المنطقة D إلى مستطيلات جزئية كما هو موضح على الشكل (6) .

إذا رمزنا إلى مساحة المستطيل الداخلي الناجم عن المجالين Δx_i و Δy_j بالرمز R_{ij} فإننا نجد أن :

$$R_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$$

وإذا رمزنا بـ (x_i , y_j) لأية نقطة داخلية في المستطيل السابق فإننا نجد أن حجم العمود الواقع فوق هذا المستطيل والمحصور بين OXY والسطح $f(x , y)$ ، يساوي تقريباً جداء القاعدة R_{ij} في الارتفاع $f(x_i , y_j)$ أي يساوي :

$$f(x_i , y_j). \Delta x_i . \Delta y_j$$

إذا تجاهلنا النقص في بعض المستطيلات التي تقع على محيط المنطقة D فإننا نجد أن إجمالي الحجم الواقع بين السطح $f(x , y)$ والمستوي XOY يساوي مجموع حجوم الأعمدة الناجمة عن التجزئة السابقة ، وهو يساوي :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i , y_j) \Delta x_i . \Delta y_j \qquad (1)$$

ولنبحث عن نهاية هذا المجموع عندما $n \to \infty$ و $m \to \infty$ أي عندما $\Delta x_i \to \neq o$, $\Delta y_j \to \neq o$ فنجد أنه لو قمنا بتثبيت Δx_i وأنها و Δy_j فإننا

نجد أن المجموع الداخلي ينتهي إلى :

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i)\ \Delta x\ \Delta y_i \qquad \lim_{\Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i)\ \Delta y_i\right] \Delta x_i$$

$$= \left[\int_{y=g_1(x_i)}^{y=g_2(x_i)} f(x,y)\,dy\right] \Delta x_i = \varphi(x_i)\ \Delta x_i$$

حيث $\varphi(x_i)$ هي نتيجة التكامل الذي داخل القوس .

نأخذ الآن المجموع الثاني ولنبحث عن نهايته عندما $\Delta x_i \to \neq o$ و $\Delta y_j \to \neq o$ فنجد أن :

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to \neq o \\ \Delta y_j \to \neq o}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_i)\ \Delta x_i\, \Delta y_j =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to \neq o} \sum_{i=1}^{n} \lim_{\Delta y_i \to \neq o} \left[\sum f(x_i, y_j) \Delta y_i\right] \Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to \neq o} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \Delta x_i = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

وهذا يعني أنه علينا أن نكامل $f(x\ .\ y)$ بالنسبة لـ y وبحدود من $g_1(x)$ إلى $g_2(x)$ ، ثم نعود ونكامل الناتج بالنسبة لـ x من a إلى b .

وهنا نشير إلى أن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ هما معادلتا القوسين MNK و KLM اللذان يحيطان منطقة التعريف أو منطقة التكامل .

ملاحظة : يمكننا أن نقوم بإجراء التكامل بالنسبة لـ x أولاً وبحدود من $h_1(y)$ إلى $h_2(y)$ ، ثم بالنسبة لـ y من c إلى d كما يلي :

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (3)$$

حيث أن $h_1(y)$ هي معادلة القوس NML

وأن $h_2(y)$ هي معادلة القوس NKL.

طرائق المكاملة : يمكن أن نقوم باجراء التكاملات الثنائية بعدة طرائق منها :

١- **الطريقة المباشرة** : وهي تعتمد على ايجاد التابع الأصلي بالنسبة لـ y ، ثم التابع الأصلي بالنسبة لـ x (أو بالعكس) وهي لاتحتاج إلا إلى معرفة في التوابع ومشتقاتها وتوابعها الأصلية .

يمكن فصل المتحولات عند التكامل إذا كان التابع المكامل يسمح بذلك .

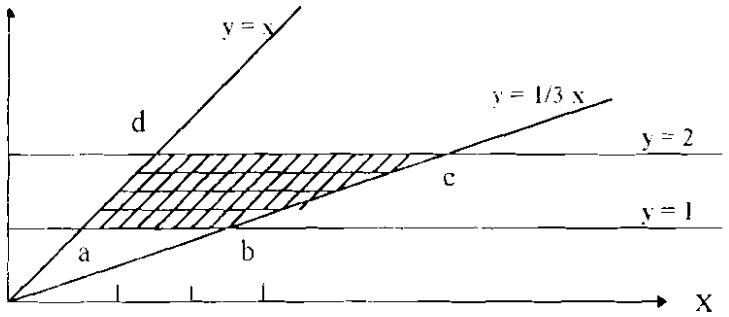
مثال ١٢ : أوجد التكامل :

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy$$

حيث D هي المنطقة المغلقة والمحددة بالمستقيمات :

$$y = 1 \quad و \quad y = 2 \qquad\qquad x = y \quad و \quad x = 3y$$

الحل : نرسم المنطقة D على XOY ، فنحصل على الشكل رقم (7) التالي :



الشكل (7)

والشكل يبين أن المنطقة D هي abcd ، وان التكامل السابق يأخذ الشكل التالي

$$I = \iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{3y}^{y} (x+y)\,dx\,dy$$

وذلك لأن موضع الحدود يختلف حسب اتجاه الدوران في السير على محيط D .

لإجراء التكامل ، نكامل بالنسبة لـ (x) أولا ، فنحصل على :

$$I = \int_{2}^{1}\left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=y}^{2} dy \quad \int \frac{4}{2} + y^2 - \left(9\frac{y^2}{2} + 3y^2\right)\Big] dy$$

ثم نكامل بالنسبة لـ y فنجد :

$$I = \int_{2}^{1} -6y^2 dy = -\left[\frac{6}{3} y^3\right]_{2}^{1} \qquad [2 - 16] = 14$$

٢ – طريقة تغير المتحولات :

تعتمد هذه الطريقة على إجراء تغيير في المتحولات ، يهدف إلى تبسيط عمليات المكاملة ، وتحويلها إلى تكاملات بسيطة ومعروفة .

لذلك نفترض أن التكامل المطلوب حسابه هو التكامل التالي :

$$\int_{a}^{b} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (4)$$

نرمز بـ $ds = dx\,dy$ ، ويسمى ds بعنصر المساحة في الإحداثيات الديكارتية القائمة.

فإذا أجرينا تغيراً في المتحولات على الشكل التالي :

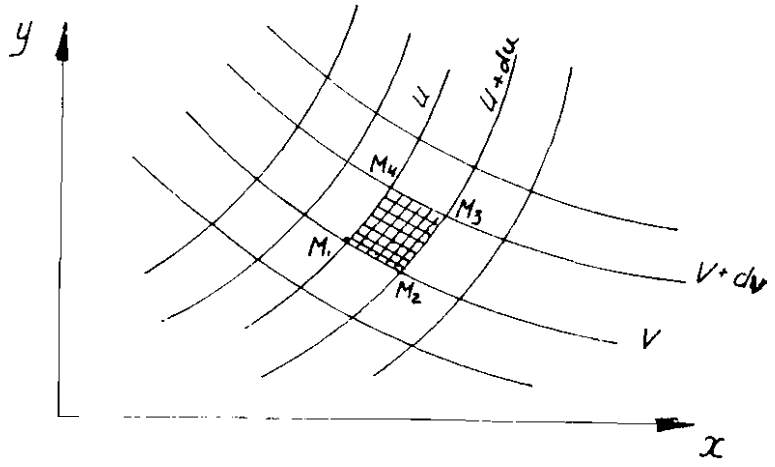
$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

حيث أن : $u(x, y)$ و $v(x, y)$ هما تابعان قابلان للعكس ، أي يمكننا منهما بشكل وحيد علاقتين لـ x و y من الشكل :

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

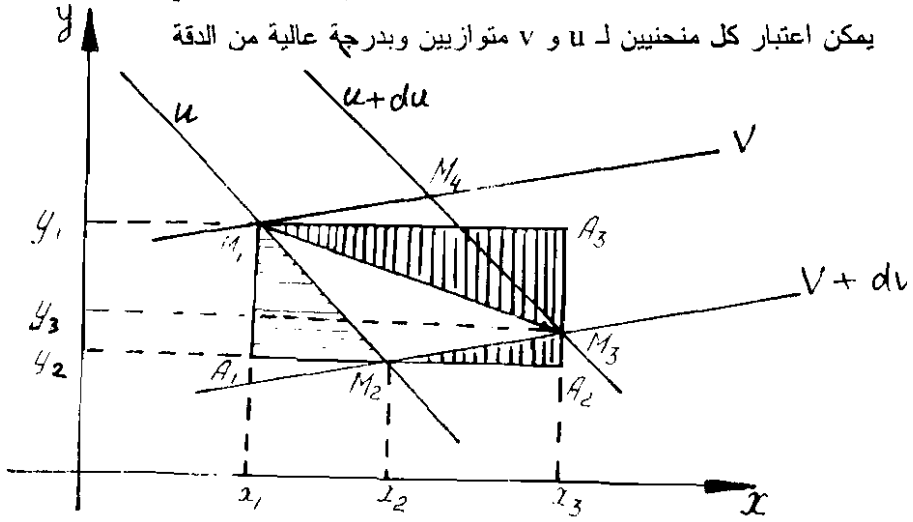
فإننا نجد أنه مقابل كل نقطة (x, y) ، يوجد نقطة من الشكل (u, v) ولذلك فإن المتحولين (u, v) يسميان بالإحداثيين الجديدين ويكون لهما شكلاً منحنيا إذا كانت العلاقتان (6) منحنيتين . فإذا ثبتنا المتحول u وتركنا v يتغير فإن العلاقتين (6) تعطيانا حزمة من الخطوط المنحنية في المستوي XOY . نسميها منحنيات المتحول v وكذلك الأمر إذا ثبتنا v وتركنا u يتغير فإن العلاقتين المذكورتين تعطيانا أيضاً حزمة من الخطوط المنحنية في المستوي XOY نسميها منحنيات المتحول u كما هو موضح

كل (8) :



الشكل (8)

لتحديد مقدار عنصر المساحة $d\sigma$ في الإحداثيات الجديدة المنحنية نأخذ عنصر المساحة $M_1 M_2 M_3 M_4$ المبين على الشكل (8) ، والناتج عن تقاطع زوجين متقاربين جداً من منحنيات u و v ونكبره على رسم خاص كما في الشكل (9) حيث يمكن اعتبار كل منحنيين لـ u و v متوازيين وبدرجة عالية من الدقة



الشكل (9)

من الشكل نلاحظ أن مساحة العنصر $M_1 M_2 M_3 M_1$ المطلوب تساوي ضعف مساحة المثلث $M_1 M_2 M_3$ ، لحساب مساحة هذا المثلث ننشئ المستطيل $M_1A_1A_2A_3$ ، ومن الشكل نجد أن مساحة المثلث المطلوب تساوي :

$$\overset{\Delta}{M_1M_2M_3} = M_1A_1A_2A_3 - \overset{\Delta}{M_1A_1M_2} - \overset{\Delta}{M_2A_2M_3} - \overset{\Delta}{M_3A_3M_1}$$

وبالتعبير عن هذه المساحات بواسطة الاحداثيات القائمة نجد أن :

$$\overset{\Delta}{M_1M_2M_3} = \left| (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 - y_3) \right|$$

$$\overset{\Delta}{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\left|[x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)]\right|$$

لكن مساحة عنصر المساحة $d\sigma$ في الاحداثيات المنحنية تساوي

$$d\sigma = 2\overset{\Delta}{M_1M_2M_3}$$

وبذلك ، نجد أن :

$$d\sigma = \left|x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2)\right| \quad (7$$

لحساب هذه الاحداثيات بدلالة u و v ، تستفيد من علاقات المشتقات الجزئية والتفاضل الكلي ، فنجد أن :

$$x_1 = x(u, v)$$
$$y_1 = y(u, v)$$
$$x_2 = x(u + du, v) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du \qquad (8)$$
$$y_2 = y(u + du, v) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du$$
$$x_3 = x(u + du, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$
$$y_3 = y(u + du, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

وبتعويض هذه القيم في العلاقة (7) نجد ... من أن :

$$d\sigma = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \right| \cdot dudv \qquad (9)$$

وبكتابة ما داخل القيمة المطلقة على شكل معين J نجد أن :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

يسمى هذا المعين بمعين التحويل (أو ...) ، وبذلك يكون عنصر المساحة $d\sigma$ مساوياً :

$$d\sigma = |J| \cdot dudv$$

وبتعويض ذلك في التكامل ... نجد أن

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{G_1(u)}^{G_2(u)} f(\ldots) \cdot |J| \cdot dudv \qquad (11)$$

حيث رمزنا بـ $F(u,v)$ ... التابع الجديد الناتج عن $f(x,y)$ ، بعد تبديل كل من x و y بما يساويه من ... ورمزنا بـ α و β لحدود u الجديدة وبـ $G_1(u)$ و $G_2(u)$ لحدود v ... معبر عن محيط منطقة التكامل الجديدة ،وبحسب هذه الحدود اعتمادا على ... و معادلة محيط منطقة التكامل الجديدة .

مثال ١٣ . ...

$$\iint e^{\ldots} \, dx\, dy$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

وبملاحظة أن $x^2 + y^2 = r^2$ فان التكامل السابق :

$$\int_0^5 \int_0^{2\pi} e^{r^2} |r| dr\, d\theta = \int r e^{r^2/2} [\theta]_0^{2\pi} dr =$$

$$= 2\pi \int_0^5 r e^{r^2/2}\, dr = 2\pi \left[e^{r^2/2} \right]_0^5 = 2\pi \left[e^{25/2} - 1 \right]$$

حيث تم تحديد حدود التكامل اعتماداعلى شكل المنطقة D الممثل بدائرة نصف قطرها $r = 5$.

IV- التوابع لعدة متحولات :

١- **تعريف** : نقول أن z تابع لـ n متحولا هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وفق العلاقة :

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

اذا كان مقابل كل جملة من الأعداد $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ يوجد قيمة وحيدة لـ z .

كما نسمي مجموعة النقاط $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ التي تجعل z معينا بمنطقة تعريف التابع $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ و هي حيزاً في الفضاء R^n .

يمكننا اعادة نفس الكلام حول النهايات والاستمرار ، فنقول ان $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ مستمر في النقطة $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ اذا كان معرفاً في تلك النقطة وكانت نهايته اليها تساوي قيمته فيها ، أي اذا كان :

$$\lim_{x_1 \to x_{01}, \ldots, x_n \to x_{0n}} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \qquad (1)$$

ويكون $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ مستمرا في منطقة تعريفه اذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاطها .

٢- **المشتقات الجزئية للتابع** $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

بما أن z تابع لـ $x_1, x_2, \ldots x_n$ فمشتقاته الجزئية بالنسبة لـ $x_1, x_2, \ldots x_n$

(بفرض أنه قابلا للاشتقاق) بالنسبة لـ x_i : $(i = 1, 2, \ldots, n)$ هي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (2)$$

وتفاضله الكلي من المرتبة الاولى يساوي :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (3)$$

أما مشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية فهي تنتج عن اشتقاق مشتقاته من المرتبة الاولى بالنسبة لكل من $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$

و هكذا نجد أن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x_1 هي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \qquad (4)$$

و المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x_2 هي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}$$

.....

و مشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x_n هي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

و تفاضله الكلي من المرتبة الثانية يساوي :

$$d^2 z = \frac{\partial (dz)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial (dz)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial (dz)}{\partial x_n} dx_n \qquad (5)$$

مثال ١٤ : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع :

$$z = x_1^3 + 2x_1 x_2^2 + x_2 x_3^3 - 2x_3^4 + 10 = f(x_1, x_2, x_3)$$

الحل: أولاً – المشتقات الاولى :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1x_2 + x_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 3x_2x_3^2 - 6x_3$$

ثم نقوم باشتقاق كل من هذه المشتقات بالنسبة لـ x_1 ثم لـ x_2 ثم لـ x_3 فنحصل على المشتقات الثانية التالية :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 3x_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 4x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 4X_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4X_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 3x_3^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 3x_3^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 6x_2x_3 - 12x_3$$

٣ – النقاط الحرجة للتابع $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

١– النقاط الحرجة الموضعية (الحرة): و هي النقاط التي تحقق المعادلات :

$$f'_{x_1} = 0 \ , \ f'_{x_2} = 0 \ , \ f'_{x_3} = 0 \ , \ \ldots \ , \ f'_{x_n} = 0 \qquad (6)$$

فاذا كانت النقطة $x_0(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n})$ نقطة حرجة (تحقق المعادلات السابقة) ، فانها قد تقابل قيمة عظمى أو صغرى أو شاذة للتابع z . و للكشف عن طبيعة هذه النقطة نشكل المعين H من المرتبة n (معين هيسان) والذي يساوي :

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

منه نحسب قيم المعينات المتصاعدة $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ عند النقطة x_0 ، حيث أن :

$$H_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|_{x_0} \quad , \quad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}_{x_0} ;$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3} \end{vmatrix}_{x_0} \quad ; \quad H_4, \ldots, H_n$$

فاذا كانت قيمة المعينات $H_1 > o$ ، $H_2 > o$ ، $H_3 < o$ ، $H_n > o$ (الاشارات متناوبة) فان النقطة $x_0 \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ تكون مقابلة لقيمة عظمى للتابع z .

أما اذا كانت قيمة المعينات $H_1 > o$ و $H_2 > o$ ، $H_3 > o$ ، $H_n > o$ (الاشارات موجبة) فان النقطة $x_0 \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ تكون مقابلة لقيمة صغرى للتابع z . اما اذا كانت قيمة المعينات غير ذلك فالنقطة $x_0 \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ تكون نقطة شاذة .

ب – النقاط الحرجة المقيدة (الشرطية)للتابع * $z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$

اذا كانت المتحولات $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ مقيدة بشرط واحد من الشكل :

$$g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - c = o \qquad (9)$$

حتى نحصل على النقاط الحرجة نشكل تابع لاغرانج التالي :

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda \left[g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - c \right] \qquad (10)$$

ثم ناخذ مشتقاته الجزئية بالنسبة لـ $(\lambda, x_n, \ldots, x_2, x_1)$ و نضع هذه المشتقات مساوية

---

* إن عدد الشروط التي يمكن وضعها على مثل هذه التوابع يجب أن يكون أقل من عدد المتحولات n لذلك لا يمكننا أن نضع على مثل هذه التوابع أكثر من $(n - 1)$ شرطا

للصفر فنحصل على المعادلات :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c = 0
\end{aligned} \qquad (11)$$

نحل هذه المعادلات فنحصل على النقاط الحرجة المطلوبة .

و لنفترض أن $x_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ احدى هذه النقاط و هي قد تكون مقابلة لقيمة عظمى أو صغرى أو شاذة للتابع z .

و للكشف عن طبيعة هذه النقطة x_0 و أمثالها نشكل معين (هيسان) الموسع D حيث

$$D = \begin{vmatrix}
0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\
\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}
\end{vmatrix} \qquad (12)$$

حسب المعيار المتصاعد اعتبر من D_3 حتى D_n حيث ان :

$$D_2 = \begin{vmatrix} o & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}_{(x} \qquad (13)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} o & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}_{(x_0)}$$

كانت قيم هذه المعينات عند النقطة x_0 اعتبارا من D_2 متناوبة في الاشارة و كان D_2 موجبا ، أي اذا كان :

$$D_2 > o \; ; \; D_3 < o \; ; \ldots ; \; (-1)^n D_n \overset{>}{<} 0 \qquad (14)$$

فان النقطة x_0 تقابل قيمة عظمى (مقيدة) للتابع z .

أما اذا كانت جميع قيم هذه المعينات سالبة اعتبارا من D_2 ، أي اذا كانت

$$D_2 < o \; ; \; D_3 < o \; ; \; \ldots \; ; \; D_n < o \qquad (15)$$

فان النقطة x_0 تقابل قيمة صغرى (مقيدة) للتابع z .

ملاحظة : عندما يكون لدينا شرطان يقيدان المتحولات $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ فاننا نشكل معين (هيسان) الموسع والذي فيه أربعة أصفار في الزاوية اليسارية العليا و عمودان

و سطران للشرطين g_1 و g_2 ، ثم نعالج الموضوع كما هو في الحالة السابقة .

مثال ١٥ : أوجد النقاط الحرجة للتابع : $W = x\,y.z = f(x,y,z)$

و حدد نوعها علما بأن المتحولات (x , y , z) مقيدة بالشرط :

$$g(x,y,z) = x + y + z - 3$$

الحل : لنشكل التابع L المعرف بالعلاقة (10) التالي :

$$L = x.y.z + \lambda\,(x + y + z - 3)$$

ثم نحسب مشتقاته الجزئية بالنسبة لـ x ، y ، z و λ و نضع هذه المشتقات تساوي الصفر فنحصل على المعادلات التالية :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda = o$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 3 = o$$

و بحل هذه المعادلات نحصل على النقطة الحرجة التالية :

$$x = 1\ ,\ y = 1\ \ z = 1,\ \lambda = -1$$

و لتحديد نوعها (عظمى أم صغرى) نحسب معين (هيسان) الموسع التالي :

$$D = \begin{vmatrix} o & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & z & y \\ 1 & z & o & x \\ 1 & y & x & o \end{vmatrix}$$

عاد قيم المعينات D_2 و D_3 عند النقطة المرجحة x_0 (1 ، 1 ، 1 ، -1) نعوض
اثيات x_0 في D فنحصل على ما يلي :

$$D_2 = \begin{vmatrix} o & 1 & 1 \\ 1 & o & 1 \\ 1 & o & o \end{vmatrix} = 2 > o$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & 1 & 1 \\ 1 & 1 & o & 1 \\ 1 & 1 & 1 & o \end{vmatrix} = -3 < o$$

حيث $D_2 > o$, $D_3 < o$ وهذا يعني أن النقطة (1 ، 1 ، 1) x_0 تقابل قيمة
ى للتابع z .

التكامل المتعدد : إن التكامل المتعدد للتابع $z = f(x_1 , x_2 , ... x_n)$ هوتعميم
ل المحدد ويعرف بالعلاقة التالية :

$$\int_{}\int \cdots \int f(x_1 , x_2 , \ldots) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \qquad (3)$$

ي منطقة من R^n وهي تنتمي إلى منطقة تعريف التابع z .

ب لكاملات واحداً تلو الاخر وحسب المنحولات . أو بواسطة تغيير المتحول
ب التاليـــــه :

$$x_1 = x_1 (u_1 , u_2 , \ldots , u_n)$$
$$x_2 = x_2 (u_1 , u_2 , \ldots , u_n)$$
$$x_3 = x_3 (u_1 , u_2 , \ldots , u_n)$$
$$x_n = x_n (u_1 , u_2 , \ldots , u_n)$$

ن هذه العلاقة قابلة للعكس .

معين التحويل (معين جاكوبي) يساوي :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \frac{\partial x_n}{\partial u_3} & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

إن التكامل السابق يأخذ الشكل التالي :

$$I = \iint_{D'} \cdots \int F(u_1, u_2, \ldots, u_n)\,|J|\,du_1\,du_2 \ldots du_n \qquad (18)$$

حيث أن D' هي منطقة التكامل الجديدة الناتجة عن D من خلال العلاقة (17) .

مثال (١٦) : أوجد التكامل :

$$I = \iiint_{V} x^3 y^2 z\,dx\,dy\,dz$$

حيث V هي المنطقة المحددة بالمتراجحات :

$$0 \le x \le 1 \quad ; \quad 0 \le y \le x \quad ; \quad 0 \le z \le xy$$

الحل : نقوم بإجراء التكامل بالنسبة لـ z ثم بالنسبة لـ y ثم بالنسبة لـ x فنجد أن :

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x dx \left[x^3 y^2 \frac{z^2}{2} \right]_0^{xy}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{x^5 y^4}{2} \right) dy = \int_0^1 dx \left[\frac{x^5 y^5}{10} \right]_0^x$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{x^{11}}{110} \Big|_0^1 = \frac{1}{100}$$

٥ - تجانس التوابع . نقول عن التابع $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **إنه متجانس من المرتبة k إذا كان :**

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda^k z \qquad (19$$

أي أنه إذا بدلنا كل x_i بـ λx_i حيث λ أي عدد ثابت فإننا نحصل على $\lambda^k z$ أي أن z

خواص التوابع المتجانسة بالخاصة التالية :

إذا كان $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تابعاً متجانساً من المرتبة k ، فإنه يحقق العلاقة

$$x_1 . f'_{x_1} + x_2 . f'_{x_2} + \ldots + x_n f'_{x_n} = k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (19)$$

وللبرهان على ذلك نأخذ مشتق الطرفين للعلاقة (19) بالنسبة لـ λ فنجد أنه لو عرضنا أن $u_1 = \lambda x_1$ ، فإن :

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial \lambda} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial \lambda} = k\lambda^{k-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ومع ملاحظة أن $\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = x_1$ ، ثم بوضع $\lambda = 1$ ، فإننا نحصل على :

$$f'_{x_1} . x_1 + f'_{x_2} . x_2 + \ldots + f'_{x_n} x_n = k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

وهو المطلوب .

مثال ١٧ : لنأخذ التابع :

$$z = x^2 + y^2 + u^2 = f(x, y, u)$$

نجد أن :

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda u) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 u^2 = \lambda^2 z^2$$

أي أنه متجانس من المرتبة الثانية ($k = 2$) . وللتأكد من أن يحقق العلاقة (20

$$2x) + y(2y) + u($$

تمرينات عامة

١ – أوجد المشتقات الجزئية لكل من التوابع التالية :

1 - $z = x^2 + y^2 - 3axy$

2 - $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

3 - $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4 - $z = x^y$

5 - $z = (xy)^4$

٢ – أوجد التفاضل الكلي من المرتبتين الأولى والثانية للتوابع التالية :

1 - $z = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$

2 - $z = \sin^2 x + \cos^2 y$

3 - $z = y x^y$

4 - $z = \ln(x^2 + y^2)$

5 - $z = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}$

6 - $z = (xy + \dfrac{x}{y})^4$

7 - $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

٣ – أوجد $\dfrac{dz}{dx}$ إذا كان $z = u^v$

حيث u ، $v = \cos x$ و x

٤ – أوجد $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ إذا كان $z = x^y$

٥ – أوجد المشتقات الثانية للتوابع :

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- 2 - $z = \ln(x + y)$

3 - $z = \sqrt{2xy + y^2}$

4 - $z = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}$

5 - $z = xy + u + ux$

6 - $z = x^{\alpha} y^{\beta} u$

٦ – أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للتوابع الضمنية التالية

1 - $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$

2 - $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$

3 - $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$

٧ – أوجد النقاط الحرجة وحدد نوعها للتوابع التالية :

1 - $z = (x - 1)^2 + 2y^2$

2 - $z = (x - 1)^2 - 2y^2$

3 - $z = x^4 + y^4 - 2^2 + 4xy - 2y^2$

4 - $z = x^3 y^2 (6 - x - y) \quad ; \quad x > 0 , y > 0$

٨ – أوجد التكاملات التالية :

1 - $\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, dxdy$

حيث D هي المثلث الذي رؤوسه (0 , 0) و (1 , 1) و (0 , 1) .

2 - $\iint_D e^{x/y}\, dx\, dy$

حيث D هي المنطقة المحصورة بين المنحني $y^2 = x$ ، والمستقيمين $y = 1$ و $y = 0$

3 - $\iint_D = \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$

حيث D هي المنطقة المحصورة بين المنحني $y = \frac{x^2}{2}$ ، والمستقيم $y = x$.

4 - $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}\, dx\, dy\, dz$

الفصـــل العاشـــر

المعـــادلات التفاضليـــة والفرقيـــة

1- مقدمـة :

بعد أن تعرفنا على مشتقات التوابع وتكاملاتها ننتقل إلى دراسة فرع جديد في الرياضيات وهو مايسمى بالمعادلات التفاضلية التي تلعب دوراً كبيراً في عمليات التحليل الرياضي والاقتصادي .

مفهـوم المعادلـة التفاضليـة :

إن المعادلة التفاضلية هي أية علاقة ترتبط بين المتحول x والتابع y ومشتقات (أوتفاضلات) ذلك التابع $y', y'', \ldots\ldots$ الخ.

وكمثال على ذلك نذكر المعادلات التالية :

$$y'-y+x-2=0 \qquad (a)$$

$$y'^2 = x^3 \qquad (b)$$

$$y''+y=1-2x \qquad (c)$$

الشكل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = o$$

مرتبة المعادلة التفاضلية :

هي أعلى رتبة لمشتق التابع الداخل في المعادلة التفاضلية . فالمعادلتان (b,a) هما معادلتان تفاضليتان من المرتبة الأولى .لأن أعلى رتبة للمشتق فيهما هي من المرتبة الأولى ، بينما نجد أن المعادلة (c) هي من المرتبة الثانية ، لأن أعلى رتبة للمشتق فيها هي من المرتبة الثانية (رغم عدم وجود y') .

حلول المعادلة التفاضلية :

هي جملة التوابع $y = f(x)$ التي تحقق المعادلة المفروضة أي التي تجعلها متطابقة .

ويمكن أن نميز نوعين من حلول المعادلة التفاضلية :

١- حل خاص للمعادلة وهو مرتبط بالشروط الإبتدائية للمعادلة ، كأن يمر بالنقطة (x_o, y_o) حيث يُسمى العددان x_o , y_o قيمتان ابتدائيتان .

٢-حل عام هو مجموعة جميع الحلول الخاصة ، وهو من الشكل $y = f(x,c)$

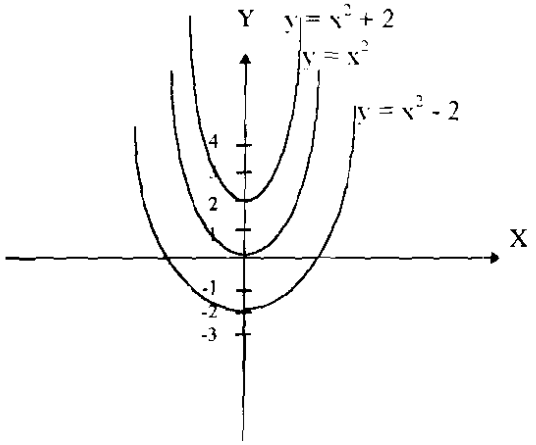
وكمثال على ذلك نجد أنه إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = 2x$$

فإن جملة التوابع التي تحقق هذه المعادلة هي :

$$y = x^2 + c = f(x, c)$$

حيث أن c هو ثابت التكامل وهو ثابت كيفي ويمكن أن يأخذ أية قيمة عددية . وتسمى جملة التوابع التي تحقق المعادلة التفاضلية بالحل العام لتلك المعادلة . وهي في مثالنا السابق تمثل حزمة من القطوع المكافئة التي تقع رؤوسها على محور العينات . كما هو موضح في الشكل (1) .



الشكل (1)

وحتى نحصل على أي قطع من هذه القطوع المكافئة ، نقوم بتعويض إحداثيات إحدى النقاط التي يمر بها في الحل العام ، فنحصل على قيمة محددة للعدد c ، وعندها نتوصل إلى حل خاص ذي قيمة محددة للعدد c .

فإذا عوضنا النقطة (0,2) في الحل العام نجد أن $c = 2$

ونحصل بالتالي على القطع المكافئ $y = x^2 + 2$

أما إذا عوضنا النقطة (0,0) في الحل العام نجد أن : $c = o$

ونحصل بالتالي على القطع المكافئ : $y = x^2$

لذلك نسمي كلاً من هذه القطوع الخاصة بالحل الخاص للمعادلة التفاضلية . كما نسمي النقطة التي يجب أن يمر بها القطع أوأي شرط مماثل بالشرط الابتدائي ، وهو يعطينا إمكانية استنتاج حل خاص من الحل العام .

أنواع المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى :

قبل التعرض لطرائق الحل نستعرض أهم أنواع المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وهي :

- المعادلات التفاضلية منفصلة المتحولات :

وهي المعادلات التي يمكن كتابتها على شكل تابعين منفصلين الأول تابع لـ x فقط مثل $p(x)$ ، والثاني تابع لـ y فقط مثل $Q(y)$ ، وبالتالي يمكن كتابتها على الشكل

$$p(x)\,dx + Q(y)dy = o$$

- المعادلات التفاضلية المتجانسة :

وهي المعادلات التي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

- المعادلات التفاضلية الخطية :

وهي المعادلات التي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$y' + p(x)\,y = Q(x)$$

II - طرائق حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى :

إن نوع المعادلة التفاضلية يحدد الطريقة التي يجب اتباعها لإيجاد حلها العام .

أ- حل المعادلات التفاضلية منفصلة المتحولات :

نقوم بتحويل المعادلة التفاضلية إلى الشكل النموذجي التالي :

$$p(x)dx + Q(y)dy = o$$

وبمكاملة الطرفين نجد أن :

$$\int p(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = c$$

وبعدإجراء المكاملة نقوم باستخراج y بدلالة x و c ، فنحصل على الحل العـام للمعادلـة المفروضة .

مثال :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$e^{y} \cdot y' = 5x$$

نكتب المعادلة على شكل معادلة منفصلة المتحولات فنحصل على

$$5x\,dx - e^{y}\,dy = 0$$

وبإجراء التكامل نجد أن :

$$\int 5x\,dx - \int e^{y}\,dy = c$$

$$\frac{5}{2}x^{2} - e^{y} = c$$

$$e^{y} = \frac{5}{2}x^{2} - c$$

وبأخذ اللوغاريتم النيبري للطرفين نحصل على الحل العام التالي :

$$y = \ln\left|\frac{5}{2}x^{2} - c\right|$$

مثال آخر :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{x^{2}}{y+1} - 4x\,y' = 0 \qquad x \neq 0 \quad , \quad y \neq -1$$

بكتابة هذه المعادلة على شكل معادلة منفصلة المتحولات نحصل على :

$$\frac{x}{4}\,dx - (y+1)\,dy = 0$$

وبإجراء التكامل نجد أن : $\int \frac{x}{4}\,dx - \int (y+1)\,dy = c$

$$\frac{x^2}{8} - \left[\frac{1}{2}y^2 + y\right] = c$$

$$y^2 + 2y - \left(\frac{x^2}{4} + 2c\right) = o$$

وهو الحل العام المطلوب . ومنه يمكن أن نحصل على الحلين العامين التاليين :

$$y_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4\left(\frac{x^2}{4} + 2C\right)}}{2} = f_1(x,c)$$

$$y_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 4\left(\frac{x^2}{4} + 2C\right)}}{2} = f_2(x,c)$$

مثال اقتصادي :

نعلم أن التكلفة الكلية k هي تابع لحجم الإنتاج x . والمطلوب إيجاد تابع التكاليف الذي تكون فيه التكلفة الحدية مساوية لمتوسط التكاليف .

من شروط المسألة نجد أن متوسط التكاليف يساوي $\frac{k}{x}$

وإن التكلفة الحدية ماهي إلا نهاية $\frac{\Delta k}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to o$ أي تساوي $\frac{dk}{dx}$

وبالتالي نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k}{x}$$

وبكتابتها على شكل معادلة منفصلة المتحولات نحصل على

$$\frac{dk}{k} - \frac{dx}{x} = o$$

وبإجراء التكامل نجد أن :

$$\int \frac{dk}{k} - \int \frac{dx}{x} = c$$

$$\ln|k| - \ln|x| = c$$

$$\ln\left|\frac{k}{x}\right| = c$$

$$\frac{k}{x} = e^{c} = c_1$$

وهذا يعني أن متوسط التكلفة يأخذ قيمة ثابتة c_1 . ويمكن كتابة تابع التكلفة على الشكل

$$k = c_1 x$$

مثال تطبيقي :

لنفرض أن سعر البضاعة A كان في البداية يساوي 36 وحدة نقدية ، وبعد t أسبوعاً أصبح $P(t)$ ، وإن تابع الطلب q يعطى بالعلاقة :

$$q = 120 - 2P + 5\frac{dp}{dt}$$

وإن تابع العرض S يعطى بالعلاقة :

$$S = 3P - 30 + 50\frac{dp}{dt}$$

والمطلوب إيجاد التابع $P(t)$ الذي يحقق عملية التوازن بين العرض والطلب في أي لحظة زمنية t .

الحل : نقوم أولاً بوضع معادلة التوازن من العلاقة $q = S$ فنحصل على

$$120 - 2P + 5P' - 3P - 30 + 50P'$$

$$-45P' = 5P - 150$$

$$P' = -\frac{1}{9}(P - 30)$$

$$\frac{dp}{P - 30} = -\frac{1}{9}dt$$

$$\int \frac{dp}{P - 30} = -\frac{1}{9}\int dt + c$$

$$\ln|P - 30| = -\frac{1}{9}t + \ln c_1 \qquad (c = \ln c_1)$$

لحلها نجري التحويل التالي $u = \frac{y}{x}$ ، فنجد أن :

$$y' = u'x + u$$

وبالتعويض تتحول المعادلة السابقة إلى الشكل التالي :

$$u'x + u = e^{u} + u$$

$$u'x = e^{u}$$

$$\frac{du}{e^{u}} = \frac{dx}{x}$$

وبإجراء التكامل نجد أن :

$$\int e^{-u} du = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$-e^{-u} = \ln|x| + c$$

$$e^{-u} = -\ln|x| + \ln c_1 \qquad (c = \ln c_1)$$

$$e^{-u} = \ln\left|\frac{c_1}{x}\right|$$

$$u = -\ln\left|\ln\left|\frac{c_1}{x}\right|\right|$$

وبتعويض $u = \frac{y}{x}$ نحصل على الحل العام التالي :

$$y = -x\ln\left|\ln\left|\frac{c_1}{x}\right|\right|$$

مثال آخر : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\left(y^2 - x^2\right)dx + 2xy\ dy = 0$$

نلاحظ أن هذه المعادلة متجانسة لأنه إذا قسمنا الطرفين على x^2 ، نحصل على الشكل التالي :

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)dx + 2\frac{y}{x}dy = 0$$

والذي يمكن كتابته على الشكل النموذجي :

$$\ln\left|\frac{P-30}{c_1}\right| = -\frac{1}{9}t$$

$$\frac{P-30}{c_1} = e^{-\frac{1}{9}t}$$

$$P = c_1 e^{-\frac{1}{9}t} + 30 = P(t)$$

وبتعويض الشروط الإبتدائية التي تقول إنه عندما $t = o$ فإن $P = 36$ في المعادلة الأخيرة نجد أن :

$$36 = c_1 e^{\frac{1}{9}\cdot 0} + 30$$

وبالتالي نحصل على أن $c_1 = 6$ وعلى أن تابع الأسعار بدلالة الزمن يساوي :

$$P(t) = 6.e^{\frac{1}{9}t} + 30$$

وبواسطته يمكننا إيجاد السعر في أي لحظة زمنية تقع ضمن مجال الدراسة .

ب –حل المعادلات التفاضلية المتجانسة :

إن المعادلات التفاضلية المتجانسة هي المعادلات التي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ولحل هذه المعادلات نجري التحويل التالي :

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = u.x$$

وبالتالي يكون لدينا : $y` = u'x + u$

وبالتعويض تتحول المعادلة المتجانسة إلى الشكل التالي :

$$u`x + u = f(u)$$

ثم نقوم بمعالجتها كمعادلة منفصلة المتحولات .

مثال : لتكن لدينا المعادلة التالية : $y` = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$$

$$y' = u'x + u$$

وبالتعويض نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{2u} = -\frac{u^2 + 1}{2u}$$

$$\frac{2u\,du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}$$

وبإجراء التكامل نجد أن :

$$\int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} + c$$

$$\ln\left(u^2 + 1\right) = -\ln|x| + \ln c_1 \qquad c = \ln c_1$$

$$\ln\left(u^2 + 1\right) = \ln\left|\frac{c_1}{x}\right|$$

$$u^2 + 1 = \frac{c_1}{x}$$

وبالعودة إلى $u = \frac{y}{x}$ ، نحصل على أن :

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c_1}{x}$$

$$y^2 = x^2\left(\frac{c_1}{x} - 1\right) = c_1 x - x^2$$

وهو الحل العام المطلوب .

جـ - حل المعادلات التفاضلية الخطية :

إن المعادلات التفاضلية الخطية هي التي يمكن كتابتها على الشكل :

$$y' + P(x)\, y = Q(x) \qquad (a)$$

وفي هذه المعادلات يظهر التابع y بشكل منفرد .

لحل مثل هذه المعادلات نقوم باتباع الخطوات التالية :

١- نبحث عن حل خاص للمعادلة السابقة بدون طرف ثاني .

أي نأخذ المعادلة التالية :

$$y' + P(x)\, y = o$$

ونحلها بطريقة فصل المتحولات حيث نجد أن

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln k$$

حيث $\ln k$ هو ثابت التكامل .

$$\ln y = F(x) + \ln k$$

$$y = ke^{F(x)} \qquad (b)$$

وهو الحل الخاص بدون طرف ثاني .

ولايجاد الحل العام ، نعتبر العدد الثابت k تابعا لـ x ، ونكتب الحل العام على الشكل التالي:

$$y = k(x)e^{F(x)} \qquad (c)$$

وبعدها نحسب y' فنجد أن :

$$y' = k'(x)e^{F(x)} + F'(x)\, k(x)e^{F(x)} \qquad (d)$$

ثم نعوض الناتج بالمعادلة الأساسية (a) ، فنحصل على معادلة تفاضلية جديدة فيها $K(x)$ تابعاً مجهولاً . وبإيجاد حلها نحصل على الصيغة الرياضية للتابع $k(x)$ ثم نعوض الناتج في (b) فنحصل على الحل العام المطلوب .

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y' + y\, tg\, x = \sin^2 x$$

نقوم بإيجاد الحل الخاص للمعادلة بدون طرف ثاني أي نضع :

$$y'+y\ tg\ x = o$$

$$\frac{dy}{y} = -tg\ x\ .\ dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int tg\ x\,dx + \ln k$$

$$\ln\left|\frac{y}{k}\right| = \ln|\cos x|$$

$$y = k\cos x$$

وهو الحل الخاص للمعادلة بدون طرف ثاني .

لايجاد الحل العام نجعل K تابعاً لـ x ، ونضع الحل الخاص السابق كما يلي :

$$y = k(x)\ .\ \cos x$$

$$y' = k'(x)\cos x - k(x)\sin x$$

وبتعويض y', y في المعادلة الأساسية نحصل على :

$$k'(x)\cos x - k(x)\sin x + k(x)\cos x \cdot tg(x) = \sin^2 x$$

$$k'(x)\cos x = \sin^2 x$$

$$dk(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$$

$$\int dk\ (x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos}dx + c$$

$$k(x) = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos\ x}dx + c$$

$$k(x) = \int \frac{dx}{\cos x} - \int \cos x\,dx + c$$

$$k(x) = \ln tg\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right| - \sin x + c$$

وبذلك يأخذ الحل العام للمعادلة التفاضلية الأساسية الشكل التالي :

$$y = \left(\ln tg\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right| - \sin x + c\right)\cos x$$

ال آخر : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x y' - 3y = x^2$$

ول المعادلة إلى معادلة خطية فنحصل على :

$$y' - \frac{3}{x} y = x$$

م بإيجاد الحل الخاص بدون طرف ثان فنضع :

$$y' - \frac{3}{x} y = o$$

$$d\backslash \quad \frac{3dx}{x}$$

$$= \int \frac{3dx}{x} + \ln k$$

$$\frac{y|}{k|} = 3\ln x = \ln x^3$$

$$k x^3$$

والحل الخاص للمعادلة بدون طرف ثان : لإيجاد الحل العام نـ k تابعاً x ونكتب الحل الخاص كما يلي :

$$y = k(x).x^3$$

حسب y' فنجد أن :

$$y' = k'(x)x^3 + 3k(x).x^2$$

تعويض في المعادلة الأساسية نحصل على :

$$k'(x)x^3 + 3k(x)x^2 - \frac{3}{x} \cdot k(x).x^3 = x$$

$$k'(x).x^3 = x$$

$$k'(x) = \frac{1}{x2}$$

$$k(x) = -\frac{1}{x} + c$$

وبالتالي نحصل على الحل العام التالي :

$$y = \left(-\frac{1}{x} + c\right) x^3 = \left(-x^2 + cx^3\right)$$

III- طرائق حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية :

إن الشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية هو الصيغة التالية :

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = F(x) \qquad (A)$$

حيث $p(x)$ ، $Q(x)$ ، $F(x)$ توابع للمتحول x :

وإذا كان $F(x) = o$ فإن المعادلة (A) السابقة تصبح معادلة متجانسة (أو بدون طرف ثاني) وتكتب على الشكل التالي .

$$y'' + p(x).y' + Q(x).y = o \qquad (B)$$

أما إذا كان التابعان $p(x)$ ، $Q(x)$ مساويين لعددين ثابتين a , b على الترتيب فإن المعادلة (A) تسمى معادلة خطية بأمثال ثابتة وتأخذ الشكل التالي :

$$y'' + ay' + by = F(x) \qquad (C)$$

وسنقتصر في هذا الكتاب على المعادلات الخطية ذات الأمثال الثابتة .

أ- حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الأمثال الثابتة :

لإيجاد الحل العام للمعادلات :

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (1)$$

نتبع الخطوات التالية :

١- نأخذ الطرف الأيسر ونضعه مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة المتجانسة التالية:

$$y'' + ay' + by = o \qquad (2)$$

٢- نشكل المعادلة المميزه لهذه المعادلة التفاضلية والتي نحصل عليها باستبدال y'' بـ k^2 ، y' بـ k ، y بـ 1 فنجد أن المعادلة المميزة تأخذ الشكل التالي :

$$k^2 + ak + b = o \qquad (3)$$

٣- نقوم بإيجاد جذري هذه المعادلة k ، k وسنميز بين الحالات التالية :

الحالة الأولى : إذا كان المميز $\Delta = a^2 - 4b > o$ موجبا أي كان ١ .

في هذه الحالة يكون للمعادلة الممـيزه (3) جـذران حقيقيـان نرمـز لهمـا بـ k_1 ، k_2 ، وبناء على ذلك يكون للمعادلة (2) حلان خاصـان همـا: $y_1 = e^{k_1 x}$ ، $y_2 = e^{k_2 x}$

ومنها نركب الحل العام للمعادلة (2) على الشكل التالي :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \qquad (4)$$

حيث أن c_1 ، c_2 ثابتان كيفيان .

ويمكن التأكد من ذلك بإيجاد المشتقين y' ، y'' والتعويض في المعادلة (2) السابقة .

الحالة الثانية : إذا كان المميز Δ معدوماً أي إذا كان $\Delta = a^2 - 4b = o$

وفي هذه الحالة يكون للمعادلة المميزة (3) حل وحيد k (مضاعف) ويساوي :

$$k = \frac{-1}{2}a$$

وبناء على ذلك يكون للمعادلة (2) حلان خاصان هما :

$y_1 = e^{k_1 x}$ ، $y_2 = xe^{k_2 x}$ ومنهما نركب الحل العام للمعادلة (2) على الشكل التالي:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 + c_2 x)e^{Kx} \qquad (5)$$

حيث أن c_1 ، c_2 ثابتان كيفيان .

الحالة الثالثة : إذا كـان المميـز Δ سـالباً ، أي إذا كـان $\Delta = a^2 - 4b < O$ وفـي هـذه الحالة يكون للمعادلة المميزه (3) جذران مركبان (تخيليان) مترافقان من الشكل :

$$K_2 = \alpha - i\beta \quad , \quad K_1 = \alpha + i\beta$$

ويكون للمعادلة التفاضلية (2) حلان خاصان $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta$ ، $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta$

ومنهما نركب العام للمعادلة (2) على الشكل التالي :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 \cos\beta + c_2 \sin\beta).e^{\alpha x} \qquad (6)$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتان كيفيان .

٤ - نقوم بإيجاد حل خاص للمعادلة (١) الأساسية . وهناك عدة طرائق لإيجاد الحل

الخاص لمثل تلك المعادلات الآنفة سندرس الطريقة العامة وهي التي تعتمد على اشتقاق الثابتين c_1 ، c_2 الواردين في الحل العام للمعادلة المتجانسة (0) واعتبارهما تابعين للمتحول x ولذلك نقوم بإفتراض أن الحل الخاص للمعادلة (1) هو من الشكل التالي :

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \qquad (7)$$

حيث أن y_1 ، y_2 هما الحلان الخاصان للمعادلة (2) في أي من الحالات الثلاث الواردة سابقاً .

٥ – نقوم بحساب وتحديد التابعين $c_1(x)$ ، $c_2(x)$ من خلال المعادلتين التفاضليتين التاليتين :

$$\begin{aligned} c_1'(x).y_1 + c_2'(x).y_2 &= 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned} \qquad (8)$$

حيث y_1 ، y_2 هما الحلان الخاصان للمعادلة (2) في أي من الحالات المذكورة سابقاً .

٦- نوجد الحل العام للمعادلة (1) وذلك بدمج الحل العام للمعادلة (2) مع الحل الخاص للمعادلة (1) فنحصل على الحل العام التالي :

$$y = [c_1 y_1 + c_2 y_2] + [c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2] \qquad (9)$$

ملاحظة : يمكننا أيضاً تحديد الثابتين c_1 ، c_2 الواردين في الحل العام بواسطة استخدام بعض الشروط الإبتدائية (شرطين على الأقل) ، كأن يكون لدينا الشرطان الابتدائيان $y = 5$ عندما $x = 1$ ، وكذلك $y = 10$ عندما $x = 2$. وبالتعويض في الحل العام نحصل على معادلتين بدلالة c_1 ، c_2 ، نحلهما فنحصل على قيمة شرطية لكل منهما .

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2xe^{2x}$$

نحل المعادلة المتجانسة بدون طرف ثان

$$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$$

ثم نأخذ المعادلة المميزة لها فنجد أن :

$$k^2 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2} = 0$$

وبملاحظة أن مميز هذه المعادلة $\Delta = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2}$ ، وبذلك يكون لهذه المعادلة الجذران التاليان

$$k_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad k_2 = 1$$

ويكون للمعادلة المتجانسة الحلان الخاصان التاليان :

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad y_2 = e^{x}$$

ويكون الحل العام لتلك المعادلة المتجانسة من الشكل التالي :

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{x}$$

حيث c_2 , c_1 ثابتان كيفيان

ولإيجاد الحل العام للمعادلة الأساسية نبحث عن حل خاص لها من الشكل

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

ولتحديد $c_1(x)$ ، $c_2(x)$ نطبق المعادلتين (8) فنحصل على

$$c_1'(x)\, e^{-\frac{1}{2}x} + c_2'(x)\, e^{x} = 0 \qquad (1)$$

$$c_1'(x)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) + c_2'(x)e^{x} = 2x\, e^{2x} \qquad (2)$$

نطرح الأولى من الثانية فنحصل على المعادلة التالية :

$$c_1'(x)\left[-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right] = 2x\, e^{2x}$$

$$c_1'(x) = -\frac{4}{3}x\, e^{\frac{5}{2}x}$$

$$c_1(x) = -\frac{4}{3}\int x e^{\frac{5}{2}x}\, dx$$

نكامل بالتجزئة ونضع :

$$dv = e^{\frac{5}{2}x}dx \qquad u = x$$

$$v = \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}x} \qquad du = dx$$

$$c_1(x) = -\frac{4}{3}\left[\frac{2}{5}xe^{\frac{5}{2}x} - \frac{2}{5}\int e^{\frac{5}{2}x}dx\right]$$

$$c_1(x) = -\frac{4}{3}\left[\frac{2}{5}xe^{\frac{5}{2}x} - e^{\frac{5}{2}x}\right]$$

$$c_1(x) = -\frac{4}{3}e^{\frac{5}{2}x}\left(\frac{2}{5}x - 1\right)$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن :

$$-\frac{4}{3}xe^{\frac{5}{2}x}.e^{-\frac{1}{2}x} + c_2'(x)e^x = 0$$

$$c_2'(x) = \frac{4}{3}xe^x$$

$$c_2(x) = \frac{4}{3}\int xe^x dx$$

نكامل بالتجزئة ونضع :

$$dv = e^x dx \qquad u = x$$

$$v = e^x \qquad du = dx$$

وبذلك نجد أن :

$$c_2(x) = \frac{4}{3}\left[xe^x - \int e^x dx\right]$$

$$c_2(x) = \frac{4}{3}e^x(x-1)$$

وبالتعويض في الحل الخاص نحصل على الحل الخاص للمعادلة الأساسية :

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = -\frac{4}{3}e^{\frac{5}{2}x}\left(\frac{2}{5}x - 1\right)e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{3}e^x(x-1)e^x$$

$$y = \frac{4}{3}e^{2x}\left(\frac{3}{5}x + 0\right) = \frac{4}{5}\,x\,e^{2x}$$

وهو الحل الخاص المطلوب .

وبذلك نتوصل إلى الحل العام للمعادلة الأساسية التالي :

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{x} + \frac{4}{5} x e^{x}$$

مثال آخر : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' - 2y' + y = xe^{x}$$

نأخذ الطرف الأول ونضعه مساويا للصفر فنحصل على المعادلة المتجانسة

نحل المعادلة المفروضة بدون طرف ثان :

$$y'' - 2y' + y = o$$

ثم نشكل المعادلة المميزة لها وهي

$$k^2 - 2k + 1 = o$$

وبملاحظة أن $\Delta = 4 - 4 = 0$ فإن للمعادلة المميزه حل وحيد مضاعف يساويه

$$k = 1$$

وبذلك يكون للمعادلة المتجانسة الحلان الخاصان التاليان :

$$y_1 = e^{x} \qquad y_2 = xe^{x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = e^{x}(c_1 + c_2 x)$$

ثم ننتقل إلى إيجاد حل خاص للمعادلة الأساسية (مع طرف ثاني) ولذلك نعتبر $c_1(x)$, $c_2(x)$ تابعين لـ x و نطبق المعادلتين (8) التاليتين :

$$c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = o$$
$$c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 = xe^{x}$$

وهكذا نجد أن :

$$c'_1(x)e^{x} + c'_2(x)x\,e^{x} = o$$
$$c'_1(x)e^{x} + c'_2(x)\left[e^{x} + xe^{x}\right] = xe^{x}$$

وبطرح الأولى من الثانية نحصل على :

$$c_2'(x)e^x = xe^x$$

$$c_2'(x) = x$$

$$c_2'(x) = \frac{x^2}{2}$$

وبالتعويض في الأولى نجد أن :

$$c_1'(x)e^x + x.xe^x = 0$$

$$c_1'(x) = -x^2 \Rightarrow c_1(x) = -\frac{1}{3}x^3$$

وبذلك نجد أن الحل الخاص المطلوب للمعادلة المعطاة هو

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = -\frac{1}{3}x^3e^x + \frac{x^2}{2}\cdot xe^x$$

$$y = \frac{1}{6}x^3e^x$$

وأخيراً نضع الحل العام للمعادلة الأساسية على الشكل التالي :

$$y = c_1e^x + c_2\cdot xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

$$= \left[c_1 + c_2x + \frac{1}{6}x^3\right]e^x$$

مثال ثالث : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

نأخذ الطرف الأول

$$y'' + y = 0$$

ثم نشكل المعادلة المميزه

$$k^2 + 1 = 0$$

وبملاحظة أن المميز $\Delta = -4 < 0$ ويكون للمعادلة المميزه الجذرين المركبين التاليين $k = \pm\sqrt{-1}$ والذين يكتبان على الشكل التالي :

$$k_1 = i \qquad k_2 = -i$$

أي أن $\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1$

والحلان الخاصان للمعادلة المتجانسة هما :

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos Bx = \cos x \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin Bx = \sin x$$

والحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

وللحصول على حل خاص للمعادلة الأساسية (مع طرف ثاني) نعتبر $c_1(x) \quad , \quad c_2(x)$ تابعين لـ x ، ونطبق المعادلتين (٨) فنجد أن :

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \qquad (1)$$

$$c_1'(x)[-\sin x) + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x} \qquad (2)$$

نضرب المعادلة الأولى بـ $\sin x$ والثانية بـ $\cos x$ ثم نجمعهما فنحصل على المعادلة :

$$c_2'(x)\sin^2 x + c_2'(x)\cos^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x|$$

نعوض في المعادلة الأولى فنحصل على :

$$c_1'(x)\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot \sin x = 0$$

$$c_1'(x) = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x$$

وهكذا نجد أن الحل الخاص للمعادلة الأساسية هو :

$$y = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة الأساسية هو :

$$y = c_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

ملاحظة : إذا كان الطرف الأيمن $f(x)$ للمعادلة الأساسية مؤلفاً من مجموع توابع مثل

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ldots$$

فإننا نقوم أولاً بالبحث عن حلول خاصة للمعادلة الأساسية مقابلة لكل من التوابع $f_i(x)$ على حده .وإذا كانت تلك الحلول الخاصة هي $y_1 \ , \ y_2 \ , \ y_3 \ \ldots\ldots$ فإن الحل الخاص للمعادلة الأساسية هو مجموع هذه الحلول ، أي أن الحل الخاص الأخير هو :

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$$

وبإضافة هذا الحل الخاص إلى الحل العام للمعادلة المتجانسة ، نحصل على الحل العام للمعادلة الأساسية .

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$$

نأخذ المعادلة المتجانسة وهي

$$y'' - y' = o$$

ثم نشكل معادلتها المميزة وهي :

$$k^2 - k = o$$

والتي تعطينا الجذرين التاليين $k_1 = o \quad k_2 = 1$ ومنهما نحصل على الحلين الخاصين للمعادلة المتجانسة وهما

$$y_1 = e^{ox} = 1 \qquad y_2 = e^x$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y = c_1 + c_2 e^x$$

ولإيجاد الحل الخاص للمعادلة الأساسية ، نلاحظ أن الطرف الثاني مؤلف من مجموع توابع $f_i(x)$ ، لذلك نقوم بإيجاد الحل الخاص المقابل لكل تابع على حده ، ثم نأخذ مجموعها لنحصل على الحل الخاص الشامل . لذلك نعتبر $c_1(x) \ , \ c_2(x)$ توابع لـ x ونطبق المعادلتين (8) على التابع الأول $f_1(x) = e^x$ فنجد أن :

$$c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) e^x = o \qquad (1)$$

$$c_1'(x) \cdot 0 + c_2'(x) e^x = e^x \qquad (2)$$

وبطرح الأولى من الثانية نحصل على :

$$-c_1'(x) = e^x \Rightarrow c_1(x) = -e^x$$

نعود ونقوم بالتعويض في الأولى فنجد أن

$$-e^x + c_2'(x)e^x = 0$$

$$c_2'(x) = +1 \Rightarrow c_2(x) = x$$

وبذلك نجد أن الحل الخاص الأول للمعادلة الأساسية هو .

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = -e^x \cdot 1 + xe^x = e^x(x-1)$$

وللوصول على الحل الخاص الثاني للمعادلة الأساسية نطبق المعادلتين (8) على التابع الثاني $f_2(x) = e^{2x}$ فنجد أن :

$$c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x)e^x = 0$$

$$c_1'(x) \cdot 0 + c_2'(x)e^x = e^{2x}$$

وبطرح الأولى من الثانية نجد أن :

$$-c_1'(x) = e^{2x} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$$

نعود ونعوض في الأولى فنحصل على :

$$-e^{2x} + c_2'(x)e^x = 0$$

$$c_2'(x) = e^x \Rightarrow c_2(x) = e^x$$

والحل الخاص الثاني يساوي :

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = -\frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1 + e^x \cdot e^x = \frac{1}{2}e^{2x}$$

وللحصول على الحل الخاص الثالث المقابل للتابع $f(x) = x$ نطبق المعادلتين (8) فنجد أن :

$$c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x)e^x = 0$$

$$c_1'(x) \cdot 0 + c_2'(x)e^x = x$$

وبطرح الأولى من الثانية نحصل على :

$$-c_1'(x) = x \Rightarrow c_1(x) = -\frac{x^2}{2}$$

نعوض في الأولى فنجد ان :

$$\cdot\ x\cdot 1 + c_2'(x)e^{x} - o$$

$$c_2'(x) = xe^{-x}$$

$$c_2(x) = \int xe^{-x}dx \cdot\cdot - xe^{-x} \quad e^{-x} \quad e^{-x}(x+1)$$

وبذلك نجد أن الحل الخاص الثالث هو :

$$y - c_1(x)y \cdot c\ (x)y \quad \frac{x^2}{2}\ 1\ e^{-x}(x+1)e^{x} = \cdot\frac{x^2}{2}\ x\ !$$

وبأخذ مجموع هذه الحلول الخاصة نحصل على الحل الخاص الشامل وهو :

$$y = e^{x}(x\ \ 1) + \frac{1}{2}e^{x} \quad \frac{x^2}{2} \cdot x - 1$$

وبدمج هذا الحل الخاص مع الحل العام للمعادلة المتجانسة نحصل على الحل العام للمعادلة الأساسية التالي :

$$y = c_1 + c_2e^{x} + (x-1)e^{x} + \frac{!}{2}e^{x} \cdot\cdot \frac{x^2}{2} \cdot x - 1$$

IV - المعادلات الفرقية :

وهي معادلات شبيهة بالمعادلات التفاضلية ولكنها تستخدم للمتحولات المنقطعه (أوللمتحولات التي تُعامل وكأنها منقطعه) وتطبق كثيراً على السلاسل الزمنية في مجالات الإنتاج والسكان والإدخار والإنفاق ....الخ

فإذا رمزنا للمتحول المستقل بالرمز t وللتابع له بالرمز y وإذا رمزنا لقيمة التابع y في اللحظة t بالرمز y_t ولقيمته في اللحظة t+1 بالرمز y_{t+1} ولقيمته في اللحظة t+2 بالرمز y_{t+2} ..... الخ . وإذا قمنا بأخذ الفروقات المتتالية لهذه القيم ورمزنا لها بالرمز Δy فإننا سنحصل على مايلي :

$$y_{t+1} - y_t = \Delta y_t$$

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \Delta y_{t+1}$$

$$y_{t+3} - y_{t+2} = \Delta y_{t+2}$$

.....

$$y_{t+n} - y_{t+n-1} = \Delta y_{t+n-1}$$

ومن جملة هذه المعادلات نجد أن القيم المتتالية يمكن أن تكتب كما يلي :

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \Delta y_t \\ y_{t+2} &= y_{t+1} + \Delta y_{t+1} = y_t + \Delta y_t + \Delta y_{t+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{t+3} &= y_{t+2} + \Delta y_{t+2} = y_t + \Delta y_t + \Delta y_{t+1} + \Delta y_{t+2} \end{aligned} \qquad (1)$$

وإذا قمنا بأخذ فروقات الفروقات Δy فإننا سنحصل على فروقات المرتبة الثانية والتي سنرمز لها بـ $\Delta^2 y$ وهي كما يلي :

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_t &= \Delta y_{t+1} - \Delta y_t \Rightarrow \Delta y_{t+1} = \Delta y_t + \Delta^2 y_t \\ \Delta^2 y_{t+1} &= \Delta y_{t+2} - \Delta y_{t+1} \Rightarrow \Delta y_{t+2} = \Delta y_{t+1} + \Delta^2 y_{t+1} \\ \Delta^2 y_{t+2} &= \Delta y_{t+3} - \Delta y_{t+2} \Rightarrow \Delta y_{t+3} = \Delta y_{t+2} + \Delta^2 y_{t+2} \end{aligned} \qquad (2)$$

وإذا أخذنا الفروقات من المرتبة الثالثة والتي سنرمز لها بـ $\Delta^3 y$ نجد أن

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_t &= \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t \Rightarrow \Delta^2 y_{t+1} = \Delta^2 y_t + \Delta^3 y_t \\ \Delta^3 y_{t+1} &= \Delta^2 y_{t+2} - \Delta^2 y_{t+1} \Rightarrow \Delta^2 y_{t+2} = \Delta^2 y_{t+1} + \Delta^3 y_{t+1} \end{aligned} \qquad (3)$$

وهكذا نجد أنه يمكننا كتابة القيم المتتالية للتابع y بدلالة الفروقات Δy كمايلي

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \Delta y_t \\ y_{t+2} &= y_t + \Delta y_t + (\Delta y_t + \Delta^2 y_t) = y_t + 2\Delta y_t + \Delta^2 y_t \\ y_{t+3} &= y_{(t+1)+2} = y_{t+1} + 2\Delta y_{t+1} + \Delta^2 y_{t+1} \\ &= (y_t + \Delta y_t) + 2(\Delta y_t + \Delta^2 y_t) + (\Delta^2 y_t + \Delta^3 y_t) \\ &= y_t + 3\Delta y_t + 3\Delta^2 y_t + \Delta^3 y_t \end{aligned} \qquad (4)$$

وبنفس الطريقة يمكننا أن نبرهن على أن القيمة y_{t+n} تعطى بواسطة العلاقة التالية :

$$y_{t+n} = y_t + C_1^n \Delta y_t + C_2^n \Delta^2 y_t + C_3^n \Delta^3 y_t + \cdots + C_{n-1}^n \Delta^{n-1} y_t + \Delta^n y_t \qquad (5)$$

أي أنه يمكننا أن نكتب أي تابع للرمز t وللقيم y_t المتتالية له الشكل التالي :

$$f(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots, y_{t+n}, t) = 0 \qquad (6)$$

على شكل آخر وبدلالة الزمن والفروقات المتتالية حتى المرتبة n كما يلي :

$$f(y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t \quad \Delta^n y_t, t) = 0 \qquad (7)$$

وكمثال على ذلك نأخذ المعادلة التالية :

$$f(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, t) = y_t - y_{t-1} + 2y_{t-2} - 6t = 0$$

وبتعويض القيم المتتالية بما تساويها بدلالة الفروقات المتتالية نجد أن :

$$f = y_t - (y_t + \Delta y_t) + 2(y_t + 2\Delta y_t + \Delta^2 y_t) - 6t = 0$$

وبذلك نحصل على المعادلة الفرقية التالية :

$$f(y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, t) = 2y_t + 3\Delta y_t + \Delta^2 y_t - 6t = 0$$

وبالعكس يمكننا كتابة أية معادلة فرقية لها الشكل

$$f(y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \ldots\ldots \Delta^n y_t, t) = 0 \qquad (8)$$

على شكل تابع للقيم المتتالية من الشكل التالي

$$f(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\ldots y_{t-n}, t) = 0 \qquad (9)$$

ولذلك نسمي المعادلة (8) السابقة أوالمعادلة (9) بمعادلة فرقية من المرتبة n . وإن حل هذه المعادلة هوإيجاد التابع y_t الذي يحقق إحدى المعادلتين (8) أو (9) .

ويسمى الحل حلاً عاماً إذا كان يتضمن ثوابت كيفية مثل $C_1, C_2 \ldots$.الخ

ويسمى الحل حلاً خاصاً إذا لم يتضمن ثوابت كيفية .

وسنقتصر في دراستنا هنا على المعادلات الفرقية الخطية ذات الأمثال الثابتة وهي التي يكون لها الشكل التالي :

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots\ldots + a_n y_{t-n} = f(t) \qquad (10)$$

حيث أن $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ثوابت عديدية محددة

ونلاحظ هنا إن المعادلة السابقة هي معادلة فرقية خطية من المرتبة n . لأنها تتضمن القيم المتتالية حتى (y_{t-n})

وإذا وضعنا الطرف الأول مساويا للصفر فاننا نحصل على المعادلة الفرقية الخطية المتجانسة من المرتبة n وذات الأمثال الثابتة وهي :

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_n y_{t-n} = o \qquad (11)$$

فمثلاً نجد أن المعادلة

$$a y_t + b y_{t-1} = t^2$$

هي معادلة فرقية خطية من المرتبة الأولى .وكذلك نجد أن المعادلة

$$a y_t + b y_{t-1} + c y_{t-2} = e^t$$

هي معادلة فرقية خطية من المرتبة الثانية .....الخ

وبما أنه يمكننا تحويل هذه المعادلات إلى معادلات بدلالة الفروق Δy_t فإننا نجد تشابهاً بين حلولها وحلول المعادلات التفاضلية السابقة .لذلك نثبت القواعد التالية .

١- إذا كان $y(t)$ حلاً خاصاً للمعادلة للمتجانسة (11) فإن $C.y(t)$ يكون حلاً لتلك المعادلة -حيث C ثابت كيفي

٢- إذاكان $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ حلين خاصين للمعادلة المتجانسة (11) فإن مجموعها $y_1(t)+y_2(t)$ يمثل حلاً لتلك المعادلة

٣-إذا كان $y(t,c_1,c_2,c_3,\ldots\ldots c_n)$ حلاً عاماً للمعادلة المتجانسة (11) وكان $y(t)$ حلاً خاصاً للمعادلة الأساسية (10) فإن الحل العام للمعادلة (10) يتألف من مجموعهما أي أن الحل العام للمعادلة (10) يكون

$$f(t,c_1,c_2,c_3,\ldots\ldots c_n) = y(t,c_1,c_2,\ldots\ldots c_n) + y(t) \qquad (12)$$

١-حل المعادلات الفرقية الخطية ذات الأمثال الثابتة من المرتبة الأولى :

يمكن كتابة الشكل العام لهذه المعادلات على الشكل التالي :

$$y_t - a y_{t-1} = f(t)$$

مع الإنتباه إلى الإشارة السالبة في الطرف الأول قبل الثابت a . وإن المعادلة المتجانسة لها (بدون طرف ثان) هي

$$y_t - a y_{t-1} = o$$

وبذلك نجد أن :

$$y_t = a y_{t-1}$$

ولإيجاد y_t بدلالة t نأخذ القيم المتتالية فنجد أن :

$$y_1 = a\,y_0$$
$$y_2 = a\,y_1 = a^2\,y_0$$
$$y_3 = a\,y_2 = a^3\,y_0$$
$$y_t = a\,y_{t-1} = a^t\,y_0$$

وبذلك أن الحل الخاص للمعادلة المتجانسة هو $y_t = y_0\,a^t$

ويكون الحل العام لهذه المعادلة المتجانسة وفق القاعدة الأولى من الشكل :

$y_t = C\,a^t$ حيث C عدد كيفي .

ولإيجاد حل خاص للمعادلة الأساسية (مع طرف ثاني) نأخذ الحالة الخاصة التي يكون فيها الطرف الثاني ثابتاً أي عندما يكون $f(t) = \alpha$.

فنجد أنه في هذه الحالة إذا افترضنا أن الحل الخاص المطلوب يساوي مقداراً ثابتاً **u** فإنه يكون لدينا

$$u - a\,u = \alpha$$

ومنها يكون $$u = \frac{\alpha}{1-a}$$

وبذلك نجد أن الحل العام للمعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الأولى وذات الأمثال الثابتة التي لها الشكل $y_t - a\,y_{t-1} = \alpha$

هو الحل التالي :

$$y_t = \frac{\alpha}{1-a} + C\,a^t$$

مثال : نعلم أنه إذا وضعنا مبلغاً في أحد المصارف فإن قيمته ستزداد سنوياً بشكل مركب . وبصورة عامة فإن y_t رصيد المبلغ في السنة t يعطى بدلالة رصيد السنة التي قبلها y_{t-1} وسعر الفائدة p أي أن :

$$y_t = \left(1 + \frac{p}{100}\right) y_{t-1} \Rightarrow y_t - \left(1 + \frac{p}{100}\right) y_t = 0$$

وهي معادلة فرقية منحانسة من المرتبة الأولى ، فيها $a = 1 + \frac{p}{100}$ وبذلك نجد

أن حلها العام هو :

$$y_t = ca^t \quad c\left(1 \quad \right)^t$$

ولتحديد العدد الثابت C نعتمد على شروط المسـ . فاذا كانت قيمة المبلغ عند الإيداع هي y_0 فإن هذا يقابل $t = 0$ ، وبالتعويض نجد أن $y_0 = C$ وبذلك يأخذ الحل العام الشكل التالي :

$$y_t = y_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

وهو قانون الفائدة المركبة المعروف .

مثال آخر : لـ أن حجم العرض لإحدى المنتجات الزراعية في السنة t تابع لسعره السابقة p_{t-1} وأن الطلب عليها هو تابع لسعرها في نفس السنة p_t وهكذا الطلب هو تابع من الشكل $q_t = f(p_t)$ وإن العرض هو تابع من الشكل $S_t = g(p_{t-1})$.

وإن سعر التوازن لهذا المنتج يحدد بواسطة المعادلة

$$f(p_t) = g(p_{t-1})$$

وهي عبارة عن معادلة فرقية من المرتبة الأولى .

وللسهولة نفترض أن تابع الطلب له الشكل التالي

$$q_t = ap_t$$

وإن تابع العرض له الشكل التالي

$$S_t = b\,p_{t-1}$$

وبذلك نجد أن معادلة سعر التوازن هي

$$a\,p_t = b\,p_{t-1}$$

$$p_t = \frac{b}{a}p_{t-1} \Rightarrow p_t - \frac{b}{a}p_{t-1} = 0$$

وهي معادلة فرقية خطية من المرتبة الأولى وان حلها العام يعطى مباشرة من العلاقة التالية :

$$p_t = C\left(\frac{b}{a}\right)^t$$

ولتحديد الثابت الكيفي C نعتمد على شروط البدء عندما $t = o$ نجد أن $C = p_o$ وبذلك نجد أن الحل العام يأخذ الشكل التالي .

$$p_t = p_o\left(\frac{b}{a}\right)^t$$

ب – حل المعادلات الفرقية الخطية من المرتبة الثانية وذات الأمثال الثابتة :

الشكل العام لهذه المعادلات هو :

$$y_t + ay_{t-1} + by_{t-2} = f(t)$$

وإن معادلتها المتجانسة (بدون طرف ثان) هي :

$$y_t + ay_{t-1} + by_{t-2} = o$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة نعتمد على المعادلة المميزه المقابلة لها وهي من الشكل :

$$k^2 + ak + b = o$$

وهنا سنميز بين الحالات الثلاث التالية :

الحالة الأولى : عندما يكون المميز موجباً أي $\Delta = a^2 - 4b > o$ ، فإنه يكون للمعادلة المميزه جذران حقيقيان هما k_1, k_2 ، وعندها يكون للمعادلة المتجانسة الحل العام التالي :

$$y_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$$

حيث C_1, C_2 ثابتان كيفيان .

وإذا كان $y(t)$ حلاً خاصاً للمعادلة الأساسية فإن الحل العام لها هو

$$y_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t + y(t)$$

ويمكن تحديد C_1, C_2 اعتماداً على شروط البدء .

الحالة الثانية : إذا كان المميز معدوما أي $\Delta = a^2 - 4b = 0$ ، فإنه يكون للمعادلة المميزه جذر وحيد k (مضاعف) ، ويكون للمعادلة المتجانسة الحل العام التالي :

$$y_t = (C_1 + C_2 t)\, k^t$$

وإذا كان $y(t)$ حلا خاصا للمعادلة الأساسية ، فإن حلها العام هو :

$$y_t = (C_1 + C_2 t)k^t + y(t)$$

ويمكن تحديد C_1 ، C_2 اعتمادا على شروط البدء .

الحالة الثالثة : إذا كان المميز سالبا أي $\Delta = a^2 - 4b < 0$ ، عندئذ يكون للمعادلة المميزه جذران مركبان ومترافقان هما : $\alpha + i\beta$ ، $\alpha - i\beta$

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة من الشكل :

$$y_t = C_1(\alpha + i\beta)^t + C_2(\alpha - i\beta)^t$$

وإذا كان $y(t)$ حلاً خاصاً للمعادلة الأساسية ، فإن حلها العام يكون من الشكل :

$$y_t = C_1(\alpha + i\beta)^t + C_2(\alpha - i\beta)^t + y(t)$$

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y_t - 5y_{t-1} + 6y_{t-2} = 7$$

نأخذ المعادلة المتجانسة لها فنجد أن :

$$y_t - 5y_{t-1} + 6y_{t-2} = 0$$

وإن المعادلة المميزه لها هي :

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

وبما أن $\Delta = 25 - 4.6 = 1$ فإن للمعادلة المميزه جذرين حقيقيين هما :

$$k_1 = 2 \qquad k_2 = 3$$

وبذلك نجد أن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_t = C_1 2^t + C_2 3^t$$

وبفرض أن الحل الخاص للمعادلة الأساسية ثابتا ويساوي $y_t = u$ فإننا نجد أن :

$$u - 5u + 6u = 7 \Rightarrow u = \frac{7}{2}$$

وبذلك نجد أن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$y_t = C_1 2^t + C_2 3^t + \frac{7}{2}$$

يمكننا تحديد الثابتين C_1 ، C_2 اعتمادا على شروط البدء :

ولنفرض أنه $y_0 = 5$ عندما $t = 0$ ، $y_1 = 9$ عندما $t = 1$

وبالتعويض في الحل العام نجد أن :

$$5 = C_1 2^0 + C_2 3^0 + \frac{7}{2} \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{3}{2}$$

$$9 = C_1 2^1 + C_2 3^1 + \frac{7}{2} \Rightarrow 2C_1 + 3C_2 = \frac{11}{2}$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$C_1 = -1 \quad ; \quad C_2 = \frac{5}{2}$$

وبذلك نحصل على الحل التالي المرتبط بشروط البدء :

$$y_t = \frac{7}{2} - 2^t + \frac{5}{2} \cdot 3^t$$

Extremetied Limit	نهاية مقيدة
Exponent	قوة (أس)
Extreme Point	نقطة قصوى

F

Function	تابع
Constant Function	تابع ثابت
Continuos Function	تابع مستمر
Decreasing Function	تابع متناقص
Exponential Function	تابع أسي
Even Function	تابع زوجي
Increasing Function	تابع متزايد
Inverse Function	تابع عكسي
Logarithmic Function	تابع لوغاريتمي
Odd Function	تابع فردي
Periodic Function	تابع دوري
Plynomial Function	تابع كثير الحدود
Probabilty Function	تابع احتمالي
Rational Function	تابع عادي

G

Geometry	هندسة
Geometric	هندسي
Graph	خط بياني

	H
Higher Derivative	مشتقات عليا
Homogeneous Equation	معادلة متجانسة
	I
Interval	مجال
Irrational	عدد غير عادي
Inverce Matrix	مقلوب مصفوفة
	L
Limit	نهاية
Logarithm	لوغاريتم
	M
Mathematic	رياضيات
Matrex	مصفوفة
Maximum	نهاية عظمى
Minimum	نهاية صغرى
	N
Neighborhood	جوار
Numerator	بسط الكسر
Nul-Matrix	المصفوفة الصفرية
	O
Open Intrval	مجال مفتوح
Order	مرتبة

P

Particular Soulution	حل خاص
Partition	تجزئة
Piont of inflexion	نقطة انعطاف

R

Rational Number	عدد عادي
Real Number	عدد حقيقي
Row Matrix	مصفوفة سطرية

S

Semi-Open	نصف مفتوح
Serie	سلسلة
Sign	إشارة
Sine	جيب
Sub Set	مجموعة جزئية
System	جملة / نظام

T

Tangent	ظل
Term	حد
Theorem	نظرية (جزئية)

Theary	نظرية (عامة)
Time	زمن
Transpose Matrix	منقول مصفوفة

U

Unit Matrix	المصفوفة الأحادية

المراجـــع

أ - باللغة العربية

١- د . ابراهيـــم العلـــي ، الرياضيات العالية ، منشورات جامعة حلب ١٩٨٣
د . أمل كابوس)

٢- د . عبـــد الـــرزاق الفاضل الرياضيـات العاليـة - منشـورات جامـ ـة دمشـق - ١٩٨٣

٣- ديميدوفتش و مارون الرياضيات الحسابية - ترجمة عن الروسية للدكتور أحمد حمزة - منشـ ـات وزارة التعليم العالي ١٩ - المجلد الأول الثاني .

٤ - وايم هـ . دورفي حساب التفاضل و التكامل و الهندسة التحليلية.ترجمة عن الانكليزية الدكتور محمد علي محمد السـ ـري منشورات دار ماكجروهيل للنشر جمهورية مصر العربية - القاهرة - ١٩٨٢ .

٥ - ج . ب . توماس حسـاب التفـاضل و التكـامل و الهندسـة التحليليـة (الجزء الأول)ترجمة عـن الانكليـزي : الدكتـور موفق دعبول ، الدكتور علي بالأشهر ، الدكتور جمعة سويسي . منشورات جامعة الفاتح - طرابلس - ليبيا - ١٩٧٩ .

٦ - الدكتور سيمور ليبشتز الجبر الخطي/س سلسلة ملخصات شوم مترجم عن الانكليزية . مراجعة الدكتـور السيد الوكيـل . منشورات ديـوان المطبوعات الجامعية - الجزائر - ١٩٨٩ .

٧- قادة علاب عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد)منشورات ديـوان المطبوعـات الجامعيـة -

المراجع الأجنبية

أ- بالانكليزيه

BLACK, J BRADLEY Essential mathematcs for economists. 2ed edit. John Wiley and sons 1994.

DEMIDOVICH B. Problems in mathematical analysis. Mir, Moscow 1968.

FRANK AYRES.JR Modern algebra. SCHAUM CO New York 1965

FRANK AYRES.JR Matrices SCHAUM CO. New York 1962

THOMAS GEORGE.JR Calculus and Analytic Geometry 3-Edit. ADDISON WESLEY, London 1965

Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. Наука М. 1968

Воробьева Г.Н. Данилова А.Н. Практикум по численным методам. Высшая школа. М. 1979

Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. Наука М. 1968

Двайт Г.Б. Таблицы интегралов – I. Наука М. 1973 (перевод с анг.)

Корн Г. Корн Т. Справочник по математике. Наука М. 1978 (перевод с анг.)

Крынский Х.Э. Математика для экономистов. Статистика М. 1970

Смирнов В.И. Курс высшей математики. Тома I, II. Наука М. 1967

Венра Димова, Нанчева, Николаи Стоянов
Висша математика, част 1.
Техника, София, 1977.

Спас Манолов, Ана Петрова - Денева,
Ангел Генов, Николай Шополов
Висша математика, част 2.
Техника, София 1977.

Димитър Токарев, Любомир Стойчев
Методическо ръководство за
решаване на задачи по висша
математика, част 1.
Техника, София, 1977.

Димитър Пирогов, Димитър Токарев,
Гена Стамболиева, Елена Пирогова
Методическо ръководство
за решаване на задачи по
висша математика, част 2.
Техника, София, 1979.

Дойчин Дойчинов Математически ана-
лиз. Наука и изкуство,
София, 1983.

الفهـــرس

	الصفحة
مقدمة	٣
الفصل الأول : الأعداد و الأشعة	
أولا الأعداد	
مجموعه الاعداد الطبيعية N	١١
– مجموعه الاعداد الصحيحة Z	١٢
مجموعة الأعداد العادية Q	١٢
– مجموعة الأعداد الحقيقية R	١٣
– مجموعة الأعداد المركبة C	١٥
ثانيا **الأشعة** :	
– العمليات على الأشعة	١٩
– الاستقلال و الارتباط الخطي	٢٠
ثالثا – **تشكيل المجموعات**	٢٤
– المتباديلات و المرتبات	٢٥
– التوافيق	٢٦
– عدد طرق تجزئة المجموعة A_n	٢٧
– دستور ذي الحدين لنيوتن	٢٨
رابعا المتواليات العددية	
– المتوالية الحسابية	٢٩
المتوالية الهندسية	٣١

خامساً - مبادئ الهندسة التحليلية

- جملة المحاور الاحداثية الديكارتية ٣٢
- جملة المحاور الاحداثية القطبية ٣٤
- دوران المحاور ٣٦
- انسحاب المحاور ٣٧
- بعض العلاقات المثلثية الهامة ٣٩
- تمارين ٤٢

الفصل الثاني - المصفوفات والمعينات

أولا - المصفوفات

- انواع المصفوفات ٤٤
- العمليات الحسابية على المصفوفات ٤٨

ثانيا - المعينات

- حساب قيمة المعينة ٥٥
- المصغرات ٥٨
- خواص المعينات ٦٠
- طريقة غوص لحساب قيمة المعينات ٦٩
- مقلوب مصفوفة مربعه ٧٤
- رتبة المصفوفة ٨٨
- تمارين ٩١

الفصل الثالث - جملة المعادلات الخطية

- مفاهيم اساسية ٩٣
- طرائق حل جملة المعادلات الخطية ٩٨
- شروط وجود حل مشترك لجملة المعادلات الخطية ١١٦