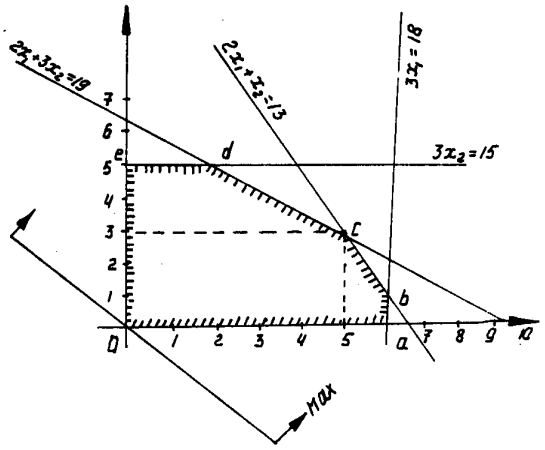
الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة تشرين
كلية الاقتصاد

مدخل
إلى
بحوث العمليات

(طبعة ثانية معدلة ومضافة)



الدكتور

إبراهيم محمد العلي

أستاذ في قسم الإحصاء والبرمجة

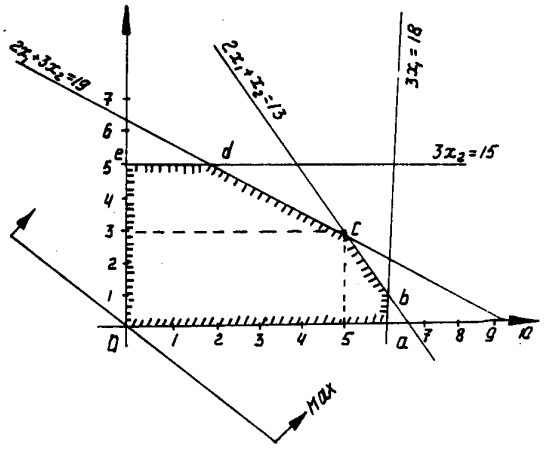
2004-2003

Tishreen University Publications
Faculty of Economics

Entrance

to

Operations Research



Dr. AL-ALI IBRAHIM
Prof. in Department of Statistics and Programming

2003 - 2004

سعر المبيع للطالب / / ل.س

مدخل إلى بحوث العمليات

تنويه

يعتذر المؤلف عن جميع الأخطاء التي لم يستطع تداركها خلال التدقيق رغم كل ما بذله من جهد حول ذلك. ويشكر طاقم **شركة الغدير** لعلوم الكمبيوتر ونشر المعلوماتية الذين تحملوا عناء طباعته وإخراجه.

المدقق اللغوي

الأستاذ الدكتور يعقوب بيطار

شركة الغدير لعلوم الكمبيوتر ونشر المعلوماتية
اللاذقية– مشروع الزراعة– مقابل باب الجامعة الغربي– هاتف 437610– فاكس 438800
البريد الالكتروني: basem76@scs-net.org – ص.ب: 2125

المقدمة

أصبح لبحوث العمليات مكان بارز بين الطرائق الرياضية المستخدمة في تخطيط وإدارة النشاطات الاقتصادية والعسكرية المختلفة. وهي الآن تساعد المختصين في وضع الخطط المثالية من حيث التكاليف أو الإنتاج أو التموين أو التوزيع أو الربح أو الهجوم أو الدفاع أو استثمار الموارد والطاقات البشرية....الخ، ويتوقع لها في المستقبل القريب أن تسيطر بنماذجها وبرامجها وطرائقها على مجمل نشاطات الإنسان في جميع أنحاء العالم.

ومع أن بعض المختصين يشيرون إلى أن عدة من أوجه النقص مازالت تكتنف هذا الفرع العلمي الهام إلا أنهم يأملون أن يتم تذليل جميع العقبات المتعلقة به ليصبح علماً مستقلاً بذاته.

ولقد رأينا عندما عزمنا على تعديل هذا الكتاب أن نضيف إليه عدة موضوعات تندرج تحت اسم (بحوث العمليات) وهي: تحليل الحساسية، سياقات بواسون وماركوف، صفوف الانتظار، إدارة المخزون، نظرية القرارات الإدارية، والمحاكاة.... وهذا ما أدى– رغم اختصار الفصول الأولى– إلى زيادة حجم الكتاب بشكل ملحوظ، مما اضطرنا إلى اختصار بعض الفصول الأولى وحذف الفصول الأخيرة من الطبعة الثانية وهي التي تشمل (البرمجة الوسيطية، البرمجة اللاخطية، البرمجة الديناميكية) لكونها من الموضوعات المعمقة، وتقع ضمن اهتمامات الدراسات العليا، ويمكن للمهتمين بهذه الموضوعات الرجوع إلى الطبعة الأولى للاطلاع عليها، وبذلك أصبح الكتاب يتألف من الفصول التالية:

- الفصل التمهيدي: وفيه نتناول أنواع وخصائص المتراجحات الخطية ودراسة حلولها المشتركة.

- الفصل الأول: وخصصناه لدراسة المعادلات الخطية واستخدام طريقة (جاردان– غوص) لإيجاد الحلول المقبولة لها.
- الفصل الثاني: وفيه نستعرض أسس البرمجة الخطية ونماذجها الأساسية.
- الفصل الثالث: وخصصناه إلى طريقة السمبلكس وتعديلاتها لإيجاد الحل المثالي.
- الفصل الرابع: وفيه نعالج قضايا النماذج المرافقة وعلاقتها بالنماذج الأصلية.
- الفصل الخامس: ونتناول فيه قضايا البرمجة الصحيحة وطرائق إيجاد الحل المثالي الصحيح.
- الفصل السادس: ويتضمن بعض النماذج الاقتصادية والإدارية المستخدمة في الاقتصاد.
- الفصل السابع: وفيه درسنا كيفية تحليل الحساسية للحل المثالي الذي تم الحصول عليه ودراسة حدود ثباته.
- الفصل الثامن: وفيه عالجنا نماذج النقل بأقل تكلفة وباستخدام الطرائق الخاصة المتعلقة بذلك.
- الفصل التاسع: تناولنا فيه الألعاب الاستراتيجية وكيفية التوصل على الاستراتيجية المثالية.
- الفصل العاشر: درسنا فيه مبادئ التخطيط الشبكي وتطبيقاته في الإدارة والاقتصاد.
- الفصل الحادي عشر: وفيه قمنا باستعراض سريع لبعض السياقات العشوائية المستخدمة في بحوث العمليات مثل سياقات بواسون وماركوف.
- الفصل الثاني عشر: قمنا فيه بتقديم موجز عن صفوف الانتظار وتطبيقاتها في الخدمات الجماهيرية.
- الفصل الثالث عشر: خصصناه لدراسة وتحليل إدارة المخزون وكيفية معالجة قضاياه المختلفة.

- الفصل الرابع عشر: قمنا باستعراض موجز لنظرية القرارات الإدارية والمعايير المعتمدة في اتخاذ القرارات والأساليب المستخدمة في تحليل الخيارات المختلفة.
- الفصل الخامس عشر: خصصناه لعمليات المحاكاة وتوليد الأرقام العشوائية الخاضعة لبعض التوزيعات الاحتمالية.

كما ألحقنا بالكتاب جداول إحصائية للتوزيع الثنائي ولتوزيع بواسون وتابع التوزيع الطبيعي المعياري وقائمة بالمصطلحات العلمية المستخدمة.

وإني إذ أضع أمام القراء الكرام والطلاب الأغرار كتاباً موجزاً لبعض ما تشمله مادة (بحوث العمليات)، آمل أن أكون قد وفقت بعرض موضوعاتها وتبسيط طرائقها. وأغتنم هذه الفرصة لأدعو الجهات المعنية بقضايا الإدارة والإنتاج أن تعمل على اعتماد هذه الطرائق الرياضية في تخطيط وإدارة نشاطاتها الإدارية والاقتصادية، كما ألتمس من القراء الصفح عن كل خطأ أو سهو أو غموض أو نقص قد يكون وقع في العرض أو الطباعة. وسأكون سعيداً بتلقي أية ملاحظة مفيدة لآخذها بعين الاعتبار عند التدريس أو إعادة الطباعة.

الطبعة الأولى 1990/5/15

الطبعة الثانية 2003/7/25

المؤلف

فصل تمهيدي
المتراجحات الخطية

إن المتراجحات يمكن أن تكون خطية ولا خطية، مفردة أو مجتمعة، ذات متحول واحد أو ذات متحولين أو ذات عدة متحولات. وإن حلولها ترتبط بنوعها، وهنا سنقتصر على المتراجحات الخطية والتي سنستعرضها وفق الترتيب الآتي:

I- المتراجحة الخطية المفردة:

١-المتراجحة الخطية بمتحول واحد:

وهي المتراجحة التي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$ax + b \geq 0 \qquad (١-١-٠)$$

وإن حلها يشكل مجالاً من المحور ox يعطى بوساطة إحدى العلاقتين الآتيتين:

في حالة $a>0$ يكون:

$$x \geq -\frac{b}{a}$$

وهو يمثل مجالاً من المحور ox كما هو مبين على الشكل (١-٠):



الشكل (١-٠)

في حالة $a<0$ يكون:

$$x \le -\frac{b}{a}$$

وهو يمثل أيضاً مجالاً من المحور ox كما هو مبين في الشكل رقم (٠-٢) الآتي:



الشكل (٠-٢)

مثال:

أوجد مجال حلول المتراجحة:

$$\frac{3x+4}{4}-\frac{4x+15}{3}+1\ge 0$$

نلاحظ أن هذه المتراجحة هي متراجحة خطية وبمتحول واحد ويمكن إصلاحها وكتابتها على الشكل الآتي:

$$\frac{-7}{12}x-5\ge 0$$

وان مجال حلولها يعطى بالعلاقة: $x \le \frac{60}{7}$

٢- المتراجحة الخطية بمتحولين:

وهي المتراجحات التي يمكن كتابتها على الشكل العام الآتي:

$$ax+by+c\ge 0 \qquad \begin{matrix} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{matrix} \qquad (٠-١-٢)$$

إن جملة حلول هذه المتراجحات تشكل منطقة من المستوي xoy ولإيجاد منطقة الحلول بيانياً نقوم بمايلي:

أ- نأخذ الطرف الأيسر من المتراجحة ونضعه مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة:

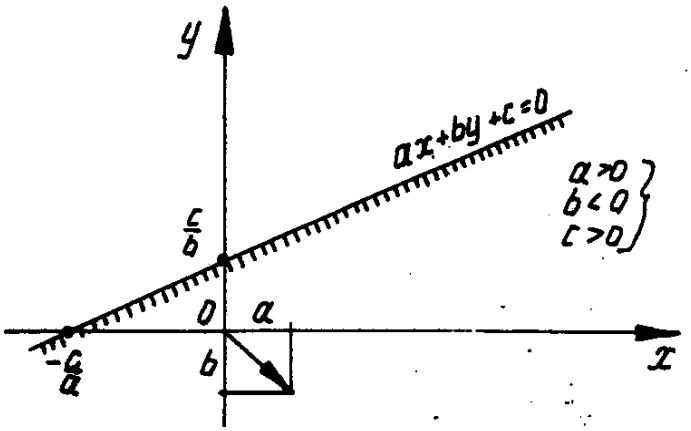
$$ax+by+c=0 \qquad (٠-١-٣)$$

وهي معادلة مستقيم في المستوي xoy.

ب- نقوم برسم هذا المستقيم بعد كتابة معادلته على الشكل الآتي:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

وهو مستقيم ميله $m = -\frac{a}{b}$ ويقطع المحور oy في النقطة $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ كما يقطع المحور ox في النقطة $\left(-\frac{c}{a},0\right)$، ويكون له الشكل المبين على الرسم (٠-٣):



الشكل (٠-٣)

ومن الواضح أن هذا المستقيم يقسم المستوي xoy إلى منطقتين مختلفتين (نصفين)، أحدهما تحقق المتراجحة السابقة (٠-١-٢) والأخرى لا تحققها.

وهنا نشير إلى أن جميع نقاط المستقيم (٠-١-٣) تحقق المتراجحة الأساسية لذلك تعتبر جزءاً من منطقة حلولها.

ج- نقوم بتحديد منطقة حلول المتراجحة (٠-١-٢) بإحدى الطريقتين الآتيتين:

طريقة الاختبار:

نأخذ نقطة كيفية من المستوى xoy (ولكن غير واقعة على المستقيم)، ولتكن نقطة المبدأ (٠,٠) أو النقطة (٠,١) أو النقطة (١,٠) أو (١,١) أو غيرها، ثم نعوض إحداثيات تلك النقطة في المتراجحة (٠-١-٢) السابقة، فإذا أصبحت المتراجحة محققة فإن المنطقة (نصف المستوي xoy) التي تحتوي تلك النقطة تكون هي منطقة حلول تلك المتراجحة.

أما إذا كانت إحداثيات نقطة الاختبار لا تجعل المتراجحة (٠-١-٢) محققة فإن هذا يعني أن النقطة المختارة لا تقع في منطقة الحلول، وبذلك تكون المنطقة (نصف المستوي) التي لا تحتوي تلك النقطة هي منطقة حلول المتراجحة المفروضة.

ولتمييز منطقة الحلول عن غيرها نصطلح على رسم خطوط شعرية على جانب المستقيم الموافق لجهة منطقة الحلول كما في الشكل (٠-٣) السابق.

وهنا نشير إلى أنه إذا جعلت نقطة الاختبار الطرف الأيسر للمتراجحة (٠-١-٢) مساوياً للصفر، فهذا يعني أن النقطة المختارة تقع على الخط المستقيم (٠-١-٣) ولا تفيدنا في تحديد منطقة الحلول، لذلك علينا أن نختار نقطة أخرى لإجراء الاختبار.

طريقة الشعاع:

يمكننا بسهولة أن نحدد منطقة الحلول بأن نقوم برسم الشعاع $\vec{\theta}(a,b)$، الذي مبدؤه المركز ومركبتاه هما أمثال x وy في المتراجحة (٠-١-٢) ويشير مباشرة إلى المنطقة (نصف المستوي) التي تجعل المتراجحة (٠-١-٢) محققة بالنسبة للمستقيم المفروض وذلك كما هو موضحاً على الشكل رقم (٠-٣) السابق.

ملاحظة:

إذا لم تكن المتراجحة المفروضة مكتوبة على الشكل المحدد بالعلاقة (٠-١-٢) فإنه علينا كتابتهما كما في (٠-١-٢) ثم تحديد منطقة الحلول بوساطة الشعاع $\vec{\theta}(a,b)$.

مثال:

أوجد منطقة حلول المتراجحة:

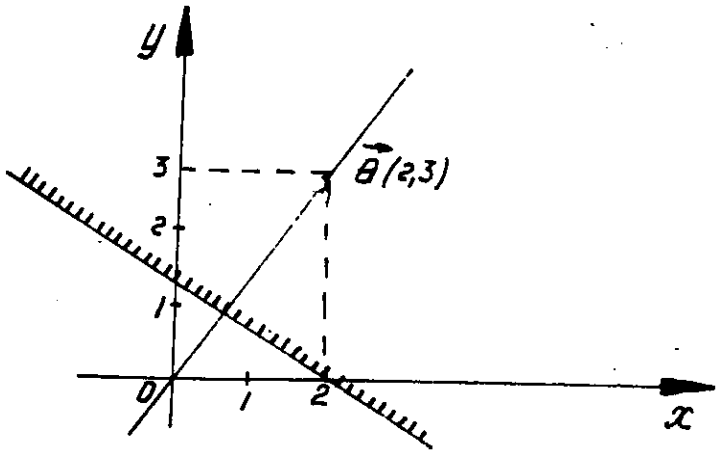
$$2x + 3y - 4 \geq 0$$

الحل:

نضع الطرف الأيسر مساوياً للصفر:

$$2x + 3y - 4 = 0$$

ثم نرسم المستقيم التي تحدده تلك المعادلة فنحصل على الشكل رقم (٠-٤).



الشكل (٠-٤)

ولتحديد منطقة الحلول نأخذ النقطة (٠،٠) ونعوض إحداثييها في المتراجحة، فنجد أنها لا تجعل المتراجحة محققة، إذن فإن منقطة الحلول هي المنطقة التي لا تحتوي المبدأ (٠،٠) وهي المنطقة المشار إليها بخطوط شعرية.

ويمكن أن نحدد منطقة الحلول بوساطة الشعاع $\vec{\theta}(2,3)$ الذي يشير مباشرة إلى منطقة الحلول بالنسبة للمستقيم الفاصل بين المنطقتين.

٣-المتراجحة الخطية بثلاثة متحولات:

وهي المتراجحة التي يمكن كتابتها على الشكل العام الآتي:

$$ax + by + cz + d \geq 0 \qquad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \qquad (٤-١-٠)$$

إن منطقة حلول هذه المتراجحة هي نصف الفضاء R^3، لتحديد تلك المنطقة نقوم بمايلي:

أ- نضع الطرف الأيسر للمتراجحة مساوياً للصفر:

$$ax + by + cz + d = 0$$

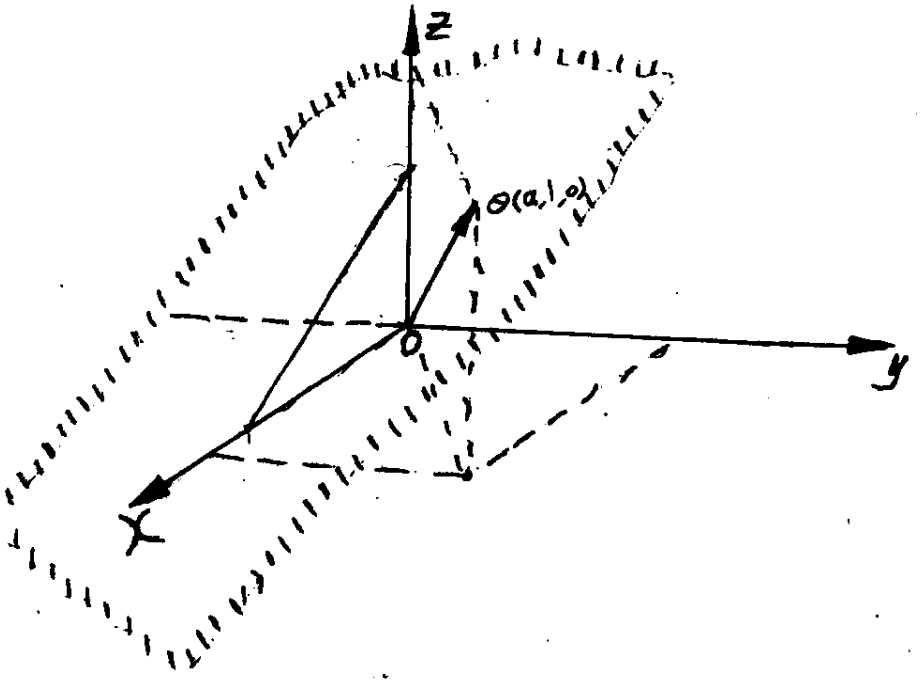
فنحصل على معادلة مستو في الفضاء R^3 والذي سنرمز له بـ oxyz.

ب- نقوم برسم ذلك المنحني في الفضاء R^3 بتحديد نقاط تقاطعه مع المحاور الإحداثية.

ج- نأخذ نقطة اختيار (غير واقعة على المستوي) مثل (٠،٠،٠) أو (0,1,0) أو (0,0,1) ونعوض إحداثياتها في المتراجحة (٠-١-٤)، فإذا أصبحت المتراجحة محققة فإن نصف الفضاء R^3، الذي يضم تلك النقطة هو منطقة حلول المتراجحة المذكورة.

أما إذا كانت إحداثيات النقطة لا تجعل المتراجحة (٠-١-٤) محققة فإن منطقة الحلول تكون هي النصف الآخر الذي لا يحوي النقطة المختارة.

كما يمكن تحديد منطقة الحلول باستخدام طريقة الشعاع وبوساطة رسم الشعاع $\vec{\theta}(a,b,c)$ الذي يشير مباشرة إلى نصف الفضاء R^3 الذي يمثل منطقة الحلول كما هو موضح على الشكل رقم (٠-٥).



الشكل (٠-٥)

٤-المتراجحة الخطية لعدة متحولات:

يمكننا أن نعمم مفهوم المتراجحات الخطية ونتصور متراجحة خطية لعدة متحولات وهي التي تأخذ الشكل الآتي:

$$0 \geq a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+.....+a_nx_n+b \qquad (٥-١-٠)$$

حيث أن: $1 \leq i \leq n$ $a_i \neq 0$

وأن منطقة حلول هذه المتراجحات هي نصف الفضاء R^n، وللأسف لا يمكننا بيانياً أن نحدد ذلك الفضاء أو نصفه، وبالتالي لا يمكننا بيانياً أن نحدد منطقة حلول مثل هذه المتراجحات.

ونكتفي بالقول أن منطقة حلول المتراجحة (٠-١-٥) هي جملة النقاط $(x_1,x_2,.....,x_n)$ التي تجعل تلك المتراجحة محققة وهي تشكل نصف الفضاء R^n.

II- جملة المتراجحات الخطية:

عندما يكون لدينا جملة متراجحات فإننا نبحث عن الحل المشترك التي يحققها جميعاً.

١-جملة متراجحات خطية بمتحول واحد:

وهي متراجحات يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1 \geq 0 \\ &a_2x + b_2 \geq 0 \\ &a_3x + b_3 \geq 0 \qquad (١-٢-٠) \\ &..... \quad ..... \\ &a_rx + b_r \geq 0 \end{aligned}$$

إن الحل المشترك لجملة هذه المتراجحات (إن وجد) هو المجال المشترك I التي يجعلها وبآن واحد محققة، وبتعبير آخر إن الحل المشترك هو تقاطع الحلول المنفردة I_i وهو يشكل مجالاً أو نقطة ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} I_i \qquad (٢-٢-٠)$$

أمـا إذا كـان ذلـك التقـاطع يسـاوي Φ فلـيس لجملـة المتراجحـات الخطيـة حـل مشترك.

مثال (٢):

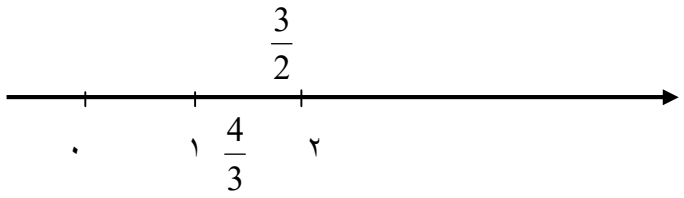
أوجد الحل المشترك لجملة المتراجحات الآتية:

$$-2x+3 \geq 0 \qquad 3x-4 \geq 0 \qquad x-1 \geq 0$$

نلاحظ أن مجالات حلول هذه المتراجحات هي على الترتيب:

$$x \leq \frac{3}{2} \qquad x \geq \frac{4}{3} \qquad x \geq 1$$

وإن المجال المشترك الناجم عن تقاطع هذه المجالات $\left[\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$، وهذا هو الحل المشترك لجملة المتراجحات السابقة، والشكل رقم (٠-٦) يوضح ذلك:



الشكل (٠-٦)

٢-جملة المتراجحات الخطية بمتحولين:

وهي جملة المتراجحات التي يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ &a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \\ &a_3x + b_3y + c_3 \geq 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_mx + b_my + c_m \geq 0 \end{aligned} \qquad (٣-٢-٠)$$

حيث أن: $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$

إن منطقة الحلول المشتركة لهذه المتراجحات –إن وجدت– هو المنطقة المشتركة بين مناطق حلولها المنفردة –وهي تشكل منطقة أو نقطة في R^2، ونحصل عليها بتحديد منطقة حلول كل متراجحة بمفردها D_i ثم نأخذ تقاطع هذه المناطق فتكون منطقة الحلول المشتركة D هي:

$$D = \bigcap_{i=1}^{m} D_i \qquad (٤-٢-٠)$$

مثال (٣):

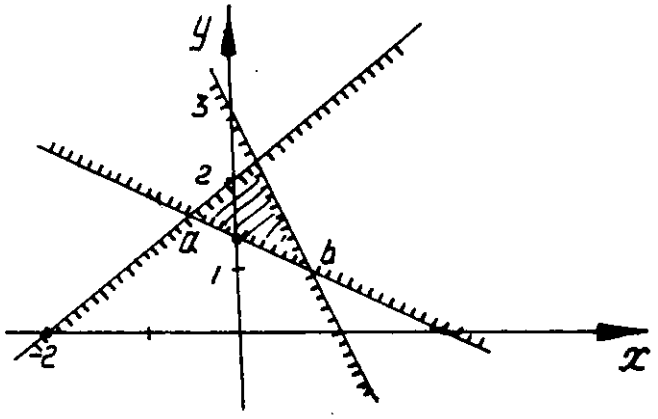
أوجد منطقة الحلول المشتركة لجملة المتراجحات الآتية:

$$2x + 3y - 4 \geq 0$$
$$x - y + 2 \geq 0$$
$$-3x - y + 3 \geq 0$$

الحل: نقوم بتحديد مناطق الحلول المنفردة بوساطة رسم المستقيمات:

$$2x + 3y - 4 = 0$$
$$x - y + 2 = 0$$
$$-3x - y + 3 = 0$$

ثم نأخذ النقطة (٠,٠) ونحدد مناطق الحلول المنفردة لكل متراجحة على حده، وبذلك نجد أن منطقة الحلول المشتركة تشكل المثلث abc المبين على الشكل رقم (٠-٧):



الشكل (٠-٧)

٣-جملة المتراجحات الخطية بعدة متحولات:

لنفرض أنه لدينا المتراجحات الخطية التالية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \geq 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n + b_3 \geq 0 \qquad (٠-٢-٥)$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + b_m \geq 0$$

إن منطقة الحل المشترك- إن وجدت- لهذه الجملة هي عبارة عن مسطح (كثير سطوح) في الفضاء R^n وهي تنشأ من تقاطع الحلول المنفردة لكل متراجحة على حده.

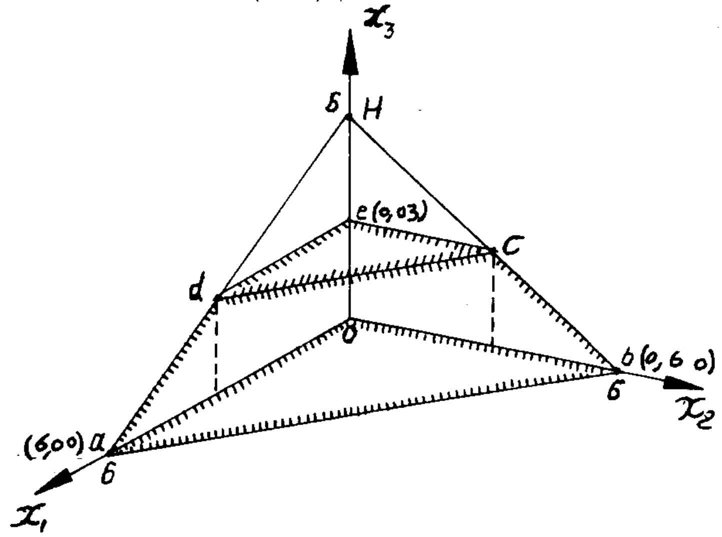
مثال:

أوجد حلول المتراجحتين الآتيتين:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \qquad , \qquad x_3 \leq 3$

حيث أن: $x_1 \square 0$ ،$x_2 \square$ ٠ ،$x_3 \square 0$

نقوم برسم المستوى الذي يمثل المتراجحة الأولى فنحصل على المستوى abh ثم نرسم المستوى الذي يمثل المتراجحة الثانية فنحصل على dce، وإن الحل البياني لهما يمثل في الموشور oabcde المبين على الشكل رقم (٠-٨).



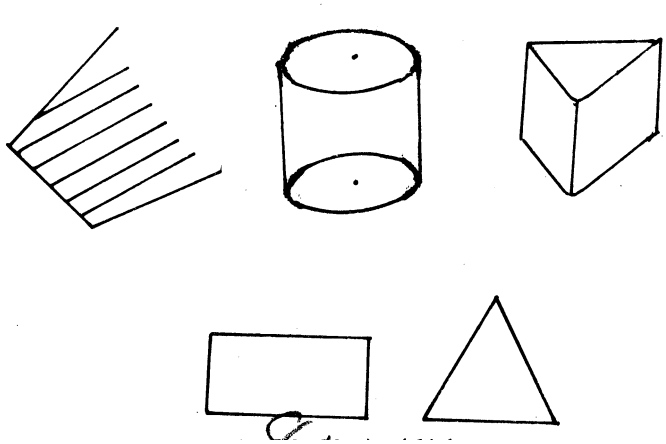
الشكل (٠-٨)

ومن الواضح أن الموشور (oabcde) يشكل مجموعة محدبة.

III- المجموعة المحدبة:

تعريف: نقول عن مجموعة A من الفضاء R^n أنها مجموعة محدبة إذا كانت تحتوي على جميع النقاط x_o الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين x_1 و x_2 منها.

ويمكن للمجموعة A أن تكون مغلقة أو مفتوحة. وكمثال على المجموعات المحدبة نذكر ما يلي: المثلث، المربع، المستطيل، الدائرة، المضلع المحدب،..... وكذلك الكرة ومجسم المقطع الناقص والمسطح (كثير السطوح) والموشور والأسطوانة و..... الخ. والشكل رقم (٠-a) يوضح لنا بعض هذه الأشكال:



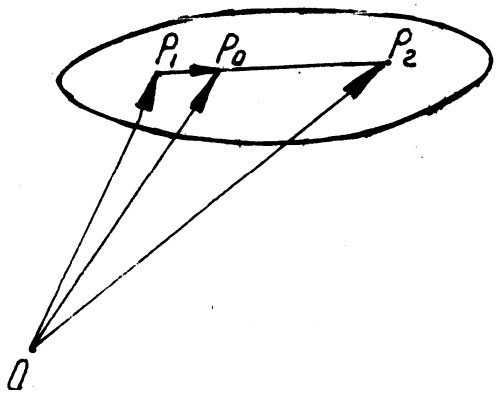
الشكل (٠-9)

لاستخراج التعريف الرياضي للمجموعة المحدبة نأخذ المجموعة المبينة على الشكل رقم (٠-٩) والمنسوبة إلى المبدأ ذي الإحداثيات (٠،٠،٠،..... ٠) ٠ في الفضاء R^n ثم نأخذ منها النقاط الآتية:

١- النقطة p_1 والتي سنرمز لإحداثياتها بالرمز $x'\ (x'_1, x'_2, ...x'_n)$.

٢- والنقطة p_2 والتي سنرمز لإحداثياتها بالرمز $x''\ (x''_1, x''_2, ...x''_n)$.

٣- والنقطة p_o الواقعة على القطعة المستقيمة $p_1\ p_2$ والتي سنرمز لإحداثياتها بالرمز $x^o\ (x^o_1, x^o_2, ...x^o_n)$



الشكل (٠-١٠)

وإذا قمنا بالتعبير عن النقطة p_o بوساطة الأشعة فإننا نجد أن:

$$\vec{OP_o} = \vec{OP_1} + \vec{P_1P_0} \qquad (٠-٤-١)$$

وإذا افترضنا أن النقطة p_o تقسم القطعة المستقيمة $p_1\ p_2$ بنسبة α أي أن : $\frac{p_1p_o}{p_1p_2} = \alpha$، فيكون لدينا : $٠ \le \alpha \le ١$ ويكون $p_1\ p_o = \alpha\ p_1p_2$، وبالتعويض في (٠-٤-١) نحصل على: $op_o = op_1 + \alpha\ p_1\ p_2$، وبالانتقال إلى الإحداثيات الديكارتيه نجد ان:

$$x^o - ٠ = (x' - ٠) + \alpha\,(x'' - x') \qquad ; \qquad ٠ \le \alpha \le ١$$

وبالإصلاح نحصل على العلاقة الآتية:

$$x^\circ = (1-\alpha)x' + \alpha x'' \qquad (2-٤-٠)$$

حيث $٠ \le \alpha \le ١$: وبذلك يمكننا أن نعرف المجموعة المحدبة بما يلي:

١-تعريف المجموعة المحدبة:

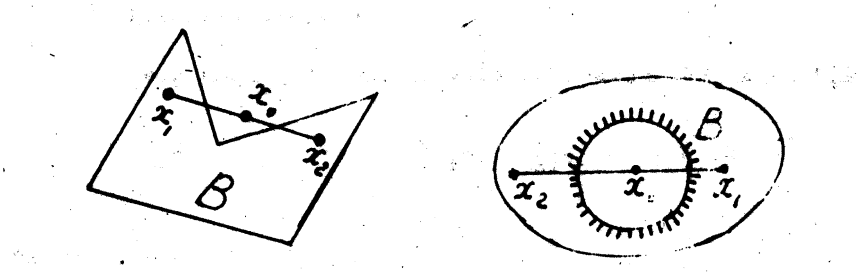
نقول عن مجموعة A من الفضاء R^n أنها مجموعة محدبة إذا كانت تحتوي على أية نقطة x^o مرتبطة مع أي نقطتين منها x' و x'' بالعلاقة:

$$x^\circ = (1-\alpha)x' + \alpha x'' \qquad (٣-٤-٠)$$

حيث إن: $٠ \le \alpha \le ١$

وهنا نشير إلى أن المجموعة المحدبة قد تكون مفتوحة من احد الجهات كما في حالة مجسم القطع المكافئ أو الزائد أو نصف أو ربع المستوى xoy أو أي جزء محدب غير مغلق من الفضاء R^n .

أما المجموعة غير المحدبة فهي التي لا تحقق الشرط الوارد في التعريف السابق: أي هي التي لا تحتوي على نقطة واحدة الأقل من نقاط القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين منها. وكمثال على المجموعة غير المحدبة نورد الشكلين رقم (٠-١٠) حيث نلاحظ أن النقطة x_0 الواقعة بين النقطتين x_1 و x_2 المنتمين إلى المجموعة B لا تنتمي إلى B نفسها.



الشكل (٠-١١): نموذجان للمجموعة غير المحدبة

٢-النقطة الرأسية لمجموعة محدبة:

تعريف: نقول عن النقطة x من نقاط المجموعة المحدبة أنها نقطة رأسية إذا كان لا يوجد في A نقطتان مثل x_1 و x_2، بحيث يكون $x = (1-\alpha)\, x_1 + \alpha\, x_2$، حيث إن $0 \leq \alpha \leq 1$، وبعبارة أخرى تكون x نقطة رأسية إذا لم نستطع إيجاد نقطتين x_7 و x_2 من A بحيث تكون x واقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

فالنقاط الرأسية بالنسبة للأشكال المضلعة هي رؤوس تلك الأشكال وهي غالباً ما تكون ناتجة عن تقاطع ضلعين متجاورين من أضلاعه ويكون عددها في هذه الحالة منتهياً.

أما بالنسبة للدائرة والكرة والمجسمات المحدبة المشابهة فإن جميع نقاط محيطها أو سطحها أو جانبها تشكل نقاط رأسية فيها، ويكون عددها في هذه الحالة غير منته.

٣-منطقة الحلول المشتركة لجملة متراجحات خطية.

نظرية (١):

إن منطقة الحلول المشتركة لجملة متراجحات خطية تشكل مجموعة محدبة.

البرهان: لنفترض أنه لدينا جملة المتراجحات الخطية الآتية:

$$a_{i1}\, x_{i1} + a_{i2}\, x_{i2} + a_{i3}\, x_{i3} + \ldots\ldots - a_{in}\, x_{in} \geq b_i$$

حيث $(i: 1,2,3,\ldots\ldots m)$.

ولنفترض أن منطقة حلولها هي مجموعة A فإذا أخذنا نقطتين من A مثل p' و p'' واعتمدنا نفس الرموز السابقة فإن إحداثياتها تحقق جملة المتراجحات السابقة: أي يكون لدينا:

$$a'_{i1}x'_{i1} + a_{i2}x'_{i2} + \ldots\ldots a_{in}x'_{in} \geq b_i \text{ ،} (i: 1,2, \ldots\ldots m)$$

وكما يكون لدينا:

$$a_{i1}x''_{i1} + a_{i2}x''_{i2} + \ldots\ldots a_{in}x''_{in} \geq b_i \text{ ،} (i: 1,2, \ldots\ldots m)$$

وإذا أخذنا نقطة p_o مرتبطة بـ p' و p'' بالعلاقة:

$$x^{\circ} = (1-\alpha)x' + \alpha x'' : \qquad ٠ \leq \alpha \leq ١$$

وعوضنا إحداثياتها في المتراحجات السابقة فإننا نحصل على:

$$a_{i1}\, x_1^{\circ} + a_{i2}\, x_2^{\circ} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{in}\, x_n^{\circ} =$$
$$a_{i1}\left[(1-\alpha)x'_1 + \alpha\, x''_1\right] + a_{i2}\left[(1-\alpha)x'_2 + \alpha\, x''_2\right] + \ldots\ldots\ldots a_{in}\left[(1-\alpha)x'_n + \alpha\, x''_n\right] =$$
$$= (1-\alpha)\left[a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{in}x'_n\right] +$$
$$\alpha\left[a_{i1}x''_1 + a_{i2}x''_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{in}x''_n\right] \geq (1-\alpha)b_i + \alpha b_i$$

وبما أن:

$$(1-\alpha)b_i + \alpha b_i = b_i$$

نستنتج أن:

$$a_{i1}x_1^{\circ} + a_{i2}x_2^{\circ} + \ldots\ldots + a_{in}x_n^{\circ} \geq b_i$$

أي أن إحداثيات النقطة p_o المرتبطة بـ p' و p'' وفق العلاقة:

$$x^{\circ} = (1-\alpha)x' + \alpha x''$$

تحقق جميع المتراجحات المفروضة: أي أنها تنتمي إلى منطقة الحلول المشتركة لتلك المتراجحات، وهذا يعني أن منطقة الحلول المشتركة تشكل مجموعة محدبة لأنها تحتوي على النقطة p_o الواقعة بين أي نقطتين منها.

مثال (٤):

ارسم على xoy منطقة الحلول المشتركة للمتراجحات الآتية:

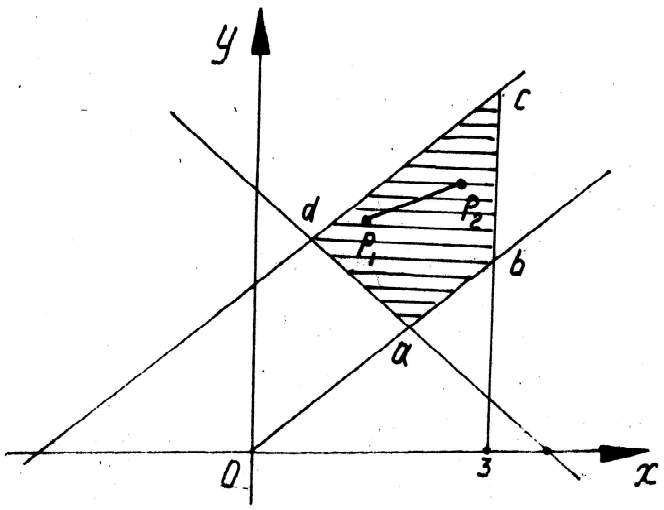
$x - y + 3 \square 0$

$x + y - 4 \square 0$

$x - y \square 0$

$x \square 3$

بعد القيام برسم المستقيمات الفاصلة على xoy وبتحديد جهة تحقق كل من المتراجحات السابقة نحصل على المنطقة abcd المبينة على الشكل رقم (٠-١١).



الشكل (٠-١٢)

ومن الشكل يتضح لنا أن منطقة حلول تلك المتراجحات هي مجموعة محدبة كما أن عد نقاطها الرأسية يساوي عدد المتراجحات المستقلة فيها، وكان يمكن أن يكون عدد

النقاط الرأسية أقل من ذلك لو تقاطعت ثلاثة مستقيمات في نقطة واحدة، أو لو كان احد المستقيمات غير داخل في تحديد منطقة الحلول.

IV- دراسة بعض التوابع المعرفة على متراجحات خطية :

إن إجراء مثل هذه الدراسة بشكل رياضي قد يكون مطولاً ومعقداً لذلك فإننا نقوم بدراسة بعض الأمثلة التي تفيدنا في فهم وإدراك بعض الجوانب التي سنواجهها في مسائل البرمجة الخطية.

مثال (٥):

ادرس وأوجد اكبر قيمة يأخذها التابع الخطي:

$f(x) = x + 1$

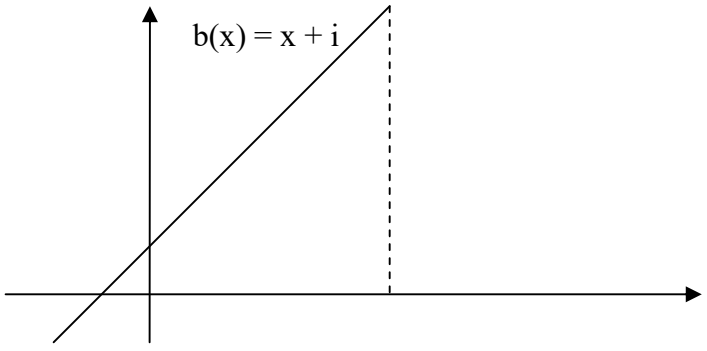
وذلك ضمن الشرطين التاليين: (منطقة تعريف التابع f(x))

$-x - 3 \square 0$

$4x + 8 \square 0$

الحل:

إن الشرطين السابقين يحددان منطقة التعريف المناسبة للتابع f (x) وهو مجال حلهما المشترك التالي: [٣، ٢−] وإن الشكل البياني للتابع f (x) ومنطقة تعريفه موضح على الشكل رقم (٠−١٣).



الشكل (٠−١٣)

ومن الشكل يتضح لنا أن أكبر قيمة يأخذها التابع الخطي f(x) على مجال تعريفه [٣، ٢-] هي القيمة المقابلة لـ x = 3 وتساوي:

$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

مثال (٦):

أدرس وأوجد أكبر قيمة يأخذها التابع الخطي:

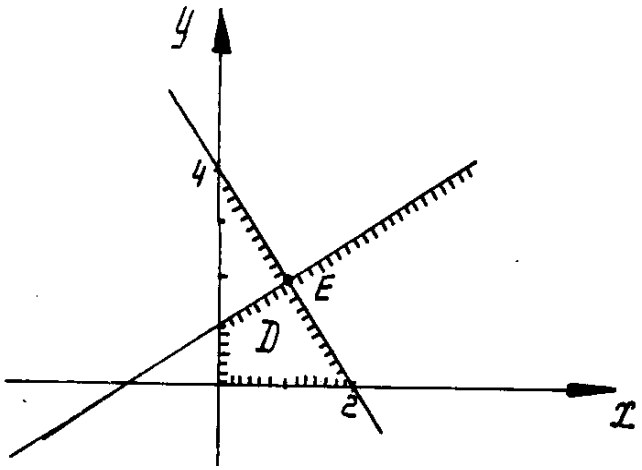
$$f(x,y) = x + y + z$$

وذلك ضمن الشروط الخطية التالية:

$$-2x - y + 4 \geq 0$$
$$x - y + 1 \geq 0$$
$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

الحل:

إن الشروط الخطية تحدد منطقة تعريف التابع f(x,y) وهي المنطقة D المبينة على الشكل رقم (٠-١٤).



الشكل رقم (٠-١٤)

أما الشكل البياني للتابع f(x,y) في الفضاء R^3 والمقابل لمنطقة التعريف السابقة فهو عبارة عن جزء من مستو فوق منطقة التعريف D كما هو موضح في الشكل رقم (٠-١٥).

من الشكل يتضح لنا أن أكبر قيمة للتابع f(x,y) تقابل النقطة E، وهي النقطة التي تنتج عن تقاطع المستقيمين:

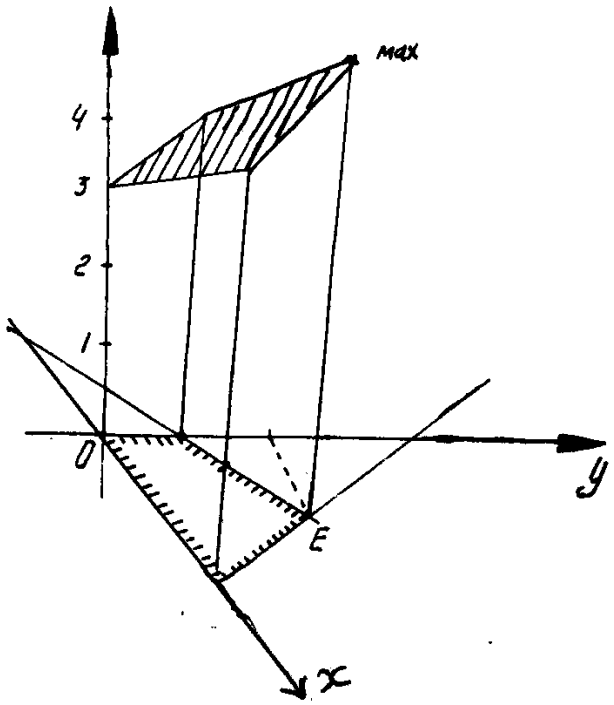
$-2x - y + 4 = 0$

$x - y + 1 = 0$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن: $x = 1$ وأن $y = 2$، وهما إحداثي النقطة E أي أن E(1,2)، نعوض ذلك في f(x,y) فنحصل على أكبر قيمة له وتساوي:

$f(1,2) = 1 + 2 + 3 = 6$

ويعتبر هذا المثال نموذجاً من نماذج البرمجة الخطية التي سنتعرض لدراستها في الفصل الآتي:



الشكل (٠-١٥)

ملاحظة:

من المثالين السابقين نلاحظ أن أكبر قيمة للتابع المدروس كانت تقابل نقطة رأسية من منطقة التعريف، وهذا ما يميز جميع التوابع الخطية المعرفة على جملة متراجحات خطية.

تمرينات

أوجد منطقة الحلول المشتركة لكل من الجمل الآتية:

١-

$$10x + 10y \le 32$$
$$20x + 50y \le 42$$
$$30x + 40y \le 62$$
$$20x + 100y \le 340$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

٢-

$$x + 7(34 - 2y) \le 32$$
$$2x + 5(34 - 2y) \le 42$$
$$3x + 4(34 - 2y) \le 62$$

٣-

$$x + 7y \le 32$$
$$2x + 5y \le 42$$
$$0 \le x \le 12$$
$$0 \le y \le 9$$

٤-

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 - 2x_2 \le 1$$
$$2x_1 + 3x_3 \le 2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_1 + x_2 \le \frac{1}{2}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

٥-

$$4 - 2x_1 + x_2 \ge 0$$
$$2 - x_1 + 2x_2 \ge 0$$
$$5 - x_1 - x_2 \ge 0$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

الفصل الأول
المعادلات الخطية

I- المعادلات الخطية التي يكون فيها عدد المعادلات m مساوياً لعدد المتحولات n (حالة m = n):

في هذه الحالة يكون لدينا جملة من المعادلات الخطية من الشكل:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ...a_{3n}x_n = b_3 \qquad (1-1-1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ...a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

إن هذه المعادلات الخطية قد تكون مستقلة عن بعضها بعضاً أو غير مستقلة. ونحن نعلم أن هذه المعادلات تكون مستقلة عن بعضها إذا كان معين أمثالها في الطرف الأيسر غير معدوم، أي عندما $|A| \neq 0$ ، وعندها يكون لجملة تلك المعادلات $(1-1-1)$ حل وحيد.

أما إذا كان $|A| = 0$ فإن هذا يعني أن تلك المعادلات غير مستقلة خطياً، أي أن بعضها مرتبط خطياً بالأخرى، وفي هذه الحالة يمكننا حذف أحدى أية معادلتين مرتبطتين من تلك الجملة وبذلك ينخفض عدد المعادلات إلى m' حيث $(m' < n)$ وهي حالة سنعالجها في الفقرة اللاحقة:

أما هنا فنفترض أن جملة المعادلات $(1-1-1)$ مستقلة خطياً أي أن $|A| \neq 0$ وفي هذه الحالة يمكننا إيجاد الحل المشترك لها بعدة طرائق منها: طريقة التعويض وطريقة توحيد الأمثال وطريقة المعينات (كرامر) وطريقة المعاودة وطريقة مقلوب

المصفوفة A.....الخ، ولكننا هنا سنعتمد على طريقة أخرى بسيطة وهي طريقة المعاملات المنفصلة أو طريقة (جاردن- غوص).

II- طريقة (جاردن- غوص) لحل المعادلات الخطية التي فيها m = n:

لتوضيح الأساس الرياضي لهذه الطريقة نكتب المعادلات السابقة بشكل مصفوفي على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & .... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .... & a_{3n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (1-2-1)$$

أو على الشكل المختصر التالي:

$$A \cdot X = B \qquad (2-2-1)$$

ثم نضرب طرفي هذه المعادلة من اليسار بـ A^{-1} فنجد أن:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B = B'$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التالية:

$$I \cdot X = B' \qquad (3-2-1)$$

والتي يمكن كتابتها بشكل مفصل كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ .... \\ b'_n \end{bmatrix} \qquad (4-2-1)$$

إن هذه العمليات البسيطة هي أساس طريق (جاردن- غوص) لحل جملة من المعادلات الخطية، وحتى نقوم بتحويل الشكل (1-2-1) إلى الشكل (1-2-4) علينا أن نقوم بما يلي:

1- نضع عناصر الشكل (1-2-1) في جدول كالآتي:

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	**B**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_n	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3n}	b_3
....	....	....	....	....	....	....
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	....	a_{mn}	b_n

2- نقوم بتحويل المصفوفة A إلى مصفوفة أحادية I وذلك بمعالجة أسطر هذه الجدول (وفي طرفي المعادلة) بحيث نجعل جميع العناصر غير القطرية في جميع أسطر A مساوية للصفر، والقطرية مساوية للواحد.

ويتم ذلك التحويل بتقسيم عناصر المعادلة الأولى على a_{11} (أمثال x_1 فيها) فتصبح أمثال x_1 مساوية للواحد، ثم نضرب المعادلة الأولى الجديدة بأمثال x_1 التي في المعادلة الثانية ونطرح الناتج من المعادلة الثانية نفسها فتنعدم أمثال x_1 فيها وبذلك يتم حذف x_1 من المعادلة الثانية.

للتأكد من ذلك نجري هذه العمليات على المعادلتين الأولى والثانية فنجد أن:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 .... a_{1n}x_n = b_1$$

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + ...\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_2}{a_{11}} \qquad (5-2-1)$$

ثم نضربها بأمثال x_1 التي في المعادلة الثانية وهو a_{21} فنحصل على المعادلة التالية:

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + ... + a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}$$

نطرح هذه المعادلة من المعادلة الثانية فنجد أن المعادلة الثانية تأخذ الشكل التالي:

$$(a_{21}-a_{21})x_1+\left(a_{22}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2+\left(a_{23}-a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3+....=\left(b_2-a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}\right)$$

$$0+\left(a_{22}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2+\left(a_{23}-a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3+.....=\left(b_2-a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}\right)$$

ولحذف x_1 من المعادلة الثالثة. نضرب المعادلة (1-2-5) بأمثال x_1 التي في المعادلة الثالثة أي بـ a_{13} فنحصل على:

$$a_{31}x_1+a_{31}\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2+a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+.....a_{31}\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=a_{31}\frac{b_3}{a_{11}}$$

ثم نطرح الناتج من المعادلة الثالثة نفسها فنحصل على المعادلة التالية:

$$(a_{31}-a_{31})x_1+\left(a_{32}-a_{31}\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_2+\left(a_3-a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3+.....=\left(b_3-a_{31}\frac{b_3}{a_{11}}\right)$$

$$0+\left(a_{32}-a_{31}\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_2+\left(a_{33}-a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3+.....=\left(b_3-a_{31}\frac{b_3}{a_{11}}\right)$$

وهكذا نتابع العمل حتى نحذف x_1 من جميع المعادلات الأخرى (الأسطر الأخرى) وبالتالي نحصل على الجدول الآتي:

	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	B
1	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{a_{13}}{a_{11}}$	.....	$\frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{b_1}{a_{11}}=b'_1$
2	0	a'_{22}	a'_{23}	.....	a'_{2n}	b'_2
3	0	a'_{32}	a'_{33}	.....	a'_{3n}	b'_3
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	0	a'_{n2}	a'_{n3}	.....	a'_{nn}	b'_n

وبصورة عامة يمكننا حساب عناصر الجدول السابق (أو عناصر الجداول اللاحق) عند حذف المتحول x_s من المعادلة t بطريقة سهلة وسريعة إذا اتبعنا الخطوات الآتية:

1- نقسم جميع عناصر السطر t الذي نريد أن نجعل أمثال x_s فيه مساوية للواحد على a_{ts} (أمثال x_s) فتصبح أمثال x_s مساوية للواحد وتتغير الأمثال الأخرى.

2- نجعل جميع عناصر العمود الذي فيه x_s (ما عدا السطر t) مساوية للصفر.

3- نحسب بقية عناصر الجدول الجديد من العلاقتين الآتيتين:

$$a'_{ij} = \left(a_{ij} - a_{is} \frac{a_{tj}}{a_{ts}} \right) \qquad (6-2-1)$$

$$b'_{i} = \left(b_{i} - a_{is} \frac{b_{t}}{a_{ts}} \right) \qquad (7-2-1)$$

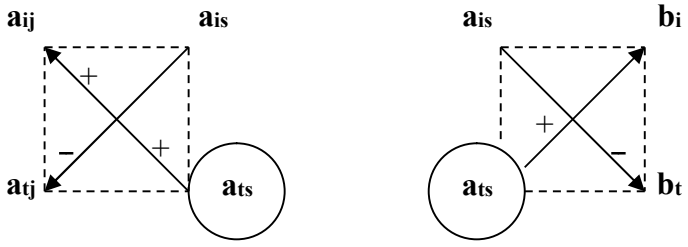
ومن جهة أخرى يمكن كتابة هاتين المعادلتين على الشكلين التاليين:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ts} - a_{is}a_{tj}}{a_{ts}} \qquad (i \neq t, j \neq s) \quad (8-2-1)$$

$$b'_{i} = \frac{b_{i}a_{ts} - a_{is}b_{t}}{a_{ts}} \qquad (i \neq t) \quad (9-2-1)$$

ويسمى العنصر a_{ts} بعنصر الارتكاز أو الدوران.

وبملاحظة أن حدود البسط في كل منها تقع على رؤوس مستطيل محدد بالعناصر المبينة على الشكل الآتي:



إذن يمكننا حساب العناصر الجديدة a'_{ij} من جراء أخذ جداء رأسي المستطيل a_{ij} a_{ts} بإشارة موجبة، ثم جداء الرأسين المقابلين a_{tj} a_{is} بإشارة سالبة، ثم تقسيم الناتج على a_{ts} أمثال x_s في المعادلة t ، وكذلك الأمر بالنسبة لـ b'_i حيث نأخذ جداء الرأسين: $a_{ts} \cdot b_i$ بإشارة موجبة وجداء الرأسين a_{is} b_t بإشارة سالبة وتقسيم الناتج على a_{ts} .

ونتيجة لهذه المعالجة التي تتم متحولاً متحولاً، وسطراً سطراً، نتمكن من جعل أمثال كل متحول x_s في المعادلة s مساوية للواحد، ومن جعل جميع العناصر غير القطرية مساوية للصفر، وتأخذ عناصر العمود B قيماً جديدة B' وهي التي تشكل الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية المفروضة، وهكذا نحصل على الجدول الآتي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	B'
1	1	0	0	.....	0	b'_1
2	0	1	0	.....	0	b'_2
3	0	0	1	.....	0	b'_3
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	0	0	0	.....	1	b'_n

والتي يمكن كتابته على شكل معادلة كالآتي:

$$I \cdot X = B' \qquad (10-2-1)$$

والتي تعطينا الحل المشترك لجملة المعادلات المفروضة الآتي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ..... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ ..... \\ b'_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \\ \Rightarrow x_3 = b'_3 \\ ..... \\ x_n = b'_n \end{matrix} \qquad (11-2-1)$$

مثال (1):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية الآتية:

$2x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 5$

$-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -16$

لإيجاد الحل المطلوب نضع الأمثال في جدول كالتالي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	B
1	2	−5	−6	5
2	−3	2	5	+1
3	2	4	−3	−16

لمعالجة أمثال x_1 وحذفه من المعادلات الأخرى، نقسم عناصر السطر الأول على (2) (أمثال x_1 في المعادلة الأولى) فنحصل على السطر الأول من الجدول الآتي، ثم نضرب عناصر السطر الأول الجديد بـ (3−) أمثال x_1 في المعادلة الثانية ونطرح النواتج من عناصر السطر الثاني نفسه فنحصل على عناصر السطر الثاني الجديد.

ثم نضرب عناصر السطر الأول الجديد بـ (2) أمثال x_1 في المعادلة الثالثة ونطرح النواتج من عناصر السطر الثالث فنحصل على عناصر السطر الثالث الجديد، ويبين الجدول التالي نتيجة هذه العمليات المتتالية:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	B
1	1	$\frac{-5}{2}$	$\frac{-6}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	0	$\frac{-11}{2}$	−4	$\frac{17}{2}$
3	0	9	3	−21

ولمعالجة أمثال x_2 وحذفه من المعادلات الأخرى، نقسم عناصر السطر الثاني على $\left(\frac{-11}{2}\right)$ أمثال x_2 فيه فنحصل على عناصر السطر الثاني الجديد المبينة في الجدول الآتي، ثم نضرب عناصر السطر الثاني الجديد بـ $\left(\frac{-5}{2}\right)$ (أمثال x_2 في السطر الأول) ونطرح النواتج من عناصر السطر الأول نفسه فنحصل على السطر الأول الجديد.

ثم نضرب عناصر السطر الثاني الجديد بـ (9) (أمثال x_2 في السطر الثالث) ونطرح النواتج من عناصر السطر الثالث نفسه فنحصل على السطر الثالث الجديد، ونتيجة لهذه العمليات نحصل على الجدول الآتي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	B
1	1	0	$\frac{-13}{11}$	$-\frac{15}{11}$
2	0	1	$\frac{8}{11}$	$-\frac{17}{11}$
3	0	0	$\frac{-13}{11}$	$-\frac{26}{11}$

ولمعالجة أمثال x_3 نقسم على $\left(-\frac{13}{11}\right)$ جميع عناصر السطر الثالث فنحصل على عناصر السطر الثالث الجديد المبين في الجدول الآتي.

ثم نضرب عناصر السطر الثالث الجديد بـ $\left(\frac{8}{11}\right)$ (أمثال x_3 في السطر الثاني) ونطرح النواتج من عناصر السطر الثاني نفسه فنحصل على عناصر السطر الثاني الجديد. ثم نضرب عناصر السطر الثالث الجديد بـ $\left(-\frac{13}{11}\right)$ (أمثال x_3 في السطر الأول) ونطرح النواتج من عناصر السطر نفسه فنحصل على عناصر السطر الأول الجديد ونتيجة لهذه العمليات نحصل على الجدول الأخير الآتي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	B
1	1	0	0	1
2	0	1	0	−3
3	0	0	1	2

ومنه نحصل على الحل المشترك الآتي:

$x_1 = 1$ $x_2 = -3$ $x_3 = 2$

III- المعادلات الخطية التي يكون فيها عدد المعـادلات m أقل من عدد المتحولات n (حالة m < n):

وفي هذه الحالة نكون أمام جملة من الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \ldots\ldots a_{1m}\,x_m + \ldots\ldots\ldots a_{1n}\,x_n = b_1\\
&A_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \ldots\ldots A_{2m}\,x_m + \ldots\ldots\ldots a_{2n}\,x_n = b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 \ldots\ldots A_{mm}\,x_m + \ldots\ldots\ldots a_{mn}\,x_n = b_m
\end{aligned} \qquad (1-3-1)$$

حيث إن: $m < n$

والتي يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1m} & a_{1m+1} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \ldots. & a_{2m} & a_{2m+1} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mm} & a_{mn+1} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \ldots. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (2-3-1)$$

كما يمكن كتابتها كما يلي:

$$A_{(m,n)}X_{(n,1)} = B_{(m,1)} \qquad (3-3-1)$$

ولتسهيل العمل نقوم بتجزئة المصفوفة A إلى مصفوفتين:

1- أحدهما مربعة ومن المرتبة (m,m) ونرمز لها بـ p(m,m) .

2- والأخرى مستطيلة ومن المرتبة (m,n-m) ونرمز لها بـ Q(m,n-m).

كما نجزء العمود X(n,1) إلى جزئين هي $X'(m,1)$ و $X''(n-m,1)$ وبالتالي يمكنا كتابة العلاقة (1-3-3) كما يلي:

$$\left[p_{(m,m)}Q_{(m,n-m)}\right]\cdot\begin{bmatrix} X'(m,1) \\ X''(n-m,1) \end{bmatrix} = B_{(m,1)} \qquad (4-3-1)$$

وبذلك نجد أن:
$$P\cdot X' + QX'' = B$$
$$P\cdot X' = B - QX''$$

وبفرض أن $|P| \neq 0$ نضرب الطرفين من اليسار بالمصفوفة P^{-1} فنجد أن:

$$p^{-1}\cdot p\cdot x' = p^{-1}\left(B - Q\cdot X''\right)$$
$$I\cdot X' = P^{-1}B - P^{-1}\cdot Q\cdot X'' \qquad (5-3-1)$$

وبفرض أن $P^{-1}B = B'$ وأن $p^{-1}_{(m,m)}Q_{(m,n-m)} = Q'_{(m,n-m)}$ نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \dots \\ b'_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q'_{11} & q'_{12} & \dots & q'_{1,n-m} \\ q'_{21} & q'_{22} & \dots & q'_{2,n-m} \\ q'_{21} & q'_{32} & \dots & q'_{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q'_{m1} & q'_{m2} & \dots & q'_{m,n-m} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (6-3-1)$$

والتي يمكن تحويلها إلى معادلات خطية كما يلي:

$$x_1 = b'_1 - \left(q'_{11}x_{m+1} + q'_{12}x_{m+2} + \dots\dots q_{1,n-m}x_n\right)$$
$$x_2 = b'_2 - \left(q'_{21}x_{m+1} + q'_{22}x_{m+2} + \dots\dots q'_{2,n-m}x_n\right)$$
$$x_3 = b'_3 - \left(q'_{31}x_{m+1} + q'_{32}x_{m+2} + \dots\dots q_{3,n-m}x_n\right) \qquad (7-3-1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = b'_m - \left(q'_{m1}x_{m+1} + q'_{m2}x_{m+2}\dots\dots q'_{m,(n-m)}x_n\right)$$

وهذا يعني انه أمكننا حساب m متحولاً وهي $x_{1'}x_{2'}\dots\dots x_m$ بدلالة الـ (n-m) متحولاً الأخرى وهي $x_{m+1}x_{m+2}\dots\dots x_n$.

ومن الواضح أن قيم المتحولات $x_1x_2\dots\dots x_m$ تتعلق بالقيم التي تأخذها أو نعطيها للمتحولات الأخرى $x_{m+1}x_{m+2}\ \dots\dots\ x_n$.

وأنه مقابل كل جملة لقيمها مثل $(\alpha_{m+1'}\alpha_{m+2}\dots\dots\alpha_n)$.

نحصل على جملة لقيم المتحولات $x_1x_2\ \dots\dots\ x_m$ هي:

$$x_1 = b'_1 - \left(q'_{11}\alpha_{m+1} + q'_{12}\alpha_{m+2} + \dots\dots q'_{1,n-m}\alpha_n\right) = \alpha_1$$
$$x_2 = b'_2 - \left(q'_{21}\alpha_{m+1} + q'_{22}\alpha_{m+2} + \dots\dots q'_{2,n-m}\alpha_n\right) = \alpha_2 \qquad (8-3-1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = b'_m - \left(q'_{m1}\alpha_{m+1} + q'_{m2}\alpha_{m+2} + \dots\dots q'_{m,n-m}\alpha_n\right) = \alpha_m$$

وبالتالي نحصل على حل يشمل جميع متحولات الجملة (1−3−1) هو الحل المترتب الآتي:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ..... \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} ..... \alpha_n) \qquad (9-3-1)$$

ولكن بما أن المتحولات x_n .... x_{m+2} x_{m+1} يمكن أن تأخذ عددا لا نهائياً من القيم الكيفية (حتى وأن كانت مقيدة بشروط معينة)، فإننا سنحصل على عدد لا نهائي من القيم المقابلة لها للمتحولات x_m.....x_2,x_1، وهذا يعني أنه إذا كان المعين $|p| \neq 0$ فإن لجملة المعادلات (1−3−1) عدداً لانهائياً من الحلول المقبولة من النوع $(x_{1'} x_2 ..... x_{m'} x_{m+1} ..... x_n)$.

وبالتالي نحصل على حل يشمل جميع متحولات الجملة (1−3−1) هو الحل المترتب الآتي:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ..... \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} ..... \alpha_n) \qquad (9-3-1)$$

الحلول القاعدية:

بما أن لجملة المعادلات (1−3−1) عدد لانهائي من الحلول المقبولة فإننا سنحاول الاقتصار على عدد محدود منها وذلك بوضع المتحولات $x_{m+1} = x_{m+2} = x_n = 0$ مساوية للصفر. وبذلك تأخذ المعادلة (1−3−6) الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .... \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ .... \\ b'_m \end{bmatrix} \qquad (10-3-1)$$

وهذا يعطينا أن:

$$x_1 = b'_1 \ , \quad x_2 = b'_2 \ , \quad x_3 = b'_3 \ , ... , \quad x_m = b'_m$$

وبالتالي نحصل على الحل الكامل الآتي:

$$(b'_1, b'_2 \cdot b'_3 ..... b'_m \, 0,0 .....0) \qquad (11-3-1)$$

ويسمى هذا الحل حلاً قاعدياً لأنه نسب إلى القاعدة ذات الأشعة العمودية الأحادية في R^m التالية:[1]

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots \qquad e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m \end{bmatrix}$$

وتسمى المتحولات $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_m$ التي اخترناها منذ البداية لتكون في العمود x' بالمتحولات القاعدية (الأساسية) كما تسمى المتحولات الأخرى $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots, x_{m+n}$ التي اخترناها لتكون في العمود x'' المتحولات الحرة (أو غير القاعدية) لأنها تأخذ قيما كيفية.

وبما أننا اخترنا المتحولات $x_1, x_2 \ldots\ldots x_m$ بشكل عشوائي لتكون متحولات قاعدية فإنه كان من الممكن اختيار أي تشكيل من m متحولاً آخر من أصل الـ n متحولاً الداخلة في (1-3-1).

وهذا يعني أنه كان بالإمكان أن نحصل على حل قاعدي آخر غير الذي حصلنا عليه. وإذا أخذنا بعين الاعتبار جميع الإمكانيات الممكنة لتشكل m متحولاً قاعدياً من أصل n متحولاً مفروضاً، نجد أن عدد تلك الإمكانيات يساوي C_n^m إمكانية حيث إن: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ أي أنه يمكننا أن نحصل على C_n^m حلا قاعدياً لجملة المعادلات (1-3-1)، وهو عدد محدود من الحلول المقبولة اللانهائية.

مثال (2):

إذا كانت لدينا جملة المعادلتين التاليين:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3$

[1] إن هذه الأشعة تشكل قاعدة لأنها مستقلة ويمكن التعبير عن الشعاع B بدلالتها وباستخدام المضاريب $X_1X_2 \ldots X_m$ كما يلي: $B' = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + \ldots.x_me_m$

فإننا نجد أن $n = 3$ وأن $m = 2$، أي أن عدد المتحولات القاعدية يساوي 2 وعدد المتحولات الحرة يساوي $n-m = 1$ ، وأن عدد الحلول القاعدية الممكنة يساوي $c_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ حلول، وأن هذه الحلول القاعدية الممكنة حسب الترتيب هي:

$(x_1, x_2, 0)$, $(x_1, 0, x_3)$, $(0, x_2, x_3)$

وللحصول على الحل القاعدي الأول نأخذ المتحولين x_1 x_2 كمتحولات قاعدية وx_3 كمتحول حر، وننقل المتحول x_3 إلى الطرف الأيمن فنحصل على المعادلتين:

$x_1 + 2x_2 = 1-x_3$
$2x_1 + 3x_2 = 3-5x_3$

ويمكننا بسهولة التأكد من أن معين الطرف الأيسر لا يساوي الصفر $|p| \neq 0$

ولحل هاتين المعادلتين نحولها إلى الشكل (1−3−6) فنضرب الأولى بـ 2 ونطرحها من الثانية فنحصل على المعادلتين المكافئتين التاليتين:

$x_1+ 2x_2 = 1-x_3$
$0 - x_2 = 1-7x_3$

ثم نضرب الثانية الجديدة بـ 2 ونجمعها للأولى فنحصل على المعادلتين (ثم إصلاح الثانية).

$x_1 + 0 = 3-15x_3$
$0 - x_2 = 1-7x_3$

ثم نضع المتحول الحر $x_3 = 0$ فنحصل على أن $x_1 = 3$ و $x_2 = -1$، وبذلك نحصل على الحل القاعدي الأول وهو (3, - 1,0). وبالطريقة نفسها نحصل على الحلين القاعديين الآخرين وهما/ (2/3, 0, 1/3) , (0, 2/7, 3/7).

الحلول القاعدية المنحلة:

يكون الحل القاعدي منحلاً (غير سليم) إذا كان احد المتحولات القاعدية فيه معدوماً (إضافة للمتحولات الحرة).

مثال: أوجد الحلول القاعدية لجملة المعادلتين:

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$
$5x_1 - x_3 = 15$

لدينا هنا ثلاث حلول قاعدية هي $(x_1, x_2, 0)$ $(x_1, 0, x_3)$ $(0, x_2, x_3)$ وبإتباع نفس الأسلوب الذي اتبعناه في المثالين السابقين نحصل على تلك الحلول القاعدية الثلاثة الآتية:

$(3, 0, 0)$ $(3, 0, 0)$ $(0, -39, -15)$

وهنا نلاحظ أن الحلين الأول والثاني هما حلان منحلان لأن $x_2 = 0$ في الأول $x_3 = 0$ في الثاني رغم كونهما كانا مأخوذين ضمن المتحولات القاعدية.

IV- طريقة (جاردان - غوص) لحل جملة معادلات خطية فيها (m<n):

لإيجاد الحلول القاعدية لجملة المعادلات الخطية (1-3-1) نعتمد على المبادئ الرياضية السابقة وننطلق من المعادلة (1-3-2) حتى نصل إلى المعادلة (1-3-5) والتي نكتبها على الشكل الآتي:

$$I \cdot X' + P^{-1}QX'' = P^{-1} \cdot B = B'$$

$$\left[I, \quad P^{-1} \cdot Q\right] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = B' \qquad (1-4-1)$$

والتي تكتب بشكل مفصل على الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .... & 0 & q'_{11} & q'_{12} & ..... & q_{1n-m} \\ 0 & 1 & 0 & .... & 0 & q'_{21} & q'_{22} & ..... & q_{2n-m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 & q'_{m1} & q'_{m2} & ..... & q_{m\,n-m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ .... \\ b'_m \end{bmatrix} \qquad (2-4-1)$$

ويتم الانتقال من الشكل (1-3-2) إلى الشكل (1-4-2) وفق طريقة (جاردان-غوص) وبإتباع نفس الخطوات التي أوردناها في الفقرة II حتى نحصل على المصفوفة الأحادية I_{mxn} . إلا أن هذه الطريقة لا تعطينا حلا قاعدياً إلا إذا وضعنا جميع المتحولات الحرة (غير القاعدية) مساوية للصفر. وإذا قمنا بذلك نحصل على الحل الأول فقط.

وللحصـول علـى جميـع الحلـول القاعديـة لجملـة المعـادلات (1-3-1) نقـوم بالخطوات التالية:

1- نضع أمثال المعادلات في جدول كالآتي:

جدول (1-1): الجدول الأول لطريقة (جاردان- غوص)

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	....	x_m	x_{m+1}	....	x_n	B
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	….	a_{1m}	a_{1m+1}	….	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	….	a_{2m}	a_{2m+1}	….	a_{2n}	b_2
3	a_{31}	a_{31}	a_{33}	….	a_{3m}	a_{3m+1}	….	a_{3n}	b_3
….	….	….	….	…	….	….	…	…	…
….	….	….	….	….	….	….	….	….	….
M	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	….	a_{mm}	a_{mn+1}	….	a_{mn}	b_m

2- نقوم بإيجاد المصفوفة الأحادية I_{mxm} عن طريق معالجة جميع أسطر الجدول السابق (وفي طرفي المعادلة) ونتبع في ذلك الأسلوب نفسه الذي أوردناه في الفقرة II (الخطوة 2 والبنود المتعلقة بها) ويتم ذلك بعد تحديد المتحولات القاعدية التي ستدخل في الحل الأول ولتكن x_1……x_m . ونتيجة لهذه المعالجة نحصل على جدول الحل القاعدي الأول الآتي:

جدول (1-2): جدول الحل القاعدي الأول

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	B′
1	1	0	0	…	0	q'_{11}	…	q'_{1n-m}	b'_1
2	0	1	0	…	0	q'_{21}	…	q'_{2n-m}	b'_2
3	0	0	1	…	0	q'_{31}	…	q'_{3n-m}	b'_3
….	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	0	0	0	…	1	q'_{m1}	…	q'_{mn-m}	b'_m

3- نضع جميع المتحولات الحرة في الجدول (1-2) مساوية للصفر فنحصل على الحل القاعدي الأول الآتي:

$$(b'_1, b'_2, b'_3 \ldots\ldots b'_m\ 0,0\ldots\ldots\ldots\ldots 0)$$

4- للحصول على الحل القاعدي الثاني نقوم باستبدال احد المتحولات القاعدية وليكن x_m بأحد المتحولات الحرة وليكن x_{m+1} ليصبح الأول حراً والثاني قاعدياً. وليتم هذا الاستبدال نقوم أولاً بتحديد عنصر الارتكاز المناسب (وهو هنا $q`_{m1}$). ثم تعمل على حذف x_{m+1} من جميع المعادلات باستثناء المعادلة m (مثلاً)، وأن ذلك يحتاج إلى القيام بجميع الحسابات اللازمة، ونتيجة لذلك نحصل على قاعدة جديدة مؤلفة من المتحولات $(x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots\ldots , x_{m-1}, x_{m+1})$، ثم نضع المتحولات الحرة الجديدة مساوية للصفر فنحصل على الحل القاعدي الثاني الآتي:

$(x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots\ldots , x_{m-1} , 0, x_{m+1} , 0.00)$

5- للحصول على الحل القاعدي الثالث نكرر ما ورد في الخطوة السابقة وندخل متحولاً حراً جديداً في القاعدة بدلاً من أحد متحولاتها القاعدية.

وهكذا نتابع العمل حتى نحصل على جميع الحلول القاعدية الممكنة.

مثال (3):

أوجد جميع الحلول القاعدية لجملة المعادلات الآتية:

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = -3$$
$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7$$

نضع هذه المعلومات في الجدول الآتي:

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	B
1	1	-2	0	1	-3
2	3	-1	-2	0	1
3	2	1	-2	-1	4
4	1	3	-2	-2	7

لحذف x_1 من جميع المعادلات نأخذ (1) المقابل x_1 كعنصر ارتكاز ونجري الحسابات اللازمة وفق تعليمات طريقة (جاردان- غوص) فنحصل على الجدول الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	B
1	1	-2	0	1	-3
2	0	5	-2	-3	10
3	0	5	-2	-3	10
4	0	5	-2	-3	10

ومن الجدول نلاحظ أن المعادلتين الثالثة والرابعة ما هما إلا تكرار للمعادلة الثانية. فهذا يعني أن جملة المعادلات السابقة غير مستقلة خطياً (وكان يمكن الكشف عن مسبقاً بحساب المعين $|A|$، لذلك نحذفهما من الجدول ونتابع الحل كالعادة حيث سنقوم بحذف المتحول x_2 فنحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / المتحولات القاعدية	x_1	x_2	x_3	x_4	B	الحل القاعدي
x_1	1	0	-4/5	-1/5	1	(1,2,0,0)
x_2	0	1	-2/5	-3/5	2	

وهذا الجدول يعطينا الحل القاعدي الأول الآتي: (1,2,0,0)

وللحصول على الحلول القاعدية الأخرى ندمج العمليات الحسابية ونعرض النتائج كما في الجدول رقم (1-3) الآتي:

جدول رقم (1-3)

المتحولات المتحولات القاعدية	x_1	x_2	x_3	x_4	B	الحل القاعدي المقابل
x_3	-5/4	0	1	1/4	-5/4	(0,3/2,-5/4,0)
x_2	-1/2	1	0	-1/2	3/2	
x_3	0	-5/2	1	3/2	-5	(-3,0,-5,0)
x_1	1	-2	0	1	-3	
x_4	0	-5/3	2/3	1	-10/3	(1/3,0,0,-10/3)
x1	1	-1/3	-2/3	0	1/3	
x_4	-5	0	4	1	-5	(0,-1,0,-5)
x_2	-3	1	2	0	-1	
x_4	1	-2	0	1	-3	(0,0,-1/2,-3)
x_3	-3/2	1/2	1	0	-1/2	

وبذلك نحصل على 6 حلول قاعدية أخرى هي:

(0, 0, -1/2, -1/3)	(0, -1, 0, -5)
(1/3, 0, 0, -10/3)	(-3, 0, -5, 0)
(0, 3/2, -5/4, 0)	(1, 2, 0, 0)

V- الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية فيها (m<n):

إذا كانت جميع أو بعض المتحولات الداخلة في الجملة (1−3−1) مشروطة بأن تكون غير سالبة (أي يشترط أن يكون $x_i \geq 0$) فإن بعض الحلول القاعدية يكون غير مقبول لأنه مخالفاً للشروط المفروضة على المتحولات x_i.

وفي مثل هذه الحالات علينا أن نبحث عن الحلول القاعدية ذات المركبات غير السالبة من بين جميع الحلول القاعدية الممكنة، ولتوضيح ذلك نقوم بحل المثال الآتي:

مثال (4):

أوجد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة المعادلتين الآتيتين:

$$x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8$$
$$5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 20$$

حيث إن $x_i \geq 0$ وأن (i: 1,2,3,4,5).

من الواضح أن عدد الحلول القاعدية يساوي $C_5^2 = 10$ حلول. ولإيجاد هذه الحلول نبدأ باختيار x_1 و x_2 كمتحولين قاعديين ثم نحول المعادلتين إلى الشكل النموذجي (1−3−6) كما يلي:

$$x_1 - x_2 = 8 - 5x_3 + x_4 - x_5$$
$$5x_1 - 4x_2 = 20 - 3x_3 + 2x_4 - x_5$$

نضرب الأولى بـ 5 ونطرحها من الثانية فنحصل على :

$$x_1 - x_2 = 8 - 5x_3 + x_4 - x_5$$
$$0 + x_2 = -20 + 22x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

ثم نجمع الثانية إلى الأولى فنحصل على الشكل القاعدي الآتي:

$x_1 + 0 = -12 + 17x_3 - 2x_4 + 3x_5$

$0 + x_2 = -20 + 22x_3 - 3x_4 + 4x_5$

وبوضع المتحولات الحرة $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ نحصل على $x_1 = -12$ و $x_2 = -20$، وبذلك نكون قد حصلنا على الحل القاعدي الأول وهو (-12,-20,0,0,0)، وبنفس الطريقة نحصل على الحلول القاعدية الأخرى إذا أجرينا تبديلاً بين المتحولات القاعدية والمتحولات الحرة واحداً تلو الآخر فنحصل على الحلول القاعدية الباقية الآتية:

(0,4/7,12/7,0,0)	(3,0,0,0,5)
(4/3,0,0,-20/3,0)	(0,0,0,-12,-4)
(0,0,4/3,-4/3,0)	(-1/3,0,5/3,0,0)
(0,-4,0,0,4)	(0,-2,0,-6,0)

(0,0,3/2,0,1/2)

ولتحديد الحلول القاعدية غير السالبة نلاحظ أنه لا يوجد غير ثلاثة حلول قاعدية غير سالبة بين الحلول القاعدية السابقة وهي:

(0,0,3/2,0,1/2) (0,4/7,12/7,0,0) (3,0,0,0,5)

ونلاحظ من المثال السابق أن عملية البحث عن الحلول القاعدية غير السالبة اقتضت منا إيجاد جميع الحلول القاعدية الممكنة ثم تحديد الحلول القاعدية غير السالبة منها.

ونظراً لصعوبة تطبيق مثل هذا الأسلوب، وخاصة في حالة المعادلات التي تتضمن عدداً كبيراً من المتحولات، فإننا سنعتمد أسلوباً آخر في البحث عن الحلول القاعدية غير السالبة فقط دون المرور أو الاهتمام بالحلول القاعدية الأخرى وان هذا الأسلوب هو تطوير لطريقة (جاردان– غوص) ويطلق عليه اسم طريقة (السمبلكس) أو الطريقة المبسطة ونلخصه بالفقرة الآتية.

VI- طريقة السمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية فيها (m<n) :

لنفترض أن جميع الثوابت الحرة في الطرف الثاني b_i في جملة المعادلات الخطية (1−3−1) غير سالبة. أي أننا نفترض أن $b_i \geq 0$ من أجل جميع قيم (i:1,2,3,…m) وإذا كان بعض الثوابت b_i سالباً فإننا نقوم بضرب طرفي تلك المعادلة بـ (1−) لنجعلها موجبة ثم نضع المعاملات في الجدول كالآتي:

المتحولات j / المعادلات i	x_1	x_2	x_3	x_m	x_{m+i}	x_n	الثوابت B
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1m}	a_{1m+1}	a_{1n}	$b_1 \geq 0$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2m}	a_{2m+1}	a_{2n}	$b_2 \geq 0$
3	a_{31}	a_{31}	a_{33}	a_{3m}	a_{3m+i}	a_{3n}	$b_3 \geq 0$
….	….	….	….	….	….	….	….
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mm}	a_{mm+1}	a_{mn}	$b_m \geq 0$

بما أننا نبحث عن الحلول القاعدية غير السالبة لجملة المعادلات السابقة، وبما أن قيم جميع الحلول القاعدية تؤخذ من عمود الثوابت B وأننا فرضنا أو جعلنا جميع تلك الثوابت غير سالبة، لذلك يجب علينا أن نحافظ على إشاراتها عند إجراء أية عملية تحويل أو تبديل للمتحولات حسب طريقة (جاردان – غوص).

وبما أن العنصر الجديد b'_i في الجدول الجديد عند تبديل x_s الحر من المعادلة t (بالمتحول القاعدي x_t) يعطى بواسطة العلاقة الآتية:

$$b'_i = b_i - a_{is}\frac{b_t}{a_{ts}} \qquad (1-5-1)$$

حيث إن: $i \neq t$، وإن a_{ts} هو عنصر الارتكاز وهو أمثال x_s في المعادلة t. أما قيمة b'_t في المعادلة t فتحسب من العلاقة $b'_t = \frac{b_t}{a_{ts}}$. والسؤال الآن هو: هل يمكننا إختيار عنصر الارتكاز a_{ts} بحيث تبقى جميع الثوابت b'_i غير سالبة. أي كيف سنختار العنصر a_{ts} حتى يبقى لدينا:

$$b'_i = \left(b_i - a_{is}\frac{b_t}{a_{ts}}\right) \geq 0 \qquad i \neq t$$

سطر المعادلة t $b'_t = \frac{b_t}{a_{ts}} \geq 0$

ولمناقشة الأمر نلاحظ أنه حتى يبقى $b'_t = \frac{b_t}{a_{ts}}$ غير سالب يجب أن يكون عنصر الارتكاز ($a_{ts} > 0$) لأننا افترضنا أساساً أن ($b_t \geq 0$). وهكذا نستنتج أن نضع أول شرط على عنصر الارتكاز a_{ts} هو أن يكون ($a_{ts} > 0$). وحتى تبقى العناصر الأخرى غير سالبة يجب أن يكون لدينا:

$$b'_i = \left(b_i - a_{is} \frac{b_t}{a_{ts}} \right) \geq 0 \qquad (2-5-1)$$

وبكتابة هذه العلاقة على الشكل الآتي:

$$b'_i = a_{is} \left(\frac{b_i}{a_{is}} - \frac{b_t}{a_{ts}} \right) \geq 0$$

نجد أن b'_i تكون غير سالبة في إحدى الحالات الآتية:

1- إذا كان $a_{is} > 0$ وكان $\left(\frac{b_i}{a_{is}} - \frac{b_t}{a_{ts}} \right) \geq 0$، أي إذا كان $a_{is} > 0$ فإنه يجب أن يكون $\frac{b_t}{a_{ts}} \leq \frac{b_i}{a_{is}}$، أي أن عنصر الارتكاز a_{ts} يجب أن يحقق المتراجحة التالية:

$$\frac{b_t}{a_{ts}} \leq \frac{b_i}{a_{is}} \qquad \forall i \qquad (3-5-1)$$

وذلك من أجل جميع قيم i الواقعة في العمود s ولن يتحقق الشرط (1-5-3) إلا إذا كانت النسبة $\frac{b_t}{a_{ts}}$ تساوي ما يلي:

$$\frac{b_t}{a_{is}} = \underset{a_{is}>0}{\text{Min}_i} \left(\frac{b_i}{a_{is}} > 0 \right) \qquad (4-5-1)$$

أي يجب أن تكون النسبة $\frac{b_t}{a_{ts}}$ أصغر من جميع النسب $\frac{b_i}{a_{is}}$ الناتجة عن تقسيم عناصر العمود B على العناصر الموجبة من العمود x_s.

2- إذا كان $a_{is} < 0$ وكان $(\frac{b_i}{a_{is}} - \frac{b_t}{a_{ts}}) \leq 0$، وهذا يعني أنه إذا كان $a_{is} < 0$ فإنه يجب أن يكون:

$$\frac{b_t}{a_{ts}} \geq \frac{b_i}{a_{is}} \qquad (5-5-1)$$

وبما أنه لدينا فرضاً أن $b_i \geq 0$ وأن $a_{is} < 0$ فإنه يكون لدينا $\frac{b_i}{a_{ts}} < 0$.

وبما أنه اشترطنا أن يكون $(a_{ts}>0)$ فإنه يكون لدينا $\frac{b_t}{a_{ts}} \geq 0$، وبما أن أي عدد موجب هو أكبر من أي عدد سالب فإن الشرط (1-5-5) يكون محققاً بشكل دائم عندما يكون $(a_{is} < 0)$ ويكون $(a_{ts} > 0)$.

ومن هنا نستنتج أن هذه الحالة لا تفرض شروطاً على عنصر الارتكاز a_{ts} غير الشرط الذي استنتجناه منذ البداية وهو أن يكون $(a_{ts} > 0)$، لذلك لا نأخذ هذه الحالة بعين الاعتبار، ومما سبق نستنتج أنه إذا قمنا باختيار عنصر الارتكاز بين العناصر الموجبة في عمود الارتكاز s بحيث يكون هو العنصر الموجب a_{ts} الذي يحقق العلاقة (1-5-4) الآتية:

$$\theta = \min_{\substack{i \\ a_{is} > 0}} (\frac{b_i}{a_{is}} > 0) = \frac{b_t}{a_{ts}} \qquad (6-5-1)$$

فإننا نضمن بقاء الثوابت b_i غير سالبة عند إجراء عملية تبديل المتحول الحر x_s بالمتحول القاعدي x_t، ولنفترض أنه نتيجة لعمليات التبديل المتتالية حصلنا على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_m	x_{m+1}	x_n	الثوابت

x_1	1	0	0	0	q'_{11}	q'_{1n-m}	$b'_1 \geq 0$
x_2	0	1	0	0	q'_{12}	q'_{2n-m}	$b'_2 \geq 0$
x_3	0	0	1	0	q'_{13}	q'_{3n-m}	$b'_3 \geq 0$
…..	….	….	….	….	….	….	….
x_m	0	0	0	1	q'_{m1}	q'_{mn-m}	$b'_m \geq 0$

وبذلك نحصل على الحل القاعدي الأول غير السالب الآتي:

$(b'_1,\ b'_2,\ b'_3,\ldots.,\ b'_m,\ 0,\ 0,\ldots\ldots,0)$

وللحصول على الحلول القاعدية الأخرى غير السالبة، نقوم بإجراء تبديل متتالي لمتحول من المتحولات الحرة بمتحول من متحولات القاعدة، حتى نشمل جميع الإمكانيات الممكنة، ونلخص خطوات البحث على حل قاعدي غير سالب وفق طريقة (السمبلكس) بما يلي:

1- نجعل جميع عناصر عمود الثابت B التي في الطرف الأيمن غير سالبة، وذلك بضرب طرفي المعادلات التي بحاجة لذلك العدد (1-) أو بجمع أو طرح المعادلات من بعضها بعضاً بعد ضربها بأمثال مناسبة.

2- نضع المعاملات الجديدة في جدول نظامي.

3- نقوم بتشكيل قاعدة مؤلفة من m متحولاً وذلك باختيار المتحول الذي نريد إدخاله إلى القاعدة، وليكن x_s، ثم نحسب جميع النسب الموجبة $\frac{b_i}{a_{is}}$ ونختار أصغرها فنحصل على:

$$\theta = \mathrm{Min}\left(\frac{b_i}{a_{is}} > 0\right) = \frac{b_t}{a_{ts}} \qquad (6-5-1)$$
$$a_{is} > 0$$

وعندها يكون a_{ts} هو عنصر الارتكاز.

أ- ثم نقوم بحذف المتحول x_s من جميع المعادلات وفق طريقة (جاردان-غوص) باستثناء المعادلة t التي ستصبح أمثاله فيها مساوية للواحد.

ب- ثم نعود من جديد ونختار متحولاً آخر وليكن x_{s1} ونتابع الخطوات (3) و(4) و(5)، ونكرر ذلك حتى نحصل على قاعدة مؤلفة من m متحولاً.

4- نضع جميع المتحولات الحرة (غير القاعدية) مساوية للصفر فنحصل على الحل القاعدي غير السالب الأول الآتي: $(b_1, b_2, \ldots . b_m, 0,0,0, \ldots .0)$.

5- للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة الأخرى نقوم باختيار أحد المتحولات وليكن x_{s_2} ونبدله بالمتحول القاعدي x_{t_2} الذي يشير إليه عنصر الارتكاز $a_{t_2 s_2}$ المحسوب من العلاقة (1-5-6) السابق، ثم نضع المتحولات الحرة مساوية للصفر فنحصل على الحل القاعدي غير السالب الثاني... الخ.

وهكذا نتابع العمل حتى نحصل على جميع الحلول القاعدية غير السالبة. ونتوقف عن العمل عندما لا نجد عموداً من أعمدة المتحولات الحرة التي لم نتناولها بالتبديل يحوي عنصراً موجباً (واحداً على الأقل).

مثال (5):

أوجد جميع الحلول القاعدية غير السالبة لجملة المعادلات الآتية:

$x_1 - 3x_4 + 2x_5 = -3$
$x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 8$
$x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -7$

الحل:

حتى نجعل الثوابت موجبة نضرب طرفي المعادلتين الأولى والثالثة بـ (1-) ونضع المعادلات الجديدة في الجدول الآتي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
1	-1	0	0	3	-2	3
2	0	1	0	2	-3	8
3	0	0	-1	2	5	7

للبحث عن قاعدة لهذه الجملة نختار x_4 ليكون متحولاً قاعدياً ولتحديد عنصر الارتكاز المناسب نلاحظ أن:

$$\underset{i}{\text{Min}}\ [\frac{b_i}{a_{i4}}] = \text{Min}\ [\frac{3}{3}, \frac{8}{4}, \frac{7}{2}] = \frac{3}{3}$$

$a_{i4} > 0$

أي أن عنصر الارتكاز المناسب هو العنصر (3) في السطر الأول، وبإجراء الحسابات اللازمة لعملية حذف x_4 من المعادلتين الثانية والثالثة نحصل على الجدول التالي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
1	−1/3	0	0	1	−2/3	1
2	2/3	1	0	0	−5/3	6
3	2/3	0	−1	0	19/3	5

ثم نختار المتحول x_1 ليكون متحولاً قاعدياً آخر ونحدد عنصر الارتكاز في عموده من العلاقة:

$$\text{Min}\left[\frac{6}{2/3}, \frac{5}{2/3}\right] = \frac{5}{2/3}$$

أي أن عنصر الارتكاز الجديد هو (2/3) في السطر الثالث.

وبإجراء الحسابات اللازمة لعملية حذف x_1 من المعادلتين الأولى والثانية نحصل على الجدول الآتي:

المعادلات	x_1	x_2	x_2	x_4	x_5	B
x_4	0	0	−1/2	1	5/2	7/2
x_2	0	1	1	0	−8	1
x_1	1	0	−3/2	0	19/2	15/2

وبذلك نكون قد حصلنا على قاعدة مؤلفة من المتحولات x_1 وx_2 وx_4 وعندها نضع المتحولات الحرة مساوية للصفر فنحصل على الحل القاعدي غير السالب الأول الآتي:

$$(\frac{15}{2},\ 1,\ 0,\ \frac{7}{2},\ 0)$$

للحصول على الحل القاعدي غير السالب الثاني نختار المتحول الحر x_5 لنستبدله بأحد المتحولات القاعدية، ولتحديد المتحول القاعدي البديل نحدد عنصر الارتكاز فنجد أن:

$$\text{Min}\left\{\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}},\frac{\frac{15}{2}}{\frac{19}{2}}\right\}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{19}{2}}$$

أي أن عنصر الارتكاز المناسب هو 19/2 في السطر الثالث. وبتبديل x_5 بـ x_1 وفق خطوات (جاردان- غوص) نحصل على القاعدة والجدول التاليين:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_4	−5/19	0	−2/19	1	0	29/19
x_2	16/19	1	−5/19	0	0	139/19
x_5	2/19	0	−3/19	0	1	15/19

ومن هذا الجدول نحصل على الحل القاعدي غير السالب الثاني:

$$(0\ ,\ \frac{139}{19}\ ,\ 0\ ,\ \frac{29}{19}\ ,\ \frac{15}{19})$$

وللحصول على الحل القاعدي غير السالب الثالث نختار المتحول x_1 لنعيده إلى القاعدة، لأن عموده يتضمن عناصر موجبة، ولتحديد عنصر الارتكاز نجد أن:

$$\text{Min}\quad\left\{\frac{\frac{139}{19}}{\frac{16}{19}},\frac{\frac{15}{19}}{\frac{2}{19}}\right\}=\frac{\frac{15}{19}}{\frac{2}{19}}$$

أي أن عنصر الارتكاز المناسب هو (2/19) في السطر الثالث وبتبديل x_1 في مكان x_5 نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت B
x_4	0	0	−1/2	1	5/2	7/2
x_2	0	1	1	0	−8	1
x_1	1	0	−3/2	0	19/2	15/2

ومن هذا الجدول نحصل على نفس الحل القاعدي الأول الذي ورد في جدول سابق وهو:

(15/2, 1, 0, 7/2, 0)

ومن خلال دراسة الجدول الأخير نلاحظ أنه يمكننا أن نحصل على حل قاعدي غير سالب رابع بتبديل x_3 بـ x_2 (لوجود عنصر موجب في عمود x_3 ولأننا لم ننقل x_3 بعد)، وبإجراء الحسابات اللازمة المعتمدة على عنصر الارتكاز نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت B
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	4
x_3	0	1	1	0	-8	1
x_1	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	9

ومنه نحصل على الحل القاعدي غير السالب الرابع (9, 1, 1, 4, 0)، ومن دراسة الجدول الأخير نجد أنه لا يوجد إمكانيات أخرى للتبديل وبذلك نكون قد حصلنا على الحلول القاعدية غير السالبة المطلوبة.

مثال (6):

أوجد جميع الحلول القاعدية غير السالبة لجملة المعادلات الآتية:

$$x_1 \quad -5x_5 + 2x_6 = -3$$
$$x_2 \quad -2x_5 - x_6 = 5$$
$$x_3 \quad -3x_5 + x_6 = -7$$
$$x_4 + x_5 + 3x_6 = -4$$

نضع معاملات هذه المعادلات في جدول كالآتي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
1	1	0	0	0	−5	2	−3
2	0	1	0	0	−2	−1	5
3	0	0	1	0	−3	1	−7
4	0	0	0	1	1	−3	−4

ولجعل جميع الثوابت في العمود B يمكن أن نضرب المعادلات الأولى والثالثة والرابعة بـ (1−)، ولكننا هنا سنتبع أسلوباً آخر لتحقيق ذلك، وذلك بضرب المعادلة الثالثة بـ (1−) وجمعها إلى الأولى ثم إلى الرابعة فنحصل على الجدول الآتي:

المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
1	1	0	−1	0	−2	1	4
2	0	1	0	0	−2	−1	5
3	0	0	−1	0	3	−1	7
4	0	0	−1	1	4	−4	3

وللحصول على قاعدة كاملة مع المحافظة على عدم سالبية الثوابت في العمود B، نلاحظ أنه يمكننا إدخال أي من المتحولات (ما عدا x_3 لعدم وجود عنصر موجب في عموده) في القاعدة، لذلك نختار x_6 ونعتمد على عنصره الموجب الوحيد (1) كعنصر ارتكاز ونجري الحسابات اللازمة فنحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
1	1	0	−1	0	−2	1	4
2	1	1	−1	0	−4	0	9
3	1	0	−2	0	1	0	11
4	4	0	−5	1	−4	0	19

ومن دراسة الجداول الأخير نلاحظ انه يمكننا إدخال x_5 أو x_1 إلى القاعدة (لوجود عناصر موجبة في عموديهما). لذلك نختار المتحول x_5 وندخله إلى القاعدة

اعتماداً على عنصر الارتكاز (1) (عنصر وحيد موجب) ونجري الحسابات اللازمة فنحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_6	3	0	−5	0	0	1	26
x_2	5	1	−9	0	0	0	53
x_5	1	0	−2	0	1	0	11
x_4	8	0	−13	1	0	0	63

وبذلك نكون قد حصلنا على قاعدة مؤلفة من (x_6, x_5, x_4, x_2) وبوضع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي غير السالب الأول وهو: (0, 53, 0, 63, 11, 26).

ومن دراسة الجدول الأخير نلاحظ أنه يمكننا إدخال x_1 إلى القاعدة ولتحديد المتحول نقوم بتحديد عنصر الارتكاز حيث نجد أن: $\text{Min}\ (\frac{26}{3}, \frac{53}{5}, \frac{11}{1}, \frac{63}{8}) = \frac{63}{8}$

أي أن عنصر الارتكاز الجديد هو العنصر (8) في السطر الرابع وبإجراء الحسابات اللازمة نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_6	0	0	−1/8	−3/8	0	1	19/8
x_2	0	1	−7/8	−5/8	0	0	109/8
x_5	0	0	−3/8	−1/8	1	0	25/8
x_1	1	0	−13/8	+1/8	0	0	63/8

وبوضع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي غير السالب الآتي: $(\frac{63}{8}, \frac{109}{8}, 0, 0, \frac{25}{8}, \frac{19}{8})$

ومن هذا الجدول يتضح لنا أنه لم يعد بإمكاننا إيجاد حلول قاعدية غير سالبة أخرى لأن عموده x_3 لا يحوي على عنصر موجب، ولأنه إذا اخترنا x_4 مكان x_1 نعود إلى الجدول السابق الذي لا يسمح لنا بتحويل آخر.

تمرينات

1- أوجد بطريقة (جاردان- غوص) الحل المشترك لكل من جملة المعادلات التالية:

1) $x + y - z = 8$
$-3x + 3y + 2z = -9$
$4x - 3y + 2z = -13$

2) $3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -17$
$-4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4$
$5x_1 - 4x_3 - 3x_3 = 5$

3) $2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 5$
$-3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -16$

4) $7x_2 - 2x_3 = -8$
$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7$
$5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 20$

5) $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$
$11x_1 + 4x_3 = 12$
$7x_2 - 5x_3 = 27$

6) $x_1 - 5x_3 = 8$
$x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1$
$2x_1 - x_2 - 6x_3 = 7$

7) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$
$3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4$
$8x_1 - x_2 - 5x_3 = -14$

8) $3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$
$2x_1 - x_2 + 7x_3 = 27$

9) $x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -24$
$2x_1 + 7x_2 + 8x_3 - x_4 = 43$
$3x_1 + 41x_2 + 5x_3 = 29$

10) $5x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 16$
$5x_1 + 2x_2 - x_3 - 26x_4 = -1$
$2x_1 + x_3 + 2x_4 = 9$

11) $2x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$
$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$
$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$

12) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2$
$x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23$
$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12$

2- أوجد جميع الحلول القاعدية لجمل المعادلات التالية:

1) $5x_1 + 6x_2 + 17x_3 - 14x_4 = 22$
   $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2-$
   $x_3 + 2x_4 = 5$
2) $3x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -6$
   $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 9-$
   $x_3 + x_4 = 1$
   $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -13$

3) $2x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1$
   $3x_1 + 10x_2 - 8x_3 + x_4 = -7$
   $x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5$

4) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
   $x_2 -2x_3 - 2x_4 = -4$
   $2x_1 + 6x_2 -5x_3 + 4x_4 = -17$

5) $4x_1 + 10x_3 - 2x_4 = -10$
   $2x_2 - 5x_3 - x_4 = 4-$

3- أوجد جميع الحلول القاعدية غير السالبة لكل من جملة المعادلات الآتية:

1) $x_1 -2x_2 + 3x_3 -4x_4 = 4$
   $x_2 - x_3 + x_4 = -3$
   $x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1$
   $- 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3$

2) $x_1 +x_2 +x_3 +x_4 +x_5 = 7$

$3x_1\ 32x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2$

$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23$

$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12$

3) $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1$

$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$

$3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2$

$4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3$

4) $2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1$

$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1$

$4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 1$

$2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1$

5) $-x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2$

$-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2$

$-3x_1 + x_2 - 5x_3 + 7x_5 = -2$

$-5x_1 + 7x_2 + x_2 + 16x_4 + x_5 = 10$

الفصل الثاني
أسس البرمجة الخطية

I- صياغة النماذج الرياضية الخطية:

كثيراً ما نواجه في حياتنا العملية مسائل خاصة أو مشكلات عامة، تتألف من تابع خطي معرف على عدد من المتراجحات أو المعادلات، وإن هذه المسائل تتميز بوجود عدد كبير من الحلول المقبولة لها وتتطلب إيجاد حل مثالي لها من بين مجموعة تلك الحلول المقبولة.

ومن الواضح أنه لا يمكننا البحث عن ذلك الحل المثالي قبل أن نقوم بصياغة المسألة المطروحة صياغة رياضية دقيقة.

وسنعالج في هذه الفقرة كيفية صياغة النماذج الرياضية لبعض المسائل التقليدية في البرمجة الخطية وهي:

(I-1)- مسألة تركيب الوجبات الغذائية:

لنفترض أننا نريد تركيب وجبة غذائية من أربعة أنواع من المواد الغذائية هي: F_1,F_2,F_3,F_4. وأن سعر الواحدة من كل منها يساوي C_1,C_2,C_3,C_4 على الترتيب.

ولنفترض أنه يشترط أن تتضمن الوجبة مقداراً معيناً من كل العناصر الغذائية الهامة التالية: البروتينات والكربونات والدهنيات على أن لا تقل كمية البروتين فيها عن b_1 واحدة، وكمية الكربونات فيها عن b_2 وكمية الدهنيات عن b_3 واحدة.

والمطلوب إيجاد المقادير اللازمة من كل من المواد: F_1,F_2,F_3,F_4 التي يجب إدخالها في الوجبة بحيث تكون تكلفتها أقل ما يمكن، وذلك إذا علمت أن:

1- واحدة المادة F_1 تحتوي على a_{11} واحدة بروتين وa_{21} واحدة كربونات وa_{31} واحدة دهنيات.

2- واحدة المادة F_2 تحتوي على a_{12} واحدة بروتين وa_{22} واحدة كربونات وa_{32} واحدة دهنيات.

3- واحدة المادة F_3 تحتوي على a_{13} واحدة بروتين وa_{23} واحدة كربونات وa_{33} واحدة دهنيات.

4- واحدة المادة F_4 تحتوي على a_{14} واحدة بروتين وa_{24} واحدة كربونات وa_{44} واحدة دهنيات.

وإذا رمزنا للمقادير المطلوبة من كل من المواد F_1,F_2,F_3,F_4 بالرموز x_1,x_2,x_3,x_4 على الترتيب، ووضعنا المعلومات السابقة في جدول منظم كالآتي:

المواد الغذائية / العناصر الغذائية	F_1	F_2	F_3	F_4	المقادير الدنيا
بروتين	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
كربونات	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
دهنيات	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
الأسعار	c_1	c_2	c_3	c_4	
المقادير المطلوبة	x_1	x_2	x_3	x_4	

ومن الجدول يتبين لنا أن تابع الهدف هو تابع التكلفة وهو يساوي:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

ويطلب إيجاد قيمة لكل من المتحولات (x_1,x_2,x_3,x_4) بحيث يأخذ التابع L أصغر قيمة له، وذلك ضمن الشروط المفروضة، ولصياغة الشروط المفروضة بشكل رياضي نلاحظ أن:

كل واحدة من المادة F_1 تعطينا a_{11} واحدة من البروتين، وبذلك تجد أن x_1 واحدة تعطينا $a_{11}x_1$ واحدة بروتين، وأن كل واحدة F_2 تعطينا a_{12} واحدة من الروتين

وبذلك نجد أن x_2 واحدة منها تعطينا $a_{12}x_2$ واحدة من البروتين...الخ، وبذلك نجد أن كمية البروتين التي يمكن أن تتضمنها الوجبة الغذائية تساوي مجموع ما تعطيه المواد الأربعة الداخلة في الوجبة ويساوي: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$

وبما أن هذه الكمية من البروتين يجب أن لا تقل عن b_1 واحدة، إذن يمكننا كتابة شرط عنصر البروتين على الشكل الرياضي الآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq b_1$$

وبنفس الطريقة نجد أن شرط عنصر الكربونات يمكن أن يكتب على الشكل الآتي:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq b_2$$

وكذلك نجد أن شرط عنصر الدهنيات يمكن أن يكتب على الشكل الرياضي الآتي:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$$

وبذلك تأخذ المسألة شكلها النهائي الآتي:

يطلب إيجاد قيمة لكل من المتحولات (x_1,x_2,x_3,x_4) التي تجعل التابع:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \rightarrow \text{Min} \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

يأخذ أصغر قيمة له وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq b_1 && \text{شرط البروتين} \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq b_2 && \text{شرط الكربونات} \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3 && \text{شرط الدهنيات} \end{aligned} \qquad (2\text{-}1\text{-}2)$$

ويضاف إلى الشروط الخطية السابقة شروط عدم سالبية المتحولات (x_1,x_2,x_3,x_4)، أي يشترط في هذه الحالة أن تكون:

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \qquad x_4 \geq 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

وذلك لأن مقدار المادة F_j الذي سيدخل في الوجبة لا يمكن أن يكون سالباً، وإن الحل المثالي لهذه المشكلة هو الحل الذي يعطينا (x_1,x_2,x_3,x_4) التي تحقق الشروط وتجعل التكلفة أقل ما يمكن.

(I-2)- مسألة تخطيط الإنتاج في المؤسسة:

لنفترض أن مؤسسة إنتاجية تنتج ثلاثة أنواع من المنتجات هي (T_1,T_2,T_3)، وإنها تستخدم لذلك أربعة عناصر من المواد الأولية هي: R_1, R_2, R_3, R_4

وإن هذه المواد الأولية متوفرة لديها بمقادير محدودة هي: b_1, b_2, b_3, b_4

والمطلوب إيجاد مقدار ما يجب إنتاجه من كل من المنتجات T_1, T_2, T_3 بحيث يكون إجمالي الربح أكبر ما يمكن، وذلك إذا علمت أن مقدار الربح من كل من هذه المنتجات يساوي P_1, P_2, P_3 على الترتيب، وإنه لإنتاج كل واحدة من T_1 يلزمنا a_{11} من R_1 وa_{22} من R_2 وa_{31} من R_3 وa_{41} من R_4.

وإنه لإنتاج كل واحدة من T_2 يلزمنا a_{12} من R_1 وa_{21} من R_2 وa_{32} من R_3 وa_{42} من R_4.

وإنه لإنتاج كل واحدة من T_3 يلزمنا a_{13} من R_1 وa_{23} من R_2 وa_{33} من R_3 وa_{43} من R_4.

ولنفترض أن مقادير الطلب على المنتجات T_1, T_2, T_3 هو K_1, K_2, K_3 على الترتيب، وأن مقادير ما يجب إنتاجه منها هو x_1, x_2, x_3 على الترتيب أيضاً، ثم نضع المعلومات السابقة ضمن جدول منظم كما هو مبين على الصفحة الآتية:

المنتجات / المواد	T_1	T_2	T_3	المقادير المتوفرة من R_i
R_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
R_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
R_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	b_4
الأسعار	P_1	P_2	P_3	
مقادير الطلب	K_1	K_2	K_3	
المقادير المجهولة	x_1	x_2	x_3	

من هذا الجدول يتبين لنا أن تابع الهدف هو تابع الربح وهو يساوي:

$Z = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 \rightarrow Max$

ويطلب إيجاد قيم المتحولات (x_1, x_2, x_3) التي تجعل Z يأخذ أكبر قيمة له ضمن الشروط المفروضة.

ولإيجاد المعادلات أو المتراجحات التي تعبر عن الشروط المفروضة نلاحظ أنه لإنتاج واحدة من T_1 يلزمنا a_{11} من R_1 وa_{21} من R_2 وa_{31} من R_3 وa_{41} من R_4.

وكذلك نجد أنه لإنتاج x_1 واحدة من T_1 يلزمنا $a_{11}x_1$ من R_1، و$a_{21}x_1$ من R_2، و$a_{31}x_1$ من R_3، و$a_{41}x_1$ من R_4.

ولإنتاج x_2 واحدة من T_2 يلزمنا $a_{12}x_2$ من R_1 و$a_{22}x_2$ من R_2 و$a_{32}x_2$ من R_3 و$a_{42}x_2$ من R_4... الخ.

وبما أن المقادير المتوفرة من المواد الأولية R_1, R_2, R_3, R_4 محدودة وتساوي b_1, b_2, b_3, b_4 على الترتيب، إذن يمكن كتابة شروط المواد الأولية على الشكل التالي:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$ (شرط المادة R_1)

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$ (شرط المادة R_2)

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$ (شرط المادة R_3)

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \leq b_4$ (شرط المادة R_4)

أما الشروط التي يفرضها الطلب على تلك المنتجات فهي:

$x_1 \leq k_1 , \quad x_2 \leq k_2 , \quad x_3 \leq k_3$

وذلك لأن كمية المنتجات يجب أن لا تزيد عن كمية الطلب حتى لا يؤثر ذلك على الأسعار أو يؤدي إلى تكديس المنتجات وتجميد الأموال.

ويضاف إلى جميع الشروط السابقة شروط عدم السالبية وهي:

$x_1 \geq 0 \quad , x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0$

وبذلك يمكننا كتابة النموذج الرياضي للمسألة السابقة كما يلي:

يطلب إيجاد (x_1, x_2, x_3) التي تجعل التابع:

$$Z = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 \rightarrow \text{Max} \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

يأخذ أكبر قيمة له ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\le b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 &\le b_4 \end{aligned} \qquad (5\text{-}1\text{-}2)$$

والشروط التالية:

$$0 \le x_1 \le k_1,\ 0 \le x_2 \le k_2,\ 0 \le x_3 \le k_3 \qquad (6\text{-}1\text{-}2)$$

وإن الحل المثالي لهذا النموذج هو الحل الذي يعطينا المقادير $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ التي تحقق الشروط المفروضة وتجعل الربح أكبر ما يمكن.

(I-3)- مسألة توزيع وسائل النقل على الخطوط:

لنفترض أننا نريد شراء وتوزيع 5 أنواع من وسائل النقل (طائرات أو سفن أو شاحنات أو حافلات...) على 3 خطوط، ولنفترض أن طاقة النوع i على الخط j هي a_{ij} في واحدة الزمن، وأن متطلبات الخط j تساوي a_j واحدة، وأن تكلفة نقل واحدة المواد بوساطة وسيلة من النوع i على الخط j تساوي C_{ij}، والمطلوب إيجاد النموذج الرياضي الذي يساعدنا على إيجاد العدد اللازم من تلك الوسائل وتوزيعها على الخطوط بحيث نلبي متطلباتها ونجعل تكلفة النقل أقل ما يمكن.

لإيجاد الصيغة الرياضية لهذه المسألة نفترض أن عدد وسائل النقل من النوع i التي يجب وضعها على الخط j تساوي x_{ij}، وبذلك يكون تابع الهدف هو تابع التكلفة ويعطى بوساطة العلاقة الآتية:

$$Z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \text{Min} \qquad (7\text{-}1\text{-}2)$$

ولإيجاد الشروط الخطية نصيغ المعلومات السابقة في جدول منظم كما هو مبين على الصفحة التالية، وبما أن الشروط المفروضة تقتضي أن تلبي حاجة كل الخطوط، لذلك فإننا نجد أن إجمالي طاقة الوسائل التي تعمل على الخط j يجب أن تساوي a_j، إذن نجد أنه يمكننا صياغة الشروط الخطية على الشكل الآتي:

الخطوط j	1	2	3

أنواع الوسائل i			
1	c_{11} a_{11} x_{11}	c_{12} a_{12} x_{12}	c_{13} a_{13} x_{13}
2	c_{21} a_{21} x_{21}	c_{22} a_{22} x_{22}	c_{23} a_{23} x_{23}
3	c_{31} a_{31} x_{31}	c_{32} a_{32} x_{32}	c_{33} a_{33} x_{33}
4	c_{41} a_{41} x_{41}	c_{42} a_{42} x_{42}	c_{43} a_{43} x_{43}
5	c_{51} a_{51} x_{51}	c_{52} a_{52} x_{52}	c_{53} a_{53} x_{53}
متطلبات الخطوط	a_1	a_2	a_3

$$a_{11}x_{11}+ a_{21}x_{21} + a_{31}x_{31} + a_{41}x_{41} + a_{51}x_{51}= a_1$$
$$a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{32}x_{32} + a_{42}x_{42} + a_{52}x_{52} =a_2 \qquad (8\text{-}1\text{-}2)$$
$$a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} + a_{33}x_{33} + a_{43}x_{43}+a_{53}x_{53} = a_3$$

ويضاف إلى هذه الشروط الخطية شروط عدم السالبية وهي:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (9\text{-}1\text{-}2)$$

حيث إن (i: 1,2,3,4,5) و (j: 1,2,3).

كما يشترط أن تكون قيم المتحولات x_{ij} قيماً صحيحة، لأنه لا يمكننا وضع جزء من وسيلة النقل على أي خط من الخطوط.

إن هـذه الأمثلـة الثلاثـة توضـح لنـا أن صـياغة النمـوذج الرياضـي للمسـألة المطروحة تحتاج إلى تحليل دقيق وفن خاص ومعرفة كافية بالشروط الفنية والموضوعية المفروضـة علـى عناصـر المسألة، كمـا أن تحديـد نـوع الشـروط الخطيـة (كمتراجحـات أو معادلات) يحتاج إلى فهم كاف لمعاني كل منها.

II- النماذج الخطية وأشكالها:

(1-II)- النموذج العام لمسائل البرمجة الخطية:

هو الشكل العام الذي يمكن أن يأخذه النموذج الرياضـي للمسألة المفروضـة، ولقد لاحظنا أن جميع مسائل البرمجة الخطية تتميز بما يلي:

1- وجود تابع خطي لعدد من المتحولات $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$ يطلق عليه اسم تابع الهدف ونرمز له بـ Z (أو L) ويكتب على الشكل الآتي:

$$Z = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots . P_nx_n + P_o \qquad (1-2-2)$$

ويطلب إيجاد قيمة كل من المتحولات $(x_1, \ x_2, \ \ldots\ldots x_n)$ بحيث نجعل التابع Z يأخذ أكبر (أو أصغر) قيمة لـه ضـمن شـروط خطيـة محـددة، ونرمـز لتلـك القـيم بـ $(x_1' \ x_2' \ldots . x_n')$ ونسميها بالحل المثالي للمسألة المفروضة.

2- وجـود جملـة مـن الشـروط الخطيـة الجماعيـة المفروضـة علـى المتحـولات $(x_1, \ x_2,., \ \ldots x_n)$، وتكون معطية على شكل معادلات أو متراجحات خطية من الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots . + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots . + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots . + a_{3n}x_n = b_3 \qquad (2-2-2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2x2} + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots . + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

3- وجود شروط فردية مفروضة على كل من المتحولات بمفرده كالشروط الآتية:

$x_j \geq 0$ من أجل	j : 1,2,3	
$x_j \leq 0$ من أجل	j: 4,5	
$x_j \leq B_j$ من أجل	j: 6,7,8	(3-2-2)
$\alpha_j \leq x_j$ من أجل	j: 9,10	
$\alpha_j \leq x_j \leq B_j$ من أجل	j:11,12	

ويمكن أن يكون x_j غير مقيد من أجل j:13…..n.

(2-II)- النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية:

إن النموذج النظامي لمسائل البرمجة الخطية هو شكل خاص أو محول من النموذج العام، وتكون فيه الشروط الخطية معطية على شكل معادلات خطية وذات متحولات موجبة، ويستخدم هذا النموذج في عمليات البحث عن الحل المثالي وذلك لسهولة التعامل مع معادلاته من حيث عمليات التعويض والحسابات الأخرى.

ويأخذ النموذج النظامي الشكل الآتي:

يطلب إيجاد قيمة لكل من المتحولات $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$ التي تجعل تابع الهدف Z يأخذ أكبر قيمة ممكنة حيث أن:

$$Z = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots . P_nx_n + P_o \rightarrow Max \qquad (5\text{-}2\text{-}2)$$

وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (6\text{-}2\text{-}2)$$

وضمن شروط عدم السالبية:

$$b_i \geq 0 \qquad (i: 1,2,3,\ldots.m) \qquad (7\text{-}2\text{-}2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j: 1,2,3\ldots.n) \qquad (8\text{-}2\text{-}2)$$

كما يشترط عادة (على الرغم من أن ذلك غير ضروري) أن يكون عدد المعادلات m أصغر من عدد المتحولات n. أي يجب أن يكون:

$$m < n \qquad (9\text{-}2\text{-}2)$$

ويمكن كتابة هذا النموذج على الشكل المصفوفي الآتي:

$$Z = PX + P_0 \rightarrow Max \qquad (10\text{-}2\text{-}2)$$

وذلك ضمن الشروط الخطية:

$$A_{(m,n)}\, X_{(n,1)} = B_{(m,1)} \qquad (11\text{-}2\text{-}2)$$

والشروط الفردية:

$$B \geq 0$$
$$X \geq 0 \qquad (12\text{-}2\text{-}2)$$
$$m < n$$

حيث إن:

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \ldots\ldots a_{1m} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{21} \ldots\ldots a_{2m} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots\ldots a_{mm} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad x_{(n,1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B_{(m,1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \quad , \quad P_{(1,n)} = [P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots]$$

كيفية الانتقال منن النموذج العام إلى النموذج النظامي:

يمكن الانتقال من النموذج العام ذي الشروط المختلطة إلى النموذج النظامي ذي الشروط الموحدة المعطية على شكل معادلات وذلك باتباع ما يلزم من التعليمات الآتية:

1- إذا كان تابع الهدف من النوع L الذي يراد إيجاد أصغر قيمة له، فإننا نقوم بتحويله إلى تابع Z يراد إيجاد أكبر قيمة له وذلك بإجراء التحويل الآتي:

$$Z = -L = -c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 \ldots\ldots - c_nx_n - c_o \rightarrow Max$$

وذلك ضمن نفس الشروط المفروضة على النموذج.

2- نقوم بتحويل جميع المتراجحات الواردة في الشروط الخطية (3-2-2) إلى معادلات خطية وذلك بإدخال متحولات إضافية عليها (إدخال متحول واحد على كل منها) كما يلي:

أ- نضيف متحولاً غير سالب y_i إلى الطرف الأيسر لكل متراجحة من النوع:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \ldots\ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

فنحصل على المعادلة الآتية:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots\ldots a_{kn}x_n + y_i = b_k \qquad (14\text{-}2\text{-}2)$$

ب- نطرح متحولاً غير سالب y_k من الطرف الأيسر لكل متراجحة من النوع:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

فنحصل على المعادلة الآتية:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{in}x_n - y_k = b_i$$

وتسمى المتحولات y_i أو y_k بالمتحولات الإضافية.

ج- نقوم بتحويل جميع الأعداد bi في المعادلات القديمة والجديدة إلى أعداد غير سالبة وذلك بضرب طرفي المعادلة بـ(1-) عند اللزوم.

د- ندخل المتحولات الإضافية y_i وy_k في عبارة تابع الهدف مضروبة بأمثال معدومة كما يلي:

$$Z = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots P_nx_n + o.\,y_1 + o.y_2 + \ldots - o.y_m \qquad (15\text{-}2\text{-}2)$$

هـ- نقوم بتحويل جميع المتحولات x_j السالبة إلى متحولات غير سالبة وذلك بإجراء التحويل الآتي:

$$x_j = -x_j' \qquad : x_j' \geq 0 \qquad (16\text{-}2\text{-}2)$$

ثم تعويض ذلك في جميع المعادلات بما فيها تابع الهدف.

و- نقوم بعزل جميع المتحولات غير المقيدة x_k من جميع معادلات النموذج الخطي، وذلك بحساب كل من x_k من أحد المعادلات القديمة أو الجديدة فنحصل على أن:

$$x_k = \frac{1}{a_{ik}}(b_i - \sum_{i \neq k}^{n} a_{ij} x_j) \qquad (17\text{-}2\text{-}2)$$

وتحذف هذه المعادلة من معادلات النموذج المفروضة، ثم نقوم بتعويض هذه المتحولات في جميع المعادلات الأخرى وكذلك في تابع الهدف، فنحصل على نموذج لا يتضمن المتحولات غير المقيدة x_k، وهذا ما يخفض عدد المتحولات في النموذج ويخفض عدد معادلات الشروط ويسهل عملية الحل.

إلا أن عزل المتحولات x_k لا يعني إهمالها، وتتم العودة إليها وحساب قيمة كل منها المقابلة للحل المثالي بتعويض إحداثيات الحل المثالي في المعادلات (17-2-2) ثم حساب قيمة كل من x_k وإضافتها إلى إحداثيات الحل المثالي.

كما يمكن التخلص من المتحولات غير المقيدة بواسطة إجراء التحويل الآتي:

$$x_k = x'_k - y \qquad (18\text{-}2\text{-}2)$$

حيث إن $x'_k \geq 0$ وإن $y \geq 0$ وهو متحول واحد لكل المتحولات x_k، ثم نقوم بتعويض المتحولات x_k في جميع المعادلات بما فيها تابع الهدف.

إن هذا التحويل يخلصنا من المتحولات غير المقيدة x_k، ولكن يزيد من عدد المتحولات متحولاً واحداً فقط هو المتحول y.

كما يمكن أن نقوم بتحويل جميع المتحولات غير المقيدة x_k إلى تفاضل متحولين غير سالبين وذلك بإجراء التحويل الآتي:

$$x_k = x'_k - x''_k \qquad (20\text{-}2\text{-}2)$$

حيث إن $x'_k \geq 0$ وإن $x''_k \geq 0$.

ثم نقوم بتعويض ذلك في جميع المعادلات بما فيها تابع الهدف، ولكن مما يؤخذ على التحويل (2-2-20) أنه يزيد من عدد المتحولات في النموذج المفروض.

ز- نقوم بتحويل الشروط التي من الشكل $x_j \leq b_j$ إلى متحولات مناسبة بإجراء التحويل الآتي:

$$x_j = b_j - x'_j \qquad (21\text{-}2\text{-}2)$$

حيث إن $x'_j \geq 0$ وهو المتحول الجديد.

ثم نقوم بتعويض ذلك في جميع المعادلات وتابع الهدف.

ح- نقوم بتحويل جميع الشروط التي من الشكل $\alpha_j \leq x_j$ إلى متحولات مناسبة بإجراء التحويل الآتي:

$$x_j = x'_j + \alpha_j \qquad (22\text{-}2\text{-}2)$$

حيث إن $x'_j \geq 0$ وهو المتحول الجديد.

ط- يمكننا أن نقوم بتحويل جميع الشروط التي من الشكل $\alpha_j \leq x_j \leq b_j$ إلى متراجحتين منفصلتين من الشكل:

$$\alpha_j \leq x_j \quad , \quad x_j \leq b_j \qquad (23\text{-}2\text{-}2)$$

ويمكن إدخال هاتين المتراجحتين إلى الشروط الخطية وتحويلها إلى معادلتين من الشكل:

$$\begin{aligned} x_j + y_{m+1} &= b_j \\ x_j - y_{m+2} &= \alpha_j \end{aligned} \qquad (24\text{-}2\text{-}2)$$

(3-II)- الشكل القاعدي للنموذج النظامي:

لقد لاحظنا سابقاً أن لجملة المعادلات (2-2-6) عندما $m < n$ عدداً لا نهائياً من الحلول المقبولة، وأنه من بين هذه الحلول المقبولة يوجد عدد محدود من الحلول القاعدية يساوي C_n^m حلاً قاعدياً، ومن بين هذه الحلول القاعدية يوجد عدد لا يتجاوز C_n^m من الحلول القاعدية غير السالبة (انظر الفصل الأول الفقرتين III و IV).

وبما أن التابع Z يأخذ أكبر قيمة له في نقطة تمثل حلاً قاعدياً غير سالب، لذلك فإنه علينا أن نبحث عن الحل القاعدي غير السالب $(x'_1x'_2..x'_m,0,0,0)$ الذي يجعل التابع Z في العبارة (2-2-5) يأخذ أكبر قيمة ممكنة له، لذلك علينا قبل كل شيء أن نحول النموذج النظامي إلى شكل قاعدي معين، وذلك بإنشاء قاعدة غير سالبة في جملة المعادلات (2-2-6) اعتماداً على ما ورد في طريقة السمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة (انظر الفقرة V في الفصل الأول).

ولنفترض أنه نتيجة لقيامنا بعدة خطوات لعمليات حذف المتحولات وفق طريقة (السمبلكس) حولنا المعادلات (2-2-6) في النموذج النظامي إلى الشكل القاعدي الآتي:

$$\begin{aligned}
&x_1 + a'_{1m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots a'_{1n}x_n = b'_1\\
&x_2 + a'_{2m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots a'_{2n}x_n = b'_2\\
&x_3 + a'_{3m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots a'_{3n}x_n = b'_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_m + a'_{mm+1}x_{m+1} + \ldots\ldots a'_{mn}x_n = b'_m
\end{aligned} \qquad (25\text{-}2\text{-}2)$$

حيث إن $x_1.x_2 \ldots\ldots x_m$ هي متحولات قاعدية وإن $x_{m+1}. \ldots x_n$ هي متحولات غير قاعدية.

وبتعويض المتحولات القاعدية من (2-2-5) في معادلة تابع الهدف (2-2-5) نجد أنه يأخذ الشكل الآتي:

$$Z = c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} \ldots\ldots c'_n x_n + c'_0 \qquad (26\text{-}2\text{-}2)$$

وهكذا نكون قد حصلنا على ما يسمى بالشكل القاعدي للنموذج النظامي وبوضع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر نحصل على أن:

$$x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2, \ldots\ldots x_m = b'_m,\ x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0 \ldots\ldots x_n = 0$$

وعندها يأخذ التابع Z في (2-2-26) القيمة:

$$Z = c'_0$$

يسمى الحل $(b'_1,\ b'_2, \ldots\ldots b'_m, 0, 0)$ بالحل القاعدي غير السالب الذي يجعل تابع الهدف يأخذ القيمة c'_0 أي: $Z = c'_0$.

وللحصول على الحل القاعدي غير السالب الذي يجعل قيمة Z أكبر ما يمكن، علينا أن نبحث عليه بين مجموعة من الحلول القاعدية غير السالبة الأخرى، ونسمي الحل القاعدي غير السالب الذي يعطينا أكبر قيمة لـZ بالحل المثالي.

ويمكن الحصول على الحل المثالي بعدة طرائق نذكر منها الطرائق الآتية:

1- الطريقة البيانية ولا نستطيع إتباعها إلا إذا كان عدد المتحولات $n = 1$ أو $n = 2$ أو كان عددها n يساوي $m+1$ أو $m+2$ أو حتى $m+3$، حيث يمكننا تحويل النموذج إلى تابع لمتحول واحد أو متحولين أو ثلاثة متحولات على الترتيب، ورسم منطقة الحلول المقبولة في الفضاء R أو R^2 أو R^3 على الترتيب.
2- طريقة السمبلكس المباشرة وتعتمد على تحويل الشكل العام إلى شكل نظامي ثم تحويل الشكل النظامي إلى شكل قاعدي وفق شروط طريقة السمبلكس التي تحافظ على عدم سالبية الثوابت b_i (انظر الفقرة V في الفصل الأول).
3- طريقة (السمبلكس) المعدلة.
4- طريقة القاعدة الاصطناعية، وتعتمد على إضافة قاعدة اصطناعية إلى المعادلات (2-2-6) بدلاً من البحث عن قاعدة حقيقية حسب ما تقتضيه طريقة (السمبلكس).
5- الطريقة المزدوجة للنموذج الأصلي ومرافقه.
6- بعض الطرائق الخاصة ببعض المسائل.

وسنتعرض لهذه الطرائق في الفصول اللاحقة، أما في هذا الفصل فإننا سنعالج الطريقة البيانية فقط.

III- الطريقة البيانية لإيجاد الحل المثالي للنماذج الخطية:

سنقوم بشرح واستعراض هذه الطريقة من خلال مثال عددي فيه $n = m+2$ وذلك حتى نعطي أساساً مبسطاً وحسياً للأفكار الرياضية التي وردت سابقاً.

مثال (1):

أوجد قيمة لكل من المتحولات $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ التي تجعل التابع:

$$Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 + 2x_7 - 15$$

يأخذ أكبر قيمة له، وذلك ضمن الشروط الخطية الآتية (وهي شروط مستقلة):

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\
2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\
x_1 + x_2 - x_5 &= -4 \\
x_2 + x_6 &= 5 \\
2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 &= 7
\end{aligned}$$

وشروط عدم السالبية الآتية:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0$$

الحل:

نلاحظ أن عدد المعادلات $m = 5$ وأن عدد المتحولات $n = 7$، إذن يمكننا أن نحسب من هذه المعادلات خمسة متحولات بدلالة الاثنين الآخرين ولنقم بحساب المتحولات x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 بدلالة x_1, x_2 فنجد أن:

$x_3 = -x_1 + x_2 + 4$ (من المعادلة الأولى)

$x_5 = x_1 + x_2 + 4$ (من المعادلة الثالثة)

$x_6 = -x_2 + 5$ (من المعادلة الرابعة)

نعوض ذلك في المعادلتين الثانية والخامسة فنحصل على أن:

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 - 1$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6$$

ثم نعوض كل ذلك في تابع الهدف فنحصل على أن:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 5 \rightarrow Max$$

وبما أن جميع المتحولات x_i مشروطة بعدم السالبية يمكننا كتابة المثال السابق كما يلي:

يطلب إيجاد قيمة لكل من المتحولين (x_1, x_2) بحيث نحصل على أكبر قيمة للتابع:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 5 \rightarrow Max$$

وذلك ضمن الشروط الآتية (متراجحات خطية):

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4 \geq 0$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4 \geq 0$$

$$x_6 = -x_2 + 5 \geq 0$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

وهنا نشير إلى أن المتحولات القاعدية هي x_3 وx_4 وx_5 وx_6 وx_7 أما المتحولان x_1 وx_2 فهما المتحولان الحران (غير القاعديين).

ولإيجاد الحل المثالي بطريقة بيانية نقوم بإيجاد منطقة الحلول المشتركة لجملة المتراجحات السابقة وذلك برسم المستقيمات الفاصلة والمحددة لها الآتية:

$-x_1 + x_2 + 4 = 0$ (المستقيم $x_3 = 0$)

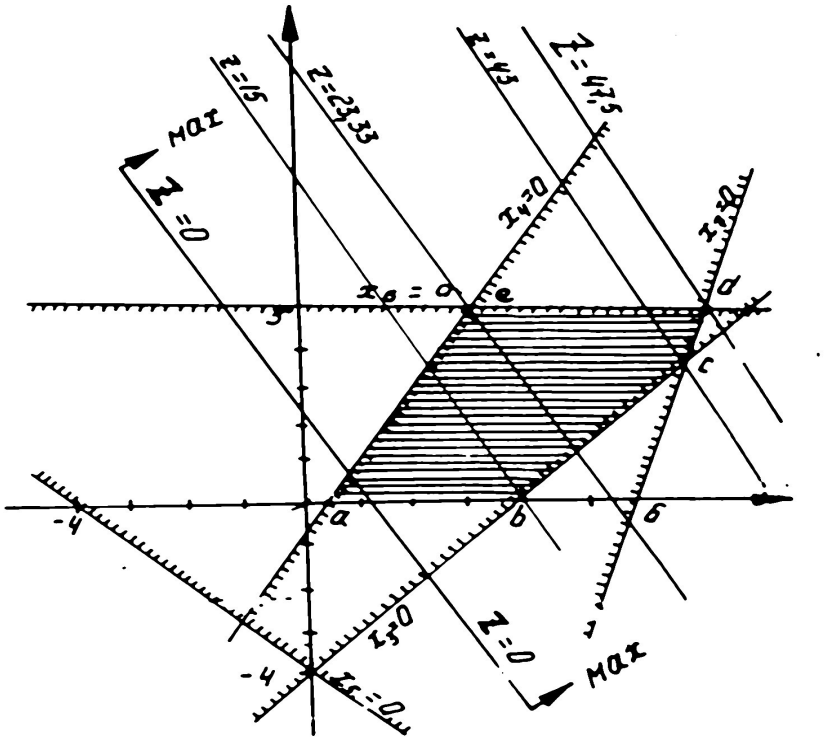
$3x_1 - 2x_2 - 1 = 0$ (المستقيم $x_4 = 0$)

$x_1 + x_2 + 4 = 0$ (المستقيم $x_5 = 0$)

$-x_2 + 5 = 0$ (المستقيم $x_6 = 0$)

$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6 = 0$ (المستقيم $x_7 = 0$)

ثم نقوم بتحديد جهة تحقق كل من المتراجحات السابقة بواسطة نقطة اختيارية فنجد أن النقطة (0,0) تحقق جميع المتراجحات ما عدا المتراجحة الثانية، أي أن الجهة التي فيها المبدأ (0,0) هي الجهة الموجبة بالنسبة لكل من المستقيمات $x_3 = 0$ و$x_5 = 0$ و$x_6 = 0$ و $x_7 = 0$ ، أما بالنسبة للمتراجحة الثانية (المستقيم $x_4 = 0$) فنجد أن الجهة التي لا تحوي المبدأ (0,0) هي الجهة التي تجعلها موجبة، ولقد أشرنا بخطوط شعرية على الجهة الموجبة بالنسبة لكل مستقيم، وبالتالي حصلنا على منطقة الحلول المشتركة المخططة بخطوط مستقيمة وهي المنطقة (abcde) المبينة على الشكل رقم (2-1) الآتي:



الشكل (2-1): الحل البياني للمسألة المفروضة في R^2

وهكذا نجد أنه بعد تحديد منطقة الحلول المقبولة علينا أن ننتقل إلى البحث عن الحل المثالي الذي يجعل التابع Z أكبر ما يمكن، وهنا نلاحظ أن معادلة تابع الهدف Z هي معادلة مستوى في الفراغ الثلاثي R^3، وأن هذا المستوى يقطع المستوى x_1ox_2 وفق مستقيم يكون فيه $Z = 0$، لذلك نرسم المستقيم $Z = 0$ على x_1ox_2 فنحصل على المستقيم:

$5x_1 + 2x_2 - 5 = 0$

ثم نحدد جهة تزايد التابع Z وذلك برسم الشعاع $\vec{\theta}(5,2)$ المؤلف من أمثال (x_1,x_2) في معادلة التابع Z على الترتيب، ولقد أشرنا إلى جهة تزايد قيمة Z بسهمين على طرفي المستقيم $(Z = 0)$.

وهكذا نجد أنه إذا قمنا بعملية سحب متواز للمستقيم $(Z = 0)$ في اتجاه تزايد Z، فإننا نجد أن آخر نقطة يمكن أن يمر بها Z في منطقة الحلول المشتركة هي النقطة d، وهي النقطة التي يأخذ فيها Z اكبر قيمة له ضمن الشروط المفروضة.

وإذا أردنا أن نحسب قيمة Z المقابلة للنقطة d علينا أن نحسب إحداثيات d من تقاطع المستقيمين $(x_6 = 0)$ و$(x_4 = 0)$ فنجد من معادلة الأول أن $x_2 = 5$، وبالتعويض في معادلة الثاني نجد أن $x_1 = 8.5$ ، إذن إحداثيي d هما (8.5, 5) d، وإن التابع Z يبلغ في هذه النقطة أكبر قيمة له وتساوي:

$Z = 5.(8,5) + 2.5 - 5 = 47,5$

ويمكن متابعة تطور تزايد قيمة التابع Z من خلال عملية سحبه ومروره في مختلف النقاط الرأسية حيث نجد أولاً أنه يمر بالنقطة الرأسية (4,0) b ويأخذ عندها القيمة $Z = 15$ ثم يمر بالنقطة الرأسية (11/3, 5) e ويأخذ عندها القيمة $Z = 23.33$ ثم يمر بالنقطة الرأسية c (8,4) ويأخذ عندها القيمة $Z = 43$، ثم يمر بالنقطة (8.5, 5) d الذي يأخذ عندها القيمة Z $47.5 =$، وهي أكبر قيمة يمكن أن يأخذها التابع Z ضمن منطقة التعريف abcde.

وبذلك نكون قد حصلنا على مركبتين من مركبات الحل المثالي وهما $x_1 = 8.5$ و x_2 $5 =$، ولإيجاد بقية مركبات الحل المثالي نعوض قيمة كل من x_1 وx_2 في المعادلات السابقة فنحصل على أن:

$x_3=0.5, \quad x_4=14.5, \quad x_5=17.5, \quad x_6=0, \quad x_7=0$

وبذلك نحصل على الحل المثالي للمسألة المفروضة وهو النقطة الرأسية التالية:

$x'(8.5 \ , \ 5 \ , \ 0.5 \ , \ 14.5 \ , \ 17.5 \ , \ 0 \ , \ 0)$

وإن أكبر قيمة للتابع Z عند هذا الحل المثالي تساوي:

$Z = 47.5$

ملاحظات حول الحل البياني:

1- لقد تأكدنا من أن الحل المثالي ينطبق على نقطة رأسية في الفضاء R^n، وفي مثالنا السابق انطبق على النقطة d' من R^7 حيث أن d' (8.5, 5, 0.5, 14.5, 17.5, 0, 0) وهي النقطة الموافقة للنقطة d (8.5, 5) من الفضاء R^2.

2- إن عدداً من مركبات الحل المثالي (باعتباره أحد الحلول القاعدية) يكون معدوماً، وذلك لأن الحل المثالي ينطبق على نقطة رأسية، ولأن النقطة الرأسية هي نتيجة تقاطع عدد من المستقيمات أو المستويات، وإن عدد المركبات المعدومة يساوي (n-m) مركبة على الأقل.

3- قد يتضمن النموذج بعض الشروط التي لا تلعب دوراً في عملية الحل مثل الشرط الثالث في المثال السابق، حيث نلاحظ أن المستقيم ($x_5 = 0$) لا يدخل في تحديد منطقة الحلول المشتركة لأن الشروط الأخرى حلت محله.

4- عند البحث عن الحل المثالي للنموذج الخطي غالباً ما نحصل على حل مثالي وحيد كما في حالة مثالنا السابق، ولكن يمكن أن نحصل على عدد لا نهائي من الحلول المثالية، ويحدث ذلك عندما يكون أحد أضلاع منطقة الحلول المشتركة والمار بنقطة الحل المثالي، موازياً للمستقيم ($Z = 0$) وعندها تكون جميع نقاط ذلك الضلع (والتي عددها لا نهائي) هي حلول مثالية.

5- كما يمكن أن نصادف حالة لا نستطيع فيها التوقف عند حل مثالي محدد، ويحدث ذلك عندما تكون منطقة الحلول مفتوحة من جهة اتجاه تزايد التابع Z، وعندها نقول إن الحل المثالي غير محدود، وذلك لوجود عدد كبير من الحلول المقبولة أو المحيطية التي تعطينا قيماً لـZ أكبر فأكبر.

6- وأخيراً يمكن أن نتوصل إلى حالة تدل على عدم وجود أي حل مقبول وتحدث هذه الحالة عندما تكون الشروط متناقضة بعضها مع بعض، والأمثلة التالية توضح هذه الحالات المختلفة.

مثال (2):

أوجد الحل المثالي للتابع

$$Z = 4x_1 + 10x_2 \rightarrow Max$$

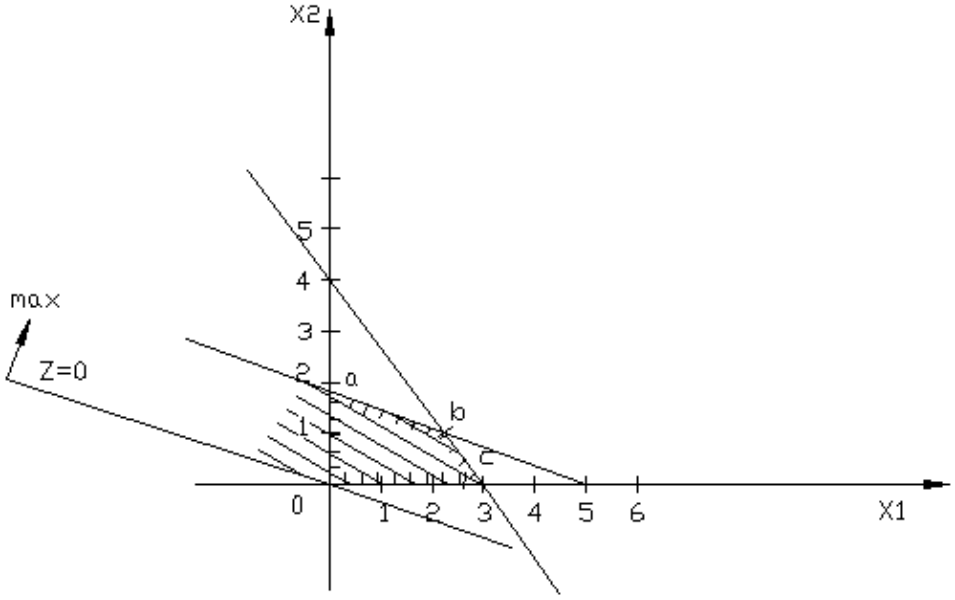
وذلك ضمن الشروط الآتية:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

وبرسم الشكل البياني لمعطيات هذا المثال نحصل على الشكل رقم (2-2) التالي، وهو الذي يعطينا أن منطقة الحلول المشتركة هي المنطقة (oabc)، وهنا نلاحظ أن المستقيم $Z = 0$ يوازي القطعة المستقيمة (الضلع) ab لذلك تكون النقطة a (0 , 2) والنقطة b (15/7, 8/7) وجميع نقاط الضلع ab هي حلول مثالية وتعطى التابع Z نفس القيمة والتي تساوي $Z = 20$.



الشكل رقم (2-2): حالة عدد لا نهائي من الحلول المثالية

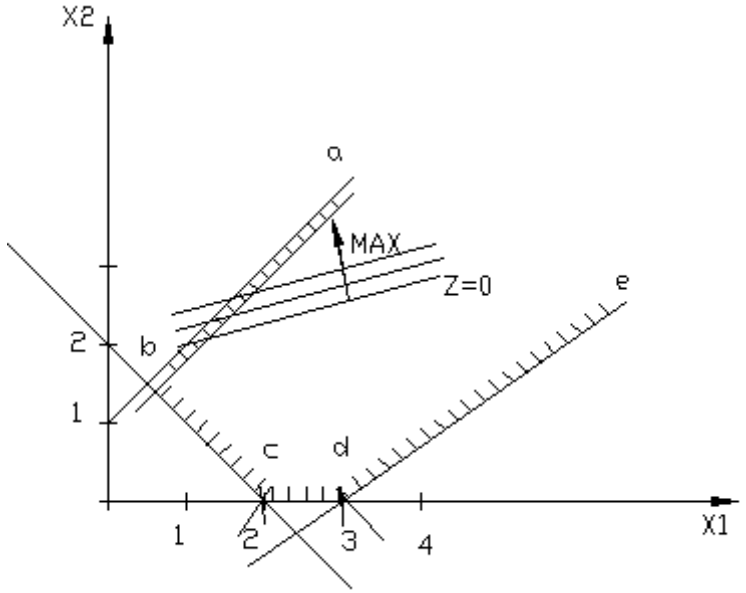
مثال (3):

$Z = -2x_1 + 6x_2 \rightarrow Max$

وذلك ضمن الشروط الآتية:

$2x_1 - 3x_2 \leq 6$
$-x_1 - x_2 \leq -2$
$-x_1 + x_2 \leq 1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

وبرسم الشكل البياني لمعطيات هذا المثال نحصل على الشكل البياني رقم (3-2) الذي يعطينا أن منطقة الحلول المشتركة للمتراجحات السابقة مفتوحة من جهة تزايد التابع Z وهي المنطقة (abcde)، وهنا نلاحظ أن التابع Z يتزايد كلما سرنا على الضلع ba إلى الأعلى، وبما أننا لا نستطيع التوقف عند نقطة معينة عليه فهذا يعني أن الحل المثالي غير محدود.



الشكل رقم (2-3): حالة الحل المثالي غير المحدود (عدم وجود حل مثالي محدد)

مثال (4):

أوجد الحل المثالي للتابع:

$$Z = x_1 + 50\, x_2 \rightarrow Max$$

وذلك ضمن الشروط التالية:

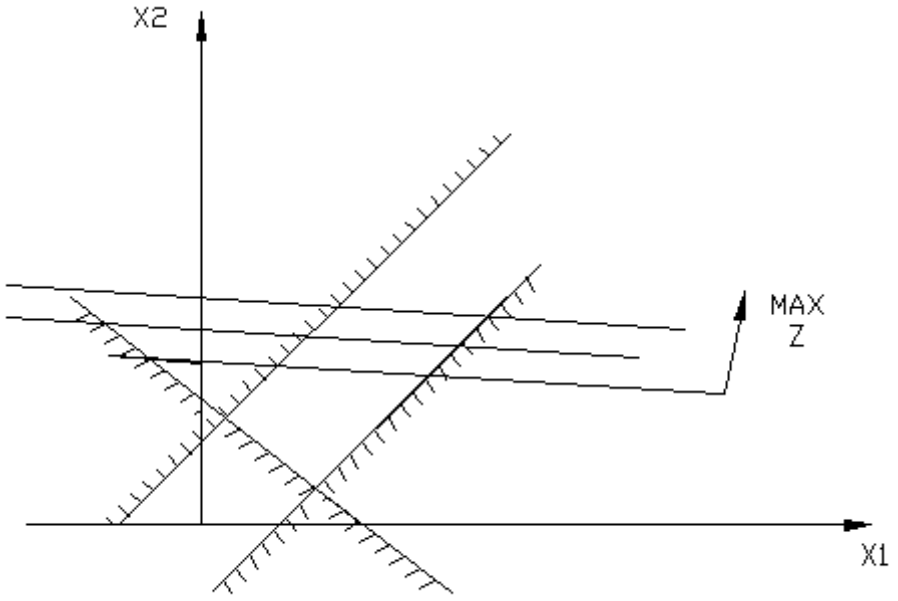
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + x_2 \leq -1$$

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

وبرسم الشكل البياني لمعطيات هذا المثال نحصل على الشكل رقم (3-4) الذي يبين لنا أنه لا يوجد منطقة حلول مشتركة لجملة الشروط السابقة، وبالتالي لا يوجد حل مقبول أو مثالي لهذه المسألة لتعارض الشروط المفروضة.



الشكل رقم (2-4): حالة عدم وجود أي حل مقبول

تمرينات

أوجد الحل المثالي لكل من المسائل التالية بالطريقة البيانية:

1- $L = x_1 + 2x_2 \rightarrow Min$

ضمن الشروط:

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2- $L = x_1 - x_2 \rightarrow Min$

حيث إن:

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 1$

$2x_1 + 3x_2 \leq 2$

$3x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

3- $Z = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$

حيث إن:

$2x_1 + 5x_2 = 5$

$3x_1 + x_2 = 4$

$xj \geq 0$ (j: 1,2,3,4)

4- ضمن الشروط الخطية الآتية:

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$6x_1 + 4x_2 \geq 24$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

أوجد الحل المثالي لكل من التوابع الآتية (كل على حده):

$Z = x_1 + x_2 \rightarrow Max$

$L = x_1 + x_2 \rightarrow Min$

$Z = -x_1 + 2x_2 \rightarrow Max$

$Z = x_1 - 2x_2 \rightarrow Max$

$Z = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow Max$

ثم أوجد الحلول الأخرى عندما لا يكون ذلك الحل وحيداً.

5- أوجد الحل المثالي للنموذج الآتي:

$Z = x_1 - x_2 \rightarrow Max$

ضمن الشروط:

$5x_1 + 3x_2 = 40$

$x_1 + x_2 = 10$

$6x_1 + 4x_2 = 50$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

الفصل الثالث
طريقة (السمبلكس) وتعديلاتها

لقد أشرنا سابقاً إلى أن الحل المثالي للتابع الخطي Z, المعرف على جملة من المتراجحات أو المعادلات الخطية, يقابل حلاً قاعدياً غير سالب (إذا كانت $x_j \geq 0$) لجملة المعادلات المكافئة لتلك المتراجحات. وبناء على ذلك سنقوم بالبحث عن الحل المثالي بين الحلول القاعدية غير السالبة لجملة المعادلات الخطية المكافئة.

ولذلك علينا قبل كل شيء أن نشكل قاعدة لتلك الجملة وذلك بوساطة عمليات حذف متتالية لأحد المتحولات من أحد المعادلات ثم تعويضه في المعادلات الأخرى, حتى نحصل على القاعدة المطلوبة.

ثم نجري تبديلات منفردة بين بعض المتحولات القاعدية وبعض المتحولات الحرة (غير القاعدية), حتى نحصل على الحل القاعدي غير السالب ومنه نحصل على الحل المثالي المطلوب, وذلك بوضع جميع المتحولات الحرة مساوية للصفر واستخلاص قيم المتحولات القاعدية من المعادلات التي تتضمنها.

وحتى يكون ذلك الحذف والتبديل هادفاً وعاملاً مساعداً على تكبير أو تعظيم قيمة التابع الخطي Z بأسرع ما يمكن, نقوم بدراسة أمثال المتحولات الحرة الداخلة في عبارة التابع Z, ونختار المتحول ذا أكبر الأمثال الموجبة (وليكن x_s) لحذفه من Z وإدخاله إلى متحولات القاعدة التي نقوم بتشكيلها (أو بتغييرها). أن هذه الطريقة في الاختيار تجعل المتحول x_s متحولاً قاعدياً, وتتيح له أن يأخذ قيمة عددية معينة لأنه سيساهم أكثر من غيره في زيادة قيمة Z, بدلاً من أن يأخذ قيمة الصفر لو بقي حراً.

ولتحديد المعادلة التي سنحسب منها المتحول x_s لتعويضه ثم حذفه من المعادلات الأخرى, نعتمد على مبدأ طريقة (السمبلكس) الذي يشترط المحافظة على عدم سالبية الثوابت العددية في الطرف الأيمن للمعادلات (أنظر الفقرة IV في الفصل الأول).

ولمتابعة العمل من أجل الحصول على الحل لمثالي المطلوب نقوم بتطبيق خطوات متتالية ومتكررة تسمى بمجملها بخوارزمية طريقة (السمبلكس) المباشرة التالية.

I- خوارزمية طريقة (السمبلكس) المباشرة:

Algorithm Simplex Method

وتتألف هذه الخوارزمية من ثلاث مراحل متميزة هي:

1- مرحلة تحويل النموذج المفروض إلى شكل نظامي مكافئ له.

2- مرحلة تحويل الشكل النظامي إلى شكل قاعدي للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة.

3- مرحلة البحث عن الحل المثالي المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة.

وسنستعرض هذه المراحل الثلاث وفق خطوات متتالية ومتكررة كما يلي:

1- نقوم بتحويل النموذج الرياضي للمسألة المفروضة من شكله العام إلى شكل نظامي مكافئ له وذلك بتنفيذ ما يلزم من الإجراءات الآتية:

أ- نضيف إلى (أو نطرح من) كل متراجحة متحولاً إضافياً غير سالب $y_i \geq 0$, وذلك حتى نحولها إلى معادلة خطية, وندخل هذه المتحولات y_i بأمثال مساوية للصفر إلى عبارة تابع الهدف Z.

ب- نجعل جميع الثوابت العددية b_i والموجودة في الطرف الأيمن أعداداً غير سالبة وذلك بضرب طرفي المعادلة بـ(1-) إذا لزم الأمر.

ج- نحول جميع الشروط الفردية بحيث نجعل جميع المتحولات الداخلة في معادلات النموذج, غير سالبة ($x_j \geq 0$).

د- نعزل المتحولات غير المقيدة ونحذفها من النموذج ككل, وذلك بحسابها من بعض المعادلات وتعويضها في المعادلات الأخرى وفي تابع الهدف, ونحتفظ بالمعادلات التي استخدمناها في عملية العزل جانباً للعودة إليها بعد حصولنا على الحل المثالي, من أجل حساب قيمة المتحولات غير المقيدة التي عزلناها.

هـ- إذا كان تابع الهدف من النوع L الذي يطلب منا جعله أصغر ما يمكن نقوم بتحويله إلى الشكل Z الذي يطلب جعله أكبر ما يمكن وذلك بإجراء التحويل الآتي:

$$Z = -L = -c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 \ldots\ldots - c_nx_n - c_o \rightarrow \text{Max} \quad (1\text{-}1\text{-}3)$$

ونتيجة لهذه الخطوات نحصل على شكل نظامي كالتالي:

يطلب إيجاد القيم غير السالبة للمتحولات:

$$(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n, y_1, y_2 \ldots\ldots\ldots y_m)$$

التي تعطينا أكبر قيمة للتابع الخطي:

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots\ldots + p_nx_n + 0.y_1 + 0.y_2 + .. + 0.y_m + p_o \rightarrow \text{Max} \quad (2\text{-}1\text{-}3)$$

وتحقق الشروط الخطية (المعادلات) التالية:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n + y_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n + y_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots a_{3n}x_n + y_3 &= b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n + y_m &= b_4 \end{aligned} \quad (3\text{-}1\text{-}3)$$

حيث إن جميع الثوابت $b_i \geq 0$ والمتحولات$x_j \geq 0$ و $y_j \geq 0$.

وللسهولة نضع معاملات الشكل النظامي السابق في جدول كالجدول المبين الصفحة الآتية وذلك بعد كتابة تابع الهدف كما يلي:

$$P_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n + 0\ y_1 + \ldots 0\ y_m = z - p_o \quad (4\text{-}1\text{-}3)$$

وقد وضعناه في السطر الأخير لضرورات تنظيمه، علماً بأن بعض المؤلفين يضعونه في السطر الأول كما هو وارد في النموذج.

ملف رقم 2

2- نقوم بتحويل النموذج النظامي السابق إلى شكل قاعدي مناسب أي نقوم بإيجاد قاعدة أولى لذلك النموذج مؤلفة من m متحولاً, وذلك بتنفيذ ما يلزم من الإجراءات الحسابية والتبديلية الواردة في هذه الخطوة أو في الخطوات التي تليها:

أ- إذا كانت جميع المتحولات الإضافية y_i ذات أمثال مساوية لـ(1+) وكانت منتشرة في جميع المعادلات (في كل معادلة متحول واحد y_i فقط), فإن هذه الوضعية تصلح لأن تكون قاعدة أولى مؤلفة من المتحولات $(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_m)$ وبذلك نكون قد حصلنا على قاعدة أولى مؤلفة من المتحولات الإضافية $(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_m)$.

وعندها نعتبر المتحولات $(x_1, x_2, x_3,\ldots x_n)$ متحولات غير قاعدية وننتقل فوراً إلى الخطوة (7).

ب- إذا لم نستطع تشكيل قاعدة أولى من جميع المتحولات $(y_1\ y_2\ldots y_m)$ (لكون بعض إشاراتها سالبة)، فإننا ننظر في إمكانية إتمامها وذلك باعتبار بعض المتحولات الأخرى متحولات داخلة في القاعدة التي نبحث عنها (إذا كانت ذات أمثال مساوية لـ(1+)).

ج- إذا لم نحصل على قاعدة كاملة ثم نحاول أن نتمم تشكيل القاعدة من بين المتحولات $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ غير القاعدية، عن طريق حساب أحد تلك المتحولات من إحدى المعادلات وتعويضه في المعادلات الأخرى وفي معادلة تابع الهدف وذلك من أجل حذفه من تلك المعادلات واعتباره متحولاً قاعدياً وفق الخطوة (3).

3- نقوم بتحديد المتحول المناسب لحذفه من المعادلات وإدخاله في القاعدة عن طريق دراسة أمثال المتحولات الداخلة في عبارة تابع الهدف Z, ثم نختار المتحول ذا أكبر الأمثال الموجبة p_j في السطر الأخير،[1] وليكن p_s المقابل للمتحول x_s (حيث إن $p_s = \max p_j$).

[1] إذا كان تابع الهدف من النوع Min فإننا نحدد عمود الارتكاز بواسطة اختيار أكثر العناصر سالبية من بين عناصر السطر الأخير p_j.

وإذا كانت القاعدة غير كاملة وكانت جميع أمثال x_s غير موجبة، فإننا قبل كل شيء نقوم بإتمام تشكيل القاعدة بواسطة اختيار المتحول x_s المقابل لأكبر عدد p_j أيضاً, وعندها نستعد لحذف المتحول x_s وإدخاله في القاعدة لأن ذلك لا يعرضه للانعدام وبذلك يساهم أكثر من غيره في زيادة قيمة التابع Z, ويسمى عمود x_s بعمود الارتكاز.

4- نقوم بتحديد المعادلة المناسبة التي سنحسب منها المتحول x_s وذلك اعتماداً على مبدأ طريقة (السمبلكس) لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لمعادلات خطية (أنظر الفقرة IV في الفصل الأول)، الذي يحافظ على عدم سالبية الثوابت العددية في الطرف الأيمن.

لذلك نقوم بتقسيم جميع العناصر الثابتة والموجبة b_j على العناصر المقابلة لها (الموجبة منها فقط) من أمثال المتحول x_s في مختلف المعادلات[1] (عناصر عمود المتحول x_s), ثم نختار أصغر النسب الناتجة ومنها نحدد عنصر الارتكاز (وهو مقام النسبة الصغرى) وبالتالي نحدد معادلة (سطر) الارتكاز المناسبة لحساب x_s منها لحذفه من المعادلات الأخرى.

أي نقوم بحساب المؤشر θ , حيث إن:

$$\theta = \underset{a_{is}>0}{\text{Min}} \left[\frac{b_i}{a_{is}} > 0 \right] = \frac{b_t}{a_{ts}} > 0 \qquad : \qquad a_{is} > 0 \qquad (5-1-3)$$

وهي تعطينا أن عنصر الارتكاز هو a_{ts} وأن المعادلة المناسبة هي المعادلة t.[2]

---

[1] إذا لم يتضمن عمود الارتكاز (عمود x_s) أي عنصر موجب فإن ذلك يعني أنه لا يمكننا حساب قيمة النسبة θ, وهذا يعني أنه لا يمكننا التخلص من المتحول x_s. ولأن هذه الحالة تحدث عندما تكون منطقة الحلول المشتركة مفتوحة باتجاه تزايد التابع z. وعندها نقول أن الحل المثالي غير محدود, أو غير موجود لعدم إمكانية تحديده رغم وجود عدد كبير من الحلول المقبولة التي تؤدي إلى تكبير دائم في قيمة z. والشكل رقم (3-3) يوضح ذلك.

[2] إذا صدف عند حساب المؤشر θ حصلنا على عدة نسب متساوية مثل:

$$\theta = \text{Min}\left(\frac{b_i}{a_{is}}\right) = \frac{b_t}{a_{ts}} = \frac{b_k}{a_{ks}} = ... \qquad b_{is} > 0, b_i > 0$$

فإنه لتحديد عنصر الارتكاز يمكننا اختيار أحد العناصر المتساوية a_{ts} أو a_{ks}.... ليكون عنصراً للارتكاز. ولكن لأسباب برمجية يفضل اختيار أكبرها.

5- نجري الحسابات اللازمة لحذف المتحول x_s من جميع المعادلات (ما عدا المعادلة t) ليكون متحولاً قاعدياً في المعادلة t, وذلك وفق التعليمات التي أوردناها في الفصل الأول عند استعراضنا لطريقة (جاردان- غوص) والتي نلخصها بالخطوات الآتية:

أ- نقسم جميع عناصر المعادلة t على عنصر الارتكاز a_{ts} فيأخذ سطر الارتكاز الشكل الآتي:

$$\frac{a_{t1}}{a_{ts}} , \frac{a_{t2}}{a_{ts}} , ... \frac{a_{ts-1}}{a_{ts}} , 1 , \frac{a_{ts+1}}{a_{ts}} ... 0 , 0 , \frac{b_t}{a_{ts}} \qquad (6-1-3)$$

ب- نجعل جميع عناصر العمود s (عناصر عمود الارتكاز أو عمود المتحول x_s) مساوية الصفر (ما عدا العنصر الذي في المعادلة t الذي أصبح مساوياً للواحد).

ج- نحسب جميع العناصر الجديدة الأخرى وفق قاعدة المستطيل أو وفق العلاقات الآتية:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{tj} \frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{a_{ij}a_{ts} - a_{tj}a_{is}}{a_{ts}} \qquad (7-1-3)$$

$$b'_i = b_i - b_t \cdot \frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{b_i a_{ts} - b_t a_{is}}{a_{ts}} \qquad (8-1-3)$$

$$p'_j = p_j - p_s \frac{a_{tj}}{a_{ts}} = \frac{p_j a_{ts} - p_s a_{ts}}{a_{ts}} \qquad (9-1-3)$$

وبذلك نحصل على جدول جديد كالآتي:

ملف رقم 3

6- لمتابعة العمل ولإدخال متحول جديد إلى القاعدة التي نحاول تشكيلها (أو تغييرها) نعود إلى الخطوة (3) ونطبق كل ما جاء فيها وفي الخطوات (4) و (5) والتي تليها حتى نحصل على جدول جديد. ونكرر هذه العملية حتى نحول الشكل النظامي إلى شكل قاعدي محدد (أو نحصل على قاعدة جديدة). وبذلك سنحصل على جدول كالجدول المبين في الصفحة الآتية.

نلاحظ أن هذا الجدول يشير إلى أن المتحولات القاعدية أصبحت ($x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$) وأن المتحولات الحرة – أصبحت ($x_{m+1}, \ldots x_n\ y_1, y_2, \ldots y_m$).

وبوضع المتحولات الحرة مساوية للصفر فإننا نحصل على الحل القاعدي غير السالب الآتي:

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_m, 0,0,0 \ldots 0)$

وهو الذي يعطينا أن قيمة $z = q_o$, حيث أن q_o هو العدد الموجود في المربع الأيمن السفلي.

7- نقوم بدراسة جميع أمثال المتحولات في عبارة التابع Z من جديد (ما عدا q_o) وهنا نكون أمام إحدى الحالتين الآتيتين:

أ- إذا كانت جميع الأمثال q_j المقابلة للمتحولات الحرة غير موجبة فإن ذلك يعني أننا توصلنا إلى الحل المثالي. ونحصل عليه بوضع جميع المتحولات الحرة مساوية للصفر فنحصل على الحل القاعدي غير السالب الذي يمثل الحل المثالي المطلوب وهو في هذه الحالة يساوي:

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \ldots \beta_m, 0, 0, 0, \ldots \ldots 0)$

ملف رقم 4

ويعطينا أكبر قمة للتابع الخطي Z تساوي $Z = q_o$, وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المثالي المطلوب, وينتهي العمل.[1]

ب- أما إذا كانت بعض الأمثال المقابلة للمتحولات الحرة في السطر الأخير q_j موجبة (واحد منها على الأقل). فإن ذلك يعني أننا لم نتوصل على الحل المثالي المطلوب, وعلينا في هذه الحالة أن نحذف المتحولات الحرة المقابلة لكل q_j الموجبة لذلك نعود إلى الخطوة (3) وما يليها.

ونكرر هذه العملية حتى نتخلص من جميع الأمثال q_j الموجبة ونحصل على الحل المثالي المطلوب, أو نتوصل إلى إحدى النتائج المحددة الآتية:

- لا يوجد حل مثالي بسبب كون منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تزايد التابع z. ونستدل على ذلك من عدم وجود عنصر موجب في عمود الارتكاز.
- يوجد عدد لانهائي من الحلول المثالية وذلك بسبب كون مستوى التابع z موازياً لأحد أضلاع أو أسطح منطقة الحلول المشتركة, ونستدل على ذلك من ظهور صفرٍ في السطر الأخير مقابلٍ لأحد المتحولات الحرة, في جدول الحل المثالي الأخير.

---

[1] إذا كان أحد الأعداد q_j معدوماً مثل $q_k = 0$ حيث إن q_k ، يقابل المتحول غير القاعدي x_k, فإن ذلك يعني أنه يوجد عدد لانهائي من الحلول المثالية. (لأنه عندها يكون خط تابع الهدف z موازياً لأحد أضلاع منطقة الحلول المقبولة المار بالحل المثالي) ويمكننا الحصول على حل مثالي قاعدي آخر بتبديل المتحول المقابل x_k بأحد متحولات القاعدة الأخيرة, وذلك وفق القواعد الواردة في الخطوة (3) وما يليها, حيث سنعتبر أن عمود x_k هو عمود الارتكاز.
ونتيجة لذلك سنحصل على حل مثالي قاعدي آخر يعطينا نفس القيمة الكبرى لz وهي $z = q_o$.
كما يمكننا الحصول على بقية الحلول المثالية بواسطة أي تركيب خطي للحلين السابقين وفق علاقة من الشكل:

$$x = \lambda \cdot P + (1-\lambda) \cdot Q$$

حيث أن $0 \le \lambda \le 1$, وأن λ تأخذ قيماً متتالية, وأن P هي نقطة الحل المثالي الأول و Q هي نقطة الحل المثالي الثاني وان x هو أي حل مثالي آخر بينهما وهو يعطينا نفس القيمة الكبرى لـ z.

- عدم وجود أي حل مقبول (وبالتالي عدم وجود أي حل مثالي) وذلك بسبب تعارض الشروط لبعضها بعضاً, ونستدل على ذلك من عدم وجود أي عنصر موجب (عداد الثابت β_i) في أحد الأسطر, لأن ذلك يعطينا أن الطرف الأيسر يأخذ قيمة سالبة بينما يكون الطرف الأيمن $\beta_i \geq o$, وهذا لا يمكن أن يحدث إلا إذا كانت الشروط متعارضة.

8- نقوم بالتحقق من أن الحل المثالي الذي حصلنا عليه يحقق الشروط المفروضة ويعطينا نفس القيمة Z الكبرى, وذلك بتعويض مركباته في جميع الشروط وفي تابع الهدف نفسه.

مثال عددي:

سنقوم بحل المثال الذي قمنا بحله بياناً في الفصل الثالث وذلك باستخدام خوارزمية (السمبلكس) السابقة.

يطلب إيجاد قيمة لكل من (x_1, x_2) اللتين تعطيانا اكبر قيمة للتابع:

$$z = 5x_1 + 2x_2 - 5 \rightarrow \text{Max}$$

وذلك ضمن الشروط الآتية:

$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq +1$$
$$x_1 + x_2 \geq -4$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

الحل:

نحول هذا النموذج إلى الشكل النظامي وذلك بإضافة (أو طرح) متحول إضافي إلى كل من المتراجحات السابقة وضرب طرفي المعادلة الثانية والثالثة بـ (1-) فنحصل على النموذج المكافئ الآتي:

المعادلة	المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	....	x_n	y_1	y_2	y_3	....	y_m	الثوابت B
1	y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}	١	٠	٠	....	٠	b_1
2	y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}	٠	١	٠	....	٠	b_2
3	y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3n}	0	0	1	....	٠	b_3
....	y_4	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
m	y_5	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}	٠	٠	٠	....	١	b_m
تابع الهدف		p_1	p_2	p_3	....	p_n	0	٠	0	....	0	$Z-p_o$

ملاحظة: لقد وضعنا السطر الأخير المخصص لتابع الهاتف على شكل يناسب الأسطر الأخرى وذلك لتسهيل العمل والحفاظ على شكل المعادلات.

المتحولات	x_1	x_2	….	x_{s-1}	x_s	x_{s+1}	….	x_n	y_1	$y_2..$	y_t	$..y_m$	الثوابت
y_1	a'_{11}	a'_{12}	….	a'_{1s-1}	0	a'_{1s+1}	….	a'_{1n}	1	0..	a'_{1n+t}	..0	b'_1
y_2	a'_{21}	a'_{22}	….	a'_{2s-1}	0	a'_{2s+1}	….	a'_{2n}	0	1..	a'_{2n+t}	..0	b'_2
….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….
x_s	$\frac{a_{t1}}{a_{ts}}$	$\frac{a_{t2}}{a_{ts}}$	….	$\frac{a_{ts-1}}{a_{ts}}$	1	$\frac{a_{ts+1}}{a_{ts}}$	….	$\frac{a_{tn}}{a_{ts}}$	0	0..	$\frac{a_{tn+t}}{a_{ts}}$	..0	$\frac{b_t}{a_{ts}}$
….	….	….	….	…..	….	….	….	….	….	….	…..	….	….
….	….	…..	…..	…..	…..	….	….	….	….	….	….	….	….
y_m	a'_{m1}	a'_{m2}	….	a'_{ms-1}	0	a'_{ms+1}	….	a'_{mn}	0	0..	a'_{mn+t}	..1	b'_m
	p'_1	p'_2	….	p'_{s-1}	0	p'_{s+1}	….	p'_n	0	0..	p'_{n+t}	..0	$z-p'_o$

المتحولات	x_1	x_2	….	x_{s-1}	x_s	x_{s+1}	….	x_n	y_1	$y_2..$	y_t	$..y_m$	الثوابت
y_1	a'_{11}	a'_{12}	….	a'_{1s-1}	0	a'_{1s+1}	….	a'_{1n}	1	0..	a'_{1n+t}	..0	b'_1
y_2	a'_{21}	a'_{22}	….	a'_{2s-1}	0	a'_{2s+1}	….	a'_{2n}	0	1..	a'_{2n+t}	..0	b'_2
….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….
x_s	$\frac{a_{t1}}{a_{ts}}$	$\frac{a_{t2}}{a_{ts}}$	….	$\frac{a_{ts-1}}{a_{ts}}$	1	$\frac{a_{ts+1}}{a_{ts}}$	….	$\frac{a_{tn}}{a_{ts}}$	0	0..	$\frac{a_{tn+t}}{a_{ts}}$	..0	$\frac{b_t}{a_{ts}}$
….	….	….	….	…..	….	….	….	….	….	….	…..	….	….
….	….	…..	…..	…..	…..	….	….	….	….	….	….	….	….
y_m	a'_{m1}	a'_{m2}	….	a'_{ms-1}	0	a'_{ms+1}	….	a'_{mn}	0	0..	a'_{mn+t}	..1	b'_m
	p'_1	p'_2	….	p'_{s-1}	0	p'_{s+1}	….	p'_n	0	0..	p'_{n+t}	..0	$z-p'_o$

يطلب إيجاد أكبر قيمة للتابع:

$$z = 5x_1 + 2x_2 + 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot y_3 + 0\cdot y_4 + 0\cdot y_5 - 5 \to \text{Max}$$

وذلك ضمن الشروط الآتية:

$$x_1 - x_2 + y_1 = 4$$
$$3x_1 - 2x_2 - y_2 = 1$$
$$-x_1 - x_2 + y_3 = 4$$
$$x_2 + y_4 = 5$$
$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + y_5 = 6$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \quad y_4 \geq 0, \quad y_5 \geq 0$$

وهنا نلاحظ أن المتراجحات انقلبت إلى معادلات، وأن الثوابت العددية أصبحت كلها موجبة، وأن المتحولات y_i, دخلت في عبارة z مضروبة بأمثال صفرية, وأن عدد المتحولات أصبح 7, بينما عدد المعادلات 5, نضع هذه المعاملات في جدول نظامي كالآتي:

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
1	1	−1	1	0	0	0	0	4
2	3	−2	0	−1	0	0	0	1
3	−1	−1	0	0	1	0	0	4
4	0	1	0	0	0	1	0	5
5	1	−1/2	0	0	0	0	1	6
تابع الهدف	5	2	0	0	0	0	0	Z+5

ومن دراسة هذا الجدول نلاحظ أنه لا توجد هناك أية قاعدة جاهزة وذلك لأن أمثال y_2 تساوي (1−). ولهذا فإنه علينا أن نبحث عن قاعدة أولى لهذه المسألة ثم نبحث عن الحل المثالي المطلوب.

ومن دراسة أمثال المتحولات في سطر التابع Z نلاحظ وجود عنصرين موجبين هما (5) و (2) المقابلين لـ x_1 و x_2 على الترتيب.

لذلك نختار أكبرهما وهو العدد (5) المقابل لـ x_1, وبذلك يكون العمود الأول (عمود x_1) وهو عمود الارتكاز.

ولتحديد المعادلة التي يجب أن نحسب منها x_1 لتعويضه في المعادلات الأخرى نحسب قيمة المؤشر θ ونقوم بتقسيم عناصر العمود B_t على العناصر الموجبة لعمود الارتكاز ونختار أصغرها فنجد أن:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{4}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{6}{1}\right] = \frac{1}{3}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو العدد (3) الواقع في المعادلة (السطر) الثانية، وحسب القواعد السابقة لذلك نقوم بحساب x_1 من هذه المعادلة وتعويض قيمته في المعادلات الأخرى حسب القواعد السابقة, ونتيجة للحسابات المترتبة على ذلك نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / متحولات القاعدة في المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
y_1	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{11}{3}$
x_1	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
x_3	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{13}{3}$
y_4	0	1	0	0	0	1	0	5
y_5	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{17}{3}$
تابع الهدف	0	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	0	$Z+\frac{10}{3}$

إن الجدول السابق يبين لنا أنه قد حصلنا على قاعدة أولى مؤلفة من المتحولات ($y_1, x_1, y_3\ y_4\ y_5$) وتعطينا الحل القاعدي غير السالب الآتية:

$$(\frac{1}{3},\quad 0,\ \frac{11}{3},\quad 0,\ \frac{13}{3},\quad 5,\ \frac{17}{3}) \Rightarrow$$

وهو يعطينا قيمة لـ Z تساوي:

$$0 = z + \frac{10}{3} \Rightarrow \quad z = \ -\frac{10}{3}$$

ومن دراسة عناصر السطر الأخير نلاحظ أنه ما زال يتضمن عددين موجبين هما (16/3) و (5/3) وهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل المثالي بعد.

لذلك نختار العدد الأكبر (16/3) ونعتبر عموده المقابل لـ x_2 عموداً للارتكاز ثم نحسب قيمة المؤشر θ فنجد أن:

$$\theta = \ \text{Min} = \left[\frac{5}{1},\ \frac{17/3}{1/6}\right] = \ \frac{5}{1}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو العنصر (1) في السطر الرابع, لذلك نقوم بحساب x_2 من المعادلة الرابعة وتعويضه في المعادلات الأخرى,ونتيجة للحسابات نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / متحولات القاعدة في المعادلات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
y_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{16}{3}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{11}{3}$
y_3	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{38}{3}$
x_2	0	1	0	0	0	1	0	5
y_5	0	0	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	0	1	$\frac{29}{6}$
تابع الهدف	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{16}{3}$	0	$Z-\frac{70}{3}$

ومن خلال دراستنا لعناصر السطر الأخير نلاحظ أنه ما زال يتضمن عنصراً وحيداً موجباً آخر هو (5/3) وهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل المثالي المطلوب.

لذلك نعتبر عمود y_2 المقابل لـ $\frac{5}{3}$ عموداً للارتكاز ونحسب منه قيمة المؤشر θ:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{29/6}{1/3}, \frac{16/3}{1/3}\right] = \frac{29/6}{1/3}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو العنصر (1/3) الواقع في السطر الخامس, لذلك نقوم بحساب y_2 من المعادلة الخامسة وتعويضه في المعادلات الأخرى.

ونتيجة للحسابات المترتبة على ذلك نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	X_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
y_1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{51}{6}$
y_3	0	0	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{105}{6}$
x_2	0	1	0	0	0	0	0	5
y_2	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{29}{2}$
	0	0	0	0	0	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{5}{3}$	$Z-\frac{285}{6}$

وهكذا نلاحظ أن جميع عناصر السطر الأخير قد أصبحت غير موجبة، وهذا يعني أننا قد توصلنا إلى الحل المثالي المطلوب, ونحصل عليه بوضع المتحولين الحرين (غير القاعديين) $y_5 = y_4 = 0$ فنحصل على أن:

$$x_1 = \frac{51}{6} = 8.5, \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 5, \quad y_2 = \frac{29}{2} = 14.5$$

$$y_3 = \frac{105}{6} = 17.5$$

ويأخذ الحل المثالي الشكل الآتي:

$$(8.5, \quad 5, \quad \frac{1}{2}, \quad 14.5, \quad 17.5, \quad 0, \quad 0)$$

وهو يقابل النقطة (8.5,5) بالنسبة للمتحولين (x_1, x_2) ويعطينا أن اكبر قيمة لـ Z تساوي:

$$0 = Z - \frac{285}{6} \quad \Rightarrow \quad Z = 47.5$$

وبمقارنة هذه النتيجة مع نتيجة الحل البياني نلاحظ تطابق النتيجتين, وأن خطوات الحل التي مررنا بها تعني أننا كنا في البداية في النقطة (0 , 0) 0 ثم انتقلنا إلى النقطة a(1/3 , 0) ثم انتقلنا إلى النقطة e(11/3 , 5) ثم انتقلنا إلى نقطة الحل المثالي d(8.5, 5), قارن ذلك على الشكل رقم (2-1) في الفصل الثاني.

II- خوارزمية (السمبلكس) المعدلة:

تمهيد:

نعتقد أن القارئ قد لاحظ من خلال استعراضنا لخوارزمية (السمبلكس) المباشرة وتطبيقها على مثال عددي, أن أعمدة المتحولات القاعدية (باستثناء أحدها) تتكرر من جدول إلى آخر بدون أي تغير في عناصرها, لذلك رأى الكثير من المختصين أنه من الأفضل أن نقوم باختصار جداول الحسابات (اليدوية والآلية), بحيث نجعلها تقتصر على المتحولات غير القاعدية فقط مع وضع المتحولات القاعدية على يسار الجدول لتذكرنا دائماً بوجود القاعدة وبالمتحولات التي تتضمنها.

ولإجراء ذلك الاختصار نقوم بكتابة المعادلات الخطية للنموذج النظامي بعد أن نكون قد حولناها إلى شكلها القاعدي على الشكل الآتي:

$$
\begin{aligned}
&y_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ...\alpha_{1s}x_s + ...\alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\
&y_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ...\alpha_{2s}x_s + ...\alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_t + \alpha_{t1}x_1 + \alpha_{t2}x_2 + ... + \alpha_{ts}x_s + ...\alpha_{tn}x_n = \beta_t \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_m + \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{ms}x_s + ...\alpha_{mn}x_n = \beta_n
\end{aligned}
\qquad (1-2-3)
$$

أما تابع الهدف فنكتبه على الشكل الآتي:

$$q_1x_1 + q_2x_2 + ...q_sx_s + ...q_sx_s + ...+ q_nx_n = z - q_o \rightarrow Max$$

وبذلك يمكننا نقل معاملات هذه المعادلات ووضعها في جدول مختصر كالآتي:

متحولات حرة / متحولات القاعدة	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n	β_i
y_1	α_{11}	α_{12}	...	α_{1s}	...	α_{1n}	β_1
y_2	α_{21}	α_{22}	...	α_{2s}	...	α_{2n}	β_2
....	....	....	...	....	...	....	....
y_t	α_{t1}	α_{t2}	...	α_{ts}	...	α_{tn}	β_t
.....	.....	.....	...	....	...	....	....
y_m	α_{m1}	α_{m2}	...	α_{ms}	...	α_{mn}	β_m
تابع الهدف	q_1	q_2	...	q_s	...	q_n	$Z-q_o$

وطبقاً لما أوردناه في الخوارزمية المباشرة فإنه لجعل التابع الخطي Z يأخذ قيمة أكبر فأكبر نجري تبديلاً بين أحد المتحولات غير القاعدية ومتحولاً قاعدياً, لذلك نقوم بتحديد عنصر الارتكاز عن طريق البحث عن المتحول غير القاعدي ذي أكبر الأمثال الموجبة في السطر الأخير وليكن q_s ونعتبر عموده عموداً للارتكاز, (العمود المقابل للمتحول x_s) وعليه نقرر نقل x_s من المتحولات غير القاعدية إلى المتحولات القاعدية, ولتحديد المتحول البديل الذي يحل محله نتبع نفس التعليمات الخوارزمية المباشرة ونحسب قيمة المؤشر θ حيث نفترض أن:

$$\theta = \min_i \left[\frac{\beta_i}{\alpha_{is}}\right] = \frac{\beta_t}{\alpha_{ts}} \qquad \begin{matrix}\beta_i > 0 \\ \alpha_{is} > 0\end{matrix} \qquad (2-2-3)$$

وهذا يعني أن α_{ts} هو عنصر الارتكاز وهو يقابل المتحول القاعدي y_t, أي يجب علينا أن نقوم بتبديل x_s بالمتحول y_t ليصبح الأول قاعدياً، والثاني غير قاعدي, لذلك نقوم بتبديل موضعيهما في الجدول الجديد ثم إجراء الحسابات المترتبة على ذلك والتي نلخصها بما يلي:

لتبديل x_s بـ y_t علينا أن نقوم بحساب x_s من المعادلة t ثم تعويضه في المعادلات المكافئة للمعادلات الأولى, ولتوضيح ذلك نأخذ المعادلة t التي تساوي:

$$y_t + \alpha_{t1}x_1 + \alpha_{t2}x_2 + ...\alpha_{ts}x_s ... + \alpha_{tn}x_n = \beta_t$$

ومنها نجد أنه إذا أردنا تبديل x_s بـ y_t فإنه علينا أن نكتبها أولاً على الشكل الآتي:

$$x_s + \frac{\alpha_{t1}}{\alpha_{ts}}x_1 + \frac{\alpha_{t2}}{\alpha_{ts}}x_2 + ... + \frac{1}{\alpha_{ts}}y_t + ...\frac{\alpha_{tn}}{\alpha_{ts}}x_n = \frac{\beta_t}{\alpha_{ts}}$$

ومنها نحصل على أن:

$$x_s = \frac{\beta_t}{\alpha_{ts}} - \frac{\alpha_{t1}}{\alpha_{ts}}x_1 - \frac{\alpha_{t2}}{\alpha_{ts}}x_2 + ... - \frac{1}{\alpha_{ts}}y_t ... - \frac{\alpha_{tn}}{\alpha_{ts}}x_n \qquad (3-2-3)$$

وبتعويض x_s في المعادلات الأخرى نجد أن المعادلة الأولى من (3-2-1) تأخذ الشكل التالي:

$$y_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ...\alpha_{ts}\left[\frac{\beta_t}{\alpha_{ts}} - \frac{\alpha_{t1}}{\alpha_{ts}}x_1 - \frac{\alpha_{t2}}{\alpha_{ts}}x_2 - .... - \frac{1}{\alpha_{ts}}y_t - \frac{\alpha_{tn}}{\alpha_{ts}}x_n\right]$$
$$+ .... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1$$

وبإصلاحها نحصل على أن:

$$y_1 + (\alpha_{11} - \alpha_{1s}\frac{\alpha_{t1}}{\alpha_{ts}})x_1 + (\alpha_{12} - \alpha_{1s}\frac{\alpha_{t2}}{\alpha_{ts}})x_2 + ... - \frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}y_t$$
$$+ ..\left(\alpha_{1n} - \alpha_{1s}\frac{\alpha_{tn}}{\alpha_{ts}}\right)x_n = \left(\beta_1 - \alpha_{1s}\frac{\beta_t}{\alpha_{ts}}\right) \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

وكذلك نجد أن كل من المعادلات الأخرى في الجملة السابقة (3-2-1) تأخذ شكلاً مشابهاً لما أخذته المعادلة الأولى في (3-2-4), وإذا رمزنا للمعاملات الجديدة للمتحولات في الجملة الجديدة بالرموز التالية: α'_{ij} و β'_i و $q'j$ نجد أن:

$$\alpha'_{ij} = \alpha'_{ij} - \alpha_{is}\frac{\alpha_{ti}}{\alpha_{ts}} = \frac{\alpha_{ts}\alpha_{ij} - \alpha_{is}\alpha_{tj}}{\alpha_{ts}} \qquad (5-2-3)$$

$$\beta'_{i} = \beta_{i} - \alpha_{is}\frac{\beta_{t}}{\alpha_{ts}} = \frac{\alpha_{ts}\beta_{i} - \alpha_{is}\beta_{t}}{\alpha_{ts}} \qquad (6-2-3)$$

وبالنسبة لمعاملات تابع الهدف الجديدة فنرمز لها بـ q'_j وتحسب أيضاً من علاقة مشابهة هي:

$$q'_{j} = q_{j} - \alpha_{tj}\frac{q_{s}}{\alpha_{ts}} = \frac{\alpha_{ts}q_{j} - \alpha_{tj}q_{s}}{\alpha_{ts}} \qquad (7-2-3)$$

حيث إن (i: 1,2,3,…m) وإن (j=1,2,3…n) وإن $i \neq t$ و $j \neq s$ وهي نفس العلاقات المستخدمة في الخوارزمية المباشرة, ولكنها لا تشمل عنصر الارتكاز نفسه ولا عناصر سطر الارتكاز ولا عناصر عموده, لأنها تحسب بطريقة أخرى وإذا وضعنا المعاملات الجديدة في جدول كالسابق نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	…	y_t	…	x_n	i'
y_1	α'_{11}	α'_{12}	…	$\frac{-\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}$	…	α'_{1n}	β'_1
y_2	α'_{11}	α'_{12}	…	$\frac{-\alpha_{2s}}{\alpha_{ts}}$	…	α'_{2n}	β'_2
….	….	….	….	….	….	….	....
x_s	$\frac{\alpha_{t1}}{\alpha_{ts}}$	$\frac{\alpha_{t2}}{\alpha_{ts}}$	…	$\frac{1}{\alpha_{ts}}$	…	$\frac{\alpha_{tn}}{\alpha_{ts}}$	$\frac{\beta_t}{\alpha_{ts}}$
….	…	…	…	…	…	…	…
y_m	α'_{m1}	α'_{m2}	…	$\frac{-\alpha_{ms}}{\alpha_{ts}}$	…	α'_{mn}	β'_m
تابع الهدف	q'_1	q'_2	…	$\frac{-q_s}{\alpha_{ts}}$	…	q'_n	$z-q'_o$

وهنا نلاحظ أن العناصر الجديدة المقابلة لسطر وعمود الارتكاز تحسب كما يلي:

1- نضع العنصر المقابل لعنصر الارتكاز α_{ts} في الجدول الجديد مساوياً لمقلوبه $\frac{1}{\alpha_{ts}}$.

2- نحسب عناصر السطر المقابل لسطر الارتكاز (ما عدا عنصر الارتكاز) بتقسيم عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز α_{ts}.

3- نحسب عناصر العمود المقابل لعمود الارتكاز (ما عدا عنصر الارتكاز) بتقسيم عناصر عمود الارتكاز على عنصر الارتكاز α_{ts} ثم ضربها بـ (1-).

أما بقية العناصر فتحسب وفقاً للعلاقات (3-2-5) و(3-2-6) و(3-2-7), ولمتابعة تكبير قيمة التابع الخطي Z والبحث عن الحل المثالي المطلوب نكرر هذه العمليات التبديلية حتى نجعل جميع العناصر q_j في السطر الأخير غير موجبة, حيث يدل ذلك على أنه توصلنا إلى الحل المثالي المطلوب, والذي نحصل عليه بوضع جميع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر فتصبح المتحولات القاعدية مساوية للثوابت العددية في الطرف الأيمن.

خطوات الخوارزمية المعدلة:

اعتماداً على التفاصيل التي أوردناها في خوارزمية (السمبلكس) المباشرة يمكننا أن نلخص خطوات الخوارزمية المعدلة بما يلي:

1- نحول النموذج المفروض إلى نموذج نظامي.

2- نحول النموذج النظامي إلى شكل قاعدي معين وذلك باتباع نفس الأسلوب المتبع في الخوارزمية المباشرة وباستخدام نفس الجداول.

3- بعد أن نحصل على الشكل القاعدي نضع المعاملات في جدول مختصر يتضمن في عموده الأول المتحولات القاعدية وفي سطره الأعلى المتحولات غير القاعدية فقط, ثم نقوم بتحديد عمود وسطر عنصر الارتكاز وفقاً للخطوتين (3) و(4) في الخوارزمية المباشرة ونعد جدولاً جديداً ونقوم بتبديل موضعي المتحولين الداخل إلى القاعدة والخارج منها في الجدول الجديد.

4- نقوم بحساب العناصر الجديدة المقابلة لسطر وعمود الارتكاز كما يلي:

أ- نضع مقابل عنصر الارتكاز α_{ts} مقلوبه $\frac{1}{\alpha_{ts}}$.

ب- نحسب عناصر السطر المقابل لسطر الارتكاز (ما عدا عنصر الارتكاز) بتقسيم عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز α_{ts}.

ج- نحسب عناصر العمود المقابل لعمود الارتكاز (ما عدا عنصر الارتكاز) بتقسيم عناصر عمود الارتكاز على عنصر الارتكاز α_{ts} ثم ضربها بـ (-1).

5- نقوم بحساب العناصر الأخرى اعتماداً على العلاقات الثلاثة (3-2-5) و(3-2-6) و(3-2-7) السابقة.

6- نعود وندرس أمثال المتحولات غير القاعدية في السطر الأخير (سطر تابع الهدف Z).

فإذا لم نجد فيها عنصراً موجباً فإن ذلك يعني أننا توصلنا إلى الحل المثالي المطلوب, ونحصل عليه بوضع جميع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر فتأخذ المتحولات القاعدية القيم العددية في عمود الثوابت β_i.

وإذا وجدنا عنصراً (واحداً على الأقل) في السطر الأخير فإننا نعود إلى الخطوة (3) ونكرر العمل حتى نحصل على الحل المثالي المطلوب أو نستنتج نتيجة خاصة من النتائج التي أشرنا إليها في الهوامش عند شرح الخوارزمية المباشرة.

مثال (2):

أوجد الحل المثالي الذي يعطينا أكبر قيمة للتابع:

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط الآتية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \ , \ x_4 \geq 0$$

الحل:

نحول النموذج السابق إلى الشكل النظامي التالي (وذلك بإضافة متحولات موجبة y_i إلى الطرف الأيسر لكل من المتراجحات السابقة).

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط الآتية:

$$y_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$
$$y_2 + 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 120$$
$$y_3 + 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 100$$
$$x_j \geq 0 \quad ; \quad (j:1,2,3,4) \ , \qquad y_i \geq 0 \quad ; \quad (i:1,2,3)$$

ومن الواضح أن هذا الشكل النظامي هو شكل قاعدي ومتحولاته القاعدية هي (y_1,y_2,y_3) لذلك نقوم بتطبيق خوارزمية (السمبلكس) المعدلة فوراً ونضع المعاملات السابقة في جدول كالآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	β_i
y_1	1	1	1	1	15
y_2	7	5	3	2	120
y_3	3	5	10	15	100
تابع الهدف	4	5	9	11	Z-0

ومن دراسة عناصر السطر الأخير نلاحظ أن أكبرها (11) يقابل x_4 وبتقسيم عناصر b_i على أمثال x_4 نجد أن:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{15}{1}, \frac{120}{2}, \frac{100}{15}\right] = \frac{100}{15}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو (15), وعلينا أن نقوم بتبديل x_4 بـ y_3 وبإجراء الحسابات المترتبة على ذلك التبديل نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	y_3	β_i
y_1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{25}{3}$
y_2	$\frac{33}{5}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{320}{3}$
x_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{20}{3}$
تابع الهدف	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-11}{15}$	$Z-\frac{220}{3}$

ومن دراسة عناصر السطر الأخير نلاحظ أنه مازال بعضها موجباً وأن أكبرها هو $(\frac{9}{5})$ المقابل لـ x_1، لذلك نقوم بحساب المؤشر نجد أن:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{25/3}{4/5}, \frac{320/3}{33/5}, \frac{20/3}{1/5}\right] = \frac{25/3}{4/5}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو $(\frac{4}{5})$ وعلينا أن نقوم بتبديل x_1 بـ y_1, وبإجراء الحسابات المترتبة على ذلك التبديل نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	y_1	x_2	x_3	y_3	β_i
x_1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{125}{12}$
y_2	$\frac{-33}{4}$	$\frac{-7}{6}$	$\frac{-13}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{455}{12}$
x_4	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{55}{12}$
تابع الهدف	$\frac{-9}{4}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{-7}{12}$	$Z-\frac{1105}{12}$

ومن دراسة أمثال المتحولات في السطر الأخير نجد أنه يوجد عنصر وحيد موجب هو (11/12) المقابل لـ x_3، أي يجب نقل x_3 إلى القاعدة, وبحساب قيمة المؤشر θ نجد أن:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{125/12}{5/15}, \frac{55/12}{7/12}\right] = \frac{55/12}{7/12}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو $(\frac{7}{12})$ وعليه يجب أن نبدل x_3 بـ x_4, وبإجراء الحسابات المترتبة على ذلك نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	y_1	x_2	x_4	Y_3	β_i
x_1	$\frac{10}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-5}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{50}{7}$
y_2	$\frac{-6}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{325}{7}$
x_3	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{55}{7}$
تابع الهدف	$\frac{-13}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-11}{7}$	$\frac{-5}{7}$	$Z-\frac{695}{7}$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل المثالي المطلوب لأن جميع أمثال المتحولات في السطر الأخير أصبحت غير موجبة (سالبة), وبوضع المتحولات غير القاعدية y_1 و x_2 وx_4 وy_3 مساوية للصفر نحصل على الحل المثالي الآتية:

$$x_1 = \frac{50}{7},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{55}{7},\ x_4 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = \frac{325}{7},\ y_3 = 0$$

وهو يعطينا أن: $Z - \frac{695}{7} = 0$ ومنها نجد أن:

$$\text{Max}\ Z = \frac{695}{7} = 99.29$$

III- خوارزميـة (السـمبلكس) ذات القاعـدة الاصـطناعية (أو طريقة الغرامات الكبرى **M**):

لقد لاحظنا مما سبق أن معالجة النموذج الخطي تبدأ بتحويل النموذج العام إلى نموذج نظامي, ثم تحويل الأخير إلى شكل قاعدي معين يتضمن m متحولاً قاعدياً و-(n-m) متحولاً غير قاعدي.

وإن عملية البحث عن الحل المثالي لا تبدأ إلا بعد حصولنا على شكل قاعدي محدد، لذلك كان من المنطقي أن يفكر الباحثون باجتهاد شكل قاعدي مصطنع وذلك بوساطة تشكيل قاعدة اصطناعية مؤلفة من جملة من المتحولات الاصطناعية غير السالبة تضاف إلى كل من معادلات الشروط (إذا لم تتضمن متحولاً قاعدياً) في النموذج النظامي, وتتألف خطوات العمل بهذه الطريقة من الخطوات التالية:

1- نكتب مسألة البرمجة الخطية في شكلها النظامي الآتي:

يطلب إيجاد $(x_1,x_2,.....,x_n)$ التي تعطينا أكبر قيمة للتابع:

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ... + p_nx_n + p_o \rightarrow Max \qquad (1-3-3)$$

وذلك ضمن الشروط الخطية النظامية الآتية (معادلات خطية):

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &..... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (2-3-3)$$

والشروط الفردية:

$$x_j \geq 0;(j:1,2,.....,n) \quad , \quad b_i > 0;(i:1,2,.....,m) \qquad (3-3-3)$$

2- نشكل من هذا الشكل النظامي شكلاً قاعدياً اصطناعياً بأن نضيف إلى الطرف الأيسر لكل من المعادلات السابقة (إذا لم تتضمن متحولاً قاعدياً) متحولاً اصطناعياً غير سالب $\varepsilon_i \geq 0$, وذلك حتى نشكل قاعدة اصطناعية تتألف من المتحولات غير السالبة $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,.....,\varepsilon_m)$, فنحصل على الشكل القاعدي التالي:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2 = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m = b_m
\end{aligned}
\qquad (4-3-3)
$$

حيث أن:

$$x_j \geq 0, \quad \varepsilon_i \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

وبما أن المتحولات القاعدية الاصطناعية $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_m)$ أدخلت على شروط كانت في الأصل معادلات خطية, إذن نستنتج أن كل من هذه المتحولات يجب أن يأخذ قيمة تساوي الصفر , وذلك حتى تبقى الشروط الخطية الأصلية (3-3-2) محققة.

لذلك يجب أن ننقلها جميعاً (إلا من كان منها متحولاً إضافياً وأصيلاً) من القاعدة إلى المتحولات غير القاعدية حتى تأخذ قيماً صفرية, وحتى نستطيع إجراء ذلك الانتقال بواسطة خوارزمية (السمبلكس) المباشرة نقوم بإدخال هذه المتحولات الاصطناعية إلى تابع الهدف Z مضروبة بأمثال كبيرة بشكل كاف M ومسبوقة بإشارة ناقص وذلك حتى لا نعيد نقلها إلى المتحولات القاعدية ثانية.

ولهذا نكتب تابع الهدف الجديد على الشكل الآتي:

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - M\varepsilon_1 - M\varepsilon_2 - \ldots - M\varepsilon_m + p_o \rightarrow Max \qquad (5-3-3)$$

حيث إن M هو عدد موجب وكبير بشكل كاف وهو على الأقل أكبر من أي من $|p_j|$, وتتحول المسألة إلى إيجاد أكبر قيمة للتابع (3-3-5) وذلك ضمن الشروط الخطية والفردية (3-3-4) السابقة.

3- نضع معاملات النموذج الموسع في جدول كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	•••	x_n	ε_1	ε_2	ε_3	•••	ε_m	b_i
ε_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	⋯	a_{1n}	1	0	0	⋯	0	b_1
ε_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	⋯	a_{2n}	0	1	0	⋯	0	b_2
ε_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	⋯	a_{3n}	0	0	1	⋯	0	b_3
…..	…..	…..	…..	…	….	….	….	….	…	….	….
ε_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	⋯	a_{mn}	0	0	0	⋯	1	b_m
	p_1	p_2	p_3	⋯	p_n	-M	-M	-M	⋯	-M	$Z-p_o$

ولمتابعة العمل يجب علينا قبل كل شيء أن نقوم بالتخلص من المتحولات الاصطناعية واحداً تلو الآخر، وللتخلص من المتحول الاصطناعي ε_t يمكننا اختيار أي عنصر موجب[1] من سطره واعتبار ذلك العنصر عنصراً للارتكاز ثم إجراء تبديل المتحولين المقابلين له.

ولكن حتى نحافظ على بعض المكتسبات الموجودة في النموذج المفروض (القيم الموجبة لـ b_i وبعض القيم السالبة لـ p_j) نقوم بتحديد عنصر الارتكاز في هذه المرحلة كما يلي:

4- ندرس الثوابت bi المقابلة للمتحولات الاصطناعية ونختار أكبرها وليكن b_t المقابل للمتحول ε_t ونعتبر سطره سطر الارتكاز, ثم نقوم بتحديد عنصر الارتكاز فيه, بوساطة تقسيم عناصر سطر تابع الهدف (العناصر p_j) على عناصر سطر ε_t ثم إيجاد أصغر النسب الموجبة θ' حيث أن:[2]

$$\theta' = \underset{\substack{j \\ a_{tj} > 0}}{\text{Min}} \left[\frac{p_j}{a_{tj}} > 0 \right] = \frac{p_s}{a_{ts}} \qquad (6-3-3)$$

وعندها يكون العنصر a_{ts} هو عنصر الارتكاز المطلوب, وبناء عليه نقوم بإجراء تبديل المتحولين x_s و ε_t وفق تعليمات خوارزمية السمبلكس المباشرة.

---

[1] إذا لم يتضمن سطر ε_t عنصراً موجباً وكان $b_t>0$ فإن ذلك يدل على تعارض الشروط, وتكون المسألة غير قابلة للحل.

[2] إذا لم نستطع العثور على نسبة موجبة $p_j / a_{tj} > 0$ فإننا نقوم بحساب أكبر النسب السالبة θ'' حيث أن:

$$\theta'' = \text{Max}\left[\frac{p_j}{a_{tj}} < 0 \right] = \frac{p_s}{a_{ts}} \qquad (7-3-3)$$
$$a_{tj} > 0$$

وبذلك يكون a_{ts} هو عنصر الارتكاز وهو عنصر موجب قطعاً.

ونكرر هذه العملية حتى نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية ونحصل على قاعدة عادية مؤلفة من المتحولات الأساسية.

5- بعد التخلص من جميع المتحولات الاصطناعية ε_i نعود إلى العمل بوساطة خوارزمية السمبلكس المباشرة كالعادة (لأننا نكون قد حصلنا على قاعدة عادية), وندرس إشارات معاملات تابع الهدف في السطر الأخير، فإذا كانت جميعها قد أصبحت غير موجبة فإن ذلك يعني أننا توصلنا إلى الحل المثالي المنشود, أما إذا وجدنا بعض أو أحد هذه المعاملات $p_j>0$ موجباً, فإننا نختار أكبرها ونعتبر عموده عموداً للارتكاز ونتابع العمل حسب تعليمات خوارزمية السمبلكس كالعادة حتى نحصل على الحل المثالي المطلوب.

مثال (3):

أوجد الحل المثالي للنموذج الآتي:

$$z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} 9x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 11x_1 - 3x_2 + x_3 &= -9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

الحل:

نحول هذا النموذج إلى الشكل النظامي بضرب المعادلة الثانية بـ (1-), ثم نضيف إلى كل معادلة متحولاً اصطناعياً $\varepsilon_i \geq 0$ وندخلهما إلى تابع الهدف مضروبين بعدد M=10, فنحصل على النموذج الموسع الآتي:

$$z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 - 10\varepsilon_1 - 10\varepsilon_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned} 9x_1 - x_2 + 3x_3 + \varepsilon_1 &= 5 \\ -11x_1 + 3x_2 - x_3 + \varepsilon_2 &= +9 \\ x_j \geq 0 (j:1,2,3) & \end{aligned}$$

نضع هذه المعاملات في جدول كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	الثوابت
ε_1	9	−1	3	1	0	5
ε_2	−11	3	−1	0	1	9
تابع الهدف	−5	2	1	−10	−10	Z-0

وبما أن القاعدة اصطناعية, لذلك نقوم بدراسة الثوابت b_i فنجد أن أكبرها هو (9) المقابل للمتحول الاصطناعي ε_2 لذلك نقوم بتقسيم عناصر سطر الهدف على العناصر الموجبة في سطر ε_2 ونحسب قيمة θ' فنجد أن:

$$\theta' = \text{Min}\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو (3) المقابل لـ x_2, لذلك نقوم بتبديل x_2 بـ ε_2 ليصبح الأول قاعدياً والثاني غير قاعدي فنحصل على الجدول التالي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	B
ε_1	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	8
x_2	$\frac{-11}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3
تابع الهدف	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	−10	$\frac{-32}{3}$	Z-6

وبملاحظة أن القاعدة ما زالت تحتوي على متحول اصطناعي ε_1, لذلك نجري تبديلاً آخر معتمدين سطر الارتكاز المقابل لـ ε_1 فنجد أن عنصر الارتكاز المناسب هو $(\frac{16}{3})$ لأن:

$$\theta' = \text{Min}\left[\frac{7/3}{16/3}, \frac{5/3}{8/3}\right] = \frac{7/3}{16/3}$$

لذلك ننقل x_1 بدلاً من ε_1 فنحصل على الجدول التالي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	B
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{17}{2}$
تابع الهدف	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-167}{16}$	$\frac{-173}{16}$	$Z-\frac{19}{2}$

وبعد تخلصنا من القاعدة الاصطناعية نجد أن السطر الأخير ما زال يتضمن عنصراً موجباً هو (1/2) المقابل لـ x_3, لذلك نبحث عن عنصر الارتكاز في عمود x_3 فنجد أن:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{3/2}{1/2}, \frac{17/2}{3/2}\right] = \frac{3/2}{1/2}$$

فيكون (1/2) هو عنصر الارتكاز, لذلك نبدل x_3 بـ x_1 ونجري الحسابات اللازمة فنحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	B
x_3	2	0	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	3
x_2	−3	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	4
تابع الهدف	−1	0	0	$\frac{-85}{8}$	$\frac{-87}{8}$	z−11

وهو يعطينا الحل المثالي التالي بوضع $x_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ فنحصل على الحل المثالي الآتي:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3,\ \varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0$$

وعندها يأخذ التابع z أكبر قيمة له تساوي $0 = Z\text{-}11$

أي أن: $\text{Max } Z = 11$

كيفية تطبيق الخوارزمية المعدلة على النماذج ذات القاعدة الاصطناعية:

لتطبيق خوارزمية السمبلكس المعدلة على أي نموذج ذي قاعدة اصطناعية نقوم بما يلي:

1- نكتب النموذج النظامي في جدول كما يلي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	...	x_j	...	x_n	الثوابت $b > 0$
ε_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
ε_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
....	...	...	...	...	...	...	...	...
ε_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
تابع الهدف	P_1	P_2	P_3	...	p_j	...	p_n	$Z- p_o$

2- نقوم بتبديل كل من المحتويات الاصطناعية ε_i على التوالي بأحد المتحولات غير القاعدية x_j حتى نتخلص منها جميعاً, وعندما نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية ننتقل إلى الخطوة (5).

ويتم تحديد عنصر الارتكاز في هذه الحالة باختيار أي عنصر موجب من سطر المتحول الاصطناعي ε_t المراد تبديله, أو من جراء تقسيم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر المتحول ε_t ثم أخذ أصغر النسب من العلاقة الآتية:

$$\theta' = \underset{\substack{j \\ a_{tj} > 0}}{\text{Min}} \left[\frac{p_j}{a_{tj}} > 0 \right] = \frac{p_s}{a_{ts}} \qquad (6-3-3)$$

فيكون a_{ts} هو عنصر الارتكاز ويشترط أن يكون $a_{ts} > 0$.

3- نقوم بنقل x_s إلى القاعدة ونقل ε_t إلى المتحولات غير القاعدية, ونحذف العمود الذي ينتقل إليه المتحول ε_t (وهو عمود الارتكاز), لأن ذلك العمود لم يعد ضرورياً لنا في الحسابات التالية لأن ε_t يساوي الصفر حكماً.

4- نقوم بإجراء الحسابات اللازمة وفق خوارزمية السمبلكس المعدلة (أو المباشرة لأن عمود الارتكاز قد حذف), فنحصل على جدول جديد, ثم نعود إلى الخطوة (2) لنقل متحول

اصطناعي آخر, ونكرر هذا العمل حتى نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية ونحصل على جدول مختصر كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-m}	الثوابت
x_{n-m+1}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	...	α_{1n-m}	β_1
x_{n-m+2}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	...	α_{2n-m}	β_2
...	...	...	...	...	...	:
x_n	α_{m1}	α_{m2}	α_{m3}	...	α_{mn-n}	β_m
تابع الهدف	P'_1	P'_2	P'_3	...	P'_{n-m}	$z-p'_o$

5- نقوم بدراسة معاملات تابع الهدف, فإذا كانت جميع $p'_j \le 0$ فإننا نكون قد حصلنا على الحل المثالي، أما إذا كان أحد أو بعض p'_j موجباً, فإننا نختار أكبرها ونعود إلى العمل حسب خوارزمية السمبلكس المعدلة حرفياً, حتى نحصل على الحل المثالي المطلوب أو نتوصل إلى نتيجة محددة حول ذلك.

ملاحظة:

عند تطبيق العلاقة (3-3-6) قد تكون جميع النسب $\frac{p_j}{a_{tj}} < 0$, وفي هذه الحالة نقوم بتحديد عنصر الارتكاز من العلاقة:

$$\theta'' = \text{Max}\left[\frac{p_j}{a_{tj}} < 0\right] = \frac{p_j}{a_{ts}} \qquad (7-3-3)$$
$$a_{tj} > 0$$

مثال (4):

أوجد الحل المثالي للنموذج الآتي باستخدام القاعدة الاصطناعية:

$$z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \text{Max}$$

ضمن الشروط الآتية:

$$9x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$$
$$-11x_1 + 3x_2 - x_3 = 9$$
$$x_j \ge 0$$

نكتب النموذج على الشكل القاعدي النظامي التالي (حسب القاعدة الاصطناعية):

$$z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 - M\varepsilon_2 \rightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$9x_1 - x_2 + 3x_3 + \varepsilon_1 = 5$$
$$-11x_1 + 3x_2 - x_3 + \varepsilon_2 = 9$$
$$x_j \geq 0$$

نضع المعاملات والمثال في جدول كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	الثوابت
ε_1	9	−1	3	5
ε_2	−11	3	−1	9
تابع الهدف	−5	2	1	Z-0

وللتخلص من القاعدة الاصطناعية نقوم أولاً بتبديل ε_2 فنجد أن:

$$\theta' = Min\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

ويكون عنصر الارتكاز هو (3)، لذلك نبدل ε_2 بـ x_2 فنحصل على الجدول التالي (بعد حذف عمود الارتكاز الذي انتقل إليه ε_2):

القاعدة	x_1	x_3	الثوابت
ε_1	$\frac{16}{3}$	$\frac{8}{3}$	8
x_2	$\frac{-11}{3}$	$\frac{-1}{3}$	3
تابع الهدف	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	Z-6

وللتخلص من ε_1 نجد أن:

$$\theta' = Min\left[\frac{7/3}{16/3}, \frac{5/3}{8/3}\right] = \frac{7/3}{16/3}$$

فيكون 16/3 هو عنصر الارتكاز, لذلك نبدل ε_1 بـ x_1 فنحصل على الجدول التالي (بعد حذف عمود الارتكاز الذي انتقل إليه ε_1):

الثوابت	x_1	القاعدة
3	2	x_3
4	−3	x_2
Z - 11	−1	تابع الهدف

$\Rightarrow$

الثوابت	x_3	القاعدة
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	x_1
$\frac{17}{2}$	$\frac{3}{2}$	x_2
$z-\frac{19}{2}$	$\frac{1}{2}$	تابع الهدف

وبملاحظة وجود عنصر موجب في السطر الأخير نقوم بتحديد عنصر الارتكاز بوساطة θ ونجري تبديل x_1 بـ x_3 فنحصل على الجدول الأخير الذي يعطينا الحل المثالي الآتي:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3 \ \Rightarrow\ z = 11$$

وهو يعطينا أكبر قيمة لـ Z هي:

Z=11

IV – العقبات التي يمكن أن تعترض الحل:

لقد أشرنا من خلال العرض السابق إلى عدد من العقبات التي يمكن أن تعترض حل البرامج الخطية بواسطة طريقة السمبلكس وتعديلاتها, وإننا سنورد في هذه الفقرة مختلف العقبات الممكنة وطرائق التخلص منها, وذلك من أجل الرجوع إليها عند كل ضرورة.

1- إذا كان تابع الهدف من النوع Min أي إذا كان:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \text{Min}$$

فإننا نحوله إلى تابع Max بإجراء التحويل التالي:

$$Z = -L = -c_1x_1 - c_2x_2 - ..... - c_nx_n \rightarrow \text{Max}$$

ونتابع الحل ضمن نفس الشروط.

2- إذا كانت بعض الشروط معادلات وبعضها الآخر متراجحات فإننا نحول المتراجحات إلى معادلات ذات أطراف غير سالبة $(b_i \geq 0)$ وذلك بإضافة أو طرح متحولات موجبة إلى أطرافها اليسرى, ثم نضيف إلى المعادلات التي لا تتضمن متحولات قاعدية, متحولات اصطناعية.

وهكذا يمكن أن تكون القاعدة مؤلفة من بعض المتحولات الإضافية والباقي من المتحولات الاصطناعية, وفي هذه الحالة علينا قبل كل شيء نقل كل المتحولات الاصطناعية من القاعدة واستبدالها بمتحولات عادية.

3- إذا كانت بعض الشروط الفردية غير مناسبة فإننا نجري التحويلات اللازمة وفق ما ورد في الفقرة (II-2) في الفصل الثالث.

4- حالة وجود أكثر من عنصر واحد للارتكاز, وتظهر هذه الحالة عندما يكون لدينا:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{b_i}{a_{is}}\right] = \frac{b_t}{a_{ts}} = \frac{b_k}{a_{ks}} \qquad (1-4-3)$$

ويتم التخلص من هذه الحالة بواسطة اعتماد أحد العنصرين a_{ts} أو a_{ks} ليكون عنصراً للارتكاز, وعند استخدام الآلات الحاسبة يمكن اختيار أولهما أو أكبرهما.

5- حالة الانحلال (Degeneration): وهي حالة تنشأ عن الحالة السابقة ونستدل عليها من ظهور صفر في عمود الثوابت الحرة, وفي هذه الحالة نتجاهل ذلك الصفر ونختار عنصر الارتكاز وفق القواعد السابقة, ولكن إذا لم نجد عنصراً موجباً في عمود الارتكاز غير العنصر المقابل لذلك الصفر فإننا نختاره كعنصر للارتكاز لمرة واحدة ونجري التبديل اللازم ثم نعود إلى تعليمات الخوارزمية.

6- حالة ظهور عدد سالب في عمود الثوابت: إن ظهور عدد سالب في العمود bi يمكن أن يحدث نتيجة لظهور حالة الانحلال السابقة وذلك نتيجة لعمليات الضرب العادية, ويمكن التخلص من العنصر السالب $(bt<0)$ (ويجب التخلص منه فوراً) بوساطة اعتبار سطره سطراً للارتكاز, ثم تقسيم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر سطر الارتكاز ونأخذ أصغر النسب الموجبة كما يلي: إذا كان:

$$\theta' = \underset{a_{tj} < 0}{\text{Min}}\left[\frac{p'_j}{a_{tj}} > 0\right] = \frac{p'_s}{a_{ts}} \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

فإننا نأخذ العنصر السالب a_{ts} عنصراً للارتكاز حتى نتخلص من b_t السالب. وإذا لم نعثر على نسبة موجبة فإننا نطبق العلاقة:

$$\theta'' = \underset{a_{tj} < 0}{\text{Max}}\left[\frac{p'_j}{a_{tj}} < 0\right] = \frac{p'_s}{a_{ts}} \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

وبذلك يكون a_{ts} هو عنصراً للارتكاز ويكون $a_{ts} < 0$.

7- حالة عدم وجود حل مثالي: وقد نصادف هذه الحالة في أية مرحلة من مراحل الحل, ونستدل عليها من عدم وجود عنصر موجب بين عناصر عمود الارتكاز, وهذا يعني أن منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تزايد Z, ولا يمكننا نقل المتحول x_s إلى القاعدة، وفي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعلن ذلك.

8- حالة عدم وجود أي حل مقبول: وتحدث هذه الحالة عندما تكون الشروط متعارضة, ونستدل على ذلك عندما تكون جميع عناصر أحد الأسطر سالبة ويكون العدد الثابت β_i موجباً, وفي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعلن ذلك.

9- حالة وجود أكثر من حل مثالي واحد: وتحدث هذه الحالة عندما يكون مستقيم (أو مستوي) تابع الهدف موازياً لأحد أضلاع (أو سطوح) منطقة الحلول المشتركة والواقع في جهة تزايد التابع Z.

ونستدل على هذه الحالة من جراء ظهور صفر أو أكثر في سطر تابع الهدف وفي العمود المقابل لأحد المتحولات غير القاعدية, وعلى أن يكون ظهور هذه الحالة في آخر مرحلة من مراحل الحل، ولا يعتبر ظهور ذلك الصفر مشكلة أو عقبة للحل لأننا نكون قد حصلنا على حل مثالي للمسألة, ولكن إذا أردنا الحصول على حل مثالي آخر فإننا نعتبر العمود الذي يحوي ذلك الصفر عموداً للارتكاز ونقوم بتبديل متحوله بأحد متحولات القاعدة وفق تعليمات الخوارزمية

السمبلكسية فنحصل على حل مثالي آخر يعطينا نفس القيمة للتابع Z، كما يمكننا الحصول على مختلف الحلول المثالية الأخرى من جراء تركيب خطي للحلين السابقين كما يلي:

$$x''' = \lambda x' + (1-\lambda)x'' \qquad (4-4-3)$$

حيث إن x' هو الحل المثالي الأول و x'' هو الحل المثالي الثاني و x''' هو أي حل مثالي ثالث نحصل عليه بإعطاء الثابت λ قيمة معينة علماً بأن: $0 \le \lambda \le 1$.

10- حالة وجود حل مثالي منحل: وتظهر هذه الحالة في آخر مراحل الحل ونستدل عليها عندما نكون قد حصلنا على الحل المثالي ويكون أحد الثوابت bi مساوياً للصفر, وليس لهذه الحالة أية تأثيرات على النموذج الأصلي.

11- حالة الدوران: وهي الحالة التي تعيدنا إلى الوضعية نفسها التي كنا قد انطلقنا منها أو مررنا بها أثناء عملية الحل, ويتم التخلص منها باختيار عنصر للارتكاز غير العنصر النظامي وذلك لمرة واحدة فقط.

تمرينات

التمرين الأول:

أوجد الحل المثالي لكل من المسائل التالية بطريقة خوارزمية السمبلكس المباشرة:

1- $z = -3x_1 - 4x_2 - x_3 \rightarrow Max$

ضمن الشروط: $x_1 + 5x_3 = 50$

$2x_1 - 3x_2 \geq 12$

وذلك في كل من الحالات الآتية (كل حالة على حده):

أ- عندما: $x_j \geq 0, (j:1,2,3)$.

ب- عندما: $x_3 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \geq 4$.

ج- عندما: $x_3 \geq 0, x_2 \geq -5, x_1 \geq 0$.

2- $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow Max$

ضمن الشروط: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$

$x_1 - x_2 + x_3 \leq -2$

$3x_1 + 2x_3 = 5$

$x_2 - x_3 \geq 1$

وذلك في كل من الحالات الآتية:

أ- عندما تكون جميع $x_j \geq 0$.

ب- عندما $x_3 \leq 0, x_2 \geq 0, x_1 \geq 0$.

ج- عندما $x_3 \geq 0, x_2 \geq 2, x_1 \geq 0$.

د- عندما $x_2 \geq 2, x_1 \geq 0$ أما x_3 فهو غير مقيد.

هـ- $x_3 \geq -4, x_2 \geq 0, x_1 \geq 0$

3- $z = -x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 \rightarrow \text{Max}$

ضمن الشروط:

$$-5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 \geq -10$$
$$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 7$$
$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 15$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -11$$

وذلك في كل من الحالات الآتية:

أ- جميع المتحولات $x_j \geq 0$.

ب- x_1 غير مقيد والآخر $x_j \geq 0$ حيث $j \neq 1$.

ج- x_1 و x_4 غير مقيد والبقية $x_2 \geq 0$ و $x_3 \geq 0$.

التمرين الثاني:

أوجد الحل المثالي لكل من المسائل التالية بطريقة خوارزمية السمبلكس المعدلة:

1- ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$-7x_1 + 8x_2 \leq 0$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 6$$

أوجد الحل المثالي لكل من التوابع الخطية (كل تابع على حده) الآتية:

$$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{Max}$$
$$L = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$z = -2x_1 - x_2 \rightarrow \text{Max}$$
$$z = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{Max}$$
$$L = x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$L = 2x_1 - x_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$z = x_1 \rightarrow \text{Max}$$
$$z = x_2 \rightarrow \text{Max}$$

2- أوجد الحل المثالي للنموذج الآتي: $z = 2x_1 - 5x_2 + x_2 - 6x_4 \rightarrow \text{Max}$

ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} 4x_1 \quad & -2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & - x_4 \geq 12 \\ -3x_1 + 2x_2 \quad & -8x_4 = -31 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad & \leq 12 \end{aligned}$$

وذلك في كل من الحالات التالية (كل حالة على حده).

أ- عندما تكون جميع $x_j \geq 0$.

ب- $x_4 \leq 0$ وجميع الأخرى $x_j \geq 0$.

ج- $x_4 \geq 2$ وجميع الأخرى $x_j \geq 0$.

د- x_4 غير مقيد وجميع الأخرى $x_j \geq 0$.

هـ- $x_4 \geq -2, x_3 \geq 0, x_2 \geq 6, x_1 \geq 0$

و- $x_3 \geq 0, x_1 \geq 0$ أما x_4, x_2 فغير مقيدين.

3- أوجد الحل المثالي للنموذج الآتي: $z = 60x_1 + 26x_2 + 15x_3 + 4.75x_4 \rightarrow \text{Max}$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned} & 20x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 20 \\ & 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_j \geq 0, (j: 1,2,3,4) \end{aligned}$$

هل هناك حل مثالي آخر؟

4- أوجد الحل المثالي للنموذج الآتي: $z = 10x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max}$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 & \leq 1 \\ 10x_1 & \leq 2 \\ x_2 & \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

هل هناك حل مثالي آخر؟

5- أوجد الحل المثالي للنموذج الآتي:

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

التمرين الثالث:

أوجد الحل المثالي لكل من المسائل التالية بواسطة القاعدة الاصطناعية وذلك بوضع (M=10) ضمن الشروط الخطية الآتية:

$$-10x_1 - 15x_2 \geq -150$$
$$5x_1 + 10x_2 \geq 50$$
$$x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

وللتوابع التالية (كل على حده).

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max}$$
$$z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Max}$$
$$L = x_1 + x_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$z = -2x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max}$$
$$z = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{Max}$$

ثم أوجد الحلول الأخرى عندما لا يكون الحل وحيداً.

الفصل الرابع
النماذج المرافقة

إن النموذج المرافق نموذج خطي هو نموذج خطي أيضاً, ولكنه يتضمن متحولات جديدة, ومعرف على شروط خطية وفردية جديدة, وله تابع هدف جديد وحله المثالي مرتبط بالحل المثالي للنموذج الأول. لذلك سنطلق على النموذج الخطي الأول اسم النموذج الأصلي وعلى النموذج المقابل له اسم النموذج المرافق.

إن الحاجة لإيجاد النموذج المرافق قد تكون مسألة ضرورية في العديد من الحالات, وخاصة في الحالة التي يكون فيها $m > n$.

وسنتعرض في هذا الفصل إلى كيفية إيجاد النموذج المرافق وسنورد بعض النظريات المتعلقة بالترافق.

I- كيفية تشكيل النموذج المرافق:

لنفترض أنه لدينا النموذج الخطي الأصلي (بشكله العام) الآتي:

يطلب إيجاد أكبر قيمة للتابع:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ... + p_nx_n \rightarrow \max \qquad (1-1-4)$$

ضمن الشروط المختلطة التالية (متراجحات من النوع $\leq$ أو مساويات).

$$\left.\begin{array}{ll} U_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{14}x_4 \leq b_1 \\ U_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{24}x_4 \leq b_2 \\ & ..... \quad ..... \quad ..... \quad ..... \quad ..... \quad . \\ U_k & a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + ... + a_{k4}x_4 \leq b_k \end{array}\right\} \qquad (2-1-4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} U_{K+1} & a_{k+1}x_1 + a_{k+1}2x_2 + a_{k+1}3x_1 + .. + a_{k+1}nx_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ U_m & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (3-1-4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\ldots\ldots\ldots\ldots, x_\ell \geq 0 \quad (4-1-4)$$

$$x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, x_{\ell+3}\ldots\ldots\ldots x_n \quad \text{متحولات غير مقيدة} \quad (5-1-4)$$

وفي البداية لا نضع أية شروط على الثوابت b_i , ولكن يجب جعل جميع المتراجحات من نوع واحد هو $\leq$, ولإيجاد النموذج المرافق للنموذج الخطي العام السابق, ومن أجل التفريق بين متحولات النموذجين سنرمز لمتحولات النموذج المرافق بـ $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m$ والتي عددها m متحولاً جديداً ونضعها على يسار شروط النموذج الأصلي.

وبذلك نستطيع صياغة النموذج المرافق على الشكل الآتي:

يطلب إيجاد أصغر قيمة للتابع:

$$z' = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + \ldots\ldots + b_mu_m \rightarrow \text{Min} \quad (6-1-4)$$

ضمن الشروط المقابلة للمتراجحات (4−1−2) والتي تعبر عن عدم سالبية الـ k متحولاً الأولى الآتية:

$$u_i \geq 0 \ (i:1,2,3,\ldots\ldots,k) \quad (7-1-4)$$

وضمن الشروط المقابلة للمعادلات (4−1−3) والتي تعبر عن أن المتحولات المقابلة لها هي متحولات غير مقيدة ونكتب:

$$u_i \geq\leq 0 \quad (i: k+1, k+2, \ldots\ldots\ldots, n) \quad (8-1-4)$$

وضمن الشروط الخطية المقابلة لشروط عدم السالبية (4−1−4) والتي تصاغ على شكل متراجحات من النوع $\geq$ وعددها ℓ متراجحة هي:

$$\begin{array}{l} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}u_m \geq p_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{m2}u_m \geq p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1\ell}u_1 + a_{2\ell}u_2 + a_{3\ell}u_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{m\ell}u_m \geq p_\ell \end{array} \quad (9-1-4)$$

وضمن الشروط الخطية المقابلة للمتحولات غير المقيدة (4-1-5) والتي تصاغ على شكل معادلات خطية, وعددها ($n - \ell$) معادلة هي:

$$a_{1\ell+1}u_1 + a_{2\ell+1}u_2 + a_{3\ell+1}u_3 + ... + a_{m\ell+1}u_m = p_{\ell+1}$$
$$.....$$
$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m = p_n \qquad (10-1-4)$$

وهو نموذج خطي يحتوي على m متحولاً مرافقاً, وعليه n شرطاً خطياً, منها ℓ متراجحة من النوع $\geq$ ($n - \ell$) معادلة، وفيه k متحولاً غير سالب و $(m-k)$ متحولاً كيفياً غير مقيد.

ونشير إلى أن مصفوفة الأمثال في النموذج المرافق هي منقول مصفوفة الأمثال في النموذج الأصلي.

ولإيضاح العلاقة بين النموذج الأصلي ومرافقه نقوم بوضعهما في جدول مقارن كالآتي:

النموذج الأصلي	النموذج المرافق
$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \rightarrow Max$	$Z' = b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m \rightarrow Min$
ضمن الشروط	ضمن الشروط
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$ -1	$u_i \geq 0$ -1
حيث $(i: 1,2,3,.....,k)$	حيث $(i: 1,2,3,.....,k)$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ -2	$u_i \gtreqless 0$ -2 غير مقيد
حيث $(i: k+1,k+2,.....,m)$	حيث $(i: k+1,k+2,.....,m)$
$x_j \geq 0$ -3	$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_m \geq p_j$ -3
حيث $(j: 1,2,3,.....,\ell)$	حيث أن $(j: 1,2,3,.....,\ell)$
$x_j \gtreqless 0$ -4 غير مقيد	$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_m = p_j$ -4
حيث $(j: \ell+1,\ell+2,.....,n)$	حيث $(j: \ell+1,\ell+2,.....,n)$

وبصورة عامة يمكن للنموذج الأصلي أن يأخذ أي شكل غير الشكل الوارد في العلاقات (4-1-1), (4-1-5), ولتوضيح بعض الأشكال المختلفة للنماذج الأصلية والنماذج المرافقة لها, نكتب تلك النماذج بشكل مصفوفي كما يلي:

شكل النموذج الأصلي		شكل النموذج المرافق
$Z = P \cdot X \rightarrow Max$ $AX \leq B$ $X \geq 0$	−1	$Z' = U \cdot B \rightarrow Min$ $A' \cdot U \geq p'$ $U \geq 0$
$Z = P \cdot X \rightarrow Max(min)$ $AX = B$ $X \geq 0$	−2	$Z' = U \cdot B \rightarrow Min(Max)$ $A' \cdot U \geq p'$ uغيرمقيدة
$Z = P \cdot X \rightarrow Min$ $AX \geq B$ $X \geq 0$	−3	$Z' = U \cdot B \rightarrow Max$ $A' \cdot U \leq p'$ $U \geq 0$

ومما تقدم يمكننا أن نلخص خطوات العمل لإيجاد النموذج المرافق بما يلي:

1- نشكل تابع الهدف المرافق من المتحولات المرافقة $u_1, u_2, ..., u_m$ بضربها على الترتيب بالثوابت الحرة $b_1, b_2, ..., b_m$ الموجودة في الطرف الأيمن للمتراجحات (4-1-2) وللمعادلات (4-1-3), ويكون هذا التابع من النوع Min إذا كان التابع الأصلي من النوع Max والعكس بالعكس.

2- نشكل عدداً من المتراجحات غير السالبة $\geq$ بمقابل وبعدد شروط عدم السالبية (4-1-4), كما نشكل عدداً من المعادلات بمقابل عدد المتحولات غير المقيدة (4-1-5) وذلك بضرب المتحولات المرافقة بأمثال كل من المتحولات في جميع المعادلات أي بضربها بكل عمود من الأمثال على حده.

3- نضع شروط عدم السالبية على كل متحول u_i يكون مقابلاً لمتراجحة من النوع $\leq$, ونترك المتحولات المقابلة للمعادلات متحولات غير مقيدة.

مثال (1):

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات هما: A وB وتستخدم لذلك أربع من المواد الأولية هي: S_1, S_2, S_3, S_4 وإن المقادير اللازمة من كل من هذه المواد لإنتاج واحدة من كل المنتجين A وB, والكمية الاحتياطية المتوفرة منها وسعر المبيع لكل واحدة من B وA معطاة في الجدول الآتي:

المنتجات / المواد الأولية	مستلزمات الواحدة من المنتجات		الكميات الاحتياطية من المواد
	A	B	
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
S_4	3	0	18
سعر الواحدة	7	5	

والمطلوب إيجاد الخطة الإنتاجية المثالية التي تجعل قيمة منتجات هذه الشركة أكبر ما يمكن, ثم إيجاد النموذج المرافق وإيجاد حله المثالي, ثم القيام بتفسير المعنى الاقتصادي للنموذجين الأصلي والمرافق, وإيجاد العلاقة بينهما.

الحل:

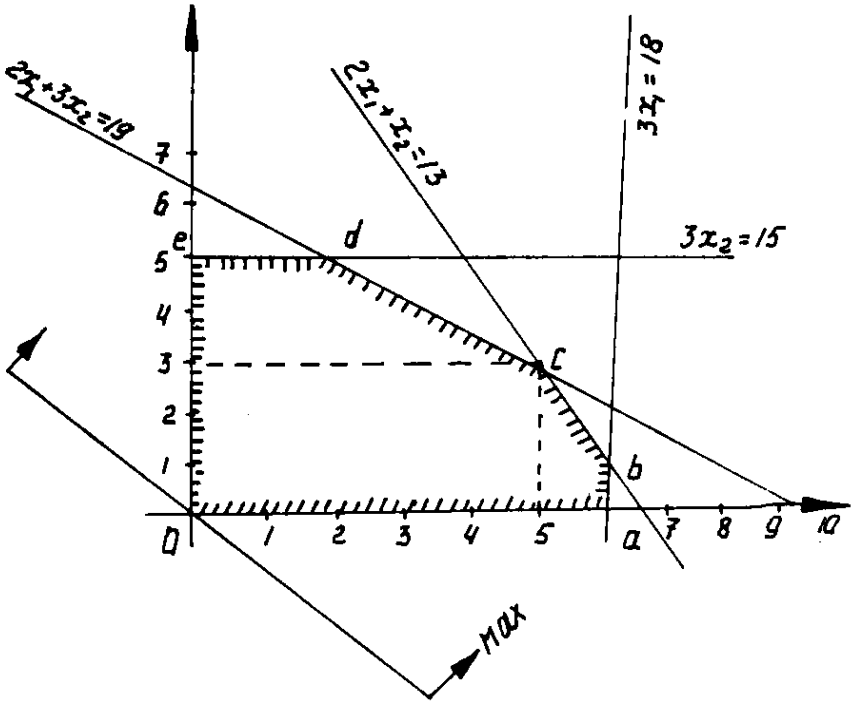
لنرمز لمقدار ما يجب إنتاجه من A وB بالرمزين: x_1 وx_2 على الترتيب وبذلك نجد أن تابع الهدف هو:

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{Max}$$

وإن الشروط الخطية المفروضة على عملية الإنتاج هي:

$$\begin{array}{l|l} u_1 & 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ u_2 & 2x_1 + x_2 \le 13 \\ u_3 & 3x_2 \le 15 \\ u_4 & 3x_1 \le 18 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

ولإيجاد الخطة المثالية المطلوبة لهذا النموذج نستخدم الطريقة البيانية, ولذلك نقوم برسم مستقيمات الشروط وتابع الهدف فنحصل على الشكل (4–1) المبين على الصفحة التالية.



الشكل (4–1)

من الشكل (4–1) يتبين لنا أن الحل المثالي يقابل النقطة الرأسية c، ونحسب إحداثياتها من تقاطع المستقيمين:

$$2x_1 + 3x_2 = 19$$
$$2x_1 + x_2 = 13$$

فنجد أن إحداثي نقطة التقاطع هي: $x_1 = 5$ و $x_2 = 3$. وبذلك نجد أن الخطة المثالية المطلوبة هي أن ننتج 5 واحدات من A و3 واحدات من B, وهي تعطينا أكبر قيمة للتابع Z يساوي:

$$\text{Max } Z = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50 \text{ L.S}$$

ولصياغة النموذج المرافق لهذه المسألة نضع المتحولات المرافقة u_1, u_2, u_3, u_4 مقابل الشروط الخطية, ونطبق التعليمات السابقة فنحصل على النموذج المرافق التالي:

يطلب إيجاد أصغر قيمة للتابع:

$$Z' = 19u_1 + 13u_2 + 15u_3 + 18u_4 \rightarrow \text{Min}$$

وذلك ضمن الشروط الخطية:

$$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 \geq 7$$
$$3u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 5$$
$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0,\ u_4 \geq 0$$

ولإيجاد الحل المثالي لهذا النموذج نطرح من الطرف الأيمن لكل من المتراجحتين متحولاً إضافياً غير سالب v_1 وv_2 ونحول تابع الهدف إلى شكل أكبر ما يمكن Max فيأخذ النموذج المرافق الشكل الآتي:

$$Z'' = -Z' = -19u_1 - 13u_2 - 15u_3 - 18u_4 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 - v_1 = 7$$
$$3u_1 + u_2 + 3u_3 - v_2 = 5$$
$$u_j \geq 0 \quad (j:1,2,3,4) \quad , \qquad v_i \geq 0 \quad (i:1,2)$$

ولحل هذا النموذج نستخدم القاعدة الاصطناعية ونحول النموذج إلى الشكل الآتي:

$$Z'' = -19u_1 - 13u_2 - 15u_3 - 18u_4 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - M\varepsilon_1 - M\varepsilon_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 - v_1 + \varepsilon_1 = 7$$
$$3u_1 + u_2 + 3u_3 - v_2 + \varepsilon_2 = 5$$
$$u_j \geq 0,\ \varepsilon_i \geq 0$$

ثم نضع الأمثال في جدول خوارزمية السمبلكس المعدلة التالي:

القاعدة	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	الثوابت
ε_1	2	2	0	3	−1	0	7
ε_2	3	1	3	0	0	−1	5
تابع الهدف	−19	−13	−15	−18	0	0	$\lvert Z'' - 0$

وللتخلص من المتحولات الاصطناعية نختار أولاً المتحول ε_1, ونحدد عنصر الارتكاز من سطره بحساب θ', فنجد أن جميع النسب سالبة، لذلك فإننا نستخدم العلاقة (3-3-7) فنجد أن:

$$\theta'' = \text{Max}\left[\frac{-19}{2}, \frac{-13}{2}, \frac{-18}{3}\right] = \frac{-18}{3}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو (3), لذلك نبدل ε_1 بـ u_4 فنحصل على الجدول الآتي (ونهمل العمود المقابل لعمود الارتكاز):

	u_1	u_2	u_3	ε_1	v_1	v_2	**الثوابت**
u_4	$2/3$	$2/3$	0		$-1/3$	0	$7/3$
ε_2	3	1	3		0	-1	5
	-7	-1	-15		-6	0	$Z''+42$

وللتخلص من ε_2 نحسب θ'' من العلاقة (3-3-7) (لعدم وجود نسب موجبة):

$$\theta'' = \text{Max}\left[\frac{-7}{3}, \frac{-1}{1}, \frac{-15}{3}\right] = \frac{-1}{1}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو (1), لذلك نبدل ε_2 بـ u_2 فنحصل على الجدول التالي (ونهمل العمود المقابل لعمود الارتكاز):

	u_1	ε_2	u_3	v_1	v_2	**الثوابت**
u_4	$-4/3$		-2	$-1/3$	$2/3$	-1
u_2	3		3	0	-1	5
	-4		-12	-6	-1	$Z''+47$

وهنا نلاحظ ظهور عدد سالب في عمود الثوابت, لذلك علينا تحويله إلى موجب فوراً, ولهذا نعتبر سطره سطراً للارتكاز ونحسب أصغر النسب الموجبة θ' فنجد أن: (انظر العلاقة 3-4-2):

$$\theta' = \text{Min}\left[\frac{-4}{-4/3}, \frac{-12}{-2}, \frac{-6}{-1/3}\right] = \frac{-4}{-4/3}$$

وبذلك نجد أن عنصر الارتكاز هو (4/3−), لذلك نقوم بتبديل u_4 بـ u_1 فنحصل على الجدول:

القاعدة	u_4	u_3	v_1	v_2	
u_1					$\frac{3}{4}$
u_2					$\frac{11}{4}$
تابع الهدف	−3	−6	−5	−3	$Z''+50$

وبذلك نحصل على الحل المثالي الآتي:

$$u_1=\frac{3}{4},\ u_2=\frac{11}{4},\ u_3=u_4=v_1=v_2=0$$

وهو يعطينا أن $\text{Max}\,Z''=-50$ ومنه نجد أن $\text{Min}\,Z'=50$ وبمقارنة هذه النتيجة مع حل النموذج الأصلي لوجدنا أن:

$$\text{Min}\,Z'=\text{Max}\,Z$$

المضمون الاقتصادي للنموذج المرافق:

لتفسير المعنى الاقتصادي لتابع الهدف في النموذجين الأصلي والمرافق لمثالنا السابق نلاحظ أن:

$$Z=7x_1+5x_2\rightarrow\text{Max}$$

وأن تابع الهدف في النموذج المرافق Z' هو:

$$Z'=19u_1+13u_2+15u_3+18u_4\rightarrow\text{Min}$$

ونستنتج ما يلي:

1− إن متحولات التابع الأصلي Z هي كميتي الإنتاج x_1 و x_2 من A و B على الترتيب, وإن هذه الكميات مضروبة بالأسعار تعطينا قيمة المنتجات Z.

2- بينما متحولات التابع المرافق Z' هي عبارة عن الأسعار u_1, u_2, u_3, u_4 لواحدة المواد الأولية s_1, s_2, s_3, s_4 على الترتيب, وإن هذه الأسعار مضروبة بالكميات المتوفرة تعطينا قيمة المواد الأولية المتوفرة.

ولهذا تسمى المتحولات u_1, u_2, u_3, u_4 بالأسعار السرية أو الخفية في النموذج.

3- إن المتراجحة الأولى في شروط النموذج المرافق تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج A والتي تساوي $(2u_1 + 2u_2 + 3u_4)$, وتعبر عن تكلفة الواحدة من السلعة A، لا يمكن أن تقل عن سعر واحدة المنتج A والذي يساوي 7 أي أن:

$$2u_1 + 2u_2 + 3u_4 \geq 7$$

وبتعويض الحل المثالي المرافق نجد أن:

$$2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{11}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

وكذلك نجد أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج B، والتي تعبر عن تكلفة الواحدة من B، لا يمكن أن تقل عن سعر واحدة المنتج B, والذي يساوي 5 أي أن:

$$3u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 5$$

وبتعويض الحل المثالي المرافق نجد أن:

$$3 \cdot \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

4- إن الحل المثالي للنموذج الأصلي $(x_1 = 5, x_2 = 3)$ يعطينا أفضل خطة للإنتاج التي تجعل قيمة ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن (وذلك ضمن الموارد المتوفرة), وإن الحل المثالي للنموذج المرافق يعطينا أفضل تشكيلة لأسعار المواد الأولية, فيما لو استخدمت بدون أي هدر فإنها تعطينا أصغر قيمة لتلك الموارد المستخدمة منها, وهي بالتالي ستعطينا أفضل خطة للإنتاج ولهذا يعتبر الحل المثالي للنموذج المرافق حلاً مرافقاً للحل المثالي للنموذج الأصلي. وهما يرتبطان بالعلاقة الآتية:

$$MaxZ = p_1x'_1 + p_2x'_2 + ... + p_nx'_n = MinZ' = b_1u'_1 + b_2u'_2 + ... + b_mu'_m \quad (11-1-4)$$

II- خوارزمية السمبلكس لحل النماذج من النوع Min:

لقد لاحظنا من خلال المثال السابق أنه يمكننا تطبيق الخوارزمية المباشرة أو المعدلة على النماذج المرافقة, ولكن هذا التطبيق اقتضى منا إجراء تحويل على تابع الهدف Z' ليصبح من النوع Max ثم متابعة العمل على هذا الأساس.

ولكنه يمكننا من جهة أخرى أن نقوم بحل النموذج ذي النوع Min بدون إجراء ذلك التحويل وذلك بوساطة تعديل بسيط على الخوارزمية المباشرة أو (المعدلة), ويقتصر هذا التعديل على الخطوة (3) منها, حيث تصبح كما يلي:

إذا كان تابع الهدف في النموذج الخطي من النوع Min , فإنه عندما نقوم بتحديد عمود الارتكاز نختار العنصر الأكثر سلبية (أي العنصر السالب والأكبر في القيمة المطلقة) في سطر تابع الهدف ونعتبر عموده عموداً للارتكاز ونتابع العمل حسب تعليمات الخوارزمية المباشرة حتى نحصل على حل قاعدي أول (قاعدة أولى), ثم نتابع الحل حسب تعليمات الخوارزمية المعدلة حتى نحصل على الحل المثالي المطلوب للنموذج الخطي المفروض, ويتم ذلك عندما تصبح جميع عناصر السطر الأخير غير سالبة.

ولتوضيح نطبق ذلك على المثال الآتي:

مثال (2):

أوجد الحل المثالي للنموذج المرافق للنموذج الآتي:

$$Z = -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط الآتية:

$$\begin{aligned} u_1 \quad & -x_1 + x_3 - 2x_4 \le -1 \\ u_2 \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 2 \\ u_3 \quad & 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 \le -3 \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

حسب التعليمات السابقة نجد أن النموذج المرافق لهذا النموذج هو النموذج الآتي:

$$Z' = -u_1 + 2u_2 - 3u_3 \rightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط الآتية:

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0$$
$$-u_1 + u_2 + 2u_3 \geq -2$$
$$-u_2 - 3u_3 \geq -1$$
$$u_1 + 2u_2 - 4u_3 \geq -3$$
$$-2u_1 - 3u_2 + 6u_3 \geq -5$$

ثم نقوم بتحويل هذا النموذج إلى الشكل النظامي بطرح متحول إضافي غير سالب من كل من هذه المعادلات, ثم جعل الثوابت في الطرف الأيمن موجبة فنحصل على الشكل الآتي:

$$Z' = -u_1 + 2u_2 - 3u_3 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \rightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط التالية:

$$u_1 - u_2 - 2u_3 + v_1 = 2$$
$$u_2 + 3u_3 + v_2 = 1$$
$$-u_1 - 2u_2 + 4u_4 + v_3 = 3$$
$$2u_1 + 3u_2 - 6u_4 + v_4 = 5$$
$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0,\ u_4 \geq 0$$

وهو شكل قاعدي جاهز, لذلك نضعه في جدول مختصر ونطبق الخوارزمية المعدلة كما يلي:

القاعدة	u_1	u_2	u_3	B_i
v_1	1	−1	−2	2
v_2	0	1	3	1
v_3	−1	−2	4	3
v_4	2	3	−6	5
تابع الهدف	−1	2	−3	$Z' - 0$

بما أن تابع الهدف هو من النوع Min لذلك نطبق الخوارزمية الخاصة بها.

وبملاحظة أن أكثر العناصر سلبية في السطر الأخير هو العنصر (3−) لذلك نعتبر عمود u_3 عمود ارتكاز, وبتحديد عنصر الارتكاز نجد أن:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{3}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو (3) المقابل لـ v_2 لذلك نقوم بتبديل u_3 بـ v_2 فنحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	u_1	u_2	v_2	B_i
v_1	1	$-1/3$	$2/3$	$8/3$
u_3	0	$1/3$	$1/3$	$1/3$
v_3	-1	$-10/3$	$-4/3$	$5/3$
v_4	2	5	2	7
تابع الهدف	-1	3	1	$Z'+1$

وبعد تحديد عنصر الارتكاز نقوم بإجراء تبديل آخر بين u_1 وv_1 فنحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	v_1	u_2	v_2	
u_1	1	$-1/3$	$2/3$	$8/3$
u_3	0	$1/3$	$1/3$	$1/3$
v_3	1	$-11/3$	$-2/3$	$13/3$
v_4	-2	$17/3$	$2/3$	$5/3$
	1	$8/3$	$5/3$	$Z'+11/3$

وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المثالي (لأن جميع عناصر السطر الأخير أصبحت غير سالبة) التالي:

$$u_1 = 8/3,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1/3,\ v_1 = v_2 = 0,\ v_3 = 13/3,\ v_4 = 5/3$$

وهو يعطينا أصغر قيمة لـ z' تساوي:

$$Z'+11/3 = 0 \Rightarrow Z' = -11/3$$

أي أن: $\text{Min}\ Z' = -11/3$

III- خوارزمية السمبلكس المزدوجة (للنموذجين الأصلي المرافق):

يمكننا إيجاد الحلين المثاليين لكل من النموذجين الأصلي والمرافق بآن واحد, وذلك بعد كتابتهما على الشكل القاعدي المناسب بإضافة أو طرح متحولات إضافية, أو باستخدام بعض المتحولات الاصطناعية, وعزل المتحولات غير المقيدة.

ولنفترض أن النموذج الأصلي معطى على الشكل العام المبين في العلاقات من (4-1-10) حتى (4-1-5) وان لمرافقه الشكل العام المبين في العلاقات من (4-1-6) حتى (4-1-1), ولنفترض أنه نتيجة لمعالجة هذين النموذجين تمكنا من كتابتهما على الشكل القاعدي التالي (وليس بالضرورة قاعدي موجب):

النموذج الأصلي:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \rightarrow Max \qquad (4-3-1)$$

ضمن الشروط التالية:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = b_2\\
&.....\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + y_m = b_m\\
&x_j \geq 0, (j: 1,2,3,....., n)\\
&y_i \geq 0, (i: 1,2,3,....., m)
\end{aligned} \qquad (4-3-2)$$

ولا نشترط هنا أن تكون $b_i \geq 0$:

النموذج المرافق:

$$Z' = b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m \rightarrow Min \qquad (4-3-3)$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m - v_1 = p_1\\
&a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}u_m - v_2 = p_2\\
&.....\\
&a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m - v_n = p_n\\
&u_i \geq 0, (i: 1,2,3,....., m)\\
&v_j \geq 0, (j: 1,2,3,....., n)
\end{aligned} \qquad (4-3-4)$$

ولا نشترط هنا أن تكون $p_i \geq 0$.

وبملاحظة أن معاملات هذين النموذجين هي نفسها, وأن مصفوفة أمثال المتحولات في النموذج المرافق هي منقول مصفوفة تلك الأمثال في النموذج الأصلي, نجد أنه يمكننا كتابة هذه المعاملات للنموذجين في جدول مختصر واحد (مزدوج) كما يلي:

		$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	....	$-v_n$	تابع الهدف المرافق
	المتحولات القاعدية	x_1	x_2	x_3	....	x_n	B_i
u_1	y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}	b_1
u_2	y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}	b_2
u_3	y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3n}	b_3
....	....	....	....	....	....	....	....
u_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}	b_m
	تابع الهدف	p_1	p_2	p_3	....	p_n	$Z-0\,\mathrm{Max}$
							$Z'-0\,\mathrm{Min}$

الجدول المزدوج للنموذجين الأصلي ومرافقه وفق جدول خوارزمية السمبلكس المعدلة

حيث قمنا بوضع متحولات ومعاملات النموذج الأصلي داخل الجدول وفق خوارزمية السمبلكس المعدلة, ووضعنا متحولات النموذج المرافق خارج الجدول, فوضعنا المتحولات $u_1,u_2,\ldots,u_m$ على يساره والمتحولات القاعدية $-v_1, -v_2,\ldots,-v_n$ في أعلاه (مع إشاراتها السالبة).

وانطلاقاً من المبادئ التي اعتمدنا عليها في الخوارزمية المعدلة للنموذج الأصلي وخوارزمية النماذج المرافقة نستنتج أننا نحصل على الحل المثالي للنموذج الأصلي عندما تكون جميع العناصر $p_j \leq 0$ /في السطر الأخير/، وفي الوقت نفسه تكون جميع العناصر $b_i \geq 0$ في العمود الأخير, وإننا نحصل على الحل المثالي للنموذج المرافق

عندما تكون جميع العناصر $b_i \geq 0$ في العمود الأخير (عمود تابع الهدف المرافق) ومن الوقت نفسه تكون جميع العناصر في السطر الأخير $p_j \leq 0$ (لأنها ستقابل $p_j = -v_j$), وهما الشرطان نفسهما لكل من النموذجين.

لذلك فإنه علينا عند البحث عن الحل المثالي للنموذجين معاً أن نعمل على جعل جميع العناصر $b_i \geq 0$ وعلى جعل جميع العناصر $p_j \leq 0$, ولتحقيق ذلك علينا أن نعتمد على أحد النموذجين المترافقين (الأصلي أو مرافقه) ونضع متحولاته ومعاملاته في جدول كالجدول السابق (المعتمد للنموذج الأصلي) ونضع متحولات النموذج المرافق حول الإطار الخارجي لذلك الجدول.

وبصورة عامة نجد أن ضرورة وضع النموذجين في جدول مشترك ومختصر لا تسمح لنا بالتخلص من الثوابت السالبة في الطرف الأيمن. ولهذا فإن الحالة العامة للجدول المزدوج السابق يمكن أن تتضمن ثوابت سالبة $bi < 0$, كما يمكن أن يتضمن عناصر في السطر الأخير $p_j > 0$ موجبة. لذلك فإنه يجب علينا عند البحث عن الحل المثالي للنموذجين أن تعمل على معالجة هذه العناصر اعتماداً على النموذج الأصلي, ونقوم بذلك على مرحلتين هما:

1- المرحلة الأولى: وفيها يجب أن نجعل الثوابت b_i غير سالبة وهذا ما يقابل الحصول على حل قاعدي غير سالب للنموذج الأصلي.

2- المرحلة الثانية: وفيها يجب أن نجعل جميع عناصر سطر تابع الهدف غير موجبة (في حالة تعظيم تابع الهدف), وهذا ما يقابل الحصول على الحل المثالي المطلوب للنموذج الأصلي.

وتسمى الخوارزمية التي تعتمد على النموذج الأصلي في إيجاد الحل المثالي للنموذج الأصلي ومرافقه بالخوارزمية المزدوجة الأصلية.

كما يمكننا البحث عن الحل المثالي للنموذجين معاً اعتماداً على النموذج المرافق, وعندها سيكون علينا أن نبحث عن الحل المثالي لها على مرحلتين هما:

1- المرحلة الأولى: وفيها يجب أن نجعل عناصر عمود تابع الهدف المرافق b_i غير سالبة, وهي مرحلة لا تعني نهاية الحل إلا إذا كان جميع الثوابت p_j في السطر الأخير غير سالبة.

2- المرحلة الثانية: وفيها يجب أن نجعل الثوابت الحرة بالنسبة له p_j– غير موجبة، وهذا يقابل الحصول على الحل المثالي للنموذج المرافق.

وتسمى الخوارزمية التي تعتمد على النموذج المرافق في إيجاد الحل المثالي للنموذجين معاً بالخوارزمية المزدوجة المرافقة.

كما يمكننا أن نبدأ بالمرحلة الثانية ثم الأولى في الخوارزميتين, لذلك فإننا سنستعرض كلاً من هاتين الخوارزميتين المزدوجتين بشكل متناظر لتوضيح العلاقة بين خطوات كل منها بالأخرى.

الخوارزمية المزدوجة الأصلية لتابع Max:

1- نضع النموذجين بعد تحويلهما إلى شكل قاعدي في جدول كالتالي:

		$-v_1$	$-v_2$	....	$-v_n$	
	القاعدة	x_1	x_2	....	x_n	B_i
u_1	y_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	b_1
u_2	y_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	b_2
....	....	....	....	....	....	....
u_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	b_m
	P_j	p_1	p_2	....	p_n	$Z-0$ Max

حيث وضعنا متحولات النموذج المرافق خارج إطار الجدول, وتركنا متحولات القاعدة V_i للنموذج المرافق مضروبة بـ (-1) حتى تنسجم مع المعادلات (4-3-4).

الخوارزمية المزدوجة المرافقة لتابع Min:

1- نضع النموذجين بعد تحويلهما إلى شكل قاعدي في جدول كالتالي:

		y_1	y_2	....	y_m	
	القاعدة	u_1	u_2	....	u_m	P_j
x_1	v_1	$-a_{11}$	$-a_{21}$	....	$-a_{m1}$	$-p_1$
x_2	v_2	$-a_{12}$	$-a_{22}$	....	$-a_{m2}$	$-p_2$
....	....	....	....	....	....	....
x_n	v_n	$-a_{1n}$	$-a_{2n}$	....	$-a_{mn}$	$-p_n$
	B_i	b_1	b_2	....	b_m	$Z'-0$ Min

حيث قمنا بتحويل الشروط (4-3-4) إلى شكل قاعدي وذلك بضربها بـ (-1) مما جعلنا نضع جميع عناصر المصفوفة والعمود p_j في الجدول السابق مضروبة بـ (-1).

2- نقوم بدراسة الثوابت bi في العمود الأخير فإذا كانت جميع $bi \geq 0$, فإننا ننتقل فوراً إلى الخطوة (4).

أما إذا كان بعض الثوابت b_i سالباً, فإنه يجب علينا أن نجعلها موجبة (لنحصل على حل قاعدي غير سالب) وذلك بإجراء تبديل بين المتحولات القاعدية وغير القاعدية.

لذلك نقوم باختيار أكثر تلك العناصر b_i سالبية, وليكن $b_k<0$ المقابل للمتحول y_k ونعتبر سطره سطراً للارتكاز.

ولتحديد عنصر الارتكاز الملائم من بين عناصر سطر الثابت السالب b_k يمكننا أن نأخذ أحد العناصر السالبة فيه[1] ونعتبره عنصراً للارتكاز, ولكن حتى نحافظ على العناصر غير الموجبة في السطر الأخير (معاملات تابع الهدف) نقوم بتحديد عنصر الارتكاز بوساطة تقسيم عناصر السطر الأخير على العناصر المقابلة والمماثلة لها في الإشارة في سطر y_k ثم نأخذ أصغر النسب θ'_1 حيث إن:

2- نقوم بدراسة المعاملات bi في السطر الأخير (معاملات تابع الهدف المرافق), فإذا كانت جميع $bi>0$ فإننا ننتقل فوراً إلى الخطوة (4).

أما إذا كانت بعض المعاملات b_i سالباً فإنه يجب علينا أن نجعلها موجبة (لأن تابع الهدف من النوع min) وذلك بوساطة إجراء تبديل بين المتحولات القاعدية وغير القاعدية.

لذلك فإننا نختار أكثر تلك المعاملات b_i سالبية وليكن $b_k<0$ المقابل للمتحول u_k ونعتبر عموده عموداً للارتكاز, ولتحديد عنصر الارتكاز الملائم من بين عناصر عمود u_k يمكننا أن نأخذ أحد العناصر السالبة فيه[2] ونعتبره عنصراً للارتكاز. ولكن حتى نحافظ على العناصر الموجبة في العمود الأخير (الثوابت الحرة), نقوم بتحديد عنصر الارتكاز بوساطة تقسيم عناصر العمود الأخير على العناصر المقابلة والمماثلة لها في الإشارة في عمود y_k, ثم نأخذ أصغر النسب θ'_2 حيث إن:

---

[1] إذا كان السطر k الذي فيه $b_k<0$ لا يتضمن عنصراً سالباً (واحداً على الأقل) فإن ذلك يدل على تعارض الشروط وبذلك تكون المسألة غير قابلة للحل بسبب تعارض الشروط.

[2] إذا كان العمود k الذي فيه $b_k<0$ لا يتضمن عنصراً سالباً (واحداً على الأقل) فإن ذلك يدل على تعارض الشروط, وبذلك تكون المسألة غير قابلة للحل بسبب تعارض الشروط.

$$\theta' = \underset{a_{kj}<0}{\text{Min}_j}\left[\frac{p_j}{a_{kj}} > 0\right] = \frac{p_\ell}{a_{k\ell}} > 0 \qquad (5-3-4)$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز المناسب هو العنصر $a_{k\ell}$, وهو يجب أن يكون سالباً وأن تكون النسب $0<(p_j / a_{kj})$.

وإذا لم نجد نسبة موجبة فإننا نختار أكبر النسب السالبة ونحدد منها عنصر الارتكاز, ويمكن لعنصر الارتكاز في هذه الحالة أن يكون موجباً.

نقوم بإجراء الحسابات اللازمة لتبديل y_k بـ x_ℓ ونبدل موقعيهما فنحصل على جدول جديد كالآتي:

$$\theta'_2 = \underset{a_{jk}<0}{\text{Min}_j}\left[\frac{p_j}{a_{jk}} > 0\right] = \frac{p_\ell}{a_{l\ell}} > 0 \qquad (6-3-4)$$

وهنا نشير إلى أن p_j وa_{jk} تأخذ من الجدول السابق بعد معالجتها, وبذلك يكون عنصر الارتكاز المناسب هو $a_{\ell k}$, وهو يجب أن يكون سالباً وأن تكون النسب $0<(p_j / a_{jk})$.

وإذا لم نجد نسبة موجبة فإننا نختار أكبر النسب السالبة ونحدد منها عنصر الارتكاز, ويمكن لعنصر الارتكاز هنا أن يكون موجباً.

نقوم بإجراء الحسابات اللازمة لتبديل u_k بـ v_L ونبدل موقعيهما فنحصل على جدول جديد كالآتي:

(استخدمنا المعاملات السابقة بعد معالجتها واعتبارها مضروبة بـ (-1)).

	x_1	x_2	.	y_k	.	x_n	الثوابت
y_1	a'_{11}	a'_{12}	.	$\frac{-a_{1k}}{a_{k\ell}}$	.	a'_{1n}	b'_1
y_2	a'_{21}	a'_{22}	.	$\frac{-a_{2k}}{a_{k\ell}}$	.	a'_{2n}	b'_2
.	.	.	.	.	.	.	.
x_ℓ	$\frac{a_{k1}}{a_{kL}}$	$\frac{a_{k2}}{a_{k\ell}}$	.	$\frac{1}{a_{k\ell}}$	.	$\frac{a_{kn}}{a_{k\ell}}$	$\frac{b_k}{a_{k\ell}}$
.	.	.	.	.	.	.	.
y_m	a'_{m1}	a'_{m2}	.	$\frac{-a_m}{a_{k\ell}}$	.	a'_{mn}	b'_m
تابع الهدف	p'_1	p'_2	.	$\frac{-p_k}{a_{k\ell}}$	.	p'_n	$Z-p'_o$

ثم نعود إلى الخطوة (2) من جديد لدراسة الثوابت b_i. ونكرر ذلك حتى نتخلص من جميع الثوابت b_i السالبة. وهذا ما يقابل حصولنا على حل قاعدي غير سالب للنموذج الأصلي. وبعدها ننتقل إلى البحث عن الحل المثالي له من خلال انتقالنا على الخطوة التالية:

	u_1	u_2	.	v_ℓ	.	u_m	الثوابت
v_1	a'_{11}	a'_{21}	.	$\frac{-a_{k1}}{a_{\ell k}}$	.	a'_{m1}	p'_1
.	.	.	.	.	.	.	.
u_k	$\frac{a_{1k}}{a_{\ell k}}$	$\frac{a_{2k}}{a_{\ell k}}$	.	$\frac{1}{a_{\ell k}}$	.	$\frac{a_m}{a_{\ell k}}$	$\frac{-p_\ell}{a_{\ell k}}$
.	.	.	.	.	.	.	.
v_n	a'_{1n}	a'_{2n}	.	$\frac{-a_{kn}}{a_{\ell k}}$	.	a'_{mn}	p'_n
	b'_1	b'_2	.	$\frac{-b_k}{a_{\ell k}}$	.	b'_m	$Z'-b'_o$

ثم نعود إلى الخطوة (2) من جديد لدراسة المعاملات b_i ونكرر ذلك حتى نجعل جميع المعاملات bi تأخذ قيماً غير سالبة, ولكن هذا لا يعني أننا قد حصلنا على حل مثالي للنموذج المرافق وذلك لأن عمود الثوابت p'_j قد يكون متضمناً بعض القيم السالبة والتي يجب تحويلها إلى ثوابت غير سالبة، ولمتابعة العمل ننتقل إلى الخطوة التالية:

3- نقوم بدراسة معاملات تابع الهدف في السطر الأخير, فإذا كانت جميع المعاملات $p'_j \le 0$ فإن ذلك يعني أننا قد حصلنا على الحل المثالي للنموذجين الأصلي والمرافق وننتقل فوراً إلى الخطوة (5).

ما إذا كان بعض المعاملات p'_j موجباً فإنه علينا أن نجعلها غير موجبة (لأن تابع الهدف من النوع Max) وذلك بإجراء تبديل بين المتحولات القاعدية وغير القاعدية.

لذلك نقوم باختيار أكبر تلك العناصر وليكن العنصر $p'_s > 0$ ونعتبر عموده عموداً للارتكاز، ثم نحدد عنصر الارتكاز بوساطة حساب θ من العلاقة الآتية:

$$\theta = \mathrm{Min}_i\left[\frac{b'_i}{a'_{is}} > 0\right] = \frac{b'_t}{a'_{ts}} > 0 \qquad (7-3-4)$$
$$a'_{is} > 0$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو a'_{ts} وهو عنصر موجب[1] في العمود s.

3- نقوم بدراسة الثوابت p'_j فإذا كانت جميع تلك المعاملات $p'_j \ge 0$ فإن ذلك يعني أننا قد حصلنا على الحل المثالي للنموذجين المرافق والأصلي وننتقل إلى الخطوة (5).

ما إذا كان بعض الثوابت p'_j سالباً فإنه علينا أن نجعلها غير سالبة (حتى نحصل على حل مثالي غير سالب), وذلك بإجراء تبديل بين المتحولات القاعدية وغير القاعدية.

لذلك نقوم باختبار أكثر تلك الثوابت سالبية وليكن الثابت $p'_s < 0$ ونعتبر سطره سطراً للارتكاز، ثم نحدد عنصر الارتكاز من بين عناصر السطر وذلك بواسطة حساب θ من العلاقة الآتية:

$$\theta'' = \mathrm{Max}_j\left[\frac{b'_j}{a'_{sj}} < 0\right] = \frac{b'_t}{a'_{st}} \qquad (8-3-4)$$
$$a_{sj} < 0$$

أو بوساطة العلاقة المكافئة الآتية:

$$\theta' = \mathrm{Min}_j\left[\frac{-b'_j}{a'_{sj}} > 0\right] = \frac{-b'_t}{a'_{st}} > 0 \qquad (8a-3-4)$$
$$a_{sj} < 0$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو a'_{st} وهو عنصر سالب[2] من السطر s.

[1] إذا لم نجد عنصراً موجباً في العمود s الذي فيه $p'_s > 0$ فإن ذلك يدل على أن الحل المثالي غير محدود.

[2] إذا لن نجد عنصراً سالباً في السطر s الذي فيه $p'_s < 0$ فإن ذلك يعني أن الحل المثالي للمسألة غير محدود أو أن المسألة غير قابلة للحل لتعارض الشروط.

4- نقوم بإجراء الحسابات اللازمة لتبديل x_s بـ x_t فنحصل على جدول جديد, ثم نعود إلى الخطوة (3) لدراسة معاملات تابع الهدف من جديد, ونكرر ذلك حتى نجعل جميع تلك المعاملات p'_j تأخذ قيماً غير موجبة, وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المثالي للنموذجين الأصلي والمرافق لذلك ننتقل إلى الخطوة الآتية.

5- نضع المتحولات غير القاعدية في النموذج الأصلي مساوية للصفر (وهي المتحولات الموجودة في السطر الأعلى) فنحصل على الحل المثالي للنموذج الأصلي من عناصر العمود الأخير حيث: $x_i = b'_i \geq 0$ ثم نضع المتحولات غير القاعدية في النموذج المرافق (الموجودة على اليسار) مساوية للصفر فنحصل على الحل المثالي للنموذج المرافق من عناصر السطر الأخير حيث يكون لدينا:

$$-u_j = p'_j \Rightarrow u_j = -p'_j \geq 0$$

وهي قيم موجبة أو صفرية لأنه جعلنا $p'_j \leq 0$

4- نقوم بإجراء الحسابات اللازمة لتبديل xt بـ xs فنحصل على جدول حديد, ثم نعود إلى الخطوة (3) لدراسة معاملات تابع الهدف من جديد, ونكرر ذلك حتى نجعل جميع تلك المعاملات $p'_j \geq 0$ تأخذ قيماً غير سالبة, وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المثالي للنموذجين المرافق والأصلي لذلك ننتقل إلى الخطوة الآتية.

5- نضع المتحولات غير القاعدية في النموذج المرافق مساوية للصفر (وهي المتحولات الموجودة في السطر الأعلى) فنحصل على الحل المثالي للنموذج المرافق حيث يكون لدينا:

$$u_j = p_j \geq 0$$

وهي قيم موجبة لأننا جعلنا $p_j \geq 0$, ثم نضع المتحولات غير القاعدية في النموذج الأصلي (المتحولات الموجودة على الجانب الأيسر) مساوية للصفر, فنحصل على الحل المثالي للنموذج الأصلي حيث يكون لدينا:

$$x_i = b_i \geq 0$$

وهكذا نجد أن كل من الخوارزميتين تعطينا الحل المثالي لكل من النموذجين معاً, ويكفي أن نطبق أحدهما عند البحث عن الحل المثالي لكلا النموذجين كما يمكن الانتقال من أحدهما إلى الأخرى عند الضرورة.

وهكذا نجد أن كلا الخوارزميتين تعطينا الحل المثالي لكلا النموذجين معاً.

مثال (3):

أوجد الحل المثالي لكل من النموذج التالي ومرافقه باستخدام كل من الخوارزميتين المزدوجتين الأصلية والمرافقة:

$$Z = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned} u_1 \quad & -x_2 - 2x_3 \le -9 \\ u_2 \quad & x_1 - x_2 \le -1 \\ u_3 \quad & -x_1 - x_2 + 3x_3 \le -8 \\ u_4 \quad & x_1 - x_3 \le 4 \\ & x_1 \ge 0 \,,\ x_2 \ge 0 \,,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

إن النموذج المرافق له هو النموذج الآتي:

$$Z' = -9u_1 - u_2 - 8u_3 + 4u_4 \rightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned} & u_2 - u_3 + u_4 \ge 5 \\ - \ & u_1 - u_2 - u_3 \ge -1 \\ & -2u_1 + 3u_3 - u_4 \ge -4 \\ & u_1 \ge 0 \,,\ u_2 \ge 0 \,,\ u_3 \ge 0 \,,\ u_4 \ge 0 \end{aligned}$$

ولتطبيق الخوارزمية المزدوجة على النموذجين الأصلي والمرافق نحولهما إلى الشكل النظامي وذلك بإضافة متحولات إضافية y_1, y_2, y_3, y_4 إلى متراجحات النموذج الأصلي وطرح متحولات إضافية v_1, v_2, v_3 من متراجحات النموذج المرافق، فنحصل على ما يلي:

نقوم بوضع كلٍّ من هذين النموذجين في جدول خاص به، وحسب خوارزمية السمبلكس المعدلة ثم نقوم بحلهما بشكل منفصل ومتقابل وذلك لتوضيح مفاهيم وخطوات الخوارزمية المزدوجة لكل من النموذجين الأصلي والمرافق.

الشكل النظامي والقاعدي للنموذج الأصلي:

$$Z = 5x_1 - x_2 - 4x_3 + 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot y_3 + 0\cdot y_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned}
&y_1 \quad - x_2 - 2x_3 = -9\\
&y_2 + x_1 - x_2 \quad = -1\\
&y_3 - x_1 - x_2 + 3x_3 = -8\\
&y_4 + x_1 \quad - x_3 = 4\\
&x_j \geq 0, (j:1,2,3)\\
&y_i \geq 0, (i:1,2,3,4)
\end{aligned}$$

وهو يتضمن قاعدة جاهزة من المتحولات الإضافية y_1, y_2, y_3, y_4 ويأخذ الشكل القاعدي المطلوب.

الشكل القاعدي للنموذج المرافق:

$$Z' = -9u_1 - u_2 - 8u_3 + 4u_3 + 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 \rightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned}
&-v_1 \quad + u_2 - u_3 + u_4 = 5\\
&-v_2 - u_1 - u_2 - u_3 \quad = -1\\
&-v_3 - 2u_1 + 3u_3 - u_4 = -4\\
&u_j \geq 0, (j:1,2,3,4)\\
&v_i \geq 0, (i:1,2,3)
\end{aligned}$$

وحتى تشكل قاعدة لهذا النموذج نضرب تلك الشروط بـ (-1) فنحصل على الشكل القاعدي الآتي :

$$\begin{aligned}
&v_1 - u_2 \quad + u_3 - u_4 = -5\\
&v_2 + u_1 + u_2 + u_3 \quad = 1\\
&v_3 + 2u_1 - 3u_3 + u_4 = 4
\end{aligned}$$

نضع هذين النموذجين في جدول خوارزمية السمبلكس المعدلة فنحصل على الجدولين الآتيين:

حسب النموذج الأصلي:

			$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	
	القاعدة		x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b_i}$
u_1	y_1		0	-1	-2	-9 ←
u_2	y_2		1	-1	0	-1
u_3	y_3		-1	-1	3	-8
u_4	y_4		1	0	-1	4
	تابع الهدف		5	-1	-4	Z - 0

بما أن بعض $b_i<0$ نختار أكثرها سالبية (-9) ثم نحسب θ'_1 فنجد أن:

$$\theta' = \text{Min}\left[\frac{-1}{-1}, \frac{-4}{-2}\right] = \frac{-1}{-1}$$

وبذلك يكون (-1) هو عنصر الارتكاز، وبإجراء تبديل x_2 بـ y_1 نحصل على الجدول التالي:

حسب النموذج المرفق:

		y_1	y_2	y_3	y_4	
	القاعدة	u_1	u_2	u_3	u_4	$\mathbf{p_j}$
x_1	v_1	0	-1	1	-1	-5
x_2	v_2	1	1	1	0	1
x_3	v_3	2	0	-3	1	4
	b_i تابع الهدف المرافق	-9	-1	-8	4	$Z' - 0$

بما أن بعض $b_i<0$ نختار أكثرها سالبية (-9) ثم نحسب θ''_2 فنجد أن:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{1}{1}, \frac{4}{2}\right] = \frac{1}{1}$$

وبذلك يكون (1) هو عنصر الارتكاز، وبإجراء تبديل u_1 بـ v_2 نحصل على الجدول التالي:

			$-v_1$	$-u_1$	$-v_3$	
	القاعدة		x_1	y_1	x_3	b'_i
v_2	x_2		0	−1	2	9
u_2	y_2		1	−1	2	8
u_3	y_3		−1	−1	5	1
u_4	y_4		1	0	−1	4
	تابع الهدف		5 ↑	−1	−2	Z+9

وبما أن الثوابت b'_i أصبحت موجبة ننتقل إلى المرحلة الثانية وندرس المعاملات P'_j الموجبة في السطر الأخير ونختار أكبرها وهو (5), ثم نحدد عنصر الارتكاز من:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{8}{1}, \frac{4}{1}\right] = \frac{4}{1}$$

فيكون (1) هو عنصر الارتكاز وبإجراء تبديل x_1 بـ y_4 نحصل على الجدول الآتي:

			x_2	y_2	y_3	y_4	
	القاعدة		v_2	u_2	u_3	u_4	p'_j
x_1	v_1		0	−1	1	−1	−5 ←
y_1	u_1		1	1	1	0	1
x_3	v_3		−2	−2	−5	1	2
	b'_i		9	8	1	4	Z′ + 9

وبما أن المعاملات b'_i أصبحت موجبة فإننا ننتقل إلى المرحلة الثانية وندرس الثوابت b'_i السالبة نجد أن أحدها سالب (−5), ونحدد عنصر الارتكاز من العلاقة:

$$\theta' = \text{Max}\left[\frac{8}{-1}, \frac{4}{-1}\right] = \frac{4}{-1}$$

فيكون (−1) هو عنصر الارتكاز وبإجراء تبديل u_4 بـ v_1 نحصل على الجدول التالي:

		$-u_4$	$-u_1$	$-v_3$	
	القاعدة	y_4	y_1	x_3	
v_2	x_2	0	−1	2	9
u_2	y_2	−1	−1	3	4
u_3	y_3	1	−1	4	5
v_1	x_1	1	0	−1	4
	تابع الهدف	−5	−1	3 ↑	Z-11

ومن دراسة معاملات السطر الأخير نلاحظ أنه مازال يتضمن عنصراً موجباً (3), نعتبر عموده عموداً للارتكاز، ونحدد عنصر الارتكاز من العلاقة:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{9}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right] = \frac{5}{4}$$

إذن عنصر الارتكاز هو (4).

نبدل x_3 بـ y_3 ونجري الحسابات فنحصل على الجدول الآتي:

		x_2	y_2	y_3	x_1	
	القاعدة	v_2	u_2	u_3	v_1	
y_4	u_4	0	1	−1	−1	5
y_1	u_1	1	1	1	0	1
x_3	v_3	−2	−3	−4	1	−3 ←
	تابع الهدف	9	4	5	4	$Z' - 11$

من دراسة الثوابت في العمود الأخير نلاحظ أنه مازال أحدها سالباً وهو (−3), لذلك نعتبر سطره سطراً للارتكاز, ونحدد عنصر الارتكاز من العلاقة التالية:

$$\theta'' = \text{Max}\left[\frac{9}{-2}, \frac{4}{-3}, \frac{5}{-4}\right] = \frac{5}{-4}$$

وبذلك يكون (−4) هو عنصر الارتكاز, نبدل u_3 بـ v_3 ونجري الحسابات فنحصل على الجدول الآتي:

		$-u_4$	$-u_1$	$-u_3$	
	القاعدة	y_4	y_1	y_3	الثوابت
v_2	x_2	$-2/4$	$-2/4$	$-2/4$	$26/4$
u_2	y_2	$-2/4$	$-1/4$	$-3/4$	$1/4$
v_3	x_3	$1/4$	$-1/4$	$1/4$	$5/4$
v_1	x_1	$5/4$	$-1/4$	$1/4$	$21/4$
	تابع الهدف	$-23/4$	$-1/4$	$-3/4$	$Z-\frac{59}{4}$

وبـذلك نكـون قـد توصـلنا إلـى الحـل المثـالي للنمـوذج الأصلي ونحصل عليه بوضع:

$y_4 = \quad y_1 = \quad y_3 = \quad 0$

فنجد أن:

$$x_1 = \frac{21}{4}\ ,\ x_2 = \frac{26}{4}\ ,\ x_3 = \frac{5}{4}\ ,\ y_2 = \frac{1}{4}$$

		x_2	y_2	x_3	x_1	
	القاعدة	v_2	u_2	v_3	v_1	
y_4	u_4					$23/4$
y_1	u_1					$1/4$
y_3	u_3					$3/4$
	تابع الهدف	$26/4$	$1/4$	$5/4$	$21/4$	$Z'-\frac{59}{4}$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل المثالي للنموذج المرافق ونحصل عليه بوضع:

$v_2 = u_2 = v_3 = v_1 = 0$

فنجد أن:

$$u_4 = \frac{23}{4}\ ,\ u_1 = \frac{1}{4}\ ,\ u_3 = \frac{3}{4}$$

وأن أكبر قيمة لتابع الهدف تساوي:

$$Z-\frac{59}{4}=0\Rightarrow \text{Max } Z=\frac{59}{4}$$

ويمكننـا بـنفس الوقـت أن نحصـل علـى الحـل المثـالي للنموذج المرافق بوضع:

$v_2=u_2=v_3=v_1=0$

فنجد أن:

$-u_4=-23/4,\quad -u_1=-1/4,\quad -u_3=-3/4$

أي أن:

$u_4=23/4,\quad u_1=1/4,\quad u_3=3/4$

وهو يعطينا أن:

$$Z'-\frac{59}{4}=0\Rightarrow \text{Min } Z'=\frac{59}{4}$$

وأن أصغر قيمة لتابع الهدف z' تساوي:

$$Z'-\frac{59}{4}=0\Rightarrow \text{Min } Z'=\frac{59}{4}$$

ويمكننا في الوقت نفسه أن نحصل على الحل المثالي للنموذج الأصلي بوضع:

$y_4=y_1=y_3=0$

فنجد أن:

$$x_2=26/4,\quad x_3=5/4,\quad x_1=21/4,\quad y_2=1/4$$

وهو يعطينا أيضاً أن:

$$Z-\frac{59}{4}=0$$

أي أن:

$$\text{Max } Z=\frac{59}{4}$$

مثال (4):

أوجد أكبر قيمة للتابع:

$$Z = 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط التالية:

$$\begin{aligned}
x_2 + 2x_3 &\geq 10 \\
-x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1 + x_2 - 4x_3 &\geq -1 \\
-x_1 + x_3 &\geq -1 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

وذلك باستخدام الخوارزمية المزدوجة للنموذج الأصلي, ثم استنتج الحل المثالي للنموذج المرافق.

نحول النموذج الأصلي إلى شكل نظامي وقاعدي فنحصل على:

$$\begin{aligned}
Z &= 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 \rightarrow \text{Max} \\
y_1 &\quad - x_2 - 2x_3 = -10 \\
y_2 + x_1 - x_2 &\quad = -1 \\
y_3 - x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\
y_4 + x_1 &\quad - x_3 = 1
\end{aligned}$$

نضع المعاملات في جدول مشترك للنموذجين الأصلي والمرافق.

			$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	
	القاعدة		x_1	x_2	x_3	الثوابت
u_1	y_1		0	−1	−2	−10 ←
u_2	y_2		1	−1	0	−1
u_3	y_3		−1	−1	4	1
u_4	y_4		1	0	−1	1
	تابع الهدف		4	−5	−4	Z-0

نقوم بدراسة الثوابت فنجد أن أكثرها سالبية هو (10−) ثم نقسم عناصر السطر الأخير على الأول فنجد أن:

$$\theta' = \text{Min}\left[\frac{-5}{-1}, \frac{-4}{-2}\right] = \frac{-4}{-2}$$

فيكون (2−) هو عنصر الارتكاز, لذلك نقوم بتبديل x_3 بـ y_1 فنحصل على الجدول الآتي:

		$-v_1$	$-v_2$	$-u_1$	
	القاعدة	x_1	x_2	y_1	الثوابت
v_3	x_3	0	1/2	−1/2	5
u_2	y_2	1	−1	0	−1
u_3	y_3	−1	−3	2	−19←
u_4	y_4	1	1/2	−1/2	6
	تابع الهددف	4	−3	−2	Z+20

وهنا نلاحظ أكثر عناصر العمود الأخير سالبة هو (19−)، وبتقسيم عناصر السطر الأخير على السطر الثالث فنجد أن عنصر الارتكاز هو (3−) لأن قيمة θ تساوي $\theta' = \text{Min}\left[\frac{-3}{-3}\right] = \frac{-3}{-3}$ لذلك نبدل x_2 بـ y_3 فنحصل على الجدول الآتي:

		$-v_1$	$-u_3$	$-u_1$	
	القاعدة	x_1	y_3	y_1	الثوابت
v_3	x_3	−1/6	1/6	−1/3	11/6
u_2	y_2	4/3	−1/3	−2/3	16/3
v_2	x_2	1/3	−1/3	−2/3	19/3
u_4	y_4	5/6	1/6	−1/6	17/6
	تابع الهدف	5 ↑	−1	−4	Z+39

وهنا نلاحظ أن جميع عناصر العمود الأخير قد أصبحت موجبة، ولكن السطر الأخير مازال يتضمن عنصراً موجباً هو (5)، لذلك نختار العمود الأول كعمود ارتكاز، ونحدد منه عنصر الارتكاز فيكون $\left(\frac{5}{6}\right)$، ثم نبدل x_1 بـ y_4 فنحصل على الجدول الآتي:

		$-u_4$	$-u_3$	$-u_1$	
	القاعدة	y_4	y_3	y_1	الثوابت
v_3	x_3				12/5
u_2	y_2				4/5
v_3	x_2				26/5
v_1	x_1				17/5
	تابع الهدف	−6	−2	−3	Z+22

وهو يعطينا الحل المثالي للنموذج الأصلي الآتي:

$$x_1 = 17/5\ ,\ x_2 = 26/5\ ,\ x_3 = 12/5 \Rightarrow \qquad \text{Max}\, Z = -22$$

كما يعطينا الحل المثالي للنموذج المرافق الآتي:

$$u_1 = 3\ ,\ u_2 = 0\ ,\ u_3 = 2\ ,\ u_4 = 6 \Rightarrow \qquad \text{Min}\, Z' = -22$$

IV- نظريات مختلفة حول الترافق:

نظرية (1):

إن النموذج المرافق للنموذج المرافق هو النموذج الأصلي نفسه, أي أن كل من النموذجين مرافق للآخر (البرهان سهل).

نظرية (2):

إذا كان $(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ حلاً مقبولاً للنموذج الأصلي من نوع Max وكان $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_m)$ حلاً مقبولاً للنموذج المرافق من نوع Min فإن قيمة تابع الهدف للنموذج الأصلي لا تتجاوز قيمة تابع الهدف المرافق عند هذين الحلين, أي أنه يكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \qquad (1-4-4)$$

وذلك من أجل جميع الحلول المقبولة لكل من النموذجين (بما في ذلك الحل المثالي).

البرهان:

بما أن $(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ هو حل مقبول للنموذج الأصلي إذن فهو يحقق الشروط الخطية المفروضة عليه, أي يكون لدينا:

حيث أن:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{in}x_n \le b_i$$
$$(i:1,2,3,\ldots\ldots m)$$

نضرب طرفي هذه المتراجحة بـ u_i (علماً بأن $u_i \ge 0$) فنحصل على أن:

حيث أن:

$$u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i u_i$$
$$(i:1,2,3,\ldots\ldots\ldots n)$$

ثم نأخذ مجموع كل من الطرفين على جميع قيم الدليل i (على جميع المتراجحات) فنحصل على أن:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \qquad (A)$$

ومن جهة أخرى بما أن $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_m)$ هو حل مقبول للنموذج المرافق, إذن فهو يحقق الشروط الخطية المفروضة عليه, أي يكون لدينا:

حيث أن:

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mj}u_m \ge p_j$$
$$(j:1,2,3,\ldots\ldots\ldots,n)$$

وبضرب طرفي هذه المتراجحة بـ x_j (علماً بأن $x_j \ge 0$) نحصل على أن:

$$x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \ge p_j x_j$$

ثم نأخذ مجموع كل من الطرفين على جميع قيم الدليل j (على جميع المتراجحات) فنحصل على أن:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad (B)$$

وبما أن:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

وبمقارنة (A) و(B) نستنتج فوراً أن:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$$

وهو المطلوب.

نظرية (3):

إذا كان تابع الهدف في أحد النموذجين المترافقين غير محدود (ليس له حل مثالي) فإن النموذج الآخر يكون غير قابل للحل لتعارض الشروط (ليس له أي حل مقبول).

البرهان:

إذا كان تابع الهدف في النموذج الأصلي غير محدود (∞) وكان للنموذج المرافق أي حل مقبول, فإن قيمة تابع الهدف في النموذج المرافق تكون محدودة, ولكن العلاقة (4-4-1) تشير إلى أن قيمة تابع الهدف الأصلي أصغر أو تساوي قيمة تابع الهدف المرافق وهذا يعني أن قيمة تابع الهدف الأصلي أصبحت محدودة وهذا يتناقض مع الفرض، وبذلك تكون النظرية صحيحة.

نظرية (4):

إذا كان أحد النموذجين المترافقين غير قابل للحل بسبب تعارض الشروط فإن النموذج الآخر إما أن يكون تابعه غير محدود أو أن تكون المسألة غير قابلة للحل بسبب تعارض الشروط.

البرهان:

إذا كان النموذج الأصلي غير قابل للحل فإنه يوجد في عمود الثوابت b_i ثابتاً سالباً $b_i<0$ وتكون جميع عناصر السطر المقابلة له غير سالبة, وهذا يعني أنه يوجد في الجدول المزدوج بالنسبة للنموذج المرافق عنصر سالب في معاملات تابع الهدف هو $b_i<0$ وتكون جميع عناصر العمود المقابل له غير موجبة, وهذا يعني أن تابع الهدف المرافق غير محدود.

أما بالنسبة لحالة كون المسألة غير قابلة للحل بسبب تعارض الشروط فنستدل عليها بواسطة المثال الآتي:

مثال (5):

إذا كان النموذج الأصلي هو:

$$z = 3x_1 - x_2 \rightarrow \text{Max}$$

والشروط:

$$-2x_1 + 2x_2 \geq -1$$
$$2x_1 - 2x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

فإذا جمعنا طرفي المتراجحتين لوجدنا أن $2 \geq 0$، وهذا تعارض في الشروط.

أما بالنسبة للنموذج المرافق فنجد أنه بعد تحويل الشروط فإننا نجد أن :

$$z' = u_1 - 3u_2 \rightarrow \text{Min}$$

والشروط:

$$2u_1 - 2u_2 \geq 3$$
$$-2u_1 + 2u_2 \geq -1$$

ويجمع طرفي المتراجحتين نجد أن: $2 \geq 0$ وهذا تعارض في الشروط أي أنه إذا كان النموذج الأصلي ذا شروط متعارضة فإن النموذج المرافق قد يكون ذا تابع هدف غير محدود أو ذا شروط متعارضة.

نظرية (5): /هامة جداً/

إذا كان لأحد النموذجين المترافقين حل مثالي محدود, فإن للنموذج الأخر حلاً مثالياً محدوداً, وإن قيمتي تابعي الهدف الحديتين متساويتان، أي أن:

$$\text{Max } Z = \text{Min } Z' \qquad (2-4-4)$$

البرهان:

لنفترض أننا قد توصلنا بالنسبة للنموذج الأصلي إلى حل مثالي ووضعنا النتائج في جدول مزدوج كالتالي:

		$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	.	$-v_n$	التابع المرافق
	القاعدة	x_1	x_2	x_3	.	x_n	الثوابت
u_1	y_1	a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}	.	a'_{1n}	b'_1
u_2	y_2	a'_{21}	a'_{22}	a'_{23}	.	a'_{2n}	b'_2
.	.	.	.	.	.	.	.
u_t	y_t	a'_{t1}	a'_{t2}	a'_{t3}	.	a'_{tn}	b_t
.	.	.	.	.	.	.	.
u_m	y_m	a'_{m1}	a'_{m2}	a'_{m3}	.	a'_{mn}	b'_m
	تابع الهدف	p'_1	p'_2	p'_3	.	p'_n	$\frac{Z'-p'_o \quad \text{Max}}{Z-p'_o \quad \text{Min}}$

وبما أننا افترضنا أن هذه الوضعية هي وضعية الحل المثالي للنموذج الأصلي, فإن هذا يعني أن جميع الثوابت في العمود الأخير $b'_i \geq 0$ هي ثوابت غير سالبة, وإن جميع المعاملات في السطر الأخير $p'_j \leq 0$ هي معاملات غير موجبة, وللحصول على ذلك الحل المثالي نضع جميع المتحولات غير القاعدية $(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ مساوية للصفر.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots\ldots = x_n = 0$$

فنحصل على أن:

$$\text{Max } Z = p'_o$$

أمـا بالنسـبة للنمـوذج المرافـق فنجـد أن العمـود الأخيـر يعطينـا أن تـابع الهـدف المرافق Z' يساوي:

$$Z' = b'_1u_1 + b'_2u_2 + b'_3u_3 + ... + b'_mu_m + p'_o$$

وبمـا أن جميـع المعـاملات $b'_i \geq 0$ فإننـا نحصـل علـى حـل قاعـدي إذا وضـعنا جميع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر أي:

$$u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_m = 0$$

فتأخذ المتحولات الأخرى القيم:

$$-v_1 = p'_1 \ , \ -v_2 = p'_2 \ , \ -v_3 = p'_3 \ , ... , \ -v'_n = p'_n$$

وهـو حـل قاعـدي غيـر سـالب لأن جميـع المعـاملات $p'_i \leq 0$ كمـا رأينـا سـابقاً وبذلك يكون هو الحل المثالي المطلوب للنموذج المرافق, ومنه نستنتج أن هذه الوضعية تعطينا أن:

$$Min\, Z' = p'_o$$

وبمقارنة النتيجتين نجد أن:

$$Max\, Z = p'_o = Min\, Z'$$

وهو المطلوب برهانه.

نتيجة هامة:

إذا كـــان $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ حـــلاً مثاليـــاً للنمـــوذج الأصـــلي وكـــان $(u'_1, u'_2, ..., u'_m)$ حلاً مثالياً للنموذج المرافق فإنه بناء على النظرية السابقة يكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j = \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i \qquad (3-4-4)$$

نظرية (6):

إن الشـرط الـلازم والكـافي ليكـون الحـلان المقبـولان $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ و $(u'_1, u'_2, ..., u'_m)$ حلين مثاليين للنموذجين الأصلي ومرافقه, هو أن تكون قيمتا تابعي الهدف لهما متساويتين, أي أن يكون:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j = \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i$$

لزوم الشرط: إن لزوم الشرط هو نتيجة واضحة من النظرية (5) السابقة.

كفاية الشرط: لنفترض أن الحلين المقبولين

$$x'(x'_1, x'_2, ..., x'_n) \quad , \quad u'(u'_1, u'_2, ..., u'_m)$$

يحققان الشرط السابق:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j = \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i$$

ويجب أن نبرهن على أنهما حلان مثاليان للنموذجين الأصلي والمرافق.

إذا لم يكن x' و u' حلين مثاليين للنموذجين فإننا نفترض أن الحلين المثاليين للنموذجين الأصلي ومرافقه هما:

$x^*(x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$, $u^*(u^*_1, u^*_2, ..., u^*_m)$

وأنه بناء على مفهوم الحل المثالي للنموذجين يكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j < \sum_{j=1}^{n} p'_j x^*_j \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} b'_i u^*_i < \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i$$

وبما أنه لدينا فرضاً أن: $\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j = \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i$

إذن نستنتج أن الحلين المثاليين المفروضين يحققان المتراجحة:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x^*_j > \sum_{i=1}^{m} b'_l u^*_i$$

وهذا يتعارض تماماً مع النظرية (5) السابقة, وبذلك يكون قد تم البرهان على كفاية الشرط وعلى صحة النظرية.

نظرية (7):

إن الشـــــرط الـــــلازم والكـــــافي ليكـــــون الحـــــلان المقبـــــولان $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ و$(u'_1, u'_2, ..., u'_m)$ للنموذجين الأصلي ومرافقه حلين مثاليين لهما هو أن يحققا الشرطين التاليين معاً:

$$x'_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u'_i - p'_j) = 0 \qquad (4-4-4)$$

حيث أن: (j:1,2,3,……..,n)

$$u'_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j - b'_i) = 0 \qquad (5-4-4)$$

حيث أن: (i:1,2,3,……..,m).

وهذا يعني أنه يلزم ويكفي أن يكون أحد الجدائين مساوياً للصفر في كل من العلاقتين (4-4-4) و(4-4-5).

<u>وبعبارة أخرى</u>: إذا كانت قيمة إحدى مركبات الحل المثالي x'_j للنموذج الأصلي غير معدومة $(x_j \neq 0)$ فإن الحل المثالي للنموذج المرافق يجعل المتراجحة المقابلة لذلك المتحول x_j مساواة تامة.

أي يكون لدينا:

$$x'_j \neq 0 \Rightarrow a_{1j}u'_1 + a_{2j}u'_2 + ... + a_{mj}u'_m = p'_j$$

وبالمقابل نجد أنه إذا كانت إحدى مركبات الحل المثالي u'_i للنموذج المرافق غير معدومة $(u'_i \neq 0)$ فإن المتراجحة المقابلة لـ u_i تصبح مساواة تامة. أي أن:

$$u'_i \neq 0 \Rightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b'_i$$

<u>البرهان:</u>

1- لـزوم الشـرط: لنفتـرض أن $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ و$(u'_1, u'_2, ..., u'_m)$ حـلان مثاليـان للنمـوذج الأصـلي ومرافقـه, وبمـا أن هـذين الحلـين مـن الحلـول المقبولـة, إذن يحققـان العلاقتين (A) و(B) في النظرية (2) السابقة.

وبالمقارنة نجد أن:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j \le \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u'_i = \sum_{i=1}^{m} u'_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_i \le \sum_{i=1}^{n} b'_i u'_i$$

وبما أنه لدينا من النظرية (5) أن:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j = \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i$$

فإن الحدود الأربعة في العلاقة السابقة تصبح متساوية ويكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u'_i$$

ومنها نجد أن:

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum a_{ij} x'_i - p'_j) = 0$$

وبما أن المجموع الأول مؤلف من الكميات غير السالبة $x'_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u'_i - p'_j)$, فلا يمكن أن يساوي الصفر إلا إذا كان كل منها مساوياً للصفر, لذلك نستنتج أنه لا بد وأن يكون:

$$x'_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u'_i - p'_j) = 0$$

وبطريقة مشابهة نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i = \sum_{i=1}^{m} u'_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} u'_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j - b'_i) = 0$$

وبما أن المجموع الأول مؤلف من الكميات غير السالبة $u'_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j - b'_i)$, فإنه لا يمكن أن يساوي الصفر إلا إذا كان كل منها مساوياً للصفر.

لذلك نستنتج أنه لا بد وأن يكون:

$$u'_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b'_i) = 0$$

2- كفاية الشرط: لنفترض أن $(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ و$(u'_1, u'_2, ..., u'_m)$ حلان مقبولان للنموذجين الأصلي ومرافقه ويحققان الشرط (4-4-4) و(4-4-5) أي أنه من أجل جميع قيم j يكون لدينا:

$$x'_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u'_i - p'_j) = 0 \Rightarrow x'_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u'_i = x'_j p'_j$$

وبأخذ مجموع الطرفين على j نحصل على أن:

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u'_i = \sum_{j=1}^{n} p'_j x'_j$$

وأنه من أجل جميع قيم i يكون لدينا:

$$u'_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j - b'_i) = 0 \Rightarrow u'_i \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ii}x_j = b'_i u'_i$$

وبأخذ مجموع الطرفين على i نحصل على أن:

$$\sum_{i=1}^{n} u'_i(a_{ij}x'_j - b'_i) = \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i$$

وبمقارنة هاتين النتيجتين نجد أن:

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j \cdot x'_j = \sum_{i=1}^{m} b'_i u'_i$$

أي أن الحلين $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ و$(u'_1, u'_2, ..., u'_m)$ حلان مثاليان للنموذج الأصلي ومرافقه (حسب النظرية (6) السابقة).

نظرية (8):

إن كلاً من النموذجين المترافقين يكافئ نموذجاً خطياً شروطه مؤلفة من اجتماع شروط كل من النموذجين مضافاً إليها شرط مؤلف من تساوي تابعي الهدف لكل منهما.

أي أن كل من النموذجين يكافئ النموذج الاندماجي الآتي:

$$\sum_{j}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i:1,2,3,.....,k)$$

$$\sum_{j}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i: k+1,.....,n)$$

$$x_j \ge 0, (j:1,2,3,....., \ell), x_j \ge\!< 0, (j: \ell + 1,....., n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq p_j \qquad (j:1,2,3,\ldots..,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = b_i \qquad (j: L+1,\ldots..,n)$$

$$u_i \geq 0, (i:1,2,3,.....,k), u_i \geq\!< (i:k+1,.....,m)$$

والشرط الإضافي:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$$

والذي يحل محل تابع الهدف للنموذج الجديد.

البرهان:

ومن الواضح أن أي حل مقبول للنموذج الإندماجي يحقق كل من النموذجين (وكذلك الحل المثالي) وأن أي حلين مثاليين لكل من النموذجين يحققان الشروط السابقة بما فيها الشرط الإضافي.

تمرينات

1- لنفترض أنه لدينا النموذج الآتي:

$$Z = -10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 19$$
$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 57$$
$$x_j \geq 0, (j: 1,2,3,4,5)$$

أ- أوجد النموذج المرافق ثم أوجد الحلين المثاليين لكل من النموذجين.

ب- أضف إلى الشروط السابقة الشرط:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20$$

ج- ثم أوجد الحلين المثاليين لكل من النموذجين الجديدين (الأصلي ومرافقه).

2- لنفترض أنه لدينا النموذج الآتي:

$$Z = -x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 14x_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 24$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_j \geq 0, (j: 1,2,3,4)$$

أ- أوجد النموذج المرافق ثم اوجد الحلين المثاليين لكل من النموذجين.

ب- أضف إلى الشروط السابقة الشرط:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$$

ج- ثم أوجد الحلين المثاليين للنموذجين الجديدين (الأصلي والمرافق).

3- ليكن لدينا النموذج الآتي:

$$Z = 5x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 20x_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 8x_4 \leq 8$$
$$2x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 4x_4 \leq 4$$
$$0 \leq x_j \leq 1, (j: 1,2,3,4)$$

أوجد النموذج المرافق، ثم أوجد الحلين المثاليين لكل من النموذجين.

4- ليكن لدينا النموذج الآتي:

$$Z = 9x_1 + x_2 - 15x_3 - x_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$-3x_1 + 2x_2 + 9x_3 + x_4 \leq 7$$
$$6x_1 + 16x_2 - 12x_3 - 2x_4 \leq 10$$

أوجد النموذج المرافق ثم أوجد الحلين المثاليين لكل من النموذجين.

الفصل الخامس
البرمجة الصحيحة (التامة)

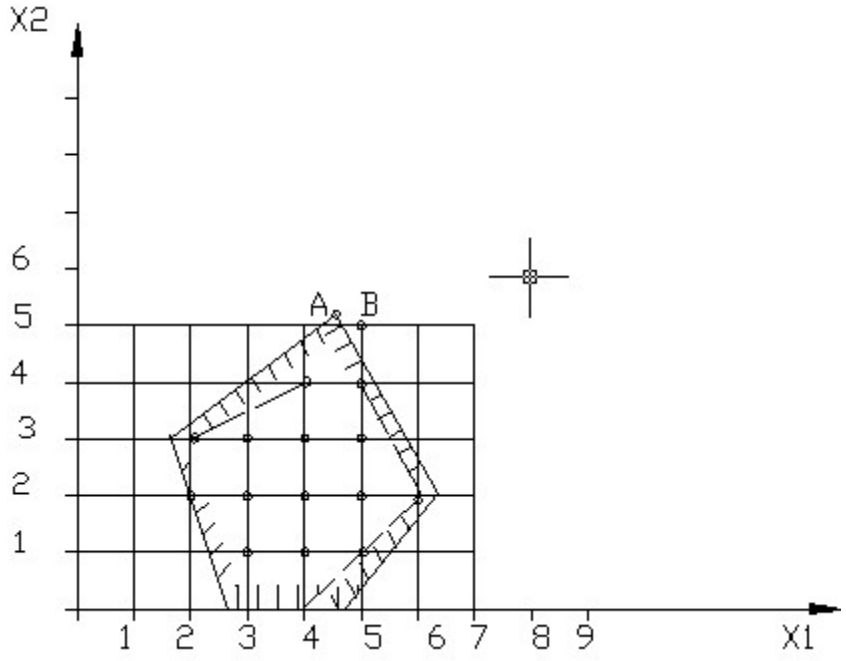
I - تمهيد:

نعتقد أن القارئ أصبح على اقتناع تام بأنه يمكن صياغة عدد كبير من المسائل الاقتصادية والهندسية والتقنية...الخ, على شكل نماذج رياضية خطية. وأن معالجة هذه المسائل يتم بوساطة طريقة السمبلكس وتعديلاتها, وإن حلها المثالي يكون مؤلفاً من أعداد حقيقية صحيحة أو غير صحيحة, لذلك سنسميه الحل المثالي العام للمسألة المفروضة.

غير أن بعض هذه المسائل لا تقبل إلا حلولاً صحيحة (وغير سالبة), فإذا كانت متحولات النموذج الخطي هي عدد الآلات أو عدد وسائل النقل أو عدد العمال ... الخ, فإنه من الواضح أن هذه المتحولات لا تقبل حلولاً غير صحيحة, لذلك فإنه يتوجب علينا في مثل هذه الحالات البحث عن الحل المثالي الصحيح للمسألة المفروضة.

قد يخطر لبعضهم أن الحل المثالي الصحيح هو عبارة عن حل ناتج عن تقريب عددي للحل المثالي العام, ولكن هذه الفكرة خاطئة تماماً، لأن عملية التقريب إلى الأعلى أو إلى الأدنى, قد تعطينا نقطة واقعة خارج منطقة الحلول المقبولة, فمثلاً إذا كانت منطقة الحلول كما في الشكل (5−1) وكان الحل المثالي A (4.6, 5.2) فإن تقريبه هو النقطة (5,5) تقع خارج منطقة الحلول المقبولة.

وللحصول على الحل المثالي الصحيح علينا أن نبحث في منطقة الحلول المقبولة عن الحلول الصحيحة, ثم عن الحل المثالي من بين تلك الحلول الصحيحة.



شكل(5-1)

وللحصول على الحلول الصحيحة المقبولة نقوم برسم شبكة الأعداد الصحيحة على كل من المحورين ox_1, ox_2, فتكون مجموعة النقاط الناتجة عن تقاطع خطوط هذه الشبكة والواقعة ضمن منطقة الحلول المقبولة، هي مجموعة الأعداد الصحيحة المقبولة، وهي عبارة عن مجموعة من النقاط المنعزلة، والتي تتميز بأن إحداثيات كل منها مؤلف من أعداد صحيحة غير سالبة, كما هو مبين على الشكل رقم (5-1) السابق.

والسؤال الآن: كيف نحدد الحل المثالي الصحيح من بين تلك الحلول الصحيحة؟.

يمكن البحث عن الحل المثالي الصحيح بوساطة الغلاف المحدب لمجموعة الحلول الصحيحة والواقعة ضمن منطقة الحلول المقبولة, لذلك نقوم بتعريف الغلاف المحدب لمجموعة N, حيث أن $N \in R^n$ بما يلي:

تعريف غلاف مجموعة N:

هو أصغر مجموعة محدبة تحتوي جميع نقاط المجموعة N ونرمز لذلك الغلاف بالرمز (N)

ويمكننا رياضياً تعريف غلاف المجموعة N بأنه مجموعة النقاط A المرتبطة خطياً بالعلاقة:

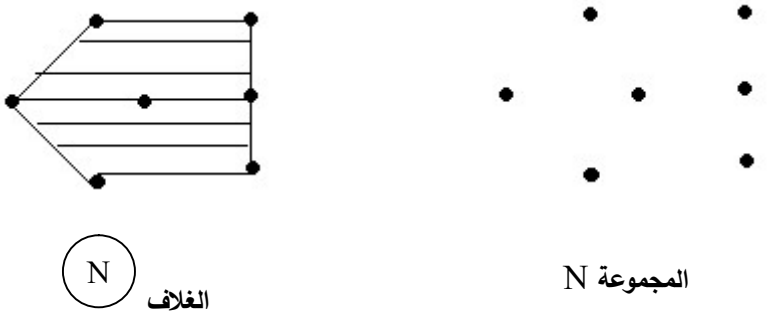
$$A = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i$$

حيث إن: A_i هي نقاط كيفية من N وأن عددها s محدوداً.

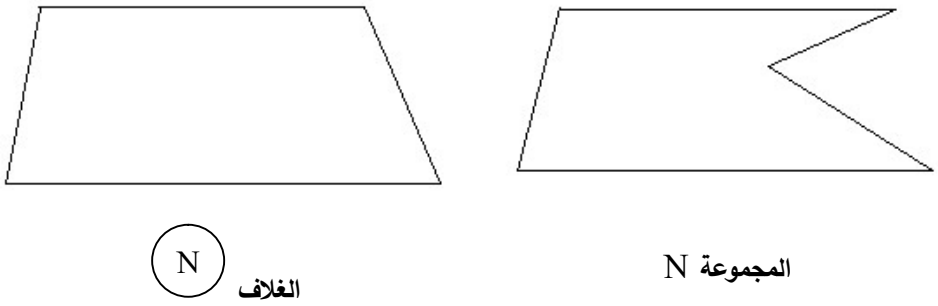
وحيث إن: $0 \le \alpha_i \le 1$ وإن: $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$

وواضح من هذا التعريف أن غلاف أية مجموعة N هو مجموعة محدبة بغض النظر عما إذا كانت N نفسها محدبة أم لا.

ويمكن للغلاف (N) أن يكون مغلقاً أو مفتوحاً, ويكون الغلاف مغلقاً إذا كانت N مغلقة, ولكنه ليس بالضرورة أن يكون مفتوحاً إذا كانت N مفتوحة, وكأمثلة على الغلاف المغلق نأخذ الأشكال التالية:



شكل رقم (5-2)



شكل رقم (5-3)

وبذلك يأخذ النموذج الخطي ذو المتحولات الصحيحة الشكل الآتي:

يطلب إيجاد القيم الصحيحة $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ التي تعطينا أكبر قيمة للتابع:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \rightarrow Max$$

والمعرف على الشروط الرياضية التي تحدد لنا حدود أو سطوح غلاف مجموعة النقاط الصحيحة ضمن منطقة الحلول المقبولة.

ولكن صعوبة صياغة الشروط الرياضية التي تحدد حدود أو سطوح ذلك الغلاف, إن لم نقل استحالتها في أغلب الأحيان, تجعلنا نلجأ إلى طرائق أخرى سهلة التطبيق والبرمجة وأهمها:

1- طريقة التجريب أو الاختبار.

2- طريقة التفريع والحدود.

3- طريقة الاقتطاع (أسلوب غوموري).

وقبل أن نتعرض إلى كل من هذه الطرائق نشير إلى أن عملية البحث عن الحل المثالي الصحيح تبدأ بعد حصولنا على الحل المثالي العام، والذي نحصل عليه بوساطة استخدام طريقة السمبلكس وتعديلاتها السابقة.

فإذا كان الحل المثالي العام صحيحاً, فإن المسألة تكون قد حلت ولا حاجة لمتابعة البحث عن الحل الصحيح.

أما إذا كان الحل المثالي الذي حصلنا عليه غير صحيح (إحدى مركباته على الأقل غير صحيحة) فإننا لا بد وأن نقوم بالبحث عن الحل المثالي الصحيح بإتباع إحدى الطرائق السابقة.

II- طريقة التجريب لإيجاد الحلول المثالية الصحيحة:

تعتمد هذه الطريقة على فكرة بديهية جداً, وهي أن نقوم باستخلاص جميع النقاط الصحيحة الممكنة, ثم تجريبها فيما إذا كانت تحقق الشروط المفروضة على النموذج أم لا, وبذلك نفرز النقاط المقبولة فنحصل على مجموعة الحلول الصحيحة المقبولة, ثم نقوم

بحساب قيمة تابع الهدف Z عند كل نقطة مقبولة منها, ونختار النقطة الصحيحة المقبولة التي تجعل تابع الهدف Z أكبر ما يمكن.

مثال:

لتكن لدينا المسألة التالية:

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$6x_1 + 9x_2 \leq 54$$
$$7x_1 + 6x_2 \leq 42$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

وأن x_1, x_2 صحيحان.

الحل:

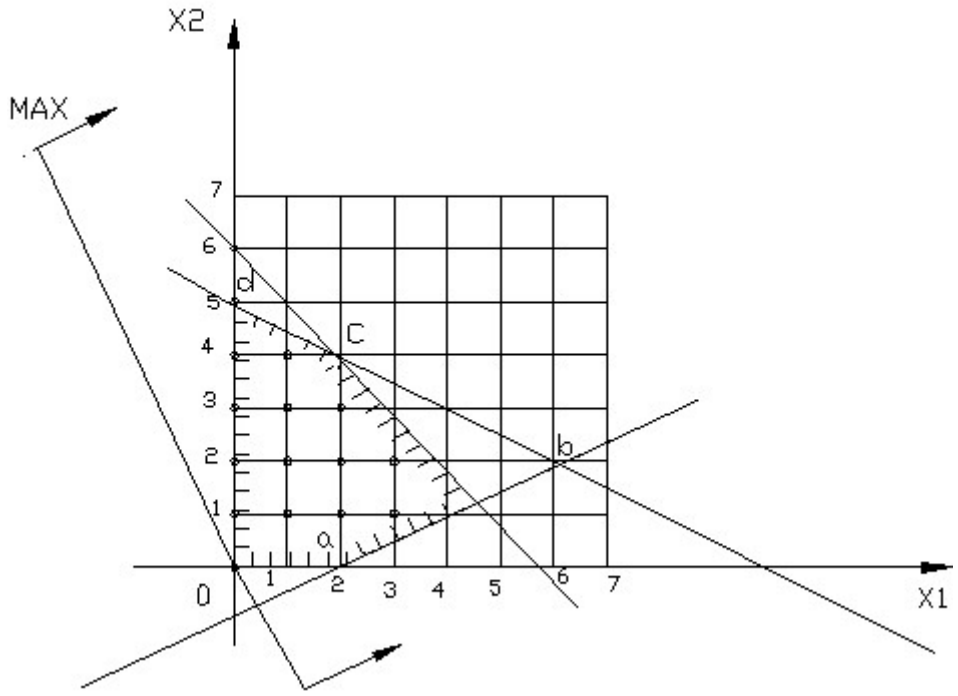
نقوم بإيجاد الحل المثالي العام بيانياً فنجد أن منطقة الحلول المقبولة هي المنطقة البيانية على الشكل رقم (5-4)، ومن الشكل نجد أن الحل المثالي العام ينطبق على النقطة b التي إحداثياتها:

$x_1 = 4.8$, $x_2 = 1.4$

وهي تعطينا أن أكبر قيمة للتابع Z تساوي:

$$\text{Max } Z = 7\ (4.8) + 5\ (1.4) = 40.6$$

وبما أن المسألة السابقة لا تقبل حلولاً غير صحيحة, فإن الحل المثالي العام السابق (4.8,1.4) يعتبر حلاً غير مقبول من وجهة نظر طبيعة المتحولين x_1 وx_2.



شكل رقم (5-4)

وللبحث عن الحل المثالي الصحيح نقوم بالبحث عن جميع النقاط الصحيحة الممكنة, ومن الشكل نجد أن منطقة الحلول تقع ضمن المستطيل المحدد بـ $0 \le x_2 \le 6$,$0 \le x_1 \le 5$ وبذلك يكون لدينا النقاط الصحيحة التالية:

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5،6)

وسنتحقق فيما إذا كانت كل من هذه النقاط تحقق جميع الشروط المفروضة على المسألة أم لا, لذلك نقوم بوضع النتائج في جدول كالجدول المبين على الصفحة التالية:

الرقم	النقطة	الشرط الأول $6x_1 + 9x_2 \leq 54$	الشرط الثاني $7x_1 + 6x_2 \leq 42$	الشرط الثالث $x_1 - 2x_2 \leq 2$	قيمة Z
1	(0,0)	تحقق	تحقق	تحقق	0
2	(0,1)	تحقق	تحقق	تحقق	5
3	(0,2)	تحقق	تحقق	تحقق	10
4	(0,3)	تحقق	تحقق	تحقق	15
5	(0,4)	تحقق	تحقق	تحقق	20
6	(0,5)	تحقق	تحقق	تحقق	25
7	(0,6)	تحقق	تحقق	تحقق	30
8	(1,0)	تحقق	تحقق	تحقق	7
9	(1,1)	تحقق	تحقق	تحقق	12
10	(1,2)	تحقق	تحقق	تحقق	17
11	(1,3)	تحقق	تحقق	تحقق	22
12	(1,4)	تحقق	تحقق	تحقق	27
13	(1,5)	تحقق	تحقق	تحقق	32
14	(1,6)	تحقق	–	–	–
15	(2,0)	تحقق	تحقق	تحقق	14
16	(2,1)	تحقق	تحقق	تحقق	19
17	(2,2)	تحقق	تحقق	تحقق	24
18	(2,3)	تحقق	تحقق	تحقق	29
19	(2,4)	تحقق	تحقق	تحقق	34
20	(2,5)	–	–	–	–
21	(2,6)	–	–	–	–
22	(3,0)	تحقق	تحقق	–	–
23	(3,1)	تحقق	تحقق	تحقق	26
24	(3,2)	تحقق	تحقق	تحقق	31
25	(3,3)	تحقق	تحقق	تحقق	36
26	(3,4)	تحقق	–	–	–
27	(3,5)	–	–	–	–
28	(3,6)	–	–	–	–
29	(4,0)	تحقق	تحقق	–	–

الرقم	النقطة	الشرط الأول $6x_1 + 9x_2 \le 54$	الشرط الثاني $7x_1 + 6x_2 \le 42$	الشرط الثالث $x_1 - 2x_2 \le 2$	قيمة Z
30	(4,1)	تحقق	تحقق	–	–
31	(4,2)	تحقق	تحقق	تحقق	38
32	(4,3)	تحقق	–	–	–
33	(4,4)	–	–	–	–
34	(4,5)	–	–	–	–
35	(4,6)	–	–	–	–
36	(5،0)	–	–	–	–
32	(5،1)	–	–	–	–
32	(5،2)	–	–	–	–
39	(5،3)	–	–	–	–
40	(5،4)	–	–	–	–
41	(5،5)	–	–	–	–
42	(5،6)	–	–	–	–

وبذلك نجد أن هناك 22 نقطة صحيحة مقبولة وأن النقطة الصحيحة (4,2) وهي التي تعطينا أكبر قيمة لتابع الهدف Z (Z = 38) وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المثالي الصحيح وهو:

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Max } z = 38$$

وهي قيمة أقل من القيمة التي كانت تقابل الحل المثالي العام (1.4, 4.5) والتي كانت تساوي:

$$\text{Max } Z = 40.6$$

وهنا نشير إلى أن ذلك الحل المثالي الصحيح (4,2) لم يكن تقريباً أو تدويراً للحل المثالي العام (4.8,1.4), بل هو وضع خاص يمثل نقطة منعزلة وذات إحداثيات صحيحة, وتقع ضمن منطقة الحلول المقبولة, وتعطينا أكبر قيمة ممكنة للتابع Z, وهي أصغر من القيمة المقابلة للحل المثالي العام Max السابق.

ولقد قمنا بإيراد عمليات التحقق جميعها لإظهار حجم العمل الذي تتطلبه هذه الطريقة, ومن الواضح أن حجم وعدد عمليات التحقق يزداد تعقيداً وتركيباً كلما ازداد n

عدد المتحولات الداخلة في النموذج, أو كان عدد الشروط الخطية m كبيراً, مما يجعل هذه الطريقة طريقة غير عملية لإيجاد الحل المثالي الصحيح بدون إجراء تعديلات عليها, وتسهيلاً لعمليات التحقق واختصاراً لها قدمت عدة أساليب واقتراحات عملية بشأن تخفيض عدد مرات التحقق .

نذكر منها ما يلي:

1- أسلوب عدم المتابعة:

ويعتمد هذا الأسلوب على عدم متابعة عمليات التحقق للنقطة المفروضة إذا كانت تلك النقطة لا تحقق أحد الشروط, وهذا ما فعلناه في مثالنا السابق حيث إننا لم نتابع عمليات التحقق لعدد من النقاط التي لم تحقق أحد الشروط مثل (1,6) وغيرها.

2- أسلوب التصفية (أسلوب بالاش Balas):

ويعتمد هذا الأسلوب على أن نبدأ عملية التجريب بأية نقطة صحيحة مقبولة مثل A_0 $(a_{01},a_{02},\ldots..,a_{0n})$, ونأخذ A_0 من النقاط المقبولة المجاورة لنقطة الحل المثالي العام أو الناتجة عنها بتقريبها إلى جهة تناقص التابع Z, ولنفترض أن النقطة A_0 تعطينا قيمة للتابع Z تساوي $Z = Z_0$.

وبما أننا نرغب دائماً في تحسين قيمة التابع Z_0 فإننا نعتبر قيمة Z التي حصلنا عليها من النقطة A_0 قيمة لا نرغب في التراجع عنها, لذلك نضيف شرطاً جديداً إلى شروط المسألة مشتقاً من تابع الهدف وهو أن يكون:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots.. + p_nx_n \geq Z`_0 \qquad (1-2-5)$$

وعندما نأخذ نقطة ثانية مثل A_1 فإننا نقوم بتجريبها للتأكد من أنها تحقق الشرط (5-1-2) أم لا, فإذا كانت تحقق ذلك الشرط وتعطينا قيمة لـ Z تساوي Z_1 $(Z_1 \geq Z_0)$, فإن ذلك يعني أن A_1 ستحسن من قيمة Z, وتعتبر نقطة مفيدة لنا في العمل.

وبعدها نقوم بتجريبها للتأكد من أنها تحقق جميع الشروط الأخرى, فإذا كانت A_1 تحقق جميع الشروط الأخرى فإننا نستفيد منها أيضاً لوضع شرط جديد بدلاً من الشرط (5-2-1) وهو أن يكون:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \geq z_1 \qquad (2-2-5)$$

أما إذا كانت A_1 لا تحقق الشرط (5-2-1), أو إذا كانت لا تحقق أي من شروط المسألة الأخرى فإننا نرفضها ولا نقوم بالتحققات التالية لأنها إما أن تكون نقطة غير مفيدة أو غير مقبولة على الترتيب.

وهكذا نتابع العمل حتى نعالج جميع النقاط الصحيحة الممكنة, وحتى نحصل على الحل المثالي الصحيح الذي يحقق جميع الشروط ويعطينا أكبر قيمة لـ Z.

من الواضح أن هذا الأسلوب يقوم بتصفية (غربلة) الحلول المفيدة عن الحلول غير المفيدة (حتى وإن كانت مقبولة), وذلك عن طريق إدخال الشرط (5-2-1) وبدائله (5-2-2) ...الخ.

وهذه التصفية تقلل من عدد النقاط الخاضعة للتحقق وبالتالي تخفض بشكل ملحوظ من عدد مرات التحقق.

3- أسلوب حذف النقاط غير المقبولة (أسلوب ليمكي- شبيل برغ Lemke-spielberg):

وينطلق هذا الأسلوب من أن بعض الشروط لا تسمح لبعض المتحولات أن تأخذ قيمة صحيحة أكبر من عدد صحيح معين, فمثلاً إذا كان لدينا الشرط التالي (جميع الأمثال فيه موجبة):

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 13$$

فإنه من الواضح أن هذا الشرط لا يسمح للمتحول x_2 أن يأخذ قيمة صحيحة أكبر من (1), لأنه لو وضعنا $x_2 = 2$ فإن الشرط السابق يصبح غير محقق ($7 \cdot 2 > 13$) بسبب قيمة x_2 وحدها, لذلك فإنه علينا في مثل هذه الحالات أن نقتصر على قيم المتحولات الصحيحة التي تسمح بها الشروط المفروضة, وعدم البحث عن النقاط التي تتضمن قيماً لتلك المتحولات غير مسموح بها, وهذا يعني أنه تم تخفيض عدد النقاط الصحيحة الممكنة بمقدار كبير وهذا ما يؤدي إلى تخفيض أكبر في عدد مرات التحقق.

ملاحظة (1):

يجب أن نشير إلى أنه عند استخراج الحدود التي تسمح بها الشروط الخطية لبعض المتحولات، علينا الاعتماد على الشروط التي تكون جميع أمثال المتحولات فيها موجبة, لأن الشروط التي تتضمن متحولات ذات أمثال سالبة لا تعطينا الحدود الحقيقية لتغيرات المتحولات التي فيها, وإذا استطعنا أن نجد عدة حدود لأحد المتحولات من شروط ذات أمثال موجبة, فإننا نختار أصغرها ليكون الحد الملائم لتغيرات ذلك المتحول.

ملاحظة (2):

يمكننا عند البحث عن الحل المثالي الصحيح أن نستخدم جميع الأساليب السابقة مع بعضها دون أن يؤثر ذلك على الحل المثالي نفسه.

مثال:

أوجد الحل المثالي الصحيح للنموذج الآتي:

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 11$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$$
$$x_j \geq 0, (j: 1,2,3) \quad \text{وصحيح}$$

لإيجاد الحل المثالي الصحيح نقوم أولاً بإيجاد الحل المثالي العام, لذلك نحول النموذج إلى شكل نظامي وقاعدي, ونضع النتائج في جدول كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	الثوابت
y_1	3	2	0	10
y_2	1	4	0	11
y_3	3	3	1	13
تابع الهدف	4	5	1	Z-0

القاعدة	x_1	y_2	x_3	الثوابت
y_1	$\frac{10}{4}$	$-\frac{2}{4}$	0	$\frac{18}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$
y_3	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{19}{4}$
تابع الهدف	$\frac{11}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	$Z-\frac{55}{4}$

القاعدة	y_1	y_2	x_3	الثوابت
x_1	$\frac{4}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{18}{10}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
y_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
تابع الهدف	$-\frac{11}{10}$	$-\frac{7}{10}$	1	$Z-\frac{187}{10}$

القاعدة	y_1	y_2	y_3	الثوابت
x_1	$\frac{4}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{18}{10}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
تابع الهدف	$-\frac{2}{10}$	$-\frac{3}{10}$	-1	$Z-\frac{194}{10}$

وبذلك يكون الحل المثالي العام $x'(\frac{18}{10},\frac{23}{10},\frac{7}{10})$, ويعطينا أكبر قيمة للتابع Z تساوي: $\text{Max } Z=\frac{194}{10}$.

ولإيجاد الحل المثالي الصحيح نتبع أولاً الأسلوب (3), ثم الأسلوب (2), فنجد أولاً أن الشرط الثاني $x_1 + 4x_2 \leq 11$ لا يسمح للمتحول x_2 أن يأخذ قيمة صحيحة أكبر من (2), لأن ذلك يجعل الشرط غير محقق بسبب قيمة x_2 وحدها, وبما أن x_2 يدخل في عبارة تابع الهدف بأمثال موجبة, وأن أمثاله أكبر من جميع الأمثال الأخرى وأن تابع الهدف من نوع Max فإننا نستنتج أن x_2 يجب أن يأخذ أكبر قيمة مسموح بها وهي $x_2 = 2$, لذلك نثبت قيمة x_2 عند القيمة (2), ونبحث عن النقاط الصحيحة الممكنة التي تكون فيها قيمة $x_2 = 2$ فقط.

وقبل تطبيق عمليات التحقق على تلك النقاط الممكنة المتبقية ننطلق من نقطة مقبولة مجاورة للحل المثالي (العام السابق), ولتكن النقطة (2,2,0) فنجد أنها تحقق جميع الشروط وتعطينا قيمة لـ Z تساوي 18, لذلك نضيف شرطاً جديداً إلى شروط المسألة السابقة وهو الشرط التالي (شرط بالاش):

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 18$$

ولإجراء عمليات التحقق نعد جدولاً كالجدول التالي:

قيمة Z	الشرط الأول $3x_1 + 2x_2 \leq 10$	الشرط الثاني $x_1 + 4x_2 \leq 11$	الشرط الثالث $3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$	الشرط الإضافي $4x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 18$	النقطة
18	محقق	محقق	محقق	محقق	(2,2,0)
–	–	–	–	غير مفيدة	(1,2,0)
–	–	–	–	غير مفيدة	(1,2,1)
–	–	–	–	غير مفيدة	(1,2,2)
–	–	–	–	غير مفيدة	(1,2,3)
18	محقق	محقق	محقق	مفيدة	(1,2,4)
–	–	–	غير محقق	مفيدة	(1,2,5)
19	محقق	محقق	محقق	مفيدة	(2,2,1)

وبما أننا حصلنا من النقطة (2,2,1) على قيمة لـ Z قريبة من قيمة الحل المثالي العام وأكبر من القيمة السابقة 18، لذلك نضع شرطاً جديداً معتمداً على قيمة Z عند النقطة (2,2,1) وهو: $4x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 19$

ونضيف هذا الشرط إلى شروط المسألة السابقة بدلاً من شرط (بالاش) السابق, ونقوم بتجريب النقاط الممكنة الأخرى كما هو وارد في الجدول الآتي:

النقطة	الشرط الإضافي $4x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 19$	الشرط الثالث $3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$	الشرط الثاني $x_1 + 4x_2 \leq 11$	الشرط الأول $3x_1 + 2x_2 \leq 10$	قيمة Z
(2,2,2)	مفيدة	لا تحقق	–	–	–
(2,2,3)	مفيدة	لا تحقق	–	–	–
(2,3,4)	مفيدة	لا تحقق	–	–	–
....	....	....	....	....	....
(0,2,0)	غير مفيدة	–	–	–	–
(0,2,1)	غير مفيدة	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–

وهكذا نجد أن عمليات التحقق قد اختصرت بمقدار كبير, ومن الجدول السابق نجد أن النقطة (2,2,1) هي الحل المثالي الصحيح للمسألة المفروضة وأنها تعطينا:

Max Z=19

III- طريقة الاقتطاع (حسب غوموري):

قبل أن نتعرض لهذه الطريقة نمهد لها بالمثال التالي:

مثال (3):

ليكن لدينا النموذج الآتي:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$3x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

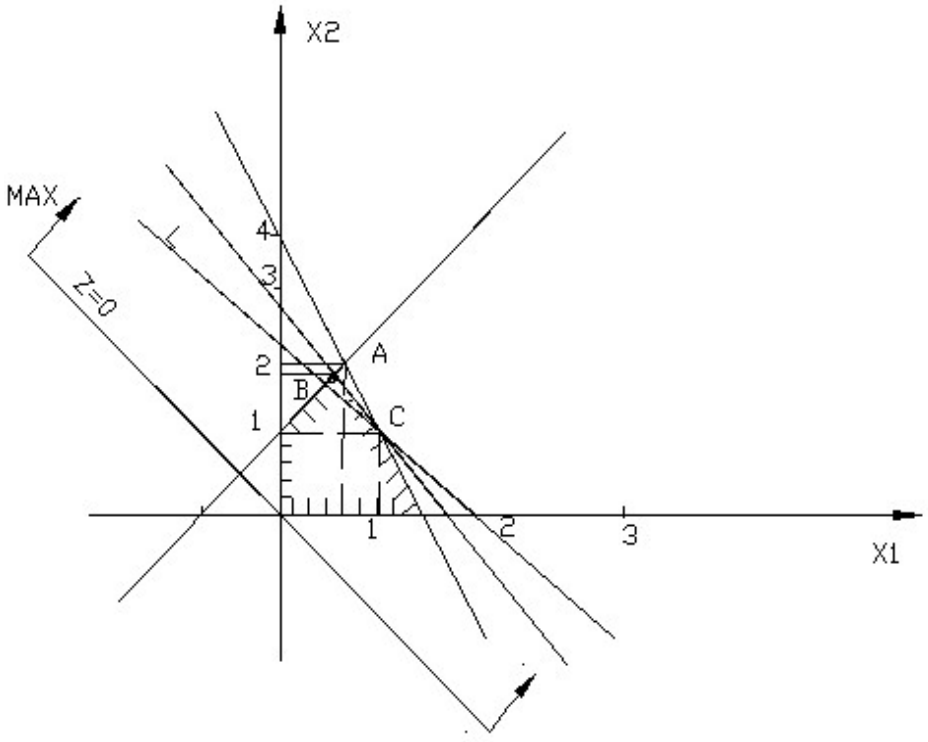
وأن x_1 , x_2 صحيحان.

ولإيجاد الحل المثالي لهذه المسألة نقوم برسم معدلات الشروط وتابع الهدف على المستوى x_1ox_2 فنحصل على الشكل رقم (5−10) الآتي:

ومن ذلك الشكل يتضح لنا أن الحل المثالي العام يساوي:

$$x_1 = 3/4, \quad x_2 = 7/4 \Rightarrow \quad \text{Max } Z = 10/4$$

ولإيجاد الحل المثالي الصحيح نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات, وذلك بإضافة متحولين إضافيين y_1, y_2 إلى كل منهما فنحصل على ما يلي:



شكل رقم (5−5)

$$
\begin{aligned}
&Z = x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max} \\
&-x_1 + x_2 + y_1 = 1 \\
&3x_1 + x_2 + y_2 = 4 \\
&x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \\
&x_1,x_2 \text{ صحيحين}
\end{aligned}
\qquad (B)
$$

وبحساب x_1,x_2 من (B) بدلالة y_2 , y_1 نحصل على المعادلتين:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \\
x_2 &= \frac{7}{4} + \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2
\end{aligned}
\qquad (C)
$$

وبوضع $y_1 = y_2 = 0$ نحصل على الحل المثالي السابق $A(x_1 = 3/4, x_2 = 7/4)$ والتي يجعل قيمة $Z = \frac{10}{4} = 2.5$.

ومن دراسة الشرطين الأول والثاني في (B), نلاحظ أنه إذا كان x_1,x_2 صحيحين فإن y_1,y_2 لا بد وأن يكونا صحيحين أيضاً, وذلك لأن أمثال المتحولات في هذين الشرطين صحيحة وأن الطرف الأيمن يشكل عدداً صحيحاً.

وبما أننا نريد أن يكون x_1 صحيحاً فإنه يجب أن يكون المقدار $(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2)$ صحيحاً, وبما أن y_2 يجب أن يكون صحيحاً أيضاً فإن المقدار:

$$
x_1 + y_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + y_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}y_1 + \frac{3}{4}y_2 \qquad (D)
$$

يجب أن يكون صحيحاً.

وهنا نلاحظ أنه إذا وضعنا $y_1 = y_2 = 0$ لحصلنا على $x_1 = \frac{3}{4}$ وبما أننا نريد أن يكون x_1 صحيحاً فإنه يجب ألا نسمح بأن يكون x_1 مساوياً لـ 3/4.

وبما أن y_1،y_2 غير سالبين فإن الطرف الأيمن في العبارة (D) يجب ألا يأخذ قيمة أصغر من (1), إذن يكون لدينا الشرط الآتي:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}y_1+\frac{3}{4}y_2 \geq 1$$

وبالإصلاح نحصل على شرط إضافي هو:

$$\frac{1}{4}y_1+\frac{3}{4}y_2 \geq \frac{1}{4} \qquad (E)$$

وهو الشرط الإضافي الذي نبحث عنه ليضمن لنا أن يكون x_1 صحيحاً، لذلك نضيف هذا الشرط إلى الشروط السابقة في (B) ونتابع حل المسألة, ولكن لتوضيح معنى ذلك الشرط نقوم بحساب y_1,y_2 من (B) ونعوضهما في (E) فنحصل على الشرط الآتي:

$$\frac{1}{4}(1+x_1-x_2)+\frac{3}{4}(4-3x_1-x_2) \geq \frac{1}{4}$$

وبالإصلاح نحصل منه على اقتطاع (غوموري) الآتي:

$$2x_1+x_2 \leq 3 \qquad (F)$$

وبإضافة هذا الشرط إلى الشروط السابقة في B نحصل على النموذج الآتي:

$$\begin{aligned} Z &= x_1+x_2 \rightarrow \text{Max} \\ -x_1+x_2 &\leq 1 \\ 3x_1+x_2 &\leq 4 \\ 2x_1+x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0 \quad &, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (G)$$

وأن x_1,x_2 عددان صحيحان.

وإذا قمنا برسم الشرط (F) على نفس الشكل (5-5) فإننا نلاحظ أن النقطة A(3/4, 7/4) أصبحت خارج منطقة الحلول المقبولة الجديدة, وذلك لأن الشرط (F) اقتطع جزءاً من تلك المنطقة هو المثلث ABC.

كما نلاحظ أن الحل المثالي الجديد أصبح منطبقاً على النقطة (B′) التي إحداثياها يساويان:

$$x_1=\frac{2}{3} \quad , \quad x_2=\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{Max } Z=\frac{7}{3}$$

ولإيجاد الحل المثالي الصحيح نعالج النموذج (G) بإضافة متحول إضافي إلى كل من شروطه فنحصل على الشكل النظامي والقاعدي الآتي:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max} \\ -x_1 + x_2 + u_1 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 &= 3 \\ x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (H)$$

وأن x_1, x_2 عددان صحيحان.

ثم نقوم بحساب x_2, x_1 من المعادلتين الأولى والثانية (كما يمكن حسابهما من المعادلتين الثانية والثالثة) فنحصل على أن:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3 \\ x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3 \end{aligned} \qquad (I)$$

وبوضع $u_1 = u_3 = 0$ نحصل على الحل المثالي السابق $B(x_1 = 2/3, x_2 = 5/3)$, ولكنه ليس حلاً صحيحاً, لذلك نقوم بإجراء اقتطاع آخر اعتماداً على المعادلة الأولى من (I) فنجد أنه:

بما أننا نريد أن يكون x_1 صحيحاً فإنه لا بد وأن يكون المقدار $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3)$ صحيحاً, وبما أن الشرط الثالث من (H) يعطينا أن u_3 يجب أن يكون صحيحاً (إذا كان x_2, x_1 صحيحين) فإن المقدار:

$$x_1 + u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3 + u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_3 \qquad (J)$$

يجب أن يكون هو الآخر صحيحاً, ولكن إذا وضعنا $u_1 = u_3 = 0$ فإن $x_1 = \frac{2}{3}$ وهذا يجب أن لا نسمح به, وبما أن u_3, u_1 غير سالبين فإن الطرف الأيمن من العلاقة (J) لا بد وأن يأخذ قيمة أكبر من (1), أي يجب أن نضع الشرط الآتي:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}u_1+\frac{2}{3}u_3 \geq 1$$

وبالإصلاح نجد أن:

$$u_1+2u_3 \geq 1 \qquad (K)$$

وهو الشرط الإضافي الثاني الذي نبحث عنه ليضمن لنا أن يكون x_1 صحيحاً, لذلك نضيف ذلك الشرط إلى الشروط السابقة في النموذج (H) ونتابع حل المسألة.

وإذا قمنا بتحويل الشرط (K) إلى المتحولين x_2,x_1 فإننا نجد أن:

$$(1+x_1-x_2)+2(3-2x_1-x_2) \geq 1$$
$$x_1+x_2 \leq 2 \qquad (L)$$

نضيف هذا الشرط إلى النموذج (G) فنحصل على النموذج الآتي:

$$\begin{aligned} &Z=x_1+x_2 \rightarrow \text{Max} \\ &-x_1+x_2 \leq 1 \\ &3x_1+x_2 \leq 4 \\ &2x_1+x_2 \leq 3 \\ &x_1+x_2 \leq 2 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (M)$$

وأن x_1,x_2 صحيحان.

وإذا قمنا برسم معادلة الشرط (L) على الشكل السابق نفسه لوجدنا أن النقطة B` السابقة أصبحت خارج منطقة الحلول المقبولة الجديدة, وذلك لأن الشرط (L) اقتطع جزءاً آخر من منطقة الحلول المقبولة وهو المثلث (DBC), كما نلاحظ أن الحل المثالي الجديد أصبح منطبقاً على النقطة C التي إحداثياها يساويان:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}\, Z=2$$

وهو الحل المثالي الصحيح للمسألة الأولى (A).

وهكذا نجد أن طريقة الاقتطاع تهدف إلى زيادة عدد شروط الاقتطاع بالتدريج حتى نحصل على الحل المثالي الصحيح للمسألة المفروضة, وسنستعرض فيما يلي خوارزمية العمل لهذه الطريقة في حالة النماذج الصحيحة بشكل كامل.

خوارزمية طريقة الاقتطاع للنماذج الصحية (حسب غوموري):

لنفترض أن الشكل العام للمسألة المفروضة كان كما يلي:

يطلب إيجاد $x'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ الصحيحة التي تعطينا أكبر قيمة للتابع.

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \rightarrow Max$$

ضمن الشروط الآتية: $y_i + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$

حيث أن : $(i:1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots,m)$

$$x_j \geq 0 \;\; ;(j:1,2,3,.....,n) \qquad y_i \geq 0 \;\; ;(i:1,2,3,.....,m)$$

وإن جميع x_j أعداد صحيحة.

وإن جميع الأمثال a_{ij} والثوابت b_i هي أعداد صحيحة أو جعلناها أعداداً صحيحة بوساطة معالجتها بضرب المتراجحات أو المعادلات بأعداد مناسبة, وبذلك تصبح جميع المتحولات y_i صحيحة أيضاً.

وسنوضح كيف يمكن أن نضيف شرطاً من شروط الاقتطاع إلى جملة الشروط السابقة من خلال خوارزمية الحل المؤلفة من الخطوات الآتية:

1- نقوم بإيجاد الحل المثالي العام (العادي) للمسألة المفروضة وفق تعليمات خوارزمية السمبلكس المعدلة أو غيرها, ولنفترض أننا حصلنا على الحل المثالي العام المتضمن في الجدول الآتي:

القاعدة	y_1	y_2	.....	y_k	x_{k+1}	.....	x_n	β_i
x_1	α_{11}	α_{12}	.....	α_{1k}	α_{1k+1}	.....	α_{1n}	β_1
x_2	α_{21}	α_{22}	.....	α_{2k}	α_{2k+1}	.....	α_{2n}	β_2
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....
x_K	α_{k1}	α_{k2}	.....	α_{kk}	α_{kk+1}	.....	α_{kn}	β_k
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....
y_m	α_{m1}	α_{m2}	.....	α_{mk}	α_{mk+1}	.....	α_{mn}	β_m
	q_1	q_2	.....	q_k	q_{k+1}	.....	q_n	$Z-q_0$

حيث إن جميع $\beta_i \geq 0$ وجميع $q_j \leq 0$ والحل المثالي العام هو:

$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_K \quad \beta_m \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ وهو الذي يعطينا أن: $Max\ Z = q_0$

فإذا كانت جميع الثوابت β_i صحيحة فإننا نكون قد حصلنا على حل مثالي صحيح ويكون قد تم المطلوب, أما إذا كان بعض (واحد على الأقل) الثوابت β_i غير صحيح فإنه يجب علينا البحث عن الحل المثالي الصحيح لذلك ننتقل إلى الخطوة التالية.

2- نقوم بإيجاد شرط إضافي نسميه بشرط الاقتطاع (حسب غوموري) لكي نضيفه إلى شروط المسألة المتمثلة في الجدول الأخير, ونحصل عليه كما يلي:

لنفترض أنه يوجد في العمود الأخير من الجدول الأخير ثوابت ذات قيم غير صحيحة ولنأخذ أكبرها ولنرمز له بالرمز β_K الموجود في السطر k, وبما أننا نريد أن نجعله صحيحاً فإننا نعتمد على المعادلة k والتي تكتب على الشكل الآتي:

$$x_k + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj} y_i + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{kj} x_j = \beta_k \qquad (1-3-5)$$

حيث أن β_K غير صحيح.

وحتى نحصل على شرط الاقتطاع نكتب جميع الأمثال α_{kj} وكذلك β_K على الشكل التالي:

$$\alpha_{kj} = \lfloor \alpha_{kj} \rfloor + f_{kj} \qquad (2-3-5)$$

$$\beta_k = [\beta_k] + f_k \qquad (3-3-5)$$

حيث إن الرمز $\lfloor \alpha_{kj} \rfloor$ يساوي أكبر عدد صحيح لا يتجاوز العدد الأصلي α_{ij}, وكذلك $[\beta_k]$ هو أكبر عدد لا يتجاوز العدد الأصلي β_K, ويمكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

$$\left[3\frac{1}{2}\right] = 3 \qquad \Rightarrow 3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

$$\left[-5\frac{3}{4}\right] = -6 \Rightarrow -5\frac{3}{4} = -6 + \frac{1}{4}$$

وبذلك نجد أن كل من f_k, f_{ki} هي أعداد كسرية موجبة وأصغر من الواحد أي أنها تحقق العلاقات الآتية:

$$0 \le f_{kj} < 1 \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

$$0 < f_k < 1 \qquad (5\text{-}3\text{-}5)$$

وهنا نلاحظ أيضاً أن الكسر f_k لا يمكن أن يساوي الصفر لأن ذلك يجعل قيمة β_K عدداً صحيحاً وهذا يخالف الفرض الذي انطلقنا منه.

كما يمكننا بسهولة أن نبرهن على صحة المتراجحتين التاليتين (بإضافة $\lfloor \alpha_{kj} \rfloor$ و $[\beta_k]$ إلى طرفي المتراجحتين السابقتين).

$$\lfloor \alpha_{kj} \rfloor \le \alpha_{kj} < \lfloor \alpha_{kj} \rfloor + 1 \qquad (6\text{-}3\text{-}5)$$

$$[\beta_k] < \beta_k < [\beta_k] + 1 \qquad (7\text{-}3\text{-}5)$$

نستفيد من المتراجحة (5-3-6) ونبدل قيمة α_{kj} بـ $\lfloor \alpha_{kj} \rfloor$ في العلاقة (5-3-1) فنحصل على أن:

$$x_k + \sum \lfloor \alpha_{kj} \rfloor y_j + \sum \lfloor \alpha_{kj} \rfloor x_j \le \beta_k$$

وبما أن الطرف الأيسر لهذه المتراجحة مؤلف من جداء أو مجموع أعداد صحيحة, إذن فهو يشكل عدداً صحيحاً, لذلك يمكننا أن نستنتج أن ذلك الطرف لا بد وأن يكون أصغر أو يساوي $[\beta_K]$, وعليه نكتب أن:

$$x_k + \sum [\alpha_{kj}] y_i + \sum [\alpha_{kj}] x_j \le [\beta_k] \qquad (8\text{-}3\text{-}5)$$

وبطرح (5-3-8) من (5-3-1) نحصل على المتراجحة التالية:

$$\sum \{\alpha_{kj} - [\alpha_{kj}]\} y_i + \sum \{\alpha_{kj} - [\alpha_{kj}]\} x_j \ge \beta_k - [\beta_k]$$

$$\sum f_{kj} \cdot y_j + \sum f_{kj} x_j \ge f_k \qquad (9\text{-}3\text{-}5)$$

$$-\sum f_{kj} y_j - \sum f_{kj} x_j \le -f_k$$

وبتحويل هذه المتراجحة إلى مساواة نضيف متحولاً إضافياً جديداً غير سالب μ_k فنحصل على الشرط الآتي:

$$\mu_k - \sum_j f_{kj} y_j - \sum_j f_{kj} x_j = -f_k \qquad (10\text{-}3\text{-}5)$$

وهو شرط الاقتطاع الذي نبحث عنه (حسب طريقة غوموري), الذي يجب إضافته إلى شروط المسألة والمتمثلة في الجدول الأخير.

ونحصل على الكسور f_k, f_{kj} من عناصر السطر k الذي يأخذ فيه الثابت β_K قيمة غير صحيحة وذلك باستخدام العلاقتين (5−3−2), (5−3−3).

ويمكن البرهان بسهولة على أن μ_k هو متحول صحيح أيضاً وذلك بإعادة تبديل f_k,f_{kj} من العلاقتين (5−3−2), (5−3−3) وتصفية الحدود ثم إجراء مقارنة بين الطرفين, (ونترك ذلك للقارئ على سبيل التمرين).

3- نضيف الشرط (5−3−10) إلى جدول السمبلكس الأخير، ونعتبر سطره سطراً للارتكاز، ونختار من بين عناصر سطره عنصر الارتكاز على الشكل الآتي:

نقارن عناصر سطر تابع الهدف q_j مع عناصر سطر الاقتطاع μ_k, ونحسب المقادير $\frac{q_j}{-f_{kj}} > 0$ ثم نختار أصغرها θ'_k حيث أن:

$$\theta'_k = \underset{f_{kj}\neq 0}{\text{Min}}_j \left[\frac{q_j}{-f_{kj}} > 0\right] = \frac{q_s}{(-f_{ks})} > 0 \qquad (11-3-5)$$

وبذلك يكون العنصر ($-f_{ks}$) هو عنصر الارتكاز, لذلك نقوم بتبديل المتحول μ_k بالمتحول المقابل x_s حسب تعليمات التبديل المعروفة, فنحصل على جدول جديد.

4- نعود وندرس الثوابت الجديدة β'_i فإذا كانت جميع β'_i صحيحة وغير سالبة فإننا نكون قد حصلنا على الحل المثالي الصحيح, وإذا لم يكن جميع β'_i صحيحة, فإننا نعود إلى الخطوة (2) ونكرر ذلك حتى نحصل على الحل المثالي الصحيح المطلوب أو نستنتج أنه لا يوجد حل مثالي صحيح للمسألة المفروضة (ويكون الحل المثالي الصحيح غير موجود إذا ظهر سطر يكون فيه الثابت β'_K غير صحيح, وتكون جميع الأمثال الأخرى صحيحة).

مثال (4):

أوجد الحل المثالي الصحيح للمسألة:

$$Z = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط الآتية:

$$x_2 + 2x_3 \geq 9$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8$$
$$-x_1 + x_3 \geq -4$$

$x_j \geq 0$ وصحيحة.

الحل:

لإيجاد الحل المثالي العام بواسطة السمبلكس المعدلة نضيف إلى كل من الشروط متحولاً غير سالب (وصحيح) y_4 , y_3 , y_2 , y_1 ونضربها بـ(1−)، ثم نضع المعاملات في جدول كالتالي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	الثوابت
y_1	0	−1	−2	−9
y_2	1	−1	0	−1
y_3	−1	−1	3	−8
y_4	1	0	−1	4
	5	−1	−4	Z-0

وللتخلص من الثوابت السالبة في العمود الأخير, نجري التبديلات $y_1 \leftrightarrow x_2$ثم $y_4 \leftrightarrow x_1$ ثم $y_3 \leftrightarrow x_3$ على الترتيب وذلك وفق ما تمليه الخوارزمية المعدلة (انظر الحل في الفصل الرابع), ونتيجة لذلك فإننا نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	y_4	y_1	y_3	الثوابت
x_2	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{26}{4}$
y_2	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{21}{4}$
تابع الهدف	$-\frac{23}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$Z-\frac{59}{4}$

وهو يعطينا الحل المثالي العام (5/4, 26/4, 21/4) ويعطينا أن:

$$\text{Max } Z = \frac{59}{4}$$

وبما أن هذا الحل المثالي غير صحيح فإننا نقوم بالبحث عن الحل الصحيح بوساطة خوارزمية طريقة الاقتطاع, ونبدأ باختيار أكبر الثوابت في العمود الأخير وهو 26/4 ونعتبر سطره أساساً لتشكيل شرط الاقتطاع الأول, فنجد أنه يمكننا اعتماداً على (5−3−2), (5−3−3) كتابة الأمثال في السطر الأول كمايلي:

$$\alpha_{11} = -\frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow f_{11} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{12} = -\frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow f_{12} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{13} = -\frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow f_{13} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{26}{4} = 6 + \frac{1}{2} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2}$$

وبذلك نحصل على شرط الاقتطاع الأول من المعادلة (5−3−10) والذي يكتب على الشكل الآتي:

$$\mu_1 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 = -\frac{1}{2}$$

نضيف هذا الشرط إلى الجدول السابق باعتباره شرطاً جديداً فنحصل على الجدول التالي:

القاعدة	y_4	y_1	y_3	الثوابت
x_2	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{26}{4}$
y_2	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{21}{4}$
μ_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
تابع الهدف	$-\frac{23}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$z-\frac{59}{4}$

لاختيار عنصر الارتكاز من بين عناصر سطر μ_1 نقسم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر السطر μ_1, فنجد أن:

$$\theta_1' = \text{Min}\left\{\frac{\frac{-23}{4}}{\frac{-1}{2}}, \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{-1}{2}}, \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{-1}{2}}\right\} = \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{-1}{2}}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو $(-\frac{1}{2})$ في العمود المقابل لـ y_1, لذلك نقوم بتبديل y_1 بـ μ_1 حسب التعليمات المعروفة فنحصل على الجدول في الصفحة التالية.

وبما أن عمود الثوابت ما زال يتضمن ثوابت β_i غير صحيحة فهذا يعني أننا لم نحصل على الحل المثالي الصحيح بعد, لذلك نختار أكبر تلك الثوابت وهو (11/2)

ونعتبره سطراً أساساً لتشكيل شرط الاقتطاع الثاني, فنجد أنه اعتماداً على (5-3-2), (5-3-3) يمكننا كتابة الأمثال في السطر الرابع كما يلي:

$$\alpha_{14} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow f_{14} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{24} = -\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow f_{24} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{34} = \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow f_{34} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_4 = \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow f_4 = \frac{1}{2}$$

	y_4	μ_1	y_3	الثوابت
x_2	0	-1	0	7
y_2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
y_1	1	-2	1	1
تابع الهدف	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$Z-\frac{58}{4}$
μ_4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

وبذلك نحصل على شرط الاقتطاع الثاني من (5-3-10) حيث أن:

$$\mu_4 - \frac{1}{2}y_4 - \frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}y_3 = -\frac{1}{2}$$

وبإضافة هذا الشرط إلى الجدول السابق (لقد ألحقناه بالجدول السابق من الأسفل توفيراً للعمل) نحصل على جدول جديد, نقوم باختيار عنصر الارتكاز من بين عناصره وذلك بإجراء تقسيم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر السطر الجديد فنجد أن:

$$\theta'_4 = \text{Min}\left[\frac{-(11/2)}{-(1/2)}, \frac{-(1/2)}{-(1/2)}, \frac{-(1/2)}{-(1/2)}\right] = \frac{-(1/2)}{-(1/2)} = \frac{-(1/2)}{-(1/2)}$$

أي أن هناك نسبتين متساويتين لذلك نختار أحدهما، ولتكن المقابلة للمتحول y_3, وبذلك يكون العنصر $(-1/2)$ هو عنصر الارتكاز, نقوم بإجراء الحسابات اللازمة نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	y_4	μ_1	μ_4	الثوابت
x_2	0	−1	0	7
y_2	−1	0	−1	1
x_3	0	−1	1	1
x_1	1	−1	1	5
y_1	0	−3	2	0
y_3	1	1	−2	1
	−5	0	−1	z-14

وهكذا نجد أن الجدول الأخير يعطينا الحل المثالي الصحيح الآتي:

$x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$

وهو يعطينا أن قيمة تابع الهدف عند ذلك الحل تساوي:

$\text{Max } Z = 14$

ملاحظة:

نلاحظ أن الحل المثالي الصحيح (5,7,1) ليس حلاً مثالياً وحيداً لأن سطر تابع الهدف في الجدول الأخير يحتوي على صفر بين عناصره، لذلك نستنتج بأن هناك عدداً لا نهائياً من الحلول المثالية وتعطينا قيمة واحدة لتابع الهدف $(Z = 14)$, وللحصول على حل مثالي صحيح ثاني نعتبر العمود الذي يحتوي ذلك الصفر عموداً للارتكاز ونحدد عنصر الارتكاز من العلاقة:

$$\theta = \text{Min}\left[\frac{1}{1}\right] = \frac{1}{1}$$

فنجد أنه يوجد عنصر ارتكاز وحيد (1) في سطر المتحول y_3 لذلك نجري تبديلاً بين المتحولين y_3 و μ_1, وبعد إجراء الحسابات نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	y_4	y_3	μ_4	
x_2				8
y_2				1
x_3				2
x_1				6
y_1				3
μ_1				1
	−5	0	−1	Z-14

وهو يعطينا الحل المثالي الصحيح الآتي:

$$x_1 = 6 \ , \quad x_2 = 8 \ , \quad x_3 = 2 \Rightarrow \qquad Z = 14$$

وهو حل مثالي صحيح آخر يحقق جميع الشروط السابقة.

ملاحظة:

هناك فقرة خاصة بالنماذج المختلطة في الطبعة الأولى، ويمكن الرجوع إليها عند الضرورة.

تمرينات

1- أوجد الحل المثالي الصحيح بطريقة التجريب لكل من النماذج الآتية:

أ-

$$z = 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$-3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8$$
$$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8$$
$$0 \leq x_j \leq 5, (j:1,2,3)$$

وإن x_j أعداد صحيحة.

ب-

$$z = 3x_1 + 6x_2 + x_3 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2\frac{2}{3}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2\frac{1}{2}$$
$$x_j \geq 0, (j:1,2,3)$$

وإن x_j أعداد صحيحة.

ج-

$$z = 4x_1 + 28x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 63x_5 + 11x_6 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 + 7x_5 + x_6 \leq 15$$
$$7x_1 + 49x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 21x_5 + 2x_6 \leq 120$$
$$3x_1 + 21x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 70x_5 + 15x_6 \leq 100$$

حيث أن كل x_j تأخذ إحدى القيمتين 0 أو1.

د-

$$z = -4x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$-x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \; - x_5 \le -2$$
$$-4x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \le -2$$
$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 2x_5 \le 1$$

حيث إن كل x_j تأخذ إحدى القيمتين 0 أو1.

2- أوجد الحل المثالي الصحيح بطريقة الاقتطاع للنماذج الآتية:

أ-

$$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$5x_1 + 7x_2 \le 21$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

وأن x_1, x_2 صحيحان.

ب-

$$z = 60x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 60x_4 + 20x_5 + 10x_6 + 3x_7 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 + 3x_6 + x_7 \le 10$$

حيث إن كل x_j يأخذ إحدى القمتين 0 أو1.

ج-

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$4x_1 + 5x_2 \le 10$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 10$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

وأن x_1, x_2 صحيحان.

د-

$$z = 10x_1 - x_2 \to \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$-25x_1 + 22x_2 \le 33$$
$$20x_1 - 5x_2 \le 24$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

وإن x_1, x_2 صحيحان.

هـ-

$$z = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \text{Min}$$

ضمن الشروط:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 5$$
$$4x_1 - x_2 + x_3 \ge 7$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \ge 4$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

وأن x_1, x_2, x_3 صحيحة.

الفصل السادس
بعض النماذج الاقتصادية والإدارية

إن تطبيقات البرمجة الخطية استخدمت في العديد من النشاطات الاقتصادية (الصناعية والزراعية والخدمية ...الخ) وأصبحت أداة رئيسية في حل المشكلات التي تعترض عملية تخطيط وإدارة تلك النشاطات ومراقبة تنفيذ أو تعديل خططها بشكل مستمر.

وأننا إذ نتطرق في هذا الفصل إلى عدد من النماذج التطبيقية المستخدمة في الميادين الاقتصادية, نذكر القارئ بإمكانية البحث عن نماذج مماثلة لها في الميادين المختلفة الأخرى, حيث يمكنه الحصول عليها بإجراء نفس العمليات التحليلية التي سنوردها لاحقاً.

وقبل أن نستعرض تلك النماذج لا بد لنا من أن نشير إلى أننا ننطلق من أن المسألة المطروحة تقبل الصياغة الرياضية على شكل نموذج خطي.

وأننا إضافة للنماذج التي أوردناها في مقدمة الفصل الثالث فإننا سنتعرض في هذا الفصل إلى النماذج التالية:

I– نموذج الربح الأعظمي في الشركة:

لنفترض أن شركة تقوم بصناعة n نوعاً من المنتجات هي:

A_1, A_2, A_3 .....A_j.....A_n

وتستخدم لذلك m نوعاً من المواد الأولية هي:

B_1, B_2, B_3,..... B_m

لنفترض أن واحدة المنتج A_j تحتاج من المادة B_i مقداراً يساوي a_{ij} واحدة, كما نفترض أن مقدار الربح الذي تحصل عليه المؤسسة من واحدة المنتج A_j يساوي p_j, وأن مخزون أو احتياطي المادة B_i يساوي b_i واحدة.

والمطلوب: إيجاد الخطة المثالية للإنتاج في هذه المؤسسة بحيث يكون الربح الحاصل منه أكبر ما يمكن, وذلك ضمن الشروط المفروضة والإمكانيات المتاحة.

لإيجاد الخطة المثالية, علينا أن نصوغ هذه المسألة على شكل نموذج رياضي خطي, لذلك نفترض أن مقدار ما يجب أن تنتجه الشركة من المنتجات السابقة متحولات مجهولة نرمز لها على الترتيب بالرموز التالية:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_j, \ldots\ldots\ldots x_n$

ثم نضع المعطيات ومتطلبات هذه المسألة في جدول كما في الصفحة التالية، ومنه يتضح لنا أن تابع الهدف هو تابع الربح وهو يعطي بالعلاقة التالية:

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots p_jx_j + \ldots p_nx_n \rightarrow \max \qquad (1\text{-}1\text{-}6)$$

أما بالنسبة للشروط الخطية فيجب أن تصاغ على أساس أن مجموع ما يستهلك من المادة B_i لصالح جميع المنتجات يجب أن لا يتجاوز المقدار المتوفر من تلك المادة والمحدد بالمخزون أو الاحتياطي b_i, وبذلك نجد أن الشروط المفروضة على كل من المواد B_i هي:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \le b_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n \le b_2\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots\ldots\ldots a_{in}x_n \le b_i\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned} \qquad (2\text{-}1\text{-}6)$$

وبما أن مقدار ما يجب أن ينتج من المنتج A_j لا يمكن أن يكون سالباً فإننا نستنتج مباشرة أن المتحولات x_j يجب أن تحقق شروط عدم السالبية, أي يجب أن يكون:

$$x_j \ge 0 \; ; \qquad (j: 1\ 2\ 3 \ldots\ldots n) \qquad (3\text{-}1\text{-}6)$$

أنواع المواد	أنواع المنتجات							احتياطي المادة
	A_1	A_2	A_3	....	A_j	....	A_n	B_i
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1j}	....	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2j}	....	a_{2n}	..
....	....	....	....	....	…	....	....	…
B_i	ai1	ai_2	a_{i3}	....	aij	....	a_{in}	b_i
....	....	....	....	....	…	....	....	…
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mj}	....	a_{mn}	b_m
مقدار الربح	p_1	p_2	p_3	....	p_j	....	p_n	
مقدار الإنتاج (المجاهيل)	x1	x_2	x3	....	x_j	....	x_n	

وبذلك نكون قد حصلنا على النموذج الرياضي الخطي للمسألة المفروضة, وللحصول على الخطة المثالية المطلوبة نقوم بإيجاد الحل المثالي لذلك النموذج وفق خوارزمية السمبلكس وتعديلاتها.

ملاحظة:

عند تطبيق هذا النموذج على شركة معينة علينا أن نقوم بتجميع أو حساب المعطيات العددية a_{ij} و b_i و p_j من المصادر الإحصائية الموثوقة, وإذا لم تكن متوفرة علينا إجراء الدراسات اللازمة لحسابها ميدانياً.

مثال:

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات A_2,A_1 وتستخدم لذلك ثلاث مواد أولية هي $B_3\ B_2\ B_1$ متوفرة لدى الشركات بكميات 24000 و40000 و27000 واحدة منها على الترتيب, وإذا كانت المقادير اللازمة من كل تلك الموارد لإنتاج واحدة من كل من المنتجين A_2, A_1 هي كما يلي:

المنتجات / المواد الأولية	A_1	A_2
B_1	3	6
B_2	8	4
B_3	9	3

<u>والمطلوب:</u> إيجاد الخطة الخطة المثالية للإنتاج في الشركة التي تجعل ربحها أكبر ما يمكن, علماً بأن مقدار الربح الناتج عن واحدة المنتجات A_1 وA_2 هو 6 و9 ل.س على الترتيب.

<u>الحل:</u>

لإيجاد الخطة المثالية علينا أن نصوغ المسألة على شكل نموذج رياضي خطي, لذلك نفترض أن مقدار ما يجب إنتاجه من المنتجين A_1 وA_2 هما x_1 وx_2 على الترتيب, ونضع جميع المعلومات في جدول كالتالي:

المواد الأولية	المنتجات		الكميات المتوفرة
	A_1	A_2	
B_1	3	6	24000
B_2	8	4	40000
B_3	9	3	27000
مقادير الربح	9	6	
مقادير الإنتاج	x_1	x_2	

وبذلك نجد بسهولة أن النموذج الرياضي لهذه المسألة يتألف من تابع الهدف التالي (تابع الربح):

$$z = 9x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{Max}$$

ومن الشروط الخطية التالية:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24000$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 40000$$
$$9x_1 + 3x_2 \leq 27000$$

ومن الشروط الفردية:

$$x_1 \geq 0 \ , \qquad x_2 \geq 0$$

ولإيجاد الخطة المثالية المطلوبة نحول النموذج إلى الشكل النظامي, ونطبق عليه خوارزمية (السمبلكس) المعدلة كما يلي:

$$z = 9x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{Max}$$
$$y_1 + 3x_1 + 6x_2 = 24000$$
$$y_2 + 8x_1 + 4x_2 = 40000$$
$$y_3 + 9x_1 + 3x_2 = 27000$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

وهنا نشير إلى أن المتحولات الإضافية y_3, y_2, y_1 التي أضفناها إلى الطرف الأيسر لكل متراجحة, ما هي في الحقيقة إلا كميات المواد المتبقية من كل من المواد B_3 B_2 B_1 أو التي لا يمكن استخدامها في عمليات الإنتاج. نضع معاملات النموذج الرياضي في جدول (السمبلكس) المعدل فنحصل على الجدول التالي:

القاعدة	المتحولات		الثوابت
	x_1	x_2	B_1
y_1	3	6	24000
y_2	8	4	40000
y_3	9	3	27000
تابع الهدف	9	6	z-0

وبتحديد عنصر الارتكاز (9) وفق التعليمات المعروفة وإجراء تبديل y_3 بـ x_1 نحصل على الجدول التالي:

القاعدة	y_3	x_2	الثوابت
y_1	$-\frac{1}{3}$	5	15000
y_2	$-\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$	16000
x_1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	3000
تابع الهدف	-1	3	z-27000

وبتحديد عنصر الارتكاز (5) وفق التعليمات المعروفة وإجراء تبديل y_1 بـ x_2 نحصل على الجدول التالي:

القاعدة	y_3	y_1	الثوابت
x_2	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	3000
y_2	$-\frac{36}{45}$	$-\frac{4}{15}$	12000
x_1	$\frac{6}{45}$	$-\frac{1}{15}$	2000
تابع الهدف	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	z-36000

وهو يعطينا الحل المثالي أو الخطة المثالية التالية:

$y_1 = y_3 = 0$

$x_1 = 2000 \quad , \quad x_2 = 3000 \quad , \quad y_2 = 12000$

وأن أكبر ربح ممكن:

$\text{Max } z = 36000$

أي أن الشركة, ستحقق أكبر ربح ممكن وقدره 36000 ل.س إذا تبنت الخطة المثالية, التي تقرر إنتاج 2000 واحدة من A_1 و3000 واحدة من A_2, علماً أن الشركة تستهلك جميع ما لديها من المادة B_1 $(y_1=0)$ ومن المادة B_3 $(y_3=0)$ ويبقى لديها 12000 واحدة من المادة B_2 دون استغلال, وهذا أمر يحتاج إلى إعادة النظر في عمليات تأمين وشراء المواد الأولية؟

II - نموذج الخطية المثالية للقطاع أو الاتحاد:

لنفترض أن القطاع أو الاتحاد مؤلف من n مؤسسة, تنتج كل منها m نوعاً من المنتجات, وإذا كانت كميات الإنتاج قد حددتها السلطات العليا للاتحاد, وحسب الأنواع على الشكل التالي:

$A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots\ldots A_m$

وإذا كانت طاقة تلك المؤسسات من القوى العاملة (ساعة عمل) هي:

$T_1, T_2, T_3 \ldots\ldots\ldots\ldots T_n$

وكانت تكلفة واحدة المنتجات من النوع i في المؤسسة j هي c_{ij} حيث:

(j: 1 2 3 ….n), (i: 1 2 3……..m)

وكانت المصفوفة $t = [t_{ij}]$ هي مصفوفة المعاملات الفنية لنفقات العمل, وإذا فرضنا أن x_{ij} هو مقدار ما يجب إنتاجه من النوع i في المؤسسة j، وكان هدفنا جعل تكلفة الإنتاج أصغر ما يمكن, فإن تابع الهدف يساوي:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min} \qquad (1\text{-}2\text{-}6)$$

وذلك ضمن الشروط التي تعبر عن أن كميات الإنتاج من كل نوع يجب أن تساوي الكميات المحددة.

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} ..... + x_{1n} = A_1 \\ &x_{21} + x_{22} ..... + x_{2n} = A_2 \\ &..... \\ &x_{m1} + x_{m2} ..... + x_{mn} = A_m \end{aligned} \qquad (2\text{-}2\text{-}6)$$

لقد وضعنا هذه الشروط على شكل مساواة وليس على شكل متراجحات $\geq$ لأن أية زيادة في كمية الإنتاج ستؤدي إلى زيادة التكلفة.

أما الشروط التي تعبر عن أن نفقات العمل في كل مؤسسة يجب أن لا يتجاوز المقادير المتوفرة فهي:

$$\begin{aligned} &t_{11}x_{11} + t_{21}x_{21} + ...t_{m1}x_{m1} \leq T_1 \\ &t_{12}x_{12} + t_{22}x_{22} + ...t_{m2}x_{m2} \leq T_2 \\ &..... \\ &t_{1n}x_{1n} + t_{2n}x_{2n} + ...t_{mn}x_{mn} \leq T_n \end{aligned} \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

والشروط:

$$x_{ij} \geq 0 \ (i:1\ 2\ 3.....m, j:12.....n) \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

أما إذا كان هدفنا الاستفادة العظمى من الطاقة الإنتاجية (الآلية أو العمالية) في كل مؤسسة فإن تابع الهدف يصبح التابع التالي:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \rightarrow Max \qquad (5\text{-}2\text{-}6)$$

وذلك ضمن الشروط (6-2-3) و (6-2-4) السابقة فقط. وبتحويل هذا النموذج إلى الشكل النظامي يمكننا إيجاد حله المثالي بواسطة طريقة السمبلكس.

مثال:

لدى اتحاد الصناعات الغذائية ثلاثة مصانع لإنتاج السكر وأن كل منها يمكن أن ينتج نوعين من السكر A وB وإن الطاقة الإنتاجية (بالطن) لهذه المصانع خلال واحدة الزمن (الشهر) وحسب هذين النوعين هي:

المصنع / النوع	1	2	3	ملاحظات
A	100	120	360	فيما إذا لم ينتج من النوع B
B	200	240	120	فيما إذا لم ينتج من النوع A

والمطلوب: إيجاد الخطة الإنتاجية التي تسمح بالاستفادة الكاملة من الطاقة الإنتاجية المتوفرة في المصانع الثلاثة.

الحل:

نلاحظ قبل كل شيء أن مصفوفة المعاملات الفنية للنفقات غير معطية في نص المسألة, ولكن يمكننا حسابها كما يلي: لنفترض أن إجمالي الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول تساوي (1) فعندها نجد أن إنتاج واحدة من منتجات النوع الأول تتطلب $\frac{1}{100}$ من طاقة المصنع الإجمالية, وكما أن إنتاج واحدة من منتجات النوع الثاني تتطلب $\frac{1}{200}$ من طاقته الإجمالية, وإذا فعلنا نفس الأمر بالنسبة للصنفين الثاني والثالث نحصل على المعاملات الفنية للنفقات المعروضة في الجدول التالي:

المصنع / النوع	1	2	3
A	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{360}$
B	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{120}$

وإذا رمزنا بـ x_{ij} لمقدار ما يجب إنتاجه من النوع i في المصنع j, فإننا نجد أن تابع الهدف الذي يسعى للاستفادة العظمى من الطاقة الإنتاجية هو التابع التالي:

$$z = \frac{1}{100}\cdot x_{11} + \frac{1}{120}\cdot x_{12} + \frac{1}{360}\cdot x_{13} + \frac{1}{200}\cdot x_{21} + \frac{1}{240}\cdot x_{22} + \frac{1}{120}\cdot x_{23} \to \text{Max}$$

أما الشروط التي تفرضها الطاقة الإنتاجية للمصانع الثلاثة فهي:

$$\frac{1}{100}\cdot x_{11}+\frac{1}{200}\cdot x_{21}\le 1$$
$$\frac{1}{120}\cdot x_{12}+\frac{1}{240}\cdot x_{22}\le 1$$
$$\frac{1}{360}\cdot x_{13}+\frac{1}{120}\cdot x_{23}\le 1$$

وذلك لأننا افترضنا أن إجمالي طاقة كل مصنع يساوي (1) وإذا أضفنا شروط عدم السالبية $x_{ij}\ge 0$, فإننا نحصل على النموذج الرياضي للمسألة السابقة.

وبمتابعة الحل نقوم بإصلاح هذه المعادلات فنحصل على:

$$3600\,z = 36\,x_{11}+30x_{12}+10x_{13}+18x_{21}+15x_{22}+30x_{23}\rightarrow \text{Max}$$

وذلك ضمن الشروط التالية:

$$2x_{11}+x_{21}\le 200$$
$$2x_{12}+x_{22}\le 240$$
$$x_{13}+3x_{23}\le 360$$
$$x_{ij}\ge 0$$

نضع $z' = 3600\,z$ ونضيف إلى كل من المتحولات السابقة متحولاً إضافياً. لنحولها إلى الشكل النظامي فنحصل على الشكل التالي:

$$z' = 36x_{11}+30x_{12}+10x_{13}+18x_{21}+15x_{22}+30x_{23}\rightarrow \text{Max}$$

وذلك ضمن الشروط:

$$2x_{11}+x_{21}+y_1 = 200$$
$$2x_{12}+x_{22}+y_2 = 240$$
$$x_{13}+3x_{23}+y_3 = 360$$
$$x_{ij}\ge 0$$

نضع هذه النتائج في جدول السمبلكس المباشر التالي:

المتحولات / القاعدة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
y_1	2	0	0	1	0	0	1	0	0	200
y_2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	240
y_3	0	0	1	0	0	3	0	0	1	360
تابع الهدف	36	30	10	18	15	30	0	0	0	$z'-0$

من دراسة السطر الأخير نجد أن أكبر عنصر فيه هو (36) المقابل لـ x_{11} فيكون العمود المقابل له هو عمود الارتكاز، وبتقسيم عناصر عمود الثوابت الحرة على عناصر عمود الارتكاز نجد أن العنصر (2) هو عنصر الإرتكاز، وبإجراء الحسابات المطلوبة نحصل على الجدول التالي:[1]

المتحولات / القاعدة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
x_{11}	1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
y_2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	240
y_3	0	0	1	0	0	3	0	0	1	360
تابع الهدف	0	30	10	-18	15	30	-18	0	0	$z'-3600$

نعود وندرس عناصر السطر الأخير فنجد أن أكبر عنصر فيها هو (30) المقابل لـ x_{12} (أو المقابل x_{23}) لذلك نعتبر عمود x_{12} عمود ارتكاز، ونجد أن عنصر الارتكاز هو بالضرورة العنصر (2) من السطر الثاني، نقوم بإجراء الحسابات فنحصل على الجدول التالي:

[1] نلاحظ أن عناصر السطرين (2) و(3) لم تتغير وذلك لأن عنصرها المتقاطع مع عمود الارتكاز يساوي الصفر، ويمكن الاستفادة من هذه الملاحظة في الحسابات.

المتحولات القاعدة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
x_{11}	1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
x_{12}	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	120
y_3	0	0	1	0	0	3	0	0	1	360
تابع الهدف	0	0	10	-18	0	30	-18	-30	0	$z'-7200$

وبالانتقال إلى جدول آخر نحصل على الجدول التالي:

المتحولات القاعدة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
x_{11}	1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
x_{12}	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	120
X_{23}	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	120
تابع الهدف	0	0	-20	-18	0	0	-18	-30	-30	$z'-10800$

وبدراسة عناصر السطر الأخير نلاحظ أنه قد توصلنا إلى الحل المثالي، وقبل أن نحسب قيم ذلك الحل نلاحظ أن السطر الأخير يتضمن صفراً في عمود غير أعمدة المتحولات القاعدية (عمود x_{22})، وهذا ما يدل على وجود أكثر من حل مثالي واحد (لا نهاية من الحلول المثالية).

ونحصل على الحل المثالي بوضع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر، أي نقوم بوضع:

$x_{22} = 0,$ $x_{13} = 0,$ $x_{21} = 0,$ $y_1 = y_2 = y_3 = 0$

ومن الجدول نجد أن معادلاته تعطينا أن:

$x_{11} = 100$
$x_{12} = 120$
$x_{23} = 120$

وهو يعطينا أيضاً أن:

$$0 = z' - 10800 \Rightarrow z' = 10800$$

وهو يعطينا أن:

$$3000z = 10800 \Rightarrow z = 3$$

وهذا يعني أن المصانع الثلاثة قد استغلت كامل طاقتها الإنتاجية لأننا افترضنا أن طاقة كل معمل تساوي (1) وكما يدل على ذلك انعدام المتحولات الإضافية y_1, y_2, y_3.

ولحصول على حل مثالي آخر نقوم بإجراء تبديل آخر. ولذلك نعتبر عمود x_{22} هو عمود الارتكاز فنجد أن عنصر الارتكاز هو $\left(\frac{1}{2}\right)$ وبنتيجة التبديل نحصل على الجدول التالي:

المتحولات / القاعدة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	الثوابت
x_{11}	1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
x_{12}	0	2	0	0	1	0	0	1	0	240
x_{23}	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	120
تابع الهدف	0	0	-20	-18	0	0	-18	-30	-30	$z' - 10800$

وهو يعطينا الحل المثالي التالي:

$x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{23} = y_1 = y_2 = y_3 = 0$

$x_{11} = 100$, $x_{22} = 240$, $x_{23} = 120$

ويعطينا نفس القيمة لـ z' وبالتالي لـ z وتساوي:

$$Z = 3$$

وللحصول على حلول مثالية أخرى يمكننا أن ننشئ علاقة خطية بين الحلين المثالين السابقين كما يلي:

$$p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$$

حيث إن p_1 هو الحل المثالي الأول و p_2 هو الحل المثالي الثاني.

وأن $0 \le \lambda \le 1$ ويمكن أن نعطي λ أية قيمة ضمن ذلك المجال. ويمكننا تحديد قيمة λ بحيث تكون قيمة ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن أو بحيث تكون كمية الإنتاج من هذين النوعين متناسبة مع حاجات المجتمع لهما.

حيث أن $0 \le \lambda \le 1$ ويمكن أن نعطي λ أية قيمة ضمن ذلك المجال. ويمكننا تحديد قيمة λ بحيث تكون قيمة ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن أو بحيث تكون كمية الإنتاج من هذين النوعين متناسبة مع حاجات المجتمع لهما.

III- نموذج الخطة المثالية للإنتاج بين القطاعات:

لنفترض أن عدد القطاعات التي تساهم في عملية الإنتاج هو n قطاعاً وأن قيمة المنتجات الإجمالية لهذه القطاعات هي:

$$X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_n$$

وإن قيمة المنتجات النهائية لهذه القطاعات هي:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$$

وأن مصفوفة المعاملات الفنية (لقيم المنتجات) هي المصفوفة B حيث:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots. & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots. & b_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots. & b_{nn} \end{bmatrix}$$

وإن قيمة المنتجات النهائية خلال الفترة الماضية كانت:

$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n^{(0)}$

والمطلوب:

إيجاد النموذج الرياضي لهذه المسألة. بحيث لا تقل قيم المنتجات النهائية لهذه الفترة عن قيمتها خلال الفترة الماضية.

يمكن النظر إلى هذه المسألة من عدة زوايا, وذلك حسب المعيار الاقتصادي الذي نريد تحقيقه والذي يشكل تابع الهدف, ولكن قبل أن نناقش قضية إيجاد النموذج الرياضي نلاحظ أن قيم المنتجات الإجمالية X_j والنهائية x_j ترتبط مع بعضها بعضاً وفق العلاقة المعروفة في التحليل الاقتصادي والتي تأخذ الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} X_1 &= b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots b_{1n} X_n + x_1 \\ X_2 &= b_{21} X_1 + b_{22} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots b_{2n} X_n + x_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= b_{n1} X_1 + b_{n2} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{nn} X_n + x_n \end{aligned} \qquad (1-5-6)$$

وسنناقش قضية إيجاد النموذج الرياضي حسب المعايير الاقتصادية الآتية:

1- عندما نريد أن تكون قيمة المنتجات الإجمالية أكبر ما يمكن في هذه الحالة نجد أن تابع الهدف هو التابع الآتي:

$$z = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n \rightarrow \max \qquad (2-5-6)$$

أما الشروط فهي الشروط المفروضة على قيم المنتجات النهائية وهي:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq x_1^{(0)} \\ x_2 &\geq x_2^{(0)} \\ x_3 &\geq x_3^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots &\quad \ldots\ldots \\ x_n &\geq x_n^{(0)} \end{aligned} \qquad (3-5-6)$$

وشروط عدم سالبية قيم المنتجات الإجمالية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلات (6−5−1) فإن النموذج الرياضي لهذه الحالة يأخذ الشكل الآتي:

$$z = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n \rightarrow \max \qquad (4-5-6)$$

$$\begin{aligned} &X_1 - b_{11} X_1 - b_{12} X_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots -b_{1n} X_n \geq x_1^{(0)} \\ &X_2 - b_{21} X_1 - b_{22} X_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots -b_{2n} X_n \geq x_2^{(0)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &X_n - b_{n1} X_1 - b_{n2} X_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots b_{nn} X_n \geq x_n^{(0)} \end{aligned} \qquad (5-5-6)$$

$$X_j \geq 0 (j: 12 \ldots\ldots\ldots\ldots n)$$

ولحل هذا النموذج نحوله إلى الشكل النظامي ثم نطبق عليه طريق السمبلكس.

2− عندما نريد أن تكون نفقات العمل الاجتماعي المصروفة على المنتجات أقل ما يمكن:

لنفترض أن L_j هو مقدار العمل الاجتماعي اللازم لإنتاج ما قيمته وحدة واحدة من منتجات القطاع j وأن حجم العمالة غير الإنتاجية هو L_o وإذا كانت قيمة منتجات القطاع j هي X_j فإن إجمالي نفقات العمل الاجتماعي على الإنتاج في جميع القطاعات يساوي:

$$\sum_{j=1}^{n} L_J X_J$$

وإذا كانت الموارد المتوفرة من القوى العاملة تساوي z_o فإن نفقات العمل الاجتماعي يجب أن تحقق الشرط الآتي:

$$\sum_{j=1}^{n} L_J X_J + L_o \leq z_o$$

كما أن قيم المنتجات الإجمالية X_j والنهائية x_j ترتبط بعلاقات التوازن الآتية:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j + x_i$$

فإذا كانت قيم المنتجات النهائية محددة وتساوي:

$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, x_3^{(0)},\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n^{(0)}$

فإن النموذج الرياضي المطلوب يأخذ الشكل الآتي:

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j X_j \rightarrow Min \qquad (6-5-6)$$

ضمن الشروط الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} L_j X_j + L_o \leq z_o \qquad (7-5-6)$$

$$X_i - \sum b_{ij} X_j = x_i^{(0)} (i = 123.....n)$$

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad (j:123.....n)$$

ولحل هذا النموذج تحوله إلى الشكل النظامي ونطبق عليه طريقة السمبلكس.

3- عندما نريد أن تكون قيم المنتجات النهائية أكبر ما يمكن:

لنفترض أن مصفوفة المعاملات الفنية هي المصفوفة $B=[b_{ij}]$ وأن الموارد المتوفرة من أدوات العمل هو p ومن وسائل العمل هو S ومن القوة العاملة هو M وأن مصفوفة المعاملات لنفقات هذه الموارد على إنتاج ما قيمته واحدة من المنتجات النهائية هي:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & .... & p_{1n} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} & .... & m_{1n} \\ s_{11} & s_{12} & s_{13} & .... & s_{1n} \end{bmatrix}$$

وإذا رمزنا بـ X_j لقيم المنتجات الإجمالية و x_j لقيم المنتجات النهائية في القطاع j فإنه يمكننا صياغة النموذج الرياضي الذي يسعى لجعل المنتجات النهائية أكبر ما يمكن على الشكل الآتي:

تابع الهدف هو:

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow Max \qquad (8-5-6)$$

والشروط هي:

$$
\begin{aligned}
&x_i \geq x_i^{(0)} \qquad (i:1,2,3,.....n)\\
&p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + ...p_{1n}x_n \leq p\\
&m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 + ...m_{2n}x_n \leq M\\
&s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3 + ...s_{3n}x_n \leq S
\end{aligned}
\qquad (9-5-6)
$$

حيث أن $x_i^{(0)}$ هو الحد الأدنى لقيمة المنتجات النهائية في القطاع i وإن الشروط (9-5-6) تعني أن نفقات عوامل الإنتاج يجب أن لا تتجاوز المقادير المتوفرة منها.

ولحل هذا النموذج نحوله إلى الشكل النظامي ونطبق عليه طريقة السمبلكس والتي منها نحصل على حل مثالي لقيم المنتجات النهائية $(x'_1, x'_2.....x'_n)$.

وبناء على ذلك الحل المثالي يمكننا الحصول على قيم المنتجات الإجمالية من العلاقة:

$$X = (I - B)^{-1} .x$$

IV - نموذج توزيع التكوين الرأسمالي بين القطاعات:

لنفترض أن عدد القطاعات هو n قطاعاً، وأن I_i هو مقدار التكوين الرأسمالي المخصص للقطاع j وإذا رمزنا لإجمالي حجم التكوين الرأسمالي بـ I فإن:

$$I = \sum_{j=1}^{n} I_j$$

ولندخل مفهوم تزايد صافي القيمة المضافة في القطاع I ونرمز له بالرمز Δ_j، حيث أن $\Delta_j = d_j - d'_j$ وحيث إن d'_j, d_j هما صافيا القيمة المضافة في نهاية فترة الخطة وبدايتها على الترتيب نتيجة لاستثمار التكوين الرأسمالي I_j .

كما ندخل مفهوم مؤشر المردودية الاقتصادية للتكوين الرأسمالي في القطاع j وهو عبارة عن مقدار تزايد صافي القيمة المضافة نتيجة استثمار واحدة نقدية في القطاع j وهو يساوي:

$$k_j = \frac{\Delta_j}{I_j} \qquad (1-6-6)$$

ومن الطبيعي أن يكون تابع الهدف في هذه المسألة هو إجمالي تزايد صافي القيمة المضافة في جميع القطاعات والذي نرمز له بـ Δ حيث:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j = \sum_{i=1}^{n} k_j I_j \rightarrow Max \qquad (2-6-6)$$

وإذا رمزنا بـ b_{ij} لقيمة منتجات القطاع i اللازمة لزيادة صافي القيمة المضافة في القطاع j بمقدار واحدة نقدية فقط فإن قيمة منتجات القطاع i اللازمة لزيادة صافي القيمة المضافة في القطاع j بمقدار Δ_j تساوي $b_{ij}\Delta_j$، وبذلك نجد أن إجمالي ما يلزم من القطاع i لجميع القطاعات الأخرى يساوي:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta_j$$

ومن المعلوم أن قيمة منتجات القطاع i التي يمكن أن تخصص للتكوين الرأسمالي لا يمكن لها أن تتجاوز w_i قيمة المنتوج النهائي لذلك القطاع أي يجب أن يكون:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta_j \leq w_i \qquad ; \qquad (i: 123 \ldots\ldots\ldots n)$$

وبتعويض Δ_j من العلاقة (6-6-1) نحصل على الشروط الخطية الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}k_j I_j \leq w_i \qquad ; \qquad (i: 123 \ldots\ldots\ldots n)$$

وهي الشروط الخطية لتابع الهدف (6-6-2) والتي يدخل فيها I_j كمتحولات مجهولة وتتميز بعدم سالبيتها أي $I_j \geq 0$.

V- نموذج مسألة التعيين والطريقة الهنغارية لحله:

سنتناول في هذه المسألة قضية التوزيع المثالي للعمال (أو الآلات) على الأعمال وهو ما يتفق مع شعار (الشخص المناسب في المكان المناسب).

لنفترض أننا نريد توزيع n عاملاً (أو آلة) على n عملاً بحيث يقوم كل عامل بإنجاز عمل واحد فقط، وبحيث يكون إجمالي الإنتاج لهم أكبر ما يمكن، وذلك ضمن الإنتاجية (التكلفة) المحددة لكل منهم.

لذلك سنرمز بـ c_{ij} لإنتاجية العامل i في العمل j وإن هذه الإنتاجية تعطينا المصفوفة الآتية:

$$\begin{matrix} c_{11}\ c_{12}\ c_{13}\ \ldots\ldots\ldots\ldots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22}\ c_{23}\ \ldots\ldots\ldots\ldots c_{2n} \\ c_{31}\ c_{32}\ c_{33}\ \ldots\ldots\ldots\ldots c_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}\ c_{n2}\ c_{n3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots c_{nn} \end{matrix} \qquad (1\text{-}7\text{-}6)$$

(ويمكن أن تكون هذه المصفوفة معبرة عن تكاليف العمل بدلاً من الإنتاجية).

وتصبح المسألة على الشكل الآتي: ضمن الشروط والأهداف السابقة يجب أن نختار من كل سطر ومن كل عمود في المصفوفة (6-7-1) عنصراً واحداً محدداً بحيث يكون مجموع تلك العناصر أكبر ما يمكن (أو أصغر ما يمكن في حالة التكاليف) ولصياغة النموذج الخطي لهذه المسألة نرمز بـ x_{ij} للمتحول الذي يأخذ قيمة تساوي (1) عندما نعين العامل i على العمل ويأخذ قيمة تساوي (0) عندما يكون عكس ذلك.

وإن هذه المتحولات تكتب على شكل مصفوفة مربعة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & .... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & .... & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & .... & x_{3n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & .... & x_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}7\text{-}6)$$

وبما أن العامل الواحد لا يمكن أن يأخذ إلا عملاً واحداً فهذا يعني أن واحدا فقط من المتحولات x_{ij} في السطر i سيأخذ قيمة تساوي (1) أما بقيمة المتحولات في ذلك السطر فتأخذ قيماً تساوي (0).

وبما أن العمل الواحد لا يمكن أن ينفذ إلا من قبل عامل واحد فهذا يعني أن واحد فقط من المتحولات x_{ij} في العمود j سيأخذ قيمة تساوي (1) أما بقية المتحولات في ذلك العمود فستأخذ قيماً تساوي (0).

وبذلك يمكننا أن نصوغ تابع الهدف لهذه المسألة كما يلي:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \text{Max}(\text{Min}) \qquad (3-7-6)$$

وبما أن العامل الواحد لا يمكن أن يأخذ إلا عملاً واحداً فإن x_{ij} يجب أن تحقق الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{bmatrix} x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13}+ & .... & +x_{1n}=1 \\ x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23}+ & .... & +x_{2n}=1 \\ x_{31}+ & x_{32}+ & x_{33}+ & .... & +x_{3n}=1 \\ ..... & ..... & ..... & .... & ..... \\ x_{n1}+ & x_{n2}+ & x_{n3}+ & .... & +x_{nn}=1 \end{bmatrix} \qquad (4-7-6)$$

وبما أن العمل الواحد لا ينفذ إلا من قبل عامل واحد فإن x_{ij} يجب أن تحقق الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{bmatrix} x_{11}+ & x_{21}+ & x_{31}+ & .... & +x_{n1}=1 \\ x_{12}+ & x_{22}+ & x_{32}+ & .... & +x_{n2}=1 \\ x_{13}+ & x_{23}+ & x_{33}+ & .... & +x_{n3}=1 \\ ..... & ..... & ..... & .... & ..... \\ x_{1n}+ & x_{2n}+ & x_{3n}+ & .... & +x_{nn}=1 \end{bmatrix} \qquad (5-7-6)$$

كما أن x_{ij} يجب أن تكون صحيحة وتحقق الشروط الآتية:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i,j:123.....n) \text{ وصحيحة} \qquad (6-7-6)$$

وتصبح المسألة على الشكل الآتي:

يطلب إيجاد الأعداد الصحيحة x_{ij} التي تجعل التابع (6-7-3) أكبر ما يمكن (اصغر ما يمكن) وتحقق الشروط (6-7-4) والشروط (6-7-5) والشروط (6-7-6).

ويمكن حل هذه المسائل بوساطة طريقة السمبلكس أو بطريقة التجريب أو الاقتطاع إلا أن ضخامة الجداول والمعلومات تجعل استخدام الطريقتين السابقتين طويلاً

ومكلفاً جداً لذلك فإننا سنقوم بحل مثال تطبيقي بطريقة أخرى تسمى بالطريقة الهنغارية أو طريقة (فلود).

الطريقة الهنغارية لحل مسائل التعيين (طريقة فلود): (في حالة تابع هدف Min)

لنفترض أنه لدينا ثلاث آلات ونريد تكليفها بإنجاز ثلاثة أعمال وأن تكاليف أو أجور هذه الآلات حسب تلك الأعمال معطية في الجدول الآتي:

الأعمال / الآلات	L_1	L_2	L_3
M_1	20	27	30
M_2	16	18	10
M_3	12	16	14

والمطلوب: توزيع هذه الآلات على الأعمال بحيث تكون تكلفة الإنجاز أقل ما يمكن.

الحل:

نرمز بـ x_{ij} لعدد الآلات i التي يمكن أن تخصص لإنجاز العمل j وبذلك نجد أن تابع الهدف يأخذ الشكل الآتي:

$$L = 20\,x_{11} + 27x_{12} + 30x_{13} + 16x_{21} + 18x_{22} + 10x_{23} + 12x_{31} + 16x_{32} + 14x_{33} \rightarrow \text{Min}$$

وبدلاً من البحث عن الشروط الخطية نقوم بمعالجة المصفوفة السابقة كما يلي:

1- نقوم بإيجاد أصغر عنصر في كل عمود ونسجله في أسفل الجدول.

2- نقوم بطرح العنصر الأصغر في كل عمود من جميع عناصر ذلك العمود. فنحصل على صفر في كل عمود، ونضع النتائج في جدول جديد.

3- نقوم بإيجاد أصغر عنصر في كل سطر في الجدول الجديد ونضعه على يمين الجدول.

4- نقوم بطرح العنصر الأصغر في كل سطر في الجدول الجديد من جميع عناصر ذلك السطر فنحصل على جدول ثالث.

5- ندرس توزعات الأصفار في الجدول الأخير ونختار بطريقة مناسبة من كل سطر أو عمود صفراً واحداً بحيث لا يقع اختيارنا على صفرين في سطر واحد أو في عمود واحد، أو بحيث يكون صفر واحد في كل عمود وصفر واحد في كل سطر ونؤشر على الأصفار التي وقع اختيارنا عليها بإشارة (x) لتمييزها عن غيرها إن ذلك الاختيار إذا تمكنا من الوصول إليه هو الحل المثالي لمسألة التعيين المفروضة.

ملاحظة (1):

إذا لم نتمكن من تحقيق الاختيار المثالي السابق بسبب التوزيع السيئ للأصفار. فإننا نبحث عن أصغر رقم (غير صفر) في الأسطر أو الأعمدة التي لا يوجد فيها إشارة (x) ونطرح ذلك العنصر من عناصر الأسطر والأعمدة التي لا يوجد فيها إشارة (x) ونجمعه إلى العناصر التي تقع على تقاطع الأسطر والأعمدة المؤشرة فنحصل على جدول جديد نستخدمه من جديد في عملية اختيار الأصفار السابقة.

ملاحظة (2):

إذا كان عدد الآلات أكثر من عدد الأعمال فإننا نضيف إلى الأعمال عملاً وهمياً ونضع تكلفة إنجازه بالنسبة لجميع الآلات تساوي الصفر وبالعكس إذا كان عدد الأعمال أكثر من عدد الآلات فإننا نضيف إلى الآلات آلة وهمية ونضع تكلفة عملها مساوية للصفر.

ملاحظة (3):

إذا كان تابع الهدف من النوع Max فإننا نقوم بالبحث عن اكبر عنصر في كل عمود ثم نطرح كل عنصر في ذلك العمود من ذلك العنصر فنحصل على جدول جديد وبعد ذلك نقوم بالبحث عن أكبر عنصر في كل سطر ثم نطرح كل عنصر في ذلك السطر من ذلك العنصر فنحصل على الجدول الثالث حيث نقوم بوضع الإشارات اللازمة عليه.

وبتطبيق ذلك على المثال المفروض نقوم بإيجاد العنصر الأصغر في كل عمود فنحصل على الجدول الآتي:

الأعمال / الآلات	L_1	L_2	L_3
M_1	20	27	30
M_2	16	18	10
M_3	12	16	14
أصغر عنصر	12	16	10

وبطرح ذلك العنصر الأصغر من عناصر كل عمود نحصل على الجدول الآتي:

الأعمال / الآلات	L_1	L_2	L_3	أصغر عنصر
M_1	8	11	20	8
M_2	4	2	0	0
M_3	0	0	4	0

وبإيجاد أصغر عنصر في كل سطر من الجدول الجديد وطرحه من بقية عناصر السطر نحصل على الجدول الثالث الآتي:

الأعمال / الآلات	L_1	L_2	L_3
M_1	0^x	3	12
M_2	4	2	0^x
M_3	0	0^x	4

وبوضع إشارات (x) في الحجر التي تتضمن أصفاراً بشكل مناسب وبحيث يقع اختيارنا في كل عمود وفي كل سطر على صفر واحد.

نحصل على الحل المثالي الآتي:

نكلف M_1 بالعمل L_1 ويكون لدينا $\leftarrow x_{11} = 1$

ونكلف M_2 بالعمل L_3 ويكون لدينا $\leftarrow x_{23} = 1$

ونكلف M_3 بالعمل L_2 ويكون لدينا $\leftarrow x_{32} = 1$

وبذلك تأخذ المتحولات الأخرى قيماً تساوي الصفر، ويأخذ تابع الهدف أصغر قيمة له وتساوي:

$L = 20 + 10 + 16 + = 46$

VI- نموذج تركيب الخلائط:

إن هذا النموذج ما هو إلا تعميم لنموذج تركيب الوجبة العلفية الذي أوردناه في مقدمة الفصل الثالث. وإننا هنا سنعالج الموضوع على اعتباره مسألة لتركيب أية خليطة معدنية أو كيميائية أو اسمنتيه أو غذائية ..... إلخ.

لذلك نفترض إننا نريد أن نركب خليطة من n مادة مناسبة وأن كل مادة تحتوي على m عنصراً مميزاً وإن واحدة المادة j تحتوي على a_{ij} من العنصر i، وإن سعر المادة j يساوي c_j وإننا نريد أن لا تقل كمية العنصر i في الخليطة عن مقدار معين b_i وأن تكون تكلفة تلك الخليطة أصغر ما يمكن.

لإيجاد النموذج لهذه المسألة ونرمز لمقدار ما يلزم من المادة j بـ X_j نضع المعلومات السابقة في جدول مرتب كالآتي:

وإن الشروط الخطية تأخذ الشكل الآتي:

المواد / العناصر	A_1	A_2	A_3	.....	A_n	**المقدار المطلوب**
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.....	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.....	a_{2n}	b_2
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	.....	a_{mn}	b_m
السعر	c_1	c_2	c_3	.....	c_n	
المتحولات	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	

وبذلك نجد أن تابع الهدف هو تابع التكلفة الآتي:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots\ldots\ldots c_n x_n \rightarrow \text{Min} \qquad (1\text{-}8\text{-}6)$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \geq bm \end{array} \qquad (2\text{-}8\text{-}6)$$

وضمن شروط عدم سالبية المتحولات.

$$x_i \geq 0(j:123.....n) \qquad (3\text{-}8\text{-}6)$$

VII - نموذج الإستغلال الامثل للأراضي الزراعية:

لنفترض أنه لدينا n منطقة زراعة (سهلا أو مزروعة) مساحة كل منها تساوي a_1 $a_2\ a_3\ \ldots\ldots\ldots a_n$.

ونريد زراعتها بـ m نوعاً من المحاصيل الزراعية ولتامين متطلبات المجتمع منها يلزمنا من المحصول i المقدار b_i.

وإذا كان متوسط إنتاجية واحدة المساحة في السهل j من المحصول i تساوي a_{ij} طن / هكتار، وكان الربح الحاصل من كل واحدة من المحصول i يساوي p_i .

<u>والمطلوب:</u>

تحديد مقدار المساحة اللازم زراعتها بكل من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحقيق اكبر ربح (قيمة) ممكن لها مع تلبية حاجات المجتمع من كل محصول.

لنرمز بـ x_{ij} لمقدار المساحة من المنطقة j التي يجب زراعتها بالمحصول i ونضع معطيات المسألة في جدول كالآتي:

المناطق / المحاصيل	1	2	3	…	n	مقدار الطلب b_i	مقدار الربح P_i
1	a_{11} x_{11}	a_{12} x_{12}	a_{13} x_{13}	…	a_{1n} x_{1n}	b_1	P_1
2	a_{21} x_{21}	a_{22} x_{22}	a_{23} x_{23}	…	a_{2n} x_{2n}	b_2	P_2
3	a_{31} x_{31}	a_{32} x_{32}	a_{33} x_{33}	…	a_{3n} x_{3n}	b_3	P_3
……	….	….	....	…	…….	…….	……
m	a_{m1} x_{m1}	a_{m2} x_{m2}	a_{m3} x_{m3}	…	a_{mn} x_{mn}	b_m	P_m
مقدار المساحة المتوفرة a_j	a_1	a_2	a_3	…	a_n		

وعندها نجد أن الشروط المفروضة على المتحولات x_{ij} هي:

1- شروط المساحات: حيث يجب أن يكون إجمالي المساحة المخصصة لمختلف المحاصيل في المنطقة j مساوياً لمساحة تلك المنطقة a_j أي يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} + x_{31} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{m1} = a_1 \\ &x_{12} + x_{22} + x_{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{m2} = a_2 \\ &x_{13} + x_{23} + x_{33} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{m3} = a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{mn} = a_n \end{aligned} \qquad (1\text{-}9\text{-}6)$$

2- شروط تلبية متطلبات المجتمع حيث يجب أن لا يقل إجمالي الإنتاج من المحصول i في جميع المناطق عن المقدار bi أي أنه يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_{1n} \geq b_1 \\ &a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_{2n} \geq b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + a_{m3}x_{m3} + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_{mn} \geq bm \end{aligned} \qquad (2\text{-}9\text{-}6)$$

ولإيجاد تابع الهدف نلاحظ أن الربح الحاصل من إنتاج المحصول i فقط ومن جميع المناطق يساوي جداء الربح في الكمية ويساوي:

$P_i\ (a_{i1}\ x_{i1} + a_{i2}\ x_{i2} + a_{i3}\ x_{i3} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}\ x_{in})$

وبذلك نجد أن تابع الهدف الذي يعبر عن الربح الإجمالي الناتج عن جميع المحاصيل يساوي:

$$z = p_1\left(\sum_{j=1}^{n} \cdot a_{ij}x_{ij}\right) + p_2\left(\sum a_{2j}x_{2j}\right) + \ldots\ldots p_n\left(\sum a_{mj}x_{mj}\right) \qquad (3-9-6)$$

وذلك ضمن الشروط (6−9−1) والشروط (6−9−2).وشروط عدم السالبية:

$$x_{ij} \geq 0, \begin{matrix}(i:123\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m)\\(j:123\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n)\end{matrix}$$

وكمثال تطبيقي على صياغة هذا النموذج نأخذ المثالي الآتي:

مثال:

لنفترض أننا نريد استغلال أربع مناطق زراعية هي: (الساحل، الغاب، حلب، حوران) ومساحة كل منها: 10 DH, 15, 100, 50 على الترتيب وذلك بزراعتها بالمحاصيل الآتية: قمح، شعير، قطن، دخان، شوندر، والتي نحتاج منها ما يلي: طن 2000، 1500، 500، 100، 700، ولنفترض أن إنتاجية المناطق من تلك المحاصيل وأسعارها معطية في الجدول الآتي:

المناطق / المحاصيل	الساحل	الغاب	حلب	حوران	الطلب	سعر الطن
قمح	5	4	6	6	2000	1500
شعير	6	5	4	6	1500	1000
قطن	4	10	8	5	500	5000
دخان	7	2	0	0	100	4500
شوندر	3	12	10	4	700	500
المساحة	10	15	100	50		

والمطلوب: صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة بحيث تكون قيمة الإنتاج أكبر ما يمكن لصياغة النموذج الرياضي نستخرج الشروط الخطية الآتية:

شروط المساحة:

لمنطقة الساحل $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 10$

لمنطقة الغاب $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 15$

لمنطقة حلب $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 100$

لمنطقة حوران $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 50$

شروط الطلب:

قمح $5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} \geq 2000$

شعير $6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} \geq 1500$

قطن $4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} \geq 500$

دخان $7x_{41} + 2x_{42} + 0 + 0 \geq 100$

شوندر $3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54} \geq 700$

$x_{ij} \geq 0$

تابع الهدف الذي يعبر عن قيمة الإنتاج فهو:

$$Z = 1500 [5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14}]$$
$$+1000 [6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24}]$$
$$+ 5000 [4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}]$$
$$+ 4500 [7x_{41} + 2x_{42}]$$
$$+ 500 [3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54}] \rightarrow Max$$

مسائل

1- تنتج أحدى الشركات نوعين من المنتجات I و II وتستخدم لإنتاجهما ثلاثة أنواع من المـاد الأولية A و B و C وتحتاج لإنتاج واحدة النوع I واحدتين من المادة A ولا تحتاج شيئاً من المادة B وتحتاج 4 واحدات من المادة C. كما تحتاج لإنتاج واحدة من النوع II واحدة فقط من المادة A و 6 واحدات من المادة C.

قم بصياغة النموذج الرياضي الذي يساعدنا على تحديد مقدار ما يجب إنتاجه من كل من النوعين I و II بحيث يكون دخل الشركة أكبر ما يمكن، علماً بأن دخل واحدة النوع I يساوي 30 ل.س ودخل النوع II 50 ل.س وإن المقادير المتوفرة من المواد الأولية هي 5000 و 6000 و 7000 واحدة على الترتيب وإن الطلب على النوع هو 1000 وعلى النوع II هو 500 واحدة.

2- لتشكيل وجبة غذائية (عليقة) لبعض الحيوانات الداجنة نستخدم نوعين I و II ومن المواد العلفية، وإذا علمنا أن كل كيلو غرام من المادة I يحتوي على 5 واحدة من العنصر الغذائي A و 2.5 واحدة من العنصر الغذائي B وإن كل كيلو غرام من المادة II يحتوي على 3 واحدات من العنصر الغذائي A و3 واحدات من العنصر الغذائي B وإن التجارب الميدانية أو ضحت انه من الضروري أن تتضمن العليقة اليومية ما لا يقل عن 30 واحدة من العنصر الغذائي A وما لا يقل عن 22.5 واحدة من العنصر الغذائي B أوجد النموذج الرياضي الذي يساعدنا على تحديد كمية كل من المادتين I و II في العليقة بحيث تكون تكلفة تلك العليقة أصغر ما يمكن، إذا علمت أن سعر الكيلو غرام من المادة I يساوي 2 ل.س ومن المادة II يساوي 3 ل.س.

ثم أوجد الحل المثالي لهذه المسألة بالطريقة التي تراها مناسبة لذلك.

3- يعمل في إحدى المؤسسات 48 عاملاً مقسمين إلى أربعة اختصاصات D وC وB وA وتستخدم لإنتاج نوعين من المنتجات I وII وإذا كان ما يلزم لكل من هذين

النوعين من كل اختصاص وعدد العمال في كل اختصاص ومقادير الربح من كل واحدة من المنتجات معطية بالجدول التالي:

المنتجات / الاختصاص	المنتج I	المنتج II	عدد العمال في الاختصاص
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
مقدار الربح عن كل واحدة	2	3	

أوجد النموذج الرياضي الذي يساعدنا على تحديد كمية ما يجب إنتاجه من كل المنتجين I و II بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن. ثم قم بإيجاد الحل المثالي لهذا النموذج بالطريقة التي تراها مناسبة.

4- تتألف إحدى المؤسسات من قسمين A و B يتم تأمين المادة الأولية لهما من ثلاثة مراكز C و D و E فإذا كانت تكلفة واحدة المادة الأولية كما في الجدول التالي:

القسم / المركز	A	B
C	16	17
D	18	21
E	19	20

وكانت الطاقة الإنتاجية للمراكز في واحدة الزمن هي 4 و5 و5 على الترتيب والطاقة الإنتاجية لقسمي المؤسسة هي 7 و6 على الترتيب.

وكان الربح الناجم عن كل واحدة من المادة الأولية يتم تصنيعها في المؤسسة بدون الأخذ بعين الاعتبار تكلفة النقل يساوي 30 ل.س عن كل واحدة والمطلوب إيجاد الخطة المثالية لتأمين المواد الأولية التي تحقق أكبر ربح ممكن للمؤسسة.

5- نريد توزيع أربع مندوبين لشركة ما على أربعة أسواق فإذا كانت فعالية كل منهم في كل سوق ما يلي:

الأسواق / المندوبون	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	4	5	6	7
B_2	7	8	9	5
B_3	4	6	7	8
B_4	3	10	5	7

أوجد التوزيع المثالي لهؤلاء المندوبين على الأسواق بحيث تكون إجمالي فاعليتهم أكبر ما يمكن.

الفصل السابع
تحليل حساسية الحل المثالي

تنبع أهمية تحليل حساسية الحل المثالي الذي حصلنا عليه نتيجة تطبيق خوارزمية السمبلكس أو غيرها من أن ذلك الحل المثالي ينشأ في ظروف وشروط معينة، وهنا يتبادر إلى ذهننا السؤال الآتي:

ماذا سيحدث بالحل المثالي إذا تغيرت بعض ظروف أو شروط المسألة؟ وهل سيحافظ على نفسه إذا تغيرت الظروف أو الشروط تغيراً طفيفاً؟ وما الحدود المسموح بها لتغير تلك الظروف أو الشروط دون أن تؤثر على الحل المثالي المفروض؟

وللإجابة على هذه الأسئلة لابد لنا من تحديد مصادر التغيير وأنواعها، ومعلوم أنه خلال تنفيذ الخطة التي تهدف إلى تحقيق الحل المثالي قد تتغير لعدة عوامل مؤثرة في عمليات تلك الخطة، ونذكر على سبيل المثال ما يلي:

1- تغير أحد أو بعض أو كل أسعار المنتجات أو التكاليف التي تدخل في تابع الهدف، أي حدوث تغير في الأمثال (P_j) في تابع الهدف.

2- تغيير المعاملات الفنية الداخلة في شروط المسألة الخطية (لأسباب تكنولوجية)، أي حدوث أي تغيير في مصفوفة الأمثال a_{ij} في متراجحات أو معادلات الشروط الخطية.

3- تغير كميات العرض لبعض المواد المتوفرة في المخازن أو المحددة في الميزانية، أي حدوث أي تغيير في الثوابت العددية الموجودة في الطرف الأيمن في متراجحات الشروط الخطية.

4- تغير كميات الطلب الملاحظ على المنتجات، أي حدوث تغير في الثوابت العددية التي في الطرف الأيمن من المتراجحات الخطية.

5- ظهور عوامل أو متحولات أو منتجات جديدة لم تكن مدرجة في المسألة السابقة.

6- ضرورة إضافة شرط أو شروط جديدة على قيود المسألة المدروسة لأسباب تقتضيها شروط الإنتاج أو ظروف التسويق.

وإن حدوث أي من هذه التغيرات يمكن أن يؤثر على الحل المثالي الذي حصلنا عليه وينقله من نقطة لأخرى، ولمعرفة مدى تأثير هذه التغيرات على الحل المثالي، ولمعرفة مدى تأثير هذه التغيرات على الحل المثالي، ومعرفة مدى صموده والحفاظ على قيمته أمام هذه التغيرات، لابد من دراسة وتحليل الحساسية المتعلقة بهذه التغيرات، أو إعادة حل المسألة من جديد عند كل تغيير يطرأ على أي عنصر من عناصر المسألة المدروسة.

أولاً- دراسة الحساسيةحسابياً:

وهنا سنقوم بدراسة وتحليل الحساسية حسابياً للحالات الآتية:

1- حالة تغير أحد أو بعض الأمثال P_j في تابع الهدف (ومنطقة الحلول ثابتة).

2- حالة تغير أحد قيم الثوابت العددية في الطرف الأيمن للمتراجحات أو المعادلات.

3- علاقة أسعار الظل في تحليل الحساسية.

4- علاقة المصفوفة الارتكازية في تحليل الحساسية.

ولتوضيح وتفسير معنى الحساسية نقوم بإجراء الدراسة والتحليل على مثال عددي بسيط، يتضمن متحولين فقط هما x_1, x_2، وذلك ليتاح لنا إمكانية رسمه بيانياً.

مثال (1):

تريد إحدى الشركات وضع خطة مثالية لإنتاج نوعين A_1, A_2 من المنتجات يحققان لها عند تسويق كل واحدة منها ربحاً صافياً قدره 9.5 ل.س على الترتيب، وتستخدم ثلاثة أنواع من المواد الأولية B_1, B_2, B_3 وهي متوفرة في المخازن لديها

بكميات 24000، 40000، 30000 على الترتيب، وإن ما يلزم من تلك المواد لإنتاج كل واحدة من المنتجين A_1, A_2 كانت كما في الجدول الآتي:

المنتجات / المواد الأولية	A_1	A_2	الكميات المتوفرة منها
B_1	2	6	24000
B_2	8	4	40000
B_3	5	6	30000
مقادير الربح	5	9	–

والمطلوب إيجاد الخطة المثالية للإنتاج.

الحل:

لإيجاد الخطة المثالية لهذه الشركة يجب أن نقوم بصياغة المسألة رياضياً، ولذلك نرمز لكمية المنتجات من النوع A_1 بالرمز x_1، ولكمية المنتجات من النوع A_2 بالرمز x_2، ثم نقوم بتشكيل تابع الهدف الذي يجب أن يكون في هذه الحالة من النوع Max ويأخذ الشكل الآتي:

$$Z = 5x_1 + 9x_2 \rightarrow Max$$

أما الشروط الخطية المفروضة على نشاط هذه الشركة فهي:

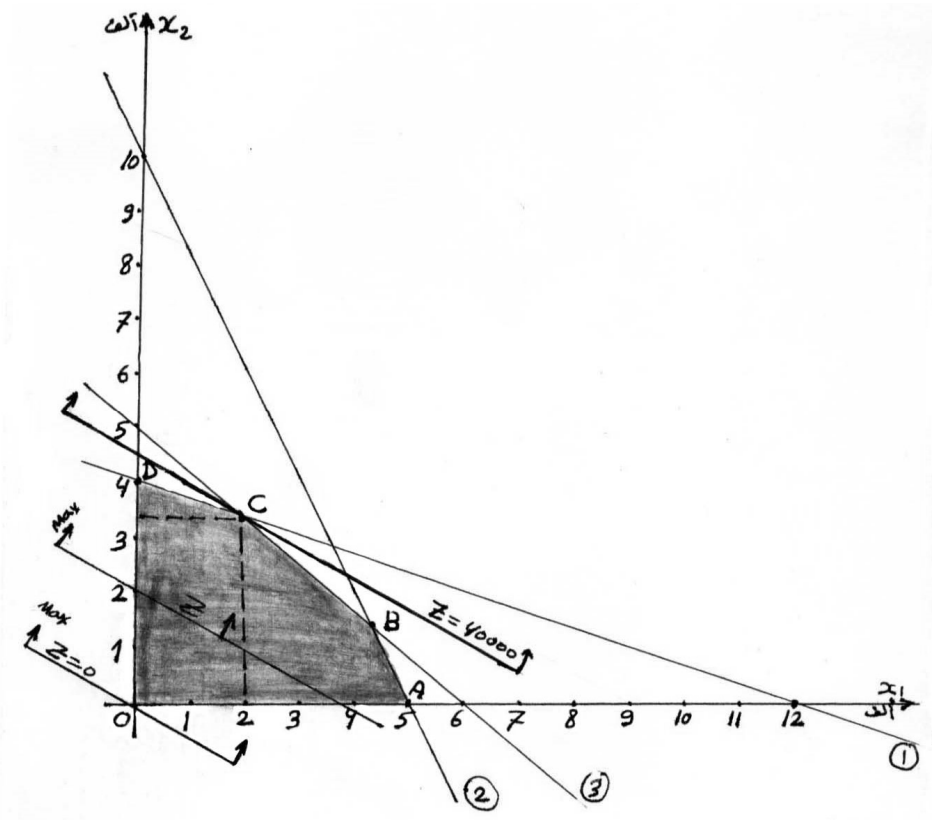
$$2x_1 + 6x_2 \leq 24000 \quad (1)$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 40000 \quad (2)$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30000 \quad (3)$$

وشروط عدم السالبية: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

ولإيجاد الخطة المثالية المطلوبة نستخدم الطريقة البيانية لذلك نرسم مستقيمات المتراجحة السابقة (1) و (2) و(3) ثم نحدد منطقة الحلول المقبولة فنحصل على الشكل الآتي:



الشكل رقم (7−1)

وبعد رسم مقطع تابع الهدف Z على الشكل البياني نلاحظ أن النقطة الرأسية C هي التي تجعل تابع الهدف Z يأخذ أكبر قيمة ممكنة، وللحصول على إحداثيات تلك النقطة C نبحث عن نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(3) فنجد أن:

$$-5x_1 + 6x_2 = 24000$$

$$5x_1 + 6x_2 = 30000$$

نطرح الأولى من الثانية فنجد أن $3x_1 + 0 = 6000$

وبذلك يكون لدينا:

$$x_1 = \frac{6000}{3} = 2000$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى: $2.\ 2000 + 6x_2 = 24000$

$6x_2 = 20000$

$$x_2 = \frac{20000}{6} = 3333{,}333$$

وبذلك نجد أن إحداثيات النقطة C هي (2000, 3333.33) C، وبالطريقة نفسها نوجد إحداثيات النقطة B من تقاطع المستقيمين (3) و(2) فنحصل على أن B (4285.71, 1428.57).

كما نلاحظ من الشكل أن إحداثيات (5000,0) A و(0,4000) D .

ومن الواضح ان تابع الهدف Z يأخذ اكبر قيمة له مقابل النقطة C حيث يبلغ:

$Z_C = 5\ (2000) + 9\ (3333{,}33) = 40000$ L.S

وبذلك يكون الحل المثالي أو الخطة المثالية للإنتاج في هذا الشركة مركبة من النوعين A_2, A_1، وتساوي $x_1 = 2000$ وحدة من النوع الأول، و$x_2 = 3333{,}33$ من النوع الثاني، وهذه الخطة تحقق ربحاً قدره 40000 ل.س.

وسنقوم الآن بدراسة تأثير تغيرات بعض الشروط على ذلك الحل المثالي وتحليل ثبات قيمته وحفاظه على نفس المركبات وذلك في الحالات الآتية:

1- تحليل الحساسية في حالة تغير أحد معاملات تابع الهدف (ومنطقة الحلول ثابتة):

عندما يتغير أحد أسعار المنتجات (أو تكاليفها) فإن ذلك ينعكس مباشرة على تابع الهدف ويغير من قيمته العظمى (الصغرى) وقد ينتقل الحل المثالي من نقطة رأسية إلى أخرى.

ولتوضيح ذلك التأثير أعددنا الجدول الآتي الذي أعطينا فيه تغيرات لمعاملات تابع الهدف في المثال السابق، ثم قمنا بحساب قيمة Z المقابلة لكل من النقاط الرأسية D, C, B, A, O:

قيمة تابع الهدف المعدل $Z = 9X_1 + 9X_2$	قيمة تابع الهدف المعدل $Z = 3X_1 + 9X_2$	قيمة تابع الهدف المعدل $Z = 5x_1 + 10\ x_2$	قيمة تابع الهدف الأصلي $Z = 5x_1 + 9x_2$	النقطة الرأسية
0.00	0.00	0.00	0.00	O (0, 0)
45000	15000	25000	25000	A (5000, 0)
51428.52	25714.26	35714.25	24285.68	B(4285.71,1428.57)
47999.97	35999.97	43333.3	40000	C (2000,3333.333)
36000	36000	40000	36000	D (0, 4000)

ونلاحظ من هذا الجدول أن نقطة الحل المثالي حافظت على ثباتها في النقطة C رغم تغير معامل x_2 من 9 إلى 10، ولكن هذا الأمر لم يثبت عندما تغير معامل x_1 من 5 إلى 3 حيث تحولت نقطة الحل المثالي إلى النقطة D، ثم تحولت إلى النقطة B عندما تغير معامل x_1 من 5 إلى 9 ...، وهكذا نستنتج أن تغيراً معيناً أو محدداً لمعاملات متحولات تابع الهدف يمكن ألا يؤدي إلى انتقال نقطة الحل المثالي من نقطته الأصلية إلى نقطة أخرى، ومع أنه يؤثر على قيمة Z العددية.

والسؤال الآن ما المجال المسموح به لتغيير كل من معاملات الهدف P_j بحيث يبقى الحل المثالي محافظاً على نفسه؟.

مثال (2):

لدراسة وتحليل هذه الأمور نأخذ المثال السابق فنجد أن الإجابة على السؤال السابق يمكن استنتاجها من الشكل البياني، حيث نلاحظ أن مسقط تابع الهدف المار من نقطة الحل المثالي C يمكن أن يغير اتجاهه ويدور بحدود معينة دون أن يؤدي ذلك إلى تغيير نقطة الحل المثالي C.

ولتحديد مقدار الدوران المسموح به نلاحظ من الشكل البياني أيضاً أن ميل مسقط تابع الهدف والذي نرمز له بـ m يجب أن يبقى محصوراً بين m_1 ميل المستقيم (1) وm_3 ميل المستقيم (3)، أي أن ميله m يجب أن يحقق المتراجحة المزدوجة الآتية:

$$m_3 < m < m_1 \qquad (1-7)$$

ولحساب تلك الحدود نحسب قيمتي m_3, m_1 من معادلتي المستقيمين فنجد من معادلة المستقيم الأول أن:

$$x_2 = -\frac{2}{6}x_1 + 4000 \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

ومن معادلة المستقيم الثالث نجد أن:

$$x_2 = -\frac{5}{6}x_1 + 5000 \Rightarrow m_3 = -\frac{5}{6}$$

وبذلك نجد أن حدود الدوران التي تحافظ على الحل المثالي الأصلي هي أن يبقى الميل m محصوراً في المجال:

$$-\frac{5}{6} < m < -\frac{1}{3}$$

وهنا نشير إلى أن الوضعية الأصلية للحل المثالي في النقطة c تحقق هذه المتراجحة لأن ميل مسقط تابع الهدف في وضعه الأصلي يحسب من العلاقة:

$$x_2 = -\frac{5}{6}x_1 + \frac{Z}{9} \Rightarrow m = -\frac{5}{9}$$

ولكن بما أن m هي نسبة معامل x_1 على معامل x_2 مضروبة بـ (-1) $(m = -\frac{p_1}{p_2})$، وبما أن كل معامل يمكن أن يتغير باستقلال عن الآخر فإن عملية تحليل الحساسية تقتضي أن نبحث عن حدود تغير كل من المعاملين p_1 و p_2 على حدة وذلك ضمن الشروط المفروضة على الميل m المشار إليه آنفاً.

ولتحديد حدود تغير المعامل p_1 نفترض أن المعامل p_2 ثابت ومعلوم وهو يساوي (9) ثم نقوم بكتابة معادلة مسقط تابع الهدف على الشكل الآتي:

$$x_2 = -\frac{p_1}{9}x_1 + \frac{Z}{9} \Rightarrow m = -\frac{p_1}{9}$$

ونبدل ذلك الميل في المتراجحة المزدوجة السابقة فنحصل على أن:

$$-\frac{5}{6} < -\frac{p_1}{9} < -\frac{1}{3}$$

وبإصلاحها نجد أنَّ:

$$3 < p_1 < 7.5$$

ولمعرفة مقدار الزيادة أو النقص للمعامل p_1 والذي لا يؤثر على مركبات الحل المثالي نضع $p_1 = 5 + \delta_1$ فنجد من المتراجحة السابقة أن:

$$3 < 5 + \delta_1 < 7.5$$

أي أن:

$$-2 < \delta_1 < 2.5$$

وبذلك نجد أن حدود تغير معامل المتحول x_1 هي المجال المفتوح]3,7.5[وذلك بشرط أن يبقى معامل التحول x_2 ثابتاً ومساوياً لـ (9).

وإن ذلك المعامل p_1 يمكن أن يزداد بمقدار 2.5 أو ينقص بمقدار 2 وحدة نقدية دون أن يؤثر على مركبات الحل المثالي الأخير.

وبالأسلوب نفسه يمكننا أن نعالج ونحسب حدود تغير المعامل x_2 في تابع الهدف شرط أن يكون معامل x_1 معلوماً وثابتاً وهو يساوي (5) فنجد أن:

$$x_1 = -\frac{p_2}{5}x_2 + \frac{Z}{5} \Rightarrow m = -\frac{p_2}{5}$$

ومن معادلة المستقيم الأول نجد أيضاً أن:

$$x_1 = -\frac{6}{2}x_2 + 12000 \Rightarrow m_1 = -\frac{6}{2} = -3$$

ومن معادلة المستقيم الثالث نجد أن:

$$x_1 = -\frac{5}{6}x_2 + 6000 \Rightarrow m_2 = -\frac{5}{6}$$

وبذلك يجب أن يكون:

$$-3 < m < -\frac{6}{5}$$

أي أن:

$$-3 < -\frac{p_2}{5} < -\frac{6}{5}$$

وبإصلاحها نجد أن:

$$6 < p_2 < 15$$

ولمعرفة مقدار الزيادة أو النقص δ_2 للمعامل p_2 والذي لا يؤثر على مركبات الحل المثالي نضع:

$$p_2 = 9 + \delta_2$$

فنجد من المتراجحة السابقة أن:

$$6 < 9 + \delta_2 < 15$$

أي أن:

$$-3 < \delta_2 < 6$$

وبذلك نجد أن حدود تغير معامل المتحول x_2 هي المجال المفتوح]15 , 6[وذلك شرط أن يبقى معامل المتحول x_1 ثابتاً ومساوياً لـ (5).

أي أن المعامل p_2 يمكن أن يزداد بمقدار 6 أو ينقص بمقدار 3 واحدات نقدية دون أن يؤثر على مركبات الحل المثالي الأخير. ويمكن للقارئ التأكد من ذلك بأخذ قيم لـ p_1 أو لـ p_2 خارج هذين المجالين. وتعويضها في تابع الهدف ثم حساب قيمته عند النقاط الرأسية المختلفة ودراسة تحولات نقطة الحل المثالي الأصلي من نقطة إلى أخرى، وسيجد أن ذلك سيؤدي إلى تحول نقطة الحل المثالي من النقطة c إلى نقطة مجاورة أخرى.

2- تحليل الحساسية عند تغير أحد الثوابت العددية في الطرف الأيمن للمتراجحات (مع ثبات تابع الهدف):

سنعالج هذا الموضوع من خلال تحليل معطيات المثال (1) السابق كما يلي:

مثال (3):

لنفترض أن الثابت العددي للمتراجحة الأولى في المثال السابق قد تغير من 24000 إلى $B_1 = 24000 + \Delta_1$ (حيث Δ_1 مقدار جبري غير محدد حتى الآن). فإن النموذج السابق يأخذ الشكل الآتي:

$$Z = 5x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 6x_2 \le B_1 \qquad (1)$$

$$8x_1 + 4x_2 \le 40000 \qquad (2)$$

$$5x_1 + 6x_2 \le 30000 \qquad (3)$$

وشروط عدم السالبية:

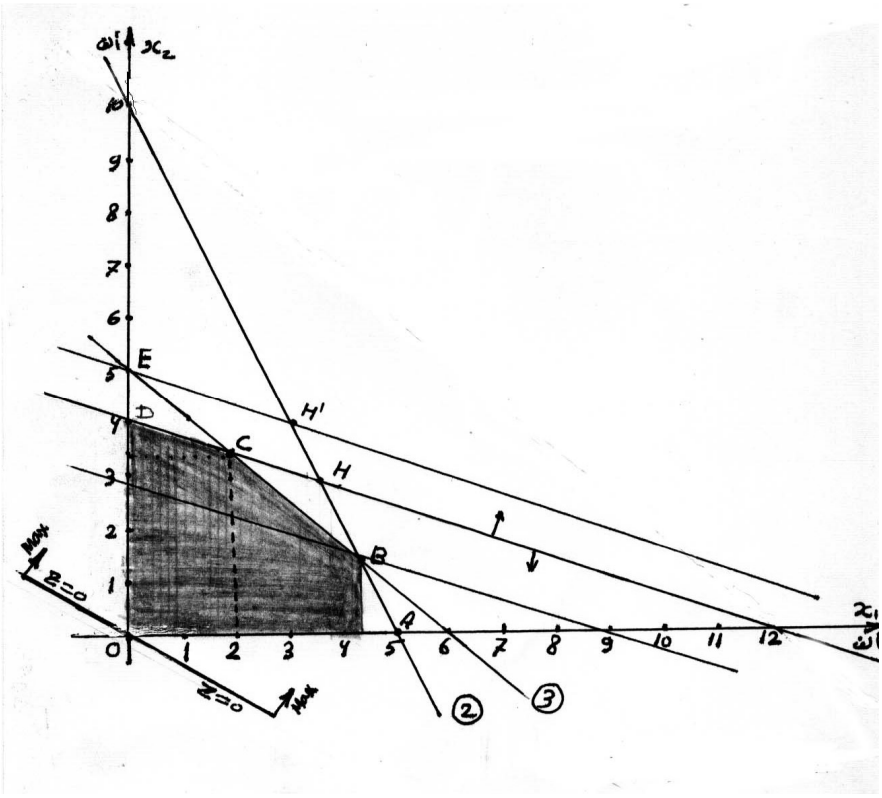
$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0$$

ومن الشكل نلاحظ أن حدوث التغير على قيمة الثابت B يجعل المستقيم الأول (1) يتحرك بشكل موازٍ لنفسه في المستوي x_1ox_2.

فإذا كان التغير بالزيادة فإن المستقيم (1) يتحرك موازياً لنفسه باتجاه الأعلى، وإن منطقة الحلول المقبولة تتغير وتتحول إلى المنطقة OABE. وإن نقطة الحل المثالي C تتحرك على الضلع BE حتى تبلغ النقطة E التي إحداثياتها E(0,5000). وعندها تأخذ معادلة المستقيم (1) الذي يمر بالنقطة E (والذي ميله يساوي $-\frac{2}{6}$) الشكل الآتي:

$$(x_2 - 5000) = -\frac{2}{6}(x_1 - o)$$

$$2x_1 + 6x_2 = 30000$$



الشكل (7-2)

أي أن قيمة الثابت B قد ازدادت من 24000 إلى 30000، وهنا نلاحظ أن المتحولات القاعدية للحل المثالي بقيت نفسها (x_1, x_2)، ولكن القيم العددية لهذه المتحولات في نقاط الحل المثالي المتحرك تغيرت. فنقصت قيم المتحول x_1 حتى بلغت

الصفر وازدادت قيم المتحول x_2 حتى بلغت 5000 عند النقطة E، كما أن قيمة تابع الهدف قد ازدادت حتى بلغت قيمة جديدة تساوي:

$$Z= O.X_1 + 9.5000 = 45000 \text{ L.S}$$

وهنا نلاحظ أن الاستمرار في زيادة قيمة B عن الحد المعين بالمعادلة السابقة وهو 30000، يجعل المستقيم (1) يأخذ وضعاً غير مفيد في تحديد وتعريف منطقة الحلول المقبولة ويبتعد عن حدودها الجديدة، ويصبح المستقيم (3) حاجزاً أو عازلاً بينه وبين منطقة الحلول المقبولة الجديدة.

أما إذا كان التغير بالنقصان فإن المستقيم (1) يتحرك موازياً لنفسه باتجاه الأسفل حتى يمر بالنقطة الرأسية B التي إحداثياتها (4285.71, 1428.57)B وبالنقطة `B الواقعة على المحور $OX_2$ التي إحداثياتها (0, 2857, 14)`B، وعندها نجد أن الحل المثالي قد انتقل من النقطة C إلى النقطة (4285.71, 1428.57)B وفيها يأخذ تابع الهدف القيمة التالية:

$$Z = 5.(4285.71) + 9(1428.57) = 34285.68$$

وفي هذه الوضعية تأخذ معادلة المستقيم (1) الشكل الآتي:

$$(x_2 - 1428.57) = -\frac{2}{6}(x_1 - 4285.71)$$

$$2x_1 + 6x_2 = 17142.84$$

أي أن قيمة الثابت B_1 تناقصت إلى 17142.84.

وإذا تابع الثابت B_1 التناقص فإن المستقيم (1) يتحرك موازياً لنفسه وبالتالي يصبح المستقيم (3) خارج منطقة الحدود المقبولة مما يؤدي إلى تغير المتحولات القاعدية الداخلة في مركبات الحل المثالي. أي أنه يمكننا أن نقول: إن الثابت B_1 يمكنه أن يتغير من القيمة الدنيا 17142.84 إلى القيمة العليا 30000 وذلك دون أن يؤدي ذلك إلى تغيير المتحولات القاعدية الداخلة في مركبات الحل المثالي، ولكنه يؤدي حتماً إلى تغيير قيم تلك المتحولات وإلى تغيير قيمة تابع الهدف المدروس. وفي حالة هذا المثال يمكننا أن نضع مجال تغير الثابت B_1 كما يلي:

$$17142.84 < B_1 < 30000$$

ولحساب قيمة الزيادة الجبرية Δ_1 نكتب تلك المتراجحة المزدوجة كما يلي:

$$17142.84 < 24000 + \Delta_1 < 30000$$

$$-6857.16 \le \Delta_1 < 6000$$

ولدراسة مدى تأثير هذه الزيادة Δ_1 على كل من متحولات القاعدة x_1 وx_2 وعلى قيمة تابع الهدف Z نأخذ معادلتي الشرطين الأول والثالث ونحلهما حلاً مشتركاً فنجد أن:

$$2x_1 + 6x_2 = 24000 + \Delta_1 \qquad (1)$$

$$5x_1 + 6x_2 = 30000 \qquad (2)$$

نطرح (1) من (2) فنجد أن:

$$3x_1 + 0 = 6000 - \Delta_1$$

وهذا يعطينا أن:

$$x_1 = 2000 - \frac{1}{3}\Delta_1$$

وبتعويض ذلك في المعادلة الأولى نحصل على:

$$2(2000 - \frac{1}{3}\Delta_1) + 6x_2 = 24000 + \Delta_1$$

وهذا يعطينا أن:

$$6x_2 = 20000 + \frac{5}{3}\Delta_1$$

$$x_2 = \frac{20000}{6} + \frac{5}{18}\Delta_1$$

وبتعويض ذلك في تابع الهدف Z نجد أن:

$$Z = 5(20000 - \frac{1}{3}\Delta_1) + 9(\frac{20000}{6} + \frac{5}{18}\Delta_1)$$

$$Z = 40000 + \frac{5}{6}\Delta_1$$

وهكذا نجد أنه إذا تغير الثابت الأول B_1 بمقدار Δ_1، وذلك ضمن مجال التغير الذي يحافظ على المتحولات القاعدية للحل المثالي، فإن ذلك ينعكس على قيم الحل المثالي المقابل لتلك المتحولات وعلى قيمة تابع الهدف وتصبح مساوية لما يلي:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 20000 - \frac{1}{3}\Delta_1 \\ x_2 &= \frac{20000}{6} + \frac{5}{18}\Delta_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z = 4000 + \frac{5}{6}\Delta_1$$

ووفقاً لهذه العلاقات يمكننا الحصول على الحل المثالي الجديد مباشرة. فمثلاً إذا أصبحت $B_1=25000$ أي ازداد الثابت الأول بمقدار $\Delta_1=1000$ فإن ذلك يحافظ على المتحولين القاعديين x_1 وx_2 ولكن الحل المثالي الجديد يأخذ القيمتين التاليتين:

$$x_1 = 20000 - \frac{1}{3}\times 1000 = 1666.67$$

$$x_2 = \frac{20000}{6} + \frac{5}{18}\times 1000 = 3611.11$$

ويأخذ تابع الهدف القيمة التالية:

$$Z = 5\times 1666.67 + 9\times 3611.11 = 40833.33$$

وكان يمكن حسابه مباشرة من العلاقة:

$$Z = 40000 + \frac{5}{6}\times 1000 = 40833.33$$

وكذلك يمكننا معالجة الأمر عندما يتغير الثابت B_2 في المعادلة الثانية والتي لا تدخل في تحديد نقطة الحل المثالي c المبينة على الشكل السابق، وعندها يأخذ النموذج الخطي الشكل الآتي:

$$Z = 5x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

ضمن الشروط:

$$2x_1 + 6x_2 \le 24000 \qquad (1)$$

$$8x_1 + 4x_2 \le B_2 \qquad (2)$$

$$5x_1 + 6x_2 \le 30000 \qquad (3)$$

وشروط عدم السالبية: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

وبالعودة إلى الشكل السابق نلاحظ أن معادلة المستقيم (2) تأخذ الشكل:

$$8x_1 + 4x_2 = B_2$$

وإذا ازداد الثابت B_2 فإن المستقيم (2) يتحرك موازياً نفسه إلى اليمين حتى يمر بالنقطة $A'(6000,0)$، وإذا تجاوزها يصبح غير مفيد ولا يؤثر على منطقة الحلول المقبولة وإن معادلته تأخذ الشكل التالي: (لأن ميله $m_2=-\frac{8}{4}$):

$$(x_2 - 0) = -\frac{8}{4}(x_1 - 6000)$$

$$x_2 = -2x_1 + 12000$$

وبذلك تصبح معادلته كما يلي:

$$8x_1 + 4x_2 = 48000$$

أي أن الثابت B_2 يمكن أن يزداد حتى قيمة 48000 دون أن يؤدي ذلك إلى تغيير نقطة الحل المثالي السابق C.

أما إذا تناقص B_2 فإن المستقيم (2) يتحرك موازياً لنفسه إلى اليسار حتى يمر بالنقطة $C(2000,3333.33)$ والتي تمثل الحل المثالي السابق، ولا يجوز أن يتجاوزها لأن يصبح المستقيم (3) غير مفيد وغير مؤثر في منطقة الحلول المقبولة. وعندها تأخذ معادلته الشكل الآتي:

$$(x_2 - 3333.33) = -\frac{8}{4}(x_1 - 2000)$$

$$x_2 = -2x_1 + 7333.33$$

أي أن معادلته تصبح كما يلي:

$$2x_1 + 4x_2 = 29333.33$$

وهذا يعني أن قيمة B_2 يمكن أن تتناقص حتى تبلغ29333.33 دون أن يؤدي ذلك إلى تغير المتحولات القاعدية في الحل المثالي السابق. وهذا يمكننا من كتابة حدود تغير B_2 كما يلي:

$$29333.33 \le B_2 \le 48000$$

ولحساب مقدار الزيادة Δ_2 نضع $B_2 = 40000 + \Delta_2$ فنجد أن:

$$29333.33 \le 40000 + \Delta_2 \le 48000$$

$$-10666.84 \le \Delta_2 \le 8000$$

ولدراسة مدى تأثير ذلك على المتحولات القاعدية x_1 وx_2 وعلى تابع الهدف نأخذ معادلتي الشرطين الثاني والثالث ونحلهما حلاً مشتركاً فنجد أن:

3 $\quad 8x_1 + 4x_2 = 40000 + \Delta_2$

2 $\quad 5x_1 + 6x_2 = 30000$

نضرب الأولى بـ (3) والثانية بـ (2) ونطرحها من الأولى فنحصل على:

$$14x_1 + 0 = 60000 + 3\Delta_2$$

$$x_1 = 4285.71 + \frac{3}{14}\Delta_2$$

نقوم بتعويض ذلك في المعادلة الثانية فنحصل على أن:

$$5\times(4285.7 + \frac{3}{14}\Delta_2) + 6x_2 = 30000$$

$$6x_2 = 8571.43 - \frac{15}{14}\Delta_2$$

أي أن:

$$x_2 = 1428.57 - \frac{5}{28}\Delta_2$$

أما تأثير تغير B_2 على تابع الهدف فنحسبه كما يلي:

$$Z = 5\times(4285.71 + \frac{3}{14}\Delta_2) + 9\times(1428.57 - \frac{5}{28}\Delta_2)$$

$$Z = 34285.71 - \frac{15}{28}\Delta_2$$

وإن هذه التغيرات التي تحدث بسبب تغير B_2 تبقى منسوبة إلى نقطة تقاطع المستقيمين (2) و(3) وتعطينا قيماً مختلفة لتابع الهدف عد كل تقاطع، ولكنها لا تؤثر على نقطة الحل المثالي السابق ولا على قيمته ومتحولاته، إلا إذا تجاوز ذلك التغير Δ_2 المجال المبين بالمتراجحة السابقة، وذلك لأن المستقيم (2) لا يدخل في المتحولات القاعدية. وهذا ناتج عن أن المتحول الإضافي y_2 المقابل للمتراجحة (2) لا يأخذ قيمة معدومة ويدخل في المتحولات القاعدية.

وبالطريقة نفسها يمكننا معالجة تغيرات الثابت B_3 في المتراجحة الثالثة، وعندها يأخذ النموذج الشكل الآتي:

$$Z = 5x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

ضمن الشروط:

$$2x_1 + 6x_2 \leq 24000 \quad (1)$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 40000 \quad (2)$$
$$5x_1 + 6x_2 \leq B_3 \quad (3)$$

وشروط عدم السالبية:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

وبالعودة إلى الشكل السابق نلاحظ أنه إذا تغيرت قيمة B_3 فإن المستقيم (3) يتحرك موازياً لنفسه وأن نقطة الحل المثالي C(2000,3333.33) تتحرك على القطعة المستقيمة DH، وعندما تزداد B_3 فإن المستقيم (3) يمكن أن يتحرك موازياً لنفسه نحو الأعلى حتى يمر بالنقطة H(3600,2800) وعندها يصبح غير مفيد في تحديد منطقة الحلول المقبولة وتأخذ معادلته الشكل الآتي:

$$(x_2 - 2800) = -\frac{5}{6}(x_1 - 3600)$$
$$x_2 = -\frac{5}{6}x_1 + 5800$$
$$5x_1 + 6x_2 = 34800$$

وهذا يعني أن B_2 يمكن أن يزداد حتى يبلغ 34800 دون أن يؤثر ذلك على المتحولات القاعدية المركبة للحل المثالي السابق.

وعندما يتناقص B_3 فإن المستقيم يمكن أن يتحرك موازياً لنفسه نحو الأسفل حتى يمر بالنقطة D(0,4000). (وعندها يصبح المستقيم (1) خارج منطقة الحدود المقبولة) وتأخذ معادلته الشكل الآتي:

$$(x_2 - 4000) = -\frac{5}{6}(x_1 - 0)$$
$$x_2 = -\frac{5}{6}x_1 + 4000$$
$$5x_1 + 6x_2 = 24000$$

أي أن الثابت B_2 يمكن أن يتناقص حتى يبلغ 24000 دون أن يؤثر على المتحولات القاعدية للحل المثالي السابق.

وبذلك يمكننا أن نضع حدود تغير B_3 ضمن المتراجحة المزدوجة كما يلي:

$$24000 < B_3 < 34800$$

ولحساب مقدار التغير Δ_3 نضع $B_3 = 3000 + \Delta_3$ فنجد أن:

$$24000 < 30000 + \Delta_3 < 4800$$

$$-6000 < \Delta_3 < 4800$$

ولدراسة مدى تأثير Δ_3 على المتحولين القاعديين x_1 وx_2 وعلى تابع الهدف Z نأخذ معادلتي الشرطين الأول والثالث ونحلهما حلاً مشتركاً فنجد أن:

$$2x_1 + 6x_2 = 24000$$

$$5x_1 + 6x_2 = 30000 + \Delta_3$$

نطرح الأولى من الثانية فنجد أن: $3x_1 + 0 = 6000 + \Delta_3$

أي أن:

$$x_1 = 2000 + \frac{1}{3}\Delta_3$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن:

$$2 \times (2000 + \frac{1}{3}\Delta_3) + 6x_2 = 24000$$

$$6x_2 = 20000 - \frac{2}{3}\Delta_3$$

$$x_2 = \frac{20000}{6} - \frac{2}{18}\Delta_3$$

وبالتعويض في معادلة الهدف Z نجد أن تأثير Δ_3 على Z يساوي:

$$Z = 5 \times (2000 + \frac{1}{3}\Delta_3) + 9 \times (\frac{20000}{6} - \frac{2}{18}\Delta_3)$$

$$Z = 40000 + \frac{2}{3}\Delta_3$$

أي أنـه إذا تغيـر B_3 بمقـدار Δ_3 فـإن ذلـك يـؤثر علـى المتحـول x_1 بمقـدار $\frac{1}{3}\Delta_3$ وعلى المتحول x_2 بمقدار $(-\frac{2}{18})$ وعلى قيمة تابع الهدف بمقدار $(\frac{2}{3}\Delta_3)$.

3- علاقات تغيرات الثوابت العددية بأسعار الظل:

لدراسـة هـذه العلاقـة نقـوم بإيجـاد الحـل المثـالي للمثـال (1) السـابق بطريقـة السمبلكس المعدلة للنموذجين الأصلي والمرافق، وفق الخطوات الآتية:

مثال (4):

أ- نكتب النموذج الأصلي على الشكل النظامي كما يلي:

$$Z = 5x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

ضمن الشروط:

$$\begin{array}{c|l} u_1 & 2x_1 + 6x_2 + y_1 = 24000 \\ u_2 & 8x_1 + 4x_2 + y_2 = 40000 \\ u_3 & 5x_1 + 6x_2 + y_3 = 30000 \end{array}$$

وشرط عدم السالبية:

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

ويأخذ النموذج المرافق شكله النظامي الآتي:

$$L = 24000.u_1 + 40000.u_2 + 30000.u_3 \rightarrow \min$$

ضمن الشروط:

$$2u_1 + 8u_2 + 5u_3 - v_1 = 5$$
$$6u_1 + 4u_2 + 6u_3 - v_2 = 9$$

وشروط عدم السالبية:

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \geq 0$$

ب- نضع بيانات هذين النموذجين في جدول السمبلكس المزدوج كما يلي:

المتحولات المرافقة		$-v_1$	$-v_2$	
	المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	B
u_1	y_1	2	6	24000
u_2	y_2	8	4	40000
u_3	y_3	5	6	30000
تابع الهدف		5	9	Z - 0

ج- نقوم بتحديد عنصر الارتكاز فنجد أنه: $a_{12}=6$ ثم نقوم بإجراء حساب التحويل لنقل x_2 إلى القاعدة بدلاً من y_1 وفق السمبلكس المعدلة فنحصل على الجدول الآتي:

المتحولات المرافقة		**$-v_1$**	**$-u_1$**	
	المتحولات / القاعدة	**x_1**	**y_1**	**B^1**
v_2	x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	4000
u_2	y_2	$\frac{20}{3}$	$\frac{-2}{3}$	24000
u_3	y_3	3	-1	6000
تابع الهدف		2	$\frac{-3}{2}$	Z - 36000

د- ثم نقوم بتحديد عنصر للارتكاز من جديد فنجد أنه $a_{31}=3$. ثم نقوم بإجراء حسابات التحويل لنقل x_1 إلى القاعدة بدلاً من y_3 فنحصل على الجدول الآتي:

المتحولات المرافقة		$-u_3$	$-u_1$		
	المتحولات / القاعدة	y_3	y_1	B''	
v_2	x_2	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	3333.333	الفائض من المادة الثانية
u_2	y_2	$-\frac{20}{9}$	$\frac{14}{9}$	10666.67	
v_1	x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2000	
تابع الهدف		$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{6}$	Z-40000	

بما أن أمثال تابع الهدف أصبحت سالبة، فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل المثالي الآتي: $x_2=3333.333$، $x_1=2000$ الذي يعطينا أكبر قيمة لتابع الهدف وهي: $Max\ Z = 40000$.

وهنا نلاحظ أن المتحولات القاعدية في هذا الحل المثالي هي:

$x_1=2000$, $x_2=3333.333$, $y_2=10666.67$

أما المتحولات غير القاعدية فهي: $y_1 = y_3 = 0$ وهو الحل البياني السابق نفسه.

وأما أسعار الظل فهي تساوي:

$$-u_{1'} = -\frac{5}{6} \Rightarrow \quad u_1 = \frac{5}{6}, \quad u_2 = 0, \qquad -u_3 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \quad u_3 = \frac{2}{3}$$

وبمقارنة هذه الأسعار مع أمثال Δ_1 وΔ_2 التي حصلنا عليها في الفقرة السابقة، والمحسوبتين من العلاقتين المحسوبتين نجد أنها تطابق تلك الأمثال حيث حصلنا سابقاً على العلاقتين:

$$Z' = 40000 + \frac{5}{6}\Delta_1 \qquad , \qquad Z' = 40000 + \frac{2}{3}\Delta_3$$

نلاحظ أن أمثال Δ_1 تساوي u_1 وأمثال Δ_3 تساوي u_3.

نتيجة:

إذا تغير الثابت العددي B_S المقابل للمتحول غير القاعدي y_S (أو المتحول المرافق u_S) ضمن الحدود المسموح بها بمقدار Δ_S فإن ذلك ينعكس على قيمة ونقطة الحل المثالي، ولكنه يحافظ على المتحولات القاعدية لذلك الحل. أما قيمة تابع الهدف فتتغير بمقدار جداء ذلك التغير Δ_S بسعر الظل المقابل له u_S. أي أن أكبر قيمة لتابع الهدف تصبح مساوية:

$$Z' = Z + u_S.\Delta_S$$

أما إذا تغير الثابت العددي b_K المقابل للمتحول القاعدي y_K (أو المتحول المرافق له u_K) ضمن الحدود المسموح بها وبمقدار Δ_K فإن ذلك لا يؤثر على نقطة الحل المثالي ولا على المتحولات القاعدية فيها.

4- علاقة المصفوفة الارتكازية (المحورية) بدراسة الحساسية:

تلعب المصفوفة الارتكازية دوراً كبيراً في تحليل الحساسية وتعرف بمايلي:

المصفوفة الارتكازية: هي مصفوفة مربعة ومتغيرة تستخدم لتحويل جدول السمبلكس في أي مرحلة من مراحل الحل إلى الجدول الجديد، وذلك بضرب ذلك الجدول من اليسار بتلك المصفوفة.

فإذا رمزنا للجدول الأساسي في طريقة السمبلكس المعدلة بالرمز M_0 وللمصفوفة الارتكازية بالرمز Q_1 وللجدول السمبلكسي الأول الجديد بالرمز M_1 فإنه وحسب التعريف يكون لدينا:

$$M_1 = Q_1 \,.\, M_0 \qquad (2-7)$$

ويتم الحصول على Q_1 وحساب عناصرها من خلال معالجة المصفوفة الأحادية I (ذات الأبعاد المساوية لعدد المتحولات القاعدية مضافاً إليها بعد آخر لتابع الهدف) بالأسلوب نفسه الذي نعالج فيه عناصر الجدول السمبلكسي M_0.

وكمثال على ذلك نأخذ الجدول السمبلكسي للمثال السابق ونضع مصفوفة أحادية رباعية الأبعاد على يمينه فنحصل على ما يلي:

$M_0 =$

	M_0		
المتحولات	x_1	x_2	B
y_1	2	6	24000
y_2	8	4	40000
y_3	5	6	30000
تابع الهدف	5	9	Z-0

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولإيجاد الحل المثالي لهذا المثال قمنا بتحديد عنصر الارتكاز $a_{12} = 6$ وبإجراء الحسابات على الجدول السمبلكسي الأساسي M_0 وعلى المصفوفة الأحادية فحصلنا على ما يلي:

المتحولات	x_1	x_2	B
y_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	4000
y_2	$\frac{20}{3}$	$\frac{-2}{3}$	24000
y_3	3	-1	6000
تابع الهدف	2	$\frac{-3}{2}$	Z-36000

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على المصفوفة الارتكازية Q_1 المبينة على الجدول السابق وهي التي تساعدنا في حساب عناصر الجدول M_1 حيث نجد إن: $M_1=Q_1.M_0$. وبإجراء التطبيق اللازم نجد أنَّ:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & 6 & 24000 \\ \hline 8 & 4 & 40000 \\ \hline 5 & 6 & 30000 \\ \hline 5 & 9 & Z\text{-}0 \\ \hline \end{array} =$$

$M_1=$

x_1	y_1	
$\frac{1}{3}$	1	4000
$+\frac{20}{3}$	0	24000
3	0	6000
2	0	Z-36000

ومن العمود الثاني نستنتج أن المتحول المقابل لـه x_2 قد أصبح متحولاً قاعدياً بدلاً من y_1.

ومـن أجـل متابعـة الحـل نبحـث عـن المصـفوفة الارتكازيـة Q_2 وذلـك بوضـع المصفوفة الأحادية من جديد على يمين الجدول M_1 فنحصل على ما يلي:

$M_1=$

x_1	x_2	
$\frac{1}{3}$	1	4000
$\frac{20}{3}$	0	24000
3	0	6000
2	0	Z-36000

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نقـوم باختيـار عنصـر الارتكـاز مـن العمـود الأول فيكـون $a_{31}=3$، ثـم نجـري الحسابات اللازمة فنحصل على الجدول M_2 المبين في الجدول الآتي:

$M_2=$

y_3	y_1	
$-\frac{1}{9}$	1	3333.33
$-\frac{20}{9}$	0	10666.67
$\frac{1}{3}$	0	2000
$-\frac{2}{3}$	0	Z-40000

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن: $M_2 = Q_2.M_1 =$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{3} & 1 & 4000 \\ \hline \frac{20}{3} & 0 & 24000 \\ \hline 3 & 0 & 6000 \\ \hline 2 & 0 & Z\text{-}36000 \\ \hline \end{array}$$

$$M_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 3333.33 \\ \hline 0 & 0 & 10666.67 \\ \hline 1 & 0 & 2000 \\ \hline 0 & 0 & Z\text{-}40000 \\ \hline \end{array}$$

ومن الجدول نستنتج أن المتحول x_1 أصبح قاعدياً بدلاً من المتحول y_3.

ومما سبق نلاحظ أنه يمكننا حساب M_2 مباشرة من M_0 وذلك بأخذ جداء المصفوفتين Q_1 و Q_2 وضربه من اليسار بـ M_0 كما يلي:

$$M_2 = Q_2(Q_1M_0) = (Q_2.Q_1)M_0 = P_2M_0 \qquad (3-7)$$

حيث رمزنا بـ P_2 للجداء: $P_2 = Q_2.Q_1$.

ولحساب P_2 نقوم بحساب الجداء فنحصل على:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ \frac{14}{9} & 1 & -\frac{20}{9} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{6} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

وهكذا يمكننا باختصار أن نحصل على الحل المثالي المبين في الجدول M_2 مباشرةً من خلال جداء المصفوفة الارتكازية المركبة P_2 في M_0 كما يلي:

$M_2=$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{18} & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ \frac{14}{9} & 1 & -\frac{20}{9} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{6} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & B \\ \hline 2 & 6 & 24000 \\ \hline 8 & 4 & 40000 \\ \hline 5 & 6 & 30000 \\ \hline 5 & 9 & Z\text{-}0 \\ \hline \end{array}$$

$M_2=$

0	1	3333.33
0	0	10666.67
1	0	2000
0	0	Z-40000

ملاحظات هامة حول المصفوفة الارتكازية المفردة والمركبة:

أ- إن عناصر العمودين الأول والثالث في المصفوفة الارتكازية المركبة P_2 هي نفسها عناصر العمودين المقابلين للمتحولين y_1 وy_2 في جدول السمبلكس الأخير [انظر المثال (4)- الجدول الأخير].

ب- إن المصفوفات المفردة Q تنتج عن المصفوفة الأحادية باستبدال أحد أعمدتها بعناصر عمود الارتكاز ويتم تحديد العمود المستبدل بوساطة العنصر الأحادي المقابل لعنصر الارتكاز فيكون رقم العمود المستبدل مطابقاً لرقم سطر الارتكاز.

ج- إن العمود الأخير في المصفوفة الارتكازية المركبة يبقى أحادياً أي يبقى على حاله دون تغيير أو استبدال، لأن الواحد الذي فيه يقابل سطر تابع الهدف ولا يمكن أن يكون عنصر الارتكاز أحد عناصر سطر تابع الهدف.

د- إن شكل المصفوفة الارتكازية يتغير قليلاً إذا كان سطر الهدف موضوعاً في أعلى الجدول فيصبح العمود الأول هو عمود تابع الهدف وهو الذي يبقى على حاله أحادياً.

ثانياً - دراسة الحساسية بواسطة المصفوفة الارتكازية:

لنفترض أنه لدينا النموذج الخطي التالي:

$$Z = 6x_1 + 5x_2 + 3x_2 + 7x_4 \rightarrow \max$$

ضمن الشروط الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + 3x_4 \leq 50$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 150$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 80$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4$$

لإيجاد الحل المثالي لهذا النموذج نضيف إلى المتراجحات متحولات إضافية موجبة y_3, y_2, y_1 ثم نضع النتائج في جدول السمبلكس العام فنحصل على الجدول الآتي:

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
y_1	1	1	0	3	1	0	0	50
y_2	2	1	2	1	0	1	0	150
y_3	1	1	1	4	0	0	1	80
تابع الهدف	6	5	3	7	0	0	0	**Z-0**

وبإجراء عدة تحويلات بواسطة خوارزمية السمبلكس العامة نحصل على الحل المثالي المعروض في الجدول الآتي:

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
x_2	0	1	0	7	0	-1	2	10
x_1	1	0	0	-4	1	1	-2	40
x_3	0	0	1	1	-1	0	1	30
تابع الهدف	0	0	0	-7	-3	-1	-1	**Z-380**

وانطلاقاً من تعريف المصفوفة الارتكازية الذي يعتمد على المصفوفة الأحادية، ونلاحظ أن المصفوفة الأحادية التي كانت مقابلة للمتحولات القاعدية الإضافية y_3 , y_2 y_1 ,، أصبحت بعد الحصول على الحل المثالي هي نفسها المصفوفة الارتكازية مع إضافة العمود الأحادي الأخير إليها.

وبذلك نجد أن المصفوفة الارتكازية الأخيرة للجدول هي:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وسنبحث الآن في كيفية الاستفادة من هذه المصفوفة في تحليل الحساسية وتحديد الحدود الدنيا والعليا لتغيرات العوامل الداخلة في النموذج المفروض.

1- دراسة الحساسية عندما تتغير معاملات تابع الهدف (الأسعار أوالتكاليف) وهنا سنميز بين حالتين هما:

أ- حالة تغير معامل أحد المتحولات القاعدية في تابع الهدف:

لنفترض أن معامل المتحول القاعدي x_1 قد أصبح $6+q_1$ (حيث $q_1 > 0$)

فعندها يأخذ جدول السمبلكس الأساسي الشكل الآتي:

$N_1 =$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	1	0	3	1	0	0	50
y_2	2	1	2	1	0	1	0	150
y_3	1	1	1	4	0	0	1	80
تابع الهدف	$6+q_1$	5	3	7	0	0	0	**Z-0**

وبتطبيق خوارزمية السمبلكس العادية على الجدول السابق مرات عدة نحصل على الجدول النهائي الذي يتضمن المتحولات القاعدية السابقة. ولكنه يحتوي على عدد موجب q_1 مقابل لأحد المتحولات القاعدية وهو x_1.

$N_2=$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
x_2	0	1	0	7	0	−1	2	10
x_1	1	0	0	−4	1	1	−2	40
x_3	0	0	1	1	−1	0	1	30
تابع الهدف	q_1	0	0	−7	−3	−1	−1	Z-380

وكان يمكن الحصول على هذا الجدول من خلال جداء المصفوفة الإرتكازية Q في الجدول N_1 حيث يكون لدينا: $N_2=Q.N_1$

وبشكل خاص كان يمكننا حساب عناصر العمود الأول المقابل لـ x_1 فقط كما يلي:

$$Q.[x_1]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 6+q_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ q_1\end{bmatrix}$$

ومن خلال دراسة الجدول الأخير نلاحظ أنه مازال يتضمن عدداً موجباً في سطر تابع الهدف وهو q_1 المقابل لتابع الهدف. وهذا يعني أن الجدول الأخير لم يعد يعبر عن الحل المثالي للمسألة المفروضة، ولإزالة ذلك العدد q_1 نعتبر عموده عموداً للإرتكاز ونأخذ العنصر $a_{21}=1$ عنصراً للإرتكاز ونجري تحويلاً وهمياً بين x_1 وx_1 فنحصل على الجدول N_3 الآتي:

$N_3=$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
x_2	0	1	0	7	0	−1	2	10
x_1	1	0	0	−4	1	1	−2	40
x_3	0	0	1	1	−1	0	1	30
تابع الهدف	0	0	0	$-7+4q_1$	$-3-q_1$	$-1-q_1$	$-1+2q_1$	$Z-380-40q_1$

وحتى يكون الجدول N_3 معبراً عن الحل المثالي يجب أن تكون معاملات تابع الهدف سالبة أو معدومة, أي يجب أن يكون لدينا:

$$-7+4q_1\le 0 \quad -3-q_1\le 0 \quad -1-q_1\le 0 \quad -1+2q_1\le 0$$

وحتى تتحقق هذه المتراجحات يجب أن تكون قيم q محصورة ضمن المجال التالي:

$$\max\left[\frac{-3}{1},\frac{-1}{1}\right]\le q_1\le \min\left[\frac{-7}{-4},\frac{-1}{-2}\right]$$

أي أن:

$$-1\le q_1\le \frac{1}{2}$$

وهذا يعني أن معامل المتحول القاعدي x_1 من تابع الهدف يمكن له أن يزداد بمقدار $\frac{1}{2}$ فقط فيصبح $6.5 = 6 + \frac{1}{2} p_1 =$ ، وأن ينقص بمقدار 1 فقط فيصبح مساوياً $p_1 = 6 - 1 = 5$ وذلك دون أن يؤثر على مركبات الحل المثالي الأخير:

وبذلك نجد أن حدود تغير المعامل p_1 للمتحول x_1 هو المجال الآتي:

$$5 \le p_1 < 6.5$$

وهكذا يمكننا أن نحصل على حدود تغير كل معاملات المتحولات القاعدية الأخرى x_3, x_2.

ملاحظة:

كان يمكن الحصول على حدود المقدار q_1 من خلال الجدول N_2 وذلك بتقسيم عناصر سطر تابع الهدف على عناصر السطر الثاني (لأنه يتضمن عنصر الارتكاز) أو على عناصر السطر المناسب h ثم تطبيق المتراجحة الآتية:

$$\underset{a_{hi}>0}{\text{Max}}\left[\frac{p_j}{a_{hj}}\right] \le q_h \le \underset{a_{hj}<0}{\text{Min}}\left[\frac{p_j}{a_{hj}}\right] \qquad (4\text{-}7)$$

وبذلك نحصل على حدود التغير في المعامل P_h للمتحول القاعدي x_h دون أن يؤثر ذلك على مركبات الحل المثالي الأخير.

ب- حالة تغير معامل أحد المتحولات غير القاعدية في تابع الهدف:

ولدراسة هذه الحالة نأخذ نفس المثال السابق ونفترض أن معامل المتحول غير القاعدي x_4 قد أصبح $P_4 = 7 + r$، ولإيجاد عناصر عمود المتحول x_4 المتوافق عند الحل المثالي، نقوم بحسابها بمساعدة المصفوفة الارتكازية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 7+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ -7+r \end{bmatrix}$$

وحتى تكون عناصر ذلك العمود متوافقة مع الحل المثالي يجب أن يكون العنصر الأخير سالباً أو معدوماً. أي يجب أن يكون: $-7+r\le 0$

أي أن حدود تغير r هي: $r\le 7$ وليس لها حدود من اليسار.

وبذلك نجد أن حدود تغير معامل المتحول غير القاعدي x_4 هي:

$14\le p_4\le$ غير محددة

ج- الحالة التي تتغير فيها جميع معاملات تابع الهدف:

لنأخذ المثال السابق ولنفترض أن معاملات تابع الهدف أصبحت كما يلي:

$$Z=(6+P)x_1+(5+q)x_2+(3+r)x_3+(7+s)x_4+0.y_1+0.y_2+0.y_3$$

حيث إن كل من p و q و r و s أعداد موجبة.

وعندها يأخذ جدول السمبلكس الأساسي الشكل التالي:

M=

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	1	0	3	1	0	0	50
y_2	2	1	0	1	0	1	0	150
y_3	1	1	1	4	0	0	1	80
تابع الهدف	6+p	5+q	3+r	7+s	0	0	0	Z-0

وبإجراء تحويلات خوارزمية السيمبلكس أو بوساطة ضرب M بالمصفوفة الإرتكازية Q نحصل على الجدول M_1:

$M_1=$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	0	1	0	7	0	−1	2	10
y_2	1	0	0	−4	1	1	−2	40
y_3	0	0	1	1	−1	0	1	30
تابع الهدف	P	q	r	−7+S	−3	−1	−1	Z-380

وللتخلص من الأعداد الموجبة في سطر تابع الهدف نقوم بإجراء ثلاثة تحويلات بوساطة خوارزمية السيمبلكس العادية على المتحولات القاعدية x_1 وx_2 وx_3 فنحصل على الجدول M_2:

$M_1=$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
y_1	0	1	0	7	0	−1	2	10
y_2	1	0	0	−4	1	1	−2	40
y_3	0	0	1	1	−1	0	1	30
تابع الهدف	0	0	0	a	b	C	d	Z-V

حيث إن:

a=-7+4p-7q-r+s
b=-3-p +r
c=-1-p+q
d=-1+2p-2q-r
V=380+40p+10q+30r

وحتى يكون الجدول M_2 ممثلاً لوضعية حل مثالي يجب أن تكون المعاملات a وb وc وd سالبة أو معدومة، أي يجب أن تتحقق الشروط الآتية:

$$-7+4p-7q-r+s \le 0$$
$$-3-p \quad +r \quad \le 0$$
$$-1-p \quad +q \quad \le 0$$
$$-1+2p-2q-r \quad \le 0$$

وأن أي تشكيلة لهذه التغيرات p وq وr وs تحقق المتراجحات السابقة لا تؤثر على مركبات الحل المثالي.

أما إذا كانت تلك التغيرات لا تحقق المتراجحات السابقة فإن ذلك يعني أن أحد المعاملات a أو b أو c أو d من الجدول M_2 أصبح أو ما زال موجباً. وفي هذه الحالة نقوم بإعادة حل المسألة بوساطة خوارزمية السيمبلكس من جديد وبالتالي سنحصل على حل مثالي جديد أو على نتيجة أخرى. فمثلاً نجد أن تشكيلة التغيرات:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نقصان معامل x_1 بمقدار 1
عدم تغير معامل x_2
زيادة معامل x_2 بمقدار 2
زيادة معامل x_3 بمقدار 1

وبتعويض قيم هذه التغيرات في المتراجحات نلاحظ أنها تحققها جميعاً لذلك فإن هذه التغيرات لن تؤثر على مركبات الحل المثالي.

2- دراسة الحساسية عندما تتغير الثوابت العددية في الطرف الأيمن (احتياطات الموارد) وهنا سنميز بين حالتين هما:

أ- الحالة التي يتغير فيها أحد الثوابت العددية فقط:

لنفترض أن الثابت العددي للشرط الثالث في الطرف الأيمن من الشروط الخطية أصبح 80+a وبذلك يأخذ جدول السيمبلكس الأساسي الشكل الآتي:

$M_1=$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
y_1	1	1	0	3	1	0	0	50
y_2	2	1	2	1	0	1	0	150
y_3	1	1	1	4	0	0	1	80+a
تابع الهدف	6	5	3	7	0	0	0	Z-0

وللحصول على وضعية الحل المثالي نضرب الجدول M بالمصفوفة الإرتكازية Q فنحصل على الجدول M1 من العلاقة:

$M_1=Q.M$

ويمكن حساب عناصر عمود الثوابت B من العلاقة:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 150 \\ 80+a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+2a \\ 40-2a \\ 30+a \\ -380-a \end{bmatrix}$$

وبذلك يأخذ الجدول M_1 الشكل:

$M_1=$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
x_2	0	1	0	7	0	−1	2	10+2a
x_4	1	0	0	−4	1	1	−2	40-2a
x_3	0	0	1	1	−1	0	1	30+a

Z-380-a	−1	−1	−3	−7	0	0	0	**تابع الهدف**

وحتى يكون الجدول M_1 ممثلاً لوظيفة الحل المثالي يجب أن تكون الثوابت العددية موجبة أو معدومة. أي يجب أن تتحقق الشروط الآتية:

$$10 + 2a \geq 0$$
$$40 - 2a \geq 0$$
$$30 + a \geq 0$$

وهذا يعني أن a يجب أن تحقق الشرط الآتي:

$$-5 \leq a \leq 20$$

وهذا يعني أن الثابت العددي الثالث (80)، يمكن أن يزداد حتى يبلغ 100 وحدة وأن ينقص حتى يبلغ 75، دون أن يؤثر ذلك على مركبات الحل المثالي, ولكن قيم المتحولات القاعدية وتابع الهدف تتغير بمقدار جداء المقدار a بمعاملات عمود المتحول الإضافي وغير القاعدي y_3، فمثلاً نجد أنه إذا ازدادت قيمة الثابت الثالث بمقدار a=10 فإن قيم المتحولات القاعدية وقيمة تابع الهدف تصبح مساوية لما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ \underline{x_3} \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+2a \\ 40-2a \\ \underline{30+a} \\ 380+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ \underline{40} \\ 390 \end{bmatrix} \qquad (\text{عندما } a=10)$$

وكان يمكن الحصول على قيمة تابع الهدف مباشرة من العلاقة:

$$\begin{aligned} Z &= 6.20+5.30+3.40+7.0+0.y_1+0.y_2+0.y_3 \\ &= 120+150+120 \\ &= 390 \end{aligned}$$

وبصورة عامة وبالعودة إلى المتراجحات التي تقيد تغيرات a_k من السطر k نجد أنه يمكننا حساب حدود هذه التغيرات من الجدول M_1 مباشرة وذلك بتطبيق العلاقة:

$$\max_{aik>0}\left[\frac{-b_i}{a_{ik}}\right] \leq a_k \leq \min_{aik<0}\left[\frac{-b_i}{a_{ik}}\right] \qquad (5-7)$$

ب- الحالة التي تتغير فيها جميع الثوابت العددية في الطرف الأيمن:

لدراسة هذه الحالة نأخذ المثال السابق ونفترض ثوابته العددية أصبحت (50+a) و(150+b) و(80+c) وبذلك فإن جدول السيمبلكس الأساسي يأخذ الشكل التالي:

M=

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	1	0	3	1	0	1	50+a
y_2	2	1	2	1	0	1	0	150+b
y_3	1	1	1	4	0	0	1	80+c
تابع الهدف	6	5	3	7	0	0	0	**Z-0**

وللانتقال من هذا الجدول إلى جدول وضعية الحل المثالي نضربه بالمصفوفة الإرتكازية Q فنحصل على الجدول M_1:

$M_1=Q.M$

$M_1=$

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
x2	0	1	0	7	0	−1	2	10-b+2c
x1	1	0	0	−4	1	1	−2	40+a+b-2c
x3	0	0	1	1	−1	0	1	30-a+c
تابع الهدف	0	0	0	−7	−3	−1	−1	**Z-380-3a-b-c**

وحتى يكون هذا الجدول ممثلاً لوضعية الحل المثالي يجب أن تكون الثوابت B_i موجبة أو معدومة, أي يجب أن تتحقق المتراجحات الآتية:

$$10 - b + 2c \geq 0$$
$$40 + a + b - 2c \geq 0$$
$$30 - a + c \geq 0$$

وإن أي تشكيلة للتزايدات a وb وc تحقق هذه المتراجحات لن تؤثر على مركبات الحل المثالي بل ينحصر تأثيرها على قيم المتحولات القاعدية وعلى قيمة تابع الهدف.

فمثلاً إذا جعلنا a=-10 وb=20 وc=5 فنجد أنها تحقق المتراجحات السابقة وإنها تعطينا الحل المثالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \underline{x_3} \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40+a+b-2c \\ 10-b+2c \\ \underline{30-a+c} \\ 380+3a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ \underline{45} \\ 375 \end{bmatrix}$$

أما إذا كانت تشكيلة التزايدات a وb وc لا تحقق المتراجحات السابقة فإن ذلك يعني أن شروط المسألة قد تغيرت وإن المسألة تحتاج إلى إعادة حلها من جديد.

3-دراسة الحساسية في حالة إضافة منتوج جديد (x_5):

لنفترض أن منتوجاً جديداً يراد إضافته إلى المسألة السابقة وإن المعاملات الفنية لذلك المنتوج ومقدار الربح الناتج عن كل واحدة منه معطية بالشعاع:

$$U = \begin{bmatrix} \underline{x_5} \\ 2 \\ 3 \\ \underline{1} \\ 9 \end{bmatrix}$$

ولمعالجة الحساسية عند هذه المسألة نقوم بإضافة العمود السابق إلى جدول السيمبلكس الأساسي وندخله إلى تابع الهدف, ويمكن إدخاله إلى الجدول النهائي بعد ضربه بالمصفوفة الإرتكازية حيث نجد أن:

$$U^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \underline{1} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ \underline{-1} \\ -1 \end{bmatrix}$$

وهي حالة تحافظ على مركبات الحل المثالي لأن أمثال تابع الهدف مازالت سالبة.

وإذا أردنا دراسة حدود تغير معامل المنتوج x_5 فإننا نضعه مساوياً لـ p ونضرب الشعاع U بالمصفوفة Q فنجد أن:

$$Q \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \underline{1} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ \underline{-1} \\ p-10 \end{bmatrix}$$

وحتى تمثل هذه الوضعية حلاً مثالياً يجب أن تكون قيمة المعامل في تابع الهدف (p-10) سالبة أو معدومة أي يجب أن تكون:

$$p - 10 \le 0 \quad \Rightarrow p \le 10$$

أي يجب أن تكون قيمة السعر p أقل أو يساوي 10 واحدات نقدية وعندما تصبح قيمة السعر أكبر من 10 فإن ذلك يخرج عن وضعية الحل المثالي وعندها يقتضي الأمر البحث عن الحل المثالي من جديد.

4- دراسة الحساسية عند إضافة شرط جديد:

إن إضافة شرط جديد إلى الشروط الخطية يعني إضافة سطر جديد إلى جدول السيمبلكس الأساسي, وبالتالي إضافة قيد جديد إلى القيود السابقة: وهنا يمكن أن نصادف حالات عدة هي:

أ- إن الشرط الجديد لا يؤثر على منطقة الحلول ولا على الحل المثالي, ويمكن التأكد من ذلك بتعويض نقطة الحل المثالي في ذلك الشرط, فإذا كانت تحققه فإن ذلك الشرط لا يؤثر على الحل المثالي.

ب- إن الشرط الجديد يؤثر على منطقة الحلول ولكنه لا يؤثر على الحل المثالي ونتأكد من ذلك بطريقة التعويض السابقة.

ج- إن الشرط الجديد يؤثر على منطقة الحلول وعلى الحل المثالي وعندها يجب البحث عن الحل المثالي الجديد بإعادة حل المسألة من جديد.

د- إن الشرط الجديد يلغي منطقة الحلول المقبولة وعندها تكون المسألة غير قابلة للحل.

5-دراسة الحساسية عند تغير الشروط التكنولوجية للإنتاج:

لنفترض أن المتحول x_4 من المثال السابق الذي لم يدخل في الحل المثالي السابق قد تغيرت الشروط التكنولوجية لإنتاجه فأصبحت المعاملات الفنية له كما يلي:

$$U = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ بدلاً من المعاملات الفنية } U^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن عموده في الجدول النهائي للحل المثالي تصبح مساوية:

$$Q \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \underline{2} \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \underline{2} \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ \underline{1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ويأخذ جدول السيمبلكس النهائي الشكل:

المتحولات	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	B
x_2	0	1	0	3	0	−1	2	10
x_1	1	0	0	0	1	1	−2	40
x_3	1	0	1	1	−1	0	1	30
تابع الهدف	0	0	0	1	−3	−1	−1	**Z-380**

وبما أن هذا الجدول أصبح يتضمن معاملاً موجباً في سطر تابع الهدف فإننا نقوم بإجراء تحويل بوساطة خوارزمية السيمبلكس العادية لنقل x_4 مكان x_2، أي باعتماد عنصر الارتكاز $a_{14}=3$ فنحصل على الجدول النهائي الآتي:

المتحولات	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	
X_4	0	1/3	0	1	0	−1/3	2/3	10/3
X_1	1	0	0	0	1	1	−2	40
X_3	0	−1/3	1	0	−1	1/3	1/3	80/3
تابع الهدف	0	−1/3	0	0	−3	−2/3	−5/3	**Z-1150/3**

وهو يعطينا الحل المثالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 80/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} \qquad y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

وعندها تأخذ قيمة تابع الهدف $Z = \frac{1150}{3} = 383.33$

6-دراسة الحساسية عندما تتغير قيمة أحد المتحولات غير القاعدية:

في كثير من الأحيان وبعد الحصول على الحل المثالي يطلب من المنتج العمل على إنتاج أحد المنتجات غير الاقتصادية (تصنيع النفايات أو غيرها), وإن هذه الحالة تتناول أحد المتحولات الأصلية غير القاعدية. وللتوضيح نأخذ المثال السابق ونلاحظ أن المتحول x_4 بقي متحولاً غير قاعدي وأخذ القيمة $x_4=0$ في الحل المثالي.

ولنفترض الآن إننا نريد أن نعطي هذا المتحول قيمة معينة مثل $x_4=1$ فماذا سيحصل للحل المثالي ولقيمة تابع الهدف.

لمعالجة هذه القضية ننقل العمود المقابل لـ x_4 إلى الطرف الأيمن فنحصل على جدول السيمبلكس النهائي:

المتحولات	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3	$B-x_4$
X_2	0	1	0	0	−1	2	$10-7x_4$
X_1	1	0	0	1	1	−2	$40+4x_4$
X_3	0	0	1	−1	0	1	$30-x_4$
تابع الهدف	0	0	0	−3	−1	−1	$Z-380+7$

وعندما نضع $x_4=1$ نحصل على الحل المثالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40+4x_4 \\ 10-7x_4 \\ 30-x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 3 \\ 29 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهو يعطينا أكبر قيمة لـ Z مساوية $Z=380-7=373$.

وهنا يجب أن نلاحظ أن تغيرات x_4 محدودة بالمتراجحات:

$40+4x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \geq -10$ وهذا محقق لأنه موجب

$$10-7x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq \frac{10}{7}$$

$$30-x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 30$$

وهذا يعني أن حدود تغير x_4 هي $0 \le x_4 \le \frac{10}{7}$ وإذا بقي ضمن هذه الحدود فإنه لا يؤثر على مركبات الحل المثالي.

7-دراسة الحساسية بواسطة الحاسوب:

إن معظم البرامج الجاهزة لبحوث العمليات تعطينا الحل المثالي للنموذج الخطي المفروض وترفقه بأسعار الظل, وبالفائض الاحتياطي المنبثق من الموارد وبتحليل للحساسية وخاصة في حالتي تغير معاملات تابع الهدف وتغير الثوابت العددية على الطرف الأيمن. ونرفق فيما يلي نموذجاً لمخرجات الحاسوب عن حل أحد النماذج:

DATA ENTERED

المتحولات	X_1	X_2	X_3	RHS
Maxi mize تابع الهدف	1	6	5	Z-0
Const 1 الشرط الأول	4	6	3	≤ 24
Const 2 الشرط الثاني	2	3	6	≤ 24
Const 3 الشرط الثالث	3	1	0	≤ 12

الحل المثالي OPTIMAL SOLUTION

المتحولات Variable label	قيمة المتحولات Variable value	التكلفة المتبقية Reduced cost
X_2	2.67	0.00
X_3	2.67	0.00
Y_3	9.33	0.00
الشروط Constraint label	الإضافي/الفائض Slak/surplus	سعر الظل Shadow price
Const 1	0.00	0.78
Const 2	0.00	0.44
Const 3	9.33	0.00
OPTIMAL Z=29.37		

تحليل الحساسية SENSITIVITY ANALYSIS

Objective Function Coefficient Ranges حدود معاملات تابع الهدف			
المتحولات Variable label	الحد الأدنى Lower limit	المعامل الأصلي Original coefficient	الحد الأعلى Upper limit
X_2	2.50	6.00	10.00
X_3	3.00	5.00	12.00
X_1	No limit	1.00	4.00
Right- Hand- Side Ranges حدود الثوابت في الطرف الأيمن			
الشروط Constraint label	الحد الأدنى Lower limit	القيمة الأصلية Original value	الحد الأعلى Upper limit
Const 1	12.00	24.00	48.00
Const 2	12.00	24.00	48.00
Const 3	2.67	12.00	No limit

تمرينات

1- لنفترض أن الجدول النهائي للحل المثالي لأحد النماذج الخطية كان كما يلي:

المتحولات	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_1	1	−1	0	−2	−1	0	0	10
X_7	0	1	0	2	3	0	1	5
X_3	0	−2	1	−1	1	0	0	20
X_6	0	1	0	−1	0	1	0	30
تابع الهدف	0	−4	0	−3	−2	0	0	Z+75

والمطلوب:

أ- أوجد حدود تغيرات كل من معاملات تابع الهدف.

ب- أوجد حدود تغيرات كل من الثوابت العددية في الطرف الأيمن.

ج- أوجد الحل المثالي عندما تصبح الثوابت العددية كما يلي:

20 10 40 50 على الترتيب

د- أوجد المصفوفة الارتكازية من الجدول السابق.

2- لدينا النموذج الخطي:

$Z=2x_1+x_2+3x_3 \rightarrow Max$

ضمن الشروط:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

والشروط $x_1 \leq 5$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_3 \leq 6$$

$$x_j \geq 0$$

والمطلوب:

أ- إيجاد الحل المثالي لهذا النموذج وتحديد المصفوفة الإرتكازية.

ب- معرفة ماذا يحصل لو أصبح معامل x_2 في تابع الهدف مساوياً لـ 5.

ج- معرفة ماذا يحصل لو أصبح الثابت العددي للشرط الثاني 15 بدلاً من 5.

د- معرفة ماذا سيحدث لو تمت إضافة قيد جديد هو $2x_2+3x_3=18$.

هـ- معرفة ماذا سيحدث لو أصبح معامل x_2 في القيد الأول مساوياً لـ 4 بدلاً من الواحد.

3- لنفترض أنه لدينا النموذج الخطي التالي:

$$Z=4x_1+10x_2+5x_3+15x_4 \rightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 \le 14$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 \le 6$$
$$x_1 - x_2 - 2x_4 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 24$$

والشروط:

$$x_j \ge 0 \ , j:1,2,3,4$$

<u>والمطلوب:</u>

أ- أوجد الحل المثالي لهذا النموذج وتحديد المصفوفة الإرتكازية.

ب- دراسة تغيرات معامل x_2 في تابع الهدف.

ج- دراسة تغيرات الثابت العددي في الشرط الرابع.

د- دراسة تغير المعاملات الفنية لـ x_1 بحيث تصبح:

2 5 3 4 على الترتيب

هـ- دراسة زيادة قيمة أحد المتحولات غير القاعدية في الحل المثالي.

الفصل الثامن
نماذج النقل

تعتبر نماذج النقل من أكثر نماذج البرمجة الخطية تطبيقاً لها ولذلك خصصنا لها فصلاً خاصاً، وسنعالج في هذا الفصل النماذج الآتية:

1- نموذج توزيع وسائل النقل على الخطوط.

2- نموذج نقل المواد بأقل تكلفة والطريقة الخاصة لا يجاد حلها المثالي.

3- نموذج نقل المواد حسب التدفق الأعظمي.

4- نموذج نقل المواد بأقصر فترة زمنية.

كما سنتعرض إلى عدد من الطرائق الخاصة المستخدمة في إيجاد الحلول المثالية لبعض مسائل النقل السابقة.

I- نموذج توزيع وسائل النقل على الخطوط:

يتناول هذا النموذج مسألة إيجاد التوزيع المثالي لوسائل النقل (كالحافلات والطائرات والسفن.... الخ)، على الخطوط المفروضة، بحيث تلبي طلباتها بأقل تكلفة ممكنة.

لنفترض أنه لدينا n نوعاً من الطائرات (أو السفن أو الحافلات)، وأن عدد الطائرات المتوفرة من النوع j يساوي N_j، ونريد توزيعها على m خطاً مستقلاً، ونفترض أن حجم الطلب على الخط i يساوي a_i واحدة نقل (إنسان أو صندوق أو طن...) وأن حمولة أو طاقة الطائرة من النوع j على الخط i تساوي a_{ij} واحدة نقل في واحدة الزمن (شهرياً)، وأن مقدار نفقاتها على ذلك الخط يساوي c_{ij} وحدة نقدية، وهي القيم المعرفة في الجدول الآتي:

الأنواع / الخطوط	1	2	…	j	…	n	حجم الطلب
1	a_{11} c_{11} x_{11}	a_{12} c_{12} x_{12}	…	a_{ij} c_{ij} x_{ij}	…	a_{1n} c_{1n} x_{In}	a_1
2	a_{21} c_{21} x_{21}	a_{22} c_{22} x_{22}	…	a_{ij} c_{ij} x_{ij}	…	a_{2n} c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_{i1} c_{i1} x_{i1}	a_{i2} c_{i2} x_{i2}	…	a_{ij} c_{ij} x_{ij}	…	a_{in} c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1} c_{m1} x_{m1}	a_{m2} c_{m2} x_{m2}	…	a_{mj} c_{mj} x_{mj}	…	a_{mn} c_{mn} x_{mn}	a_m
عدد النوع	N_1	N_2	…	N_j	…	N_n	x

لإيجاد النموذج الرياضي لهذه المسألة نفترض أن x_{ij} هو عدد طائرات النوع j التي ستعمل على الخط i، وبذلك نجد أن تابع الهدف (تابع النفقات) يأخذ الشكل الآتي:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow Min \qquad (1\text{-}1\text{-}8)$$

وبما أن إجمالي حمولة أو طاقة الطائرات التي ستعمل على الخط i يساوي:

$a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}x_{in}$

وبما أننا نريد أن نلبي طلبات جميع الخطوط فإن ذلك يعني وجوب تحقيق الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_{1n} \geq a_1 \\ &a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}x_{2n} \geq a_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + a_{m3}x_{m3} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}x_{mn} \geq a_m \end{aligned} \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

وبما أن عدد الطائرات المتوفرة من كل نوع محدود ويساوي N_j فإن ذلك يعني وجوب تحقق الشروط الآتية:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} + x_{31} + \ldots\ldots\ldots\ldots x_{m1} = N_1 \\ &x_{12} + x_{22} + x_{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots x_{m2} = N_2 \\ &X_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \ldots\ldots\ldots\ldots x_{mn} = N_n \end{aligned} \qquad (5\text{-}1\text{-}2)$$

كما يجب أن تكون المتحولات موجبة وصحيحة أي: $x_{ij} \geq 0$ صحيحة

حيث إن: (j: 1,2,3. . . n) وإن (i: 1,2,3. . .m).

مثال (1):

لتكن لدينا ثلاثة أنواع من الطائرات عددها على التوالي 50، 20، 30 طائرة، ونريد توزيعها على أربعة خطوط جوية متطلباتها على التوالي 300 و200 و1000 و500 واحدة نقل، أما الحمولة الشهرية a_{ij} والنفقات c_{ij} لكل نوع وعلى كل خط فمعطية في الجدول الآتي:

نوع الطائرة / رقم الخط i	1 a_{i1} c_{i1}	2 a_{i2} c_{i2}	3 a_i c_{i3}	متطلبات الخط i
1	15 15 x_{11}	30 70 x_{12}	25 40 x_{13}	300
2	10 20 x_{21}	25 28 x_{22}	50 70 x_{23}	200
3	20 25 x_{31}	10 15 x_{32}	30 40 x_{33}	1000
4	50 40 x_{41}	17 45 x_{42}	45 65 x_{43}	500
عدد النوع N_j	50	20	30	

ويطلب أن نقوم بتوزيع تلك الطائرات على الخطوط الأربعة بحيث تكون نفقاتها أقل ما يمكن وبحيث تلبي متطلبات الخطوط جميعها في آن واحد.

الحل:

نفترض أن x_{ij} هو عدد الطائرات من النوع j المخصصة على الخط i، ومن الجدول نلاحظ أن تابع الهدف يأخذ الشكل الآتي:

$$L = \sum_{i=}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

$$L = 15x_{11} + 70x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 28x_{22} + 70x_{23} + 25x_{31} + 15x_{32} + 40x_{33} + 40x_{41} + 45x_{42} + 65x_{43} \Rightarrow \text{Min}$$

وضمن الشروط الآتية:

$$\begin{aligned}
15x_{11} + 30x_{12} + 25x_{13} &\geq 300\\
10x_{21} + 25x_{22} + 50x_{23} &\geq 200\\
20x_{31} + 10x_{32} + 30x_{33} &\geq 1000\\
50x_{41} + 17x_{42} + 45x_{43} &\geq 500\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 50\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 20\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 30
\end{aligned}$$

$x_{ij} \geq 0$ (i: 1,2,3,4) (j: 1,2,3) وصحيحة.

لحل هذا النموذج ندخل أربعة متحولات إضافية على المتراجحات وثلاثة متحولات اصطناعية على المعادلات فنحصل على النموذج النظامي الآتي:

$$L = 15x_1 + 70x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 28x_{22} + 70x_{23} + 25x_{31} + 15x_{32} + 40x_{33} + 40x_{41} + 5x_{42} + 65x_{43} + 0\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + M\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \rightarrow \text{Min}$$

وضمن الشروط الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}
y_1 - 15x_{11} - 30x_{12} - 25x_{13} &= -300\\
y_2 - 10x_{21} - 25x_{22} - 50x_{23} &= -200\\
y_3 - 20x_{13} - 10x_{32} - 30x_{33} &= -1000\\
y_4 - 50x_{41} - 17x_{42} - 45x_{43} &= -500\\
\varepsilon_1 + x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 50\\
\varepsilon_2 + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 20\\
\varepsilon_3 + x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{34} &= 30
\end{aligned}$$

حيث أن: $\varepsilon_i \geq 0$، $y_i \geq 0$، $x_{ij} \geq 0$ وصحيحة.

لحل هذا النموذج نضع المعاملات في جدول السمبلكس المعدل المعروف وذلك بعد إجراء التحويل:

$$Z = -L = -15x_{11} - 70x_{12} - 40x_{13} - 20x_{21} - 28x_{22} - 70x_{23} - 25x_{31} - 15x_{32} - 40x_{33} - 40x_{41} - 45x_{42} - 65x_{43} - 0(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - M(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \rightarrow \text{Max}$$

فنحصل على الجدول (1) الآتي:

جدول (1)

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	الثوابت الحرة
y_1	–15	–30	–25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–300
y_2	0	0	0	– 10	– 25	– 50	0	0	0	0	0	0	–200
y_3	0	0	0	0	0	0	– 20	– 10	– 30	0	0	0	–1000
y_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	– 50	– 17	– 45	–500
ε_1	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	50
ε_2	0	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	20
ε_3	0	0	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	+1	30
تابع الهدف	– 15	– 70	– 40	– 20	– 28	– 70	– 25	–15	– 40	– 40	– 45	– 65	Z – 0

نقوم الآن بتبديل المتحولات الاصطناعية $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ بالمتحولات x_{11} وx_{32} وx_{33} على الترتيب فنحصل على الجدول (2) الذي حذفنا منه الأعمدة التي صعدت إليها المتحولات الاصطناعية الآتي:

جدول (2)

	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	الثوابت الحرة
y_1	−30	−25	+15	0	0	+15	+5	0	0	450
y_2	0	0	− 10	+25	− 50	0	0	0	0	−200
y_3	+10	+30	0	+10	+30	− 20	0	+10	+30	100
y_4	0	0	0	0	0	0	− 50	− 17	− 45	−500
x_{11}	0	0	+1	0	0	+1	+1	0	0	50
x_{32}	+1	0	0	+1	0	0	0	+1	0	20
x_{33}	0	+1	0	0	+1	0	0	0	+1	30
تابع الهدف	− 55	0	− 5	− 13	−30	− 10	−25	− 30	−25	Z + 2250

وهنا نلاحظ أن عمود الثوابت ما زال يتضمن عناصر سالبة، لذلك نختار أكثرها سالبية وهو (500–) ونحدد عنصر الارتكاز (50–) ثم نقوم بتبديل x_{41} بـy_4 وبعدها نقوم بتبديل x_{21} بـy_2 فنحصل على الجدول (3) الأخير الآتي:

جدول (3)

	x_{12}	x_{13}	y_2	x_{22}	x_{23}	x_{31}	y_4	x_{42}	x_{43}	الثوابت
y_1										0
x_{21}										20
y_3										100
x_{41}										10
x_{11}										20
x_{32}										20
x_{33}										30
تابع الهدف	– 55	0	– 1/2	– 1/2	– 5	– 10	– 1/2	– 43/2	–5/2	Z + 2600

وهو يعطينا الحل المثالي الصحيح الذي يتضمن التوزيع المثالي للطائرات على الخطوط كما يلي:

$x_{12} = x_{13} = y_2 = x_{22} = x_{23} = x_{31} = y_4 = x_{42} = x_{43} = 0$

$x_{11} = 20, \quad x_{21} = 20, \quad x_{32} = 20, \quad x_{33} = 30, \quad x_{41} = 10$

$y_1 = 0, \quad y_3 = 100$

وهو التوزيع الذي يلبي طلبات الخطوط بأقل تكلفة ممكنة.

ولكن الحل المثالي السابق ليس حلاً وحيداً لأن سطر تابع الهدف يتضمن صفراً مقابلاً لأحد المتحولات غير القاعدية x_{13}.

ويمكن الحصول على الحل المثالي الصحيح الثاني بوساطة تبديل المتحول x_{13} مع المتحول القاعدي المناسب، ونترك هذا الأمر للقارئ على سبيل التمرين.

وإن كلاً من هذين الحلين المثاليين يعطينا أن:

شهرياً $0=Z+2600 \quad \Rightarrow \quad Z= -2600$

وبذلك نجد أن تابع التكلفة يأخذ أقل قيمة له وهي:

$L= -Z= 2600$ L.S شهرياً

II- نموذج نقل المواد بأقل تكلفة:

لنفترض أننا نريد نقل إحدى المواد من مراكز الإنتاج أو التخزين إلى مراكز الاستهلاك، ولنفترض أنه لدينا m مركزاً للإنتاج (أو التخزين) وأن المادة المفروضة متوفرة فيها بكميات محدودة تساوي:

$a_1 , a_2 , a_3 . . . . . a_i . . . . . a_m$

كما نفترض أنه يوجد لدينا n مركزاً استهلاكياً وأن كلاً منها يحتاج إلى كميات معينة من تلك المادة تساوي:

$b_1 , b_2 , b_3 . . . . . b_i . . . . . b_n$

ولنفترض أن تكلفة نقل الواحدة من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j تساوي c_{ij}.

كما نرمز للكمية التي يجب نقلها من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j بالرمز x_{ij} ولنضع هذه المعطيات في جدول كالآتي:

مراكز j الاستهلاك / i مراكز الإنتاج	1	2	3	....	j	....	n	الكميات المتوفرة
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	....	c_{ij} x_{1j}	....	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	....	c_{2j} x_{2j}	....	c_{2n} x_{2n}	a_2
....	....	....	....	....	....	.....	....	....
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	c_{i3} x_{i3}	....	c_{ij} x_{ij}	....	c_{in} x_{in}	a_i
....	....	....	....	....	....	....	....	....
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	....	c_{mj} x_{mj}	....	c_{mn} x_n	a_m
الكمية المطلوبة	b_1	b_2	b_3	....	b_j	....	b_n	

والمطلوب تحديد حجم عمليات النقل x_{ij} من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن، وهنا سنميز بين الحالتين الآتيتين:

1- حالة النموذج المغلق:

وهي الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة من تلك المادة مساوياً لإجمالي الكميات المطلوبة منها، أي الحالة التي يكون فيها:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1\text{-}2\text{-}8)$$

وفي هذه الحالة يكون لدينا تابع الهدف هو التابع الآتي:

$$L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow Min \qquad (2\text{-}2\text{-}8)$$

أما الشروط فتحددها الكميات المتوفرة في كل مركز والمطلوبة من كل مركز، وبما أن مجموع ما يمكن نقله من المركز الإنتاجي i إلى المراكز الاستهلاكية لابد وأن يساوي مقدار ما هو متوفر فيه، إذن يجب أن تتحقق لدينا الشروط الآتية:

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+\ldots\ldots\ldots\ldots x_{1n}=a_1\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+\ldots\ldots\ldots\ldots x_{2n}=a_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{m1}+x_{m2}+x_{m3}+\ldots\ldots\ldots\ldots x_{mn}=a_m
\end{aligned} \qquad (3\text{-}2\text{-}8)$$ (مجاميع الأسطر)

وبما أن مجموع ما يجب نقله إلى المركز الاستهلاكي j من مراكز الإنتاج جميعها لابد وأن يساوي مقدار ما هو مطلوب له، إذن يجب أن تتحقق لدينا الشروط الآتية:

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{21}+x_{31}+\ldots\ldots\ldots\ldots x_{m1}=b_1\\
&x_{12}+x_{22}+x_{23}+\ldots\ldots\ldots\ldots x_{m2}=b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+\ldots\ldots\ldots\ldots x_{mn}=b_n
\end{aligned} \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$ (مجاميع الأعمدة)

كما يجب أن يكون:

$$x_{ij}\geq 0\ ,\quad (i:1,2,3\ldots.m)\ ,\quad (j:1,2,3\ldots n) \qquad (5\text{-}2\text{-}8)$$

2- حالة النموذج المفتوح:

وهي الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة لا يساوي إجمالي الكميات المطلوبة. أي أن العلاقة (8-2-1) غير محققة، وهنا يمكن أن نواجه إحدى الحالتين الآتيتين:

أ- الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة أكبر من إجمالي الكميات المطلوبة أي يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_i$$

وفي مثل هذه الحالة نضيف إلى المراكز الاستهلاكية المحددة في المسألة مركزاً استهلاكياً وهمياً (n+1) ونجعل مقدار استهلاكه يساوي الفرق بين الإجماليين، أي نجعل استهلاكه مساوياً لـ:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n+1} b_j \qquad (6\text{-}2\text{-}8)$$

كما نضع تكلفة النقل من مراكز الإنتاج جميعها إلى ذلك المركز الوهمي مساوية للصفر، أي نضع:

$$c_{i,n+1} = 0 \qquad (i: 1,2,3 \ldots . m) \qquad (7\text{-}2\text{-}8)$$

وبذلك نكون قد حولنا هذا النموذج المفتوح إلى نموذج مغلق يتضمن m مركزاً إنتاجياً و(n+1) مركزاً استهلاكياً، ونطبق عليه ما طبقناه على الحالة (أ) السابقة، مع الانتباه إلى أن عدد المتحولات سيزداد بمقدار m متحولاً. وبذلك نجد أن هذا النموذج يصاغ على الشكل المختصر الآتي:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \rightarrow Min \qquad (8\text{-}2\text{-}8)$$

وضمن الشروط الآتية:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \; (i: 1,2,3 \ldots . . . m) \qquad (9\text{-}2\text{-}8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \; (j: 1,2,3, \ldots . . n+1) \qquad (10\text{-}2\text{-}8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (11\text{-}2\text{-}8)$$

ب- الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة أقل من إجمالي الكميات المطلوبة، أي عندما يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_i \qquad (12\text{-}2\text{-}8)$$

وفي مثل هذه الحالة نضيف إلى المراكز الإنتاجية المحددة بالمسألة مركزاً إنتاجياً وهمياً (m+1)، ونجعل مقدار ما ينتجه يساوي الفرق (أو النقص) بين الإجماليين، أي نجعل am+1 مساوياً لـ:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (13\text{-}2\text{-}8)$$

كما نضع تكلفة النقل من ذلك المركز إلى المراكز الاستهلاكية مساوية للصفر أي نضع:

$$c_{m+1,j} = 0 \qquad (j: 1,2,3, \ldots\ldots n) \qquad (14\text{-}2\text{-}8)$$

وبذلك يأخذ النموذج الرياضي الشكل الآتي:

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow Min \qquad (15\text{-}2\text{-}8)$$

ضمن الشروط الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i: 1,2,3 \ldots\ldots, m+1) \qquad (16\text{-}2\text{-}8)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_i \qquad (j: 1,2,3, \ldots\ldots\ldots, n) \qquad (17\text{-}2\text{-}8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (18\text{-}2\text{-}8)$$

مثال (2):

نريد نقل 6 أطنان من الحليب من المعمل A و3 أطنان من المعمل B إلى ثلاث مدن E, D, C حاجتها على الترتيب 4 و 2 و 3 أطنان.

أوجد الخطة المثالية من حيث التكلفة لنقل هذه الكميات إلى مراكز الاستهلاك علماً بأن مصفوفة التكاليف هي:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

نلاحظ قبل كل شيء أن المسألة تمثل نموذجاً مغلقاً لأن:

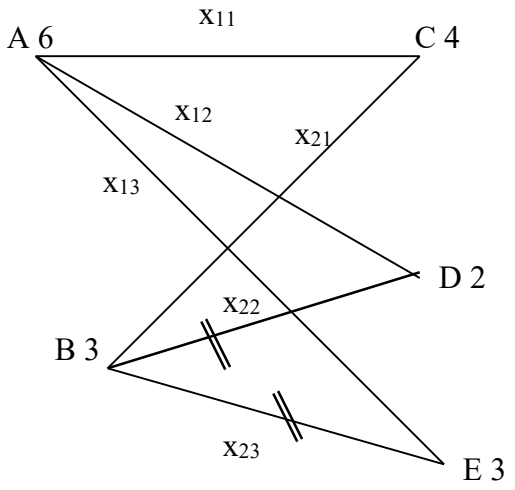
$3 + 6 = 3 + 2 + 4$

وبذلك نجد أن النموذج الرياضي لها هو:

$$L = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} \rightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 6$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3$
$x_{11} + x_{21} = 4$
$x_{12} + x_{22} = 2$
$x_{i3} + x_{23} = 3$



الشكل (8-1)

ولإيجاد الخطة المثالية نقوم بحل هذا النموذج بوساطة طريقة السمبلكس المعتمدة على القاعدة الاصطناعية، ونضع النتائج مباشرة في الجدول الآتي:

القاعدة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{32}	الثوابت
ε_1	1	1	1	0	0	0	6
ε_2	0	0	0	1	1	1	3
ε_3	1	0	0	1	0	0	4
ε_4	0	1	0	0	1	0	2
ε_5	0	0	1	0	0	1	3
تابع الهدف	-2	-3	-4	-1	-3	-5	$z-0$

نقوم بتبديل المتحولات الاصطناعية مع المتحولات غير القاعدية كما يلي: x_{11} مع ε_1 ، ثم x_{21} مع ε_2، ثم x_{12} مع ε_4، ثم x_{13} مع ε_5، ونتيجة لحذف الأعمدة التي انتقلت إليها المتحولات الاصطناعية ε_i نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة	x_{22}	x_{23}	الثوابت
x_{11}	−1	−1	1
x_{21}	1	1	3
ε_3	0	0	0
x_{12}	+1	0	2
x_{13}	0	1	3
تابع الهدف	−3	−2	z + 23

وهو يعطينا الخطة المثالية الآتية: (بوضع $x_{22} = x_{23} = 0$)

$x_{11} = 1$ وهو ما يجب نقله من المعمل A إلى المدينة الأولى C.

$x_{12} = 2$ وهو ما يجب نقله من المعمل A إلى المدينة الثانية D.

$x_{13} = 3$ وهو ما يجب نقله من المعمل A إلى المدينة الثالثة E.

$x_{21} = 3$ وهو ما يجب نقله من المعمل B إلى المدينة الأولى C أيضاً.

وبما أننا حصلنا على أن $x_{22} = x_{23} = 0$ فإن هذا يعني أنه يجب علينا عدم نقل أية كمية من المعمل B إلى المدينتين الثانية والثالثة ونقل كامل الكمية المتوفرة في B إلى المدينة الأولى C.

وبذلك نجد أن مصفوفة الحل المثالي تساوي:

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} 1,2,3 \\ 3,0,0 \end{bmatrix}$$

وعندها ستكون التكلفة أقل ما يمكن وتساوي $L = 23$ لأن:

$$0 = Z + 23 \Rightarrow Z = -L = -23 \Rightarrow L = 23$$

ملاحظة:

نلاحظ أن عناصر سطر ε_3 في الجدول الأخير أصبحت أصفاراً، وهذه نتيجة طبيعية في مسائل النقل لأن الشروط (8-2-3) و(8-2-4) مرتبطة مع بعضها بعضاً (غير مستقلة خطياً) بالعلاقة (8-2-1) والتي يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad (19\text{-}2\text{-}8)$$

لذلك فإننا نقوم بحذف ذلك السطر إذا ظهر في إحدى مراحل الحل.

نتيجة هامة:

من خلال الملاحظة السابقة يمكننا أن نستنتج أن عدد المتحولات القاعدية غير المعدومة في مسألة النقل السابقة يساوي (n+m–1) متحولاً وليس (n+m) متحولاً، وذلك لأن عدد المعادلات المستقلة يساوي (n+m –1) معادلة، أو لأن الشروط (8-2-3) و (8-2-4) مرتبطة ببعضها بوساطة العلاقة (8-2-1).

وهكذا نجد أن الحل المثالي لا يتضمن أكثر من (n+m–1) مركبة غير معدومة، وأن هذه الخاصة تعتبر حالة مميزة لمسائل النقل المشابهة للمسألة السابقة.

III- الطريقة الخاصة لحل نموذج النقل بأقل تكلفة والأساليب المتعلقة بها:

لقد رأينا أن نماذج النقل هي نماذج خطية ويمكن حلها بوساطة طريقة السمبلكس المباشرة أو المعدلة أو الاصطناعية أو المرافقة أو المزدوجة، إلا أن طبيعة هذه النماذج ساعدت على استنباط عدد من الطرائق الخاصة التي تعتبر أكثر سهولة من طريقة السمبلكس، وإننا سنتعرض في هذه الفقرة إلى أهم هذه الطرائق الخاصة وهي التي تعتمد على طريقة الدرج والأساليب المتعلقة بها.

وتعتمد هذه الطريقة على خواص النموذج الأصلي والنموذج المرافق له، وعلى النظرية (7) الواردة في الفقرة IV من الفصل الرابع، والتي تنص على أن الشرط اللازم والكافي ليكون الحلان $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ و$(u'_1, u'_2, \ldots u'_n)$ حلين مثالين للنموذج الأصلي ومرافقه هو أن يحققا الشرط الآتية:

$$x'_j \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u'_i - p'_j \right] = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}8)$$

حيث أن (j: 1,2,3, . . n).

$$u'_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j - b_i \right] = 0 \qquad (2\text{-}3\text{-}8)$$

حيث أن $(i = 1,2,3 \ldots m)$.

فالشروط (8-3-1) تعني أنه إذا كانت مركبة الحل المثالي الأصلي $x'_j \neq 0$ فإن الحد الثاني يجب أن يساوي الصفر، أي يجب أن يكون الشرط j المقابل للمركبة x_j في النموذج المرافق قد أصبح على شكل مساواة تامة كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u'_i - p'_j = 0 \qquad (8\text{-}3\text{-}3)$$

وذلك من أجل جميع المركبات x_j غير المعدومة في الحل المثالي للنموذج الأصلي، وانطلاقاً من هذه الفكرة يمكننا الاستفادة من العلاقات (8-3-3) ولإيجاد حل قاعدي معين $(u_1\ u_2 \ldots u_m)$ للنموذج المرافق، فإذا أخذنا الشروط (8-3-3) المقابلة للمركبات غير المعدومة x_j وقمنا بحلها وحصلنا على حل قاعدي $(u_1\ u_2 \ldots u_m)$ للنموذج المرافق، فإنه يجب علينا التحقق من أن ذلك الحل يحقق الشروط الخطية للنموذج المرافق، فإذا كان يحقق تلك الشروط فإن ذلك يعني أن الحل القاعدي $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ هو حل مثالي للنموذج الأصلي، وإذا لم يكن ذلك فإن ذلك الحل القاعدي ليس مثالياً وعلينا البحث عن حل قاعدي لنجربه كالسابق ...الخ، ونكرر ذلك حتى نحصل على الحل المثالي المطلوب.

وهنا نشير إلى أن عدد المركبات غير المعدومة في أي حل قاعدي للنموذج II السابق لا يمكن أن يتضمن أكثر من (n+m-1) شرطاً، وإننا سنلخص خوارزمية العمل بهذه الطريقة بما يلي:

خوارزمية الطريقة الخاصة:

وتتألف هذه الخوارزمية من الخطوات العامة الآتية:

1- نقوم بإيجاد النموذج الأصلي والنموذج المرافق له ونفرز بشكل خاص الشروط الخطية للنموذج المرافق لأننا سنستخدمها في الخطوات الآتية أكثر من مرة.

2- نقوم بإيجاد حل قاعدي مقبول $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ وبحيث يكون مؤلفاً من (n+m-1) مركبة غير معدومة على الأكثر، ونسمي ذلك الحل بالحل القاعدي الأول ويمكننا إيجاد الحل القاعدي الأول بعدة أساليب نذكر منها الأساليب الآتية:

أ- أسلوب الزاوية الشمالية الغربية.

ب- أسلوب العنصر ذي التكلفة الأقل.

ج- أسلوب فوجال.

وسنقوم لاحقاً بشرح موجز لكل من هذه الأساليب بشكل مستقل.

3- نقوم بإيجاد الحل القاعدي المرافق ($u_1\ u_2\ .\ .\ .\ .\ u_m$) من الشروط (8-3-3) المقابلة للمركبات غير المعدومة من الحل ($x_1\ x_2\ .\ .\ .\ .\ x_n$)، ثم نقوم بتجريب مركبات ذلك الحل فيما إذا كانت تحقق الشروط الأخرى المفروضة على النموذج المرافق، فإذا أصبحت تلك الشروط محققة بدون استثناء فإننا نكون قد حصلنا على الحل المثالي المطلوب، أما إذا كانت بعض تلك الشروط غير محققة فإننا ننتقل إلى الخطوة (4) الآتية.

4- نقوم بتبديل الحل القاعدي السابق بحل قاعدي آخر أفضل منه وذلك بوساطة طريقة تسمى طريقة الدرج، وبحيث يبقى عدد المركبات غير المعدومة مساوياً لـ(n+m-1) مركبة على الأكثر، ثم نعود إلى الخطوة (3) لإجراء عمليات التحقق على الحل المرافق، ونكرر ذلك حتى نحصل على الحل المثالي المطلوب.

وسنقوم لاحقاً بشرح موجز لكيفية تبديل الحل القاعدي بحل قاعدي آخر بوساطة طريقة الدرج بشكل منفصل بعد أن نقوم بشرح موجز لأساليب الحل القاعدي الأول المذكورة أعلاه.

1- أسلوب الزاوية الشمالية- الغربية لإيجاد الحل القاعدي الأول:

لتوضيح كيفية العمل بهذا الأسلوب نقوم بتطبيقه على المثال العددي الآتي:

مثال (3):

لنفترض أنه لدينا المسألة الآتية المؤلفة من أربعة مراكز للإنتاج وثلاثة مراكز للاستهلاك، وأن تكلفة نقل واحدة النقل والكميات المتوفرة والمطلوبة معطية في زوايا وحجر الجدول الآتي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة
B_1	2 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	2 x_{14}	90
B_2	2 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	1 x_{24}	70
B_3	3 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	1 x_{34}	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210 / 210

ولقد رمزنا بـ x_{ij} لكمية ما ينقل من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j، ونريد أن نجد حلاً قاعدياً أول يتضمن على الأكثر (n+m-1) مركبة غير معدومة، أي يتضمن (6 = 1 -3+4) مركبة غير معدومة على الأكثر.

لذلك نبدأ من الزاوية الشمالية الغربية ونضع فيها أكبر كمية يمكن نقلها من المركز الإنتاجي A_1 إلى المركز الاستهلاكي B_1، أي نضع $x_{11} = 80$ (ننقل كامل الكمية المتوفرة في A_1 إلى B_1)، ثم نلبي بقية حاجة B_1 من المركز A_2 حيث نضع $x_{12} = 10$، أما بقية المتحولات في ذلك السطر فنضعها مساوية للصفر، أي نضع $x_{13} = x_{14} = 0$، ثم ننتقل إلى السطر الثاني فنضع $x_{21} = 0$ (لأنه لم يبق في A_1 أية كمية) ونضع $x_{22} = 50$ (وهو كمية ما بقي في A_2) كما نضع $x_{23} = 20$ وبذلك يأخذ $x_{24} = 0$.

ثم ننتقل إلى السطر الثالث فنضع $x_{31} = 0$ و$x_{32} = 0$ (لأنه لم يبق أية كمية في A_1 وA_2) ونضع $x_{33} = 20$ كما نضع $x_{34} = 30$ وبذلك نحصل على الحل القاعدي الأول المبين في الجدول الآتي:

الإنتاج / الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات
B_1	2 | 80	1 | 10	3 | 0	2 | 0	90
B_2	2 | 0	3 | 50	3 | 20	1 | 0	70
B_3	3 | 0	3 | 0	2 | 20	1 | 30	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210 / 210

وهو حل قاعدي يتضمن 6 مركبات غير معدومة وتبلغ كلفة النقل المقابلة له:

$$80 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 450$$

ولا يعتبر هذا الحل مثالياً إلا إذا كانت مركبات الحل المرافق له تحقق الشروط المفروضة عليه.

2- أسلوب العنصر ذي التكلفة الأقل لإيجاد الحل القاعدي الأول:

يختلف هذا الأسلوب عن الأسلوب السابق بأنه يعتمد على مبدأ إشباع الحجر ذات التكلفة الأقل في كل سطر أو عمود قبل غيرها من الحجر حسب الكميات المطلوبة والمتوفرة، ثم نترك كل سطر أصبح مشبعاً وننتقل إلى السطر الذي يليه.

وإذا طبقنا هذا الأسلوب على الجدول السابق نحصل على حل قاعدي أول يتضمن 6 قيم للمتحولات x_{ij} غير معدومة (يوجد أكثر من اختيار واحد) كما في الجدول الآتي:

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A1	A2	A3	A4	الكميات المطلوبة
B1	2 30	1 60	3 0	2 0	90
B2	2 40	3 0	3 0	1 30	70
B3	3 10	3 0	2 40	1 0	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210 210

ولا يعتبر هذا الحل القاعدي حلاً مثالياً إلا إذا كانت مركبات الحل المرافق له تحقق الشروط المفروضة عليه.

ومن الواضح أن تكلفة النقل لهذا الحل القاعدي الأول تساوي:

$30 \times 2 + 60 \times 1 + 40 \times 2 + 30 \times 1 + 10 \times 3 + 40 \times 2 = 340$

وهي تكلفة أقل من التكلفة التي حصلنا عليها من الحل القاعدي السابق الناتج عن تطبيق أسلوب الزاوية الشمالية الغربية، أي أن طريقة إيجاد الحل القاعدي الأول بوساطة أسلوب العنصر ذي التكلفة الأقل تجعلنا أقرب إلى الحل المثالي وتسرع من عملية الحصول عليه.

3- أسلوب تقريب (فوجال Vogal) لإيجاد الحل القاعدي الأول أو المثالي:

ويعتمد هذا الأسلوب على حساب الفرق بين أقل قيمتين للتكلفة في كل سطر وفي كل عمود، وذلك لمعرفة مدى الخسارة التي تلحق بتابع الهدف إذا لم نشبع الحجرة ذات التكلفة الأقل، ويتم العمل بهذا الأسلوب وفق الخطوات الآتية:

أ- نقوم بحساب الفروقات بين أقل قيمتين للتكلفة في كل سطر ونضع هذه الفروقات في عمود إضافي مستقل، ثم نقوم بحساب الفروقات بين أقل قيمتين للتكلفة في كل عمود ونضعها في سطر إضافي مستقل.

ب- نختار أكبر تلك الفروقات (في السطر والعمود معاً) ونعتبر السطر أو العمود المقابل له هو السطر أو العمود والذي يجب أن نستخدمه قبل غيره، وعلينا أن نشبع الحجرة ذات التكلفة الأقل فيه، وذلك ضمن شروط الكميات المتوفرة والمطلوبة المقابلة لها.

ج- نهمل السطر أو العمود الذي يتم إشباعه ونعدل أرقام الكميات المتوفرة والمطلوبة بطرح الكمية التي وضعناها في الحجرة ذات التكلفة الأقل منها.

د- نعود إلى الخطوة (أ) ونكرر العمل السابق نفسه مع عدم الأخذ بعين الاعتبار الأسطر والأعمدة المهملة سابقاً، حتى نحصل على حل قاعدي يتضمن (n+m -1) مركبة غير معدومة على الأكثر.

وبتطبيق ذلك الأسلوب على مثالنا السابق نجد أنه إذا حسبنا الفروقات بين أقل قيمتين للتكلفة في كل سطر وعمود ووضعناهما في العمود Δ_1 والسطر Δ'_1 على الترتيب لحصلنا على الجدول المبين آنفاً، ومن دراسة عناصر العمود Δ_1 والسطر Δ'_1 معاً نجد أن أكبر عنصر فيها هو (2) المقابل للعمود الثاني A_2، لذلك يجب علينا أن نشبع الحجر ذات التكلفة الأقل في ذلك العمود قبل غيرها من الحجر، فنضع في الحجرة (A_2, B_1) قيمة $x_{12} = 60$ وهي كامل الكمية المتوفرة في المركز A_2.

ثم نهمل العمود الثاني عند إجراء الحسابات الآتية لأننا استنفدنا كامل طاقته، ولذلك شطبنا على العدد 60 في نهايته وعدلنا العدد 90 في السطر الأول ليصبح 30 واحدة مطلوبة في B_1.

ثم نقوم بحساب الفروقات من جديد (مع إهمال عمود A_2 ووضع إشارة خاصة بذلك) فنحصل على الأرقام المسجلة في العمود Δ_2 والسطر Δ'_2 الإضافيين.

وبما أنها تتضمن ثلاثة أرقام متساوية وتساوي (1) فإننا نختار أحدها بشكل كيفي وليكن الرقم المقابل للعمود الثالث A_3.

لذلك يجب علينا أن نشبع الحجرة ذات التكلفة الأقل في ذلك العمود وهذا يعني أنه علينا أن نضع $x_{33} = 40$ ونشطب العدد 40 من نهاية العمود ونعدل الرقم 50 ليصبح 10 واحدات مطلوبة في B_3.

ثم نعود ونقوم بحساب الفروقات (مع إهمال العمودين A_2 و A_3) فنحصل على الأرقام المسجلة في العمود Δ_3 والسطر Δ'_3 الإضافيين، وبما أن أكبر عنصر فيهما هو العنصر (2) المقابل للسطر B_3، فإن ذلك يلزمنا بأن نقوم بإشباع الحجرة ذات التكلفة الأقل في ذلك السطر، لذلك نضع $x_{34} = 10$ (لأنها أقصى كمية ما زالت مطلوبة من b_3) ونشطب على العدد 10 في سطر B_3 الذي يمثل بأن طلب B_3 ونعدل العدد 30 في عمود A_4 ثم نهمل السطر الثالث عند الحسابات الآتية لأننا قد بينا طلبات B_3 كاملة.

ثم نعود ونحسب الفروقات ونضعها في العمود Δ_4 والسطر Δ'_4 الإضافيين (مع إهمال سطر B_3) فنجد أنه لدينا عنصران متساويان ويساويان (1) لذلك نختار أحدهما بشكل كيفي، وليكن (1) المقابل لـA_4 فنجد أنه علينا أن نشبع الحجرة ذات التكلفة الأقل في عمود A_4، لذلك نضع كامل الكمية المتبقية في A_4 في الحجرة (A_4,B_2) أي نضع $x_{24} = 20$ ونشطب العدد 20 من عمود A_4 ونعدل العدد 70 في سطر B_2 ليصبح 50 واحدة مطلوبة في B_2.

وأخيراً يبقى لدينا العمود الأول والذي يتوفر فيه 80 واحدة لذلك نوزعها على المركزين B_1 وB_2 حسب طلباتها المتبقية فنضع $x_{11} = 30$ و$x_{21} = 50$.

وبذلك نحصل على حل قاعدي يتضمن 6 مركبات غير معدومة هي:

$$x_{11} = 30, \quad x_{12} = 60, \quad x_{21} = 50, \quad x_{24} = 20, \quad x_{33} = 40, \quad x_{34} = 10$$

وإن تكلفة النقل الموافقة لهذا الحل القاعدي تساوي:

$$30 \times 2 + 60 \times 1 + 50 \times 2 + 20 \times 1 + 40 \times 2 + 10 \times 1 = 330$$

وهو مبلغ أقل من المبلغين اللذين حددهما الأسلوبان السابقان.

		A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة	الفروقات في الأسطر			
							Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
B_1		2 30	1 60	3	2	90/30	1	0	0	0
B_2		2 50	3	3	1 20	70/50	1	1	1	1
B_3		3	3	2 40	1 10	50/10	1	1	2	–
الكميات المتوفرة		80	* 60	40	30/20	210 / 210				
الفروقات في الأعمدة	Δ_1	0	2	1	0					
	Δ_2	0	–	1	0					
	Δ_3	0	–	–	0					
	Δ_4	0	–	–	1					

ملاحظة:

مما سبق نجد أن أسلوب فوجال يعطينا حلاً قاعدياً أقرب إلى الحل المثالي من الحلول التي يحددها الأسلوبان الآخران (الزاوية الشمالية الغربية، والعنصر ذو التكلفة الأقل)، ومن الجدير بالذكر أن نلفت انتباه القارئ إلى أن أسلوب فوجال غالباً ما يعطينا حلاً قاعدياً يكون هو الحل المثالي المطلوب، أو الحل الذي يسبقه مباشرة ولا يخرج عن هذه القاعدة إلا في الحالات التي يتساوى فيها عنصران أو أكثر من العناصر الكبرى في عمود وسطر الفروقات وعندما يتم اختيار أحدها بشكل غير موفق، وكان يمكن أن نقع في مثل هذه الحالة لو أخذنا أحد الأسطر في الدورة الثانية.

وإذا لم يكن الحل القاعدي الذي حصلنا عليه بأسلوب فوجال أو غيره حلاً مثالياً فإننا نتابع البحث عن الحل المثالي بوساطة طريقة الدرج التي سنشرحها لاحقاً.

4- أسلوب الدرج لتبديل الحل القاعدي السابق بحل قاعدي آخر أفضل منه:

لنفترض أننا حصلنا على حل قاعدي أول بوساطة أحد الأساليب السابقة وكمثال نأخذ الحل القاعدي الذي حصلنا عليه سابقاً بوساطة أسلوب الزاوية الشمالية الغربية الآتي:

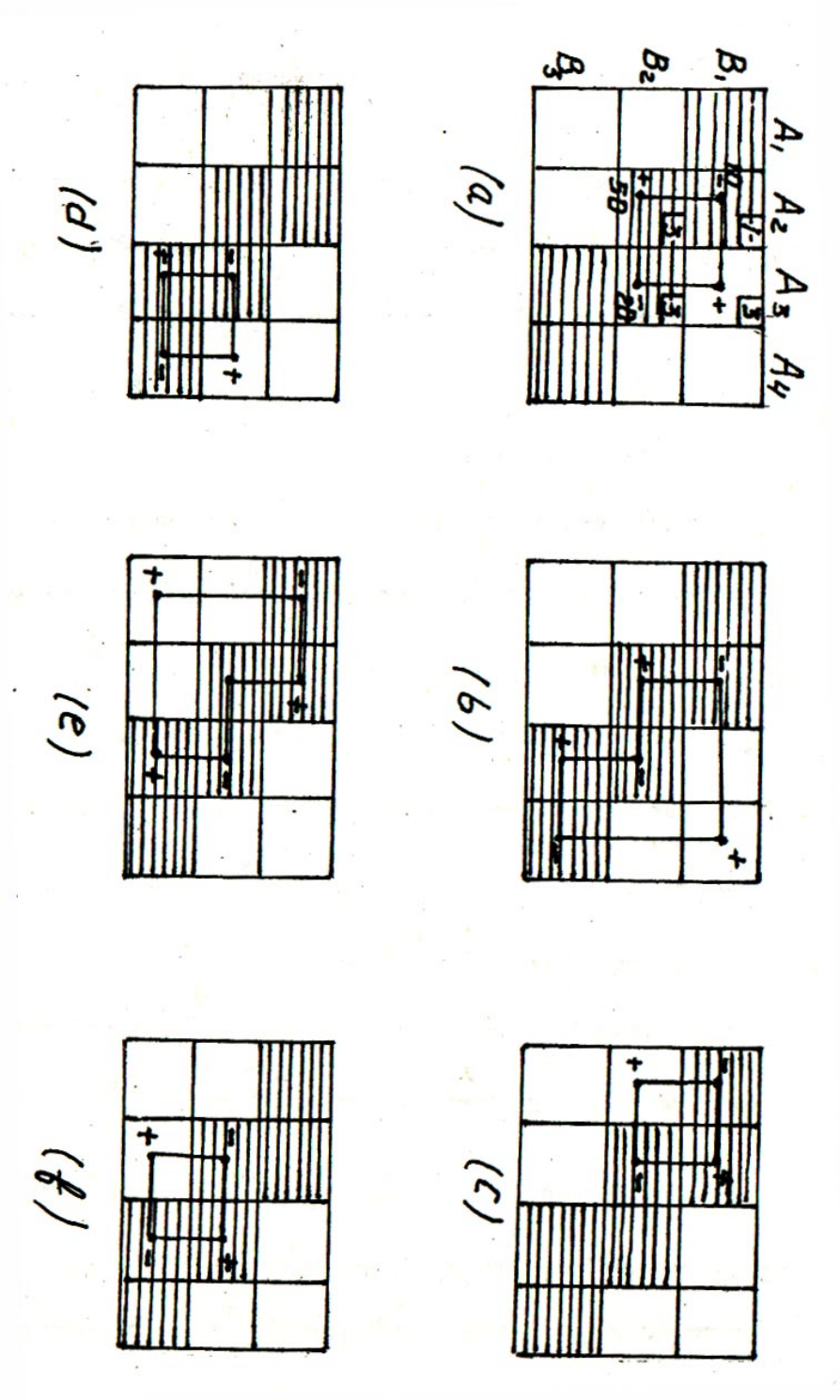
	A_1	A_2	A_3	A_1	الكميات المطلوبة
B_1	− 2 80	+ 1 10	3 20	2	90
B_2	2 +*	3 50 −	3 20	1	70
B_3	3	3	2 20	1 30	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210

حتى نحصل على حل قاعدي جديد يجب علينا أن نقوم بنقل أحد المتحولات غير القاعدية إلى المتحولات القاعدية، وهذا يعني أنه يجب علينا أن نشغل إحدى الحجر الفارغة ونفرغ إحدى الحجر المشغولة في الجدول السابق، ولذلك علينا أن نقوم بدراسة حول كيفية اختيار الحجرة الجديدة، التي سنشغلها والحجرة التي سنفرغها وتحديد قيمة x_{ij} في الحجرة الجديدة وذلك ضمن التوازنات المفروضة على الكميات المتوفرة والكميات المطلوبة، كما يجب علينا أن نقوم بتحديد كمية الربح والوفر Δ_{ij} الذي سنحققه من جراء ذلك التبديل، ولتحديد كل هذه الأمور نشكل لكل حجرة فارغة مستطيلاً أو درجاً مغلقاً يقع رأسه الأول في تلك الحجرة الفارغة أما رؤوسه الأخرى فتقع في حجر مشغولة وبحيث تشكل الخطوط الواصلة بين تلك الرؤوس زوايا قائمة، ونضع إشارة (+) في الحجرة الفارغة وإشارة (−) في الحجرة التي تقع على الرأس المجاور، ثم إشارة (+) في الحجرة التي تقع على الرأس المجاور الآخر، ثم إشارة (−) في الحجرة التي تقع على الرأس المجاور الثالث... الخ، وإن الرسوم a, b, c, d, e, f توضع الأشكال المختلفة للأدراج المناسبة للحجر الفارغة في المثال المفروض وكيفية وضع الإشارات (+) و(−) في الحجر الرأسية في كل شكل.

فإذا أردنا أن ندخل x_{13} إلى القاعدة فإنه يجب علينا أن ننقل من A_3 إلى B_1 كمية مقدارها a_{13}، وحتى نحافظ على التوازنات علينا أن ننقص من كل من الحجرتين (B_1A_2) و(B_2A_3) الكمية a_{13} نفسها، وأن نزيد الكمية التي في الحجرة (B_2A_2) بالمقدار a_{13} نفسه، ولذلك وضعنا إشارة (+) و(−) و(+) و(−) في الحجر المتتالية لتبيان مكان الإضافة ومكان الطرح في كل منها كما هو موضح على الشكل (a).

ولمعرفة فيما إذا كان من مصلحتنا أن ندخل x_{13} إلى القاعدة دون غيره ندرس الربح والخسارة الناتجة عن نقل واحدة فقط من المادة المنقولة إلى الحجرة (B_1A_3) فنجد أن تكلفة النقل تتغير نتيجة لزيادة الكمية في الحجرتين (B_1A_3) و(B_2A_2) ولنقصانها في الحجرتين (B_1A_2) و(B_3A_3) بمقدار Δ_{13} وتساوي:

الشكل (a) $\Delta_{13} = 3 - 3 + 3 - 1 = 2$



الشكل (1)

حيث رمزنا بـ $\triangle_{13}$ لمقدار تغير التكلفة الإجمالية للنقل من جراء زيادة واحدة في الحجرة (B_1A_3) وهذا يعني أن التكلفة الإجمالية ستزداد بمقدار (2) مقابل إضافة كل واحدة إلى الحجرة (B_1A_3)، لذلك نستنتج أنه ليس من مصلحتنا أن ندخل المتحول x_{13} إلى القاعدة لأنه سيزيد من التكلفة.

وكذلك ندرس الفائدة من إدخال x_{14} إلى القاعدة فنجد أن التكلفة ستتغير مقابل كل واحدة نقل كما يلي:

الشكل (b) $\triangle_{14} = 2 - 1 + 3 - 3 + 2 - 1 = +2$

هذا يعني أنه ليس من مصلحتنا أن ندخل x_{14} إلى القاعدة.

وكذلك نجد أن إدخال x_{21} إلى القاعدة سيؤدي إلى تغير في التكلفة مقابل لكل واحدة يساوي:

الشكل (c) $\triangle_{21} = 2 - 2 + 1 - 3 = -2$

وهذا يعني أنه مقابل إضافة كل واحدة إلى الحجرة (B_2A_1) فإن التكلفة ستقل بمقدار(2–) ومن هنا نستنتج أنه من مصلحتنا أن ندخل x_{21} إلى القاعدة.

وبمتابعة دراسة مقدار الفائدة التي تعود علينا من جراء إدخال مختلف المتحولات غير القاعدية إلى القاعدة فنجد أن:

إدخال x_{24} يعطينا أن:

الشكل (d) $\triangle_{24} = 1 - 3 + 2 - 1 = -1$

وهذا يعني أنه من مصلحتنا أيضاً أن ندخل x_{24} إلى القاعدة لأن إضافة كل واحدة إلى الحجرة (B_2A_4) تنقص من التكلفة بمقدار (1–)، وكذلك نجد بالنسبة للمتحول x_{31} أن التكلفة ستتغير كما يلي:

الشكل (e) $\triangle_{31} = 3 - 2 + 1 - 3 + 3 - 2 = 0$

وهذا يعني أن زيادة x_{31} أو عدمها لا يؤثر على التكلفة[1] لأنها لا تزيد ولا تنقص من التكلفة الإجمالية للنقل.

[1] وهذا يدل على وجود أكثر من حل مثالي واحد للمسألة المفروضة، وخاصة إذا صادفنا مثل هذه الحالة في آخر مرحلة من مراحل الحل.

وأخيراً نجد أن مقدار التغير في التكلفة نتيجة لإدخال المتحول x_{32} يساوي:

الشكل (f) $\Delta_{32} = 3 - 3 + 3 - 2 = 1$

وهذا يعني أنه ليس من مصلحتنا أن ندخل x_{32} إلى القاعدة.

مما سبق نستنتج أنه ليس من مصلحتنا أن ندخل أي متحول x_{ij} إلى القاعدة عندما يكون مقدار تغير التكلفة المقابل له $0 <$. Δ_{ij}.

وتنحصر مصلحتنا في إدخال أحد المتحولات القاعدية التي يقابلها $\Delta_{ij} < 0$ ولتحديد أي من هذه المتحولات فإننا نختار المتحول x_{ts} الذي يقابل أكثر الأعداد Δ_{ij} سلبية، أي نختار x_{ts} الذي يقابل Δ_{ts} الذي يحقق العلاقة الآتية:[1]

$$\underset{(ij) \in \overline{\Omega}}{\text{Min}} [\Delta_{ij} < 0] = \Delta_{ts} \qquad (4-3-8)$$

حيث رمزنا بـ $\overline{\Omega}$ لمجموعة الحجر الفارغة المقابلة للمتحولات غير القاعدية في كل مرحلة من مراحل الحل، ويسمى هذا المعيار بالمعيار الأول.

وبتطبيق ذلك المعيار على مثالنا الحالي نجد أن:

$$M_{in}[\Delta_{21}, \Delta_{24}] = \text{Min}[-2, -1] = -2 = \Delta_{21}$$

لذلك ندخل x_{21} إلى القاعدة ونخرج منها المتحول الذي يقع على أحد الرؤوس السالبة والذي تكون حمولته هي الحمولة الصغرى بينها، فلإدخال x_{21} علينا أن نخرج x_{22} (لأن $x_{22} = 50$ أصغر من $x_{11} = 80$) وهكذا نقوم بنقل الكمية (50) إلى الحجرة (B_2A_1) ونقص الحجرة (B_1A_1) بمقدار (50) فتصبح (30) ونزيد الحجرة (B_1A_2) بمقدار (50) فتصبح (60) ونترك الحجرة (B_2A_2) فارغة.

وبصورة عامة نضيف الحمولة الصغرى إلى كل رأس موجب ونطرحها من كل رأس سالب للمستطيل أو لأي درج غير مستطيل، وبذلك نكون قد حصلنا على الحال القاعدي الآتي وهو الحل المعطى في الجدول الآتي:

[1] هناك طريقة أخرى لتحديد المتحول الداخل x_{ts} سنتعرض لها لاحقاً من خلال المثال المحلول.

المراكز	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة
B_1	2 — 30	1 — 60	3	2	90
B_2	2 — 50	3	− 3 — 20 →	+ 1 — 0	70
B_3	3	3	+ 2 — 20 ←	1 — 30 -	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	

وهو حل قاعدي أفضل من الحل الأول لأن تكلفة النقل عنده أصبحت تساوي:

$$30 \times 2 + 60 \times 1 + 50 \times 2 + 20 \times 3 + 20 \times 2 + 30 \times 1 = 350$$

ولكنه ليس مثالياً لأنه لو حسبنا تغيرات التكلفة Δ_{ij} بالنسبة للمتحولات غير القاعدية (وهي المتحولات المقابلة للحجر الفارغة) لوجدنا أن الأدراج المختلفة المقابلة لتلك المتحولات تعطينا أن:

$\Delta_{13} = 3 - 3 + 2 - 3 = 0$
$\Delta_{14} = 2 - 1 + 1 - 3 + 2 = 0$
$\Delta_{22} = 3 - 1 - 2 + 2 = 2$
$\Delta_{24} = 1 - 1 + 2 - 3 = -1$
$\Delta_{31} = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$
$\Delta_{32} = 3 - 1 + 2 - 2 + 3\text{-}2 = 3$

+ 2 — 30 ←	− 1 — 60	3	2
− ↓ 2 — 50 →	3 ↑	+ 3 — 20	1
3	+ 3 ↑	− ↓ 2 — 20 ←	1 — 30
	*		

الدرج الذي استخدمناه لحساب Δ_{32}

وبما أن أصغر قيمة لـ Δ_{ij} هي -1 = Δ_{24} وهي تقابل المتحول x_{24} فإنه من مصلحتنا نقل x_{24} إلى القاعدة، ولتحديد المتحول البديل نشكل مستطيل الدرج المناسب لـx_{24} فنجد أن المتحول البديل هو x_{23} (لأنه يقع في الرأس السالب ذي الحمولة الأقل) كما هو مبين في الجدول السابق.

ولإجراء النقل نضع x_{24} = 20 في الحجرة (B_2A_4) وننقص الحجرة (B_3A_4) بمقدار (20) لتصبح (10) ونزيد الحجرة (B_3A_3) بمقدار (20) لتصبح (40) ونترك الحجرة (B_2A_3) فارغة، فنحصل على الحل القاعدي الثالث المعطى بالجدول الآتي:

المراكز	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة
B_1	2 [30]	1 [60]	3	2	90
B_2	2 [50]	3	3	1 [20]	70
B_3	3	3	2 [40]	1 [10]	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	

وهو حل قاعدي أفضل من الحل السابق لأن تكلفة النقل عنده تساوي:

$30 \times 2 + 60 \times 1 + 50 \times 2 + 20 \times 1 + 40 \times 2 + 10 \times 1 = 330$

ولمعرفة فيما إذا كان هذا الحل القاعدي يمثل حلاً مثالياً نقوم بدراسة تغيرات التكلفة Δ_{ij} بالنسبة للمتحولات غير القاعدية (في الحجر الفارغة)، فنجد أنها أصبحت جميعاً غير سالبة $\Delta_{ij} > 0$، وهذا يعني أنه ليس من مصلحتنا أن نشغل أية حجرة فارغة في الجدول الأخير.

ولكن هذا الأمر لا يعتبر برهاناً قاطعاً على مثالية الحل القاعدي السابق، حيث أن الحل القاعدي لا يكون حلاً مثالياً إلا إذا كان الحل المرافق له ($u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_m$) يحقق الشروط المفروضة على النموذج المرافق، لذلك فإنه علينا أن نقوم باختبار أو تجريب الحل المرافق لمعرفة فيما إذا كان يحقق الشروط المفروضة على النموذج المرافق أم لا،

فإذا كان يحقق تلك الشروط فإن الحل القاعدي الذي حصلنا عليه يكون حلاً مثالياً أما إذا لم يكن محققاً نقوم بالبحث عن حل قاعدي آخر.

وسنقوم الآن بتطبيق هذه الطريقة والأساليب المتعلقة بها كاملة على مثال متكامل لتوضيح كيفية ربط هذه الأساليب واستخدامها في حل مسائل النقل المغلقة.

مثال هام (4):

لنفترض أنه لدينا أربعة مراكز لإنتاج الطحين هي A_1, A_2, A_3, A_4 طاقتها الشهرية تساوي 30, 40, 60, 80 على الترتيب، وثلاثة مراكز استهلاك هي B_1, B_2, B_3 ومتطلباتها الشهرية تساوي 50, 70, 90 على الترتيب وأن تكلفة نقل الطن الواحد من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك معطية بالجدول الآتي:

المراكز	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة
B_1	2	1	3	2	90
B_2	2	3	3	1	70
B_3	3	3	2	1	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210 / 210

والمطلوب إيجاد خطة للنقل تجعل تكلفة النقل أقل ما يمكن.

الحل:

قبل كل شيء نلاحظ أن المثال يشكل نموذج مغلق لأن $\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_i = 210$

لحل هذا المثال بشكل نموذجي نقوم بالخطوات الآتية:

1- نصوغ النموذج الرياضي لهذه لمسألة فنجد أنه لو رمزنا بـx_{ij} لمقدار ما يجب نقله من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j، فإن تابع الهدف يأخذ الشكل الآتي:

$$L = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + 3x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34} \rightarrow Min$$

وضمن الشروط:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90$ u_1

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70$ u_2

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50$ u_3

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$ v_1

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60$ v_2

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$ v_3

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$ v_4

$x_{ij} \geq 0$; (i: 1,2,3 j: 1,2,3)

2- نضع معاملات هذا النموذج في جدول مناسب مستخدمين طريقة القاعدة الاصطناعية فنحصل على الجدول المبين على الصفحة الآتية:

ولقد وضعنا المتحولات $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ على يسار الجدول لاستخدامها في إيجاد النموذج المرافق وجعلناها من نوعين u وv لسهولة العمل والتفريق بين كل منها.

3- نقوم بإيجاد النموذج المرافق فنجد أنه يساوي:

$z = 90u_1 + 70u_2 + 50u_3 + 80v_1 + 60v_2 + 40v_3 + 30v_4 \rightarrow Max$

أما الشروط المفروضة عليه فنستخرجها من جدول السمبلكس فنجد أنه مقابل كل متحول x_{ij} يوجد شرط خطي كما يلي:

	الشروط	**المتحولات في تابع الهدف**
1	$u_1 + v_1 \leq 2$	x_{11}
2	$u_1 + v_2 \leq 1$	x_{12}
3	$u_1 + v_3 \leq 3$	x_{13}
4	$u_1 + v_4 \leq 2$	x_{14}
5	$u_2 + v_1 \leq 2$	x_{21}
6	$u_2 + v_2 \leq 3$	x_{22}
7	$u_2 + v_3 \leq 3$	x_{23}
8	$u_2 + v_4 \leq 1$	x_{24}
9	$u_3 + v_1 \leq 3$	x_{31}
10	$u_3 + v_2 \leq 3$	x_{32}
11	$u_3 + v_3 \leq 2$	x_{33}
12	$u_3 + v_4 \leq 1$	x_{34}

وحيث إن u_i وv_j هو متحولات غير مقيدة بعدم السالبية لأنها تقابل معادلات في النموذج الأصلي. وإن جدول السمبلكس للنموذج الأصلي مع مرافقه وحسب طريقة المتحولات الاصطناعية يأخذ الشكل الآتي:

الجدول الأساسي لطريقة السمبلكس الاصطناعية

المتحولات المرافقة	المتحولات القاعدة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	الثوابت
u_1	ε_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	90
u_2	ε_2	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	70
u_3	ε_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	50
v_1	ε_4	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	80
v_2	ε_5	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	60
v_3	ε_6	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	40
v_4	ε_7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	30
	تابع الهدف	2	1	3	2	2	3	3	1	3	3	2	1	z -0

4- بدلاً من استخدام طريقة السمبلكس نقوم بإيجاد حل قاعدي أول لهذه لمسألة وفق أسلوب الزاوية الشمالية الغربية، لذلك نضع المعطيات والمتحولات في جدول نظامي كالآتي (حيث وضعنا تكلفة النقل في زوايا جانبية).

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة
B_1	2 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	2 x_{14}	90
B_2	2 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	1 x_{24}	70
B_3	3 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	1 x_{34}	50
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210 / 210

وباستخدام أسلوب الزاوية الشمالية- الغربية نحصل على الحل القاعدي الأول المبين في الجدول الآتي:

	A_1	A_2	A_3	A_4	الكميات المطلوبة	الحل المرافق u_j
B_1	− 2 80 →	+ 1 10	3	2	90	0
B_2	+ ↑ 2 * ←	3 ↓ 50	3 20	1	70	2
B_3	3	3	2 20	1 30	50	1
الكميات المتوفرة	80	60	40	30	210 / 210	
v_i	2	1	1	0		

لاختبار فيما إذا كان هذا الحل القاعدي يمثل حلاً مثالياً نقوم[1] باستخراج الشروط الخطية للنموذج المرافق والمقابلة للمتحولات القاعدية x_{ij}، وهي الشروط 1 و2 و6 و7 و11 و12 ونضعها على شكل مساويات تامة (لأن x_{ij} المقابلة لها غير معدومة) فنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} \rightarrow u_1 + v_1 = 2\\
&x_{12} \rightarrow u_1 + v_2 = 1\\
&x_{22} \rightarrow u_2 + v_2 = 3\\
&x_{23} \rightarrow u_2 + v_3 = 2\\
&x_{34} \rightarrow u_3 + v_3 = 1\\
&x_{34} \rightarrow u_3 + v_4 = 1
\end{aligned}
\qquad (B)
$$

نستخدم هذه المعادلات للحصول على حل قاعدي للنموذج المرافق، ولكن بما أن عدد المتحولات (7 متحولات) أكثر من عدد المعادلات، فإن لجملة المعادلات السابقة لا نهاية من الحلول المقبولة لذلك نختار أحدها وأسهلها وهو الحل الذي يكون فيه $u_1 = 0$ فنجد أن هذه المعادلات تعطينا بسهولة الحل القاعدي الآتي:

$$u_1 = 0 \; , \; u_2 = 2 \; , \; u_3 = 1 \; , \; v_1 = 2 \; , \; v_2 = 1 \; , \; v_3 = 1 \; , \; v_4 = 0$$

ولقد وضعنا قيم ذلك الحل على جانبي الجدول السابق حتى نسهل استخدامها في عملية تحقق الشروط المفروضة.

ولاختبار فيما إذا كان ذلك الحل يحقق الشروط المفروضة على النموذج المرافق يكفي أن نجري عمليات التحقق على الشروط المتبقية (غير الوارد في المعادلات (B) لأن ذلك الحل يحقق تلك المعادلات) وهي المتراجحات المقابلة للحجر الفارغة التي سنحولها إلى شكل حسابي كما هو مبين على الصفحة الآتية، وبذلك نجد أن الحل القاعدي المرافق (0,2,1,2,1,1,0) لا يحقق الشروط المفروضة على النموذج المرافق (لا يحقق الشرطين c وd)، وهكذا نستنتج أن الحل القاعدي الأول لا يمثل حلاً مثالياً.

[1] يمكن إجراء ذلك الاختبار بطريقة تغيرات التكلفة Δ_{ij} ولكننا سنتبع طريقة أخرى لأجل الفائدة.

رمز الشرط	الشروط المتبقية	الشكل الحسابي	التعويض	النتيجة
a	$u_1 + v_3 \leq 3$	$3 - (u_1 + v_3) \geq 0$	$3 - (0+1) \geq 0$	$2 \geq 0$
b	$u_1 + v_4 \leq 2$	$2 - (u_1 + v_4) \geq 0$	$2 - (0+0) \geq 0$	$2 \geq 0$
c	$u_2 + v_1 \leq 2$	$2 - (u_2 + v_1) \geq 0$	$2 - (2+2) \geq 0$	$-2 \geq 0$ *
d	$u_2 + v_4 \leq 1$	$1 - (u_2 + v_4) \geq 0$	$1 - (2+0) \geq 0$	$-1 \geq 0$ *
e	$u_{31} + v_1 \leq 3$	$3 - (u_3 + v_1) \geq 0$	$3 - (1+2) \geq 0$	$0 \geq 0$
f	$u_3 + v_2 \leq 3$	$3 - (u_3 + v_2) \geq 0$	$3 - (1-1) \geq 0$	$1 \geq 0$

ملاحظة:

إن كتابة المتراجحات على الشكل الحسابي المبين أعلاه يساعدنا على إجراء عمليات التحقق على الجدول مباشرة بالنسبة للحجر الفارغة فقط (لأن الحجر المشغولة تحقق الشروط حتماً)، فنأخذ كل حجرة فارغة مثل (B_3A_1) ونطرح من قيمة التكلفة فيها مجموع المركبين $(u_2 + v_1)$ فنحصل على:

$$3 - (2+1) \geq 0$$

محقق تماماً.

وكذلك نجد بالنسبة للحجرة (B_2A_1) حيث يكون لدينا $2 - (2+2) \geq 0$ وهي غير محققة، وهكذا نتابع عمليات التحقق ونضع إشارة مميزة على الحجر التي لا تحقق الشروط المفروضة على النموذج المرافق لإدخالها في الحل القاعدي الجديد.

لذلك نرمز بـ δ_{ij} للمقادير $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ حيث إن (ij) تنتمي إلى $\overline{\Omega}$ مجموعة الحجر الفارغة، فإذا كانت جميع $\delta_{ij} \geq 0$ فإن ذلك يعني أننا توصلنا إلى الحل المثالي المطلوب، أما إذا كان أحد $\delta_{ij} < 0$ فإننا ننتقل إلى الخطوة 5 الآتية:

5- نقوم بالبحث عن حل قاعدي آخر وذلك بوساطة إجراء تبديل بين أحد المتحولات القاعدية في الحل القاعدي الأول وأحد المتحولات غير القاعدية.

ولتحديد المتحول الذي يجب إدخاله إلى القاعدة نأخذ أكثر الأعداد سالبية في عمود النتائج الأخير وفق معيار يسمى بالمعيار الثاني وهو المعرف بالعلاقة:

$$\underset{i,j}{\text{Min}}\,[\delta_{ij} < 0] = \delta_{ts} \qquad (6-4-8)$$

فنجد أن:

$$\text{Min}(\delta_{21}, \delta_{24}) = \text{Min}(-2,-1) = -2 = \delta_{21}.$$

وهو يقابل المتحول x_{21} لذلك يجب إدخال x_{21} إلى القاعدة وإشغال الحجرة (B_2A_1) بعدد معين يجب حسابه.

6- لحساب العدد الذي يجب إدخاله إلى الحجرة (B_2A_1) نشكل المستطيل المبين على الجدول السابق، والذي رأسه الأول يقع في الحجرة (B_2A_1) ورؤوسه الثلاثة الأخرى تقع في حجر مشغولة بأعداد الحل القاعدي السابق ثم نضع الإشارات الموجبة والسالبة

على تلك الرؤوس، ثم ننقل من الحجرة السالبة والأقل حمولة العد (50) إلى الحجرة الفارغة (B_2A_1) ونطرحه من (80) ونضيفه إلى 10 فنحصل على الحل القاعدي الثاني الآتي:

	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	2 30	1 60	3	2	90
B_2	2 50	3	3 20	1	70
B_3	3	3	1 20	1 30	50
	80	60	40	30	

ولاختبار فيما إذا كان هذا الحل القاعدي يمثل حلاً مثالياً أم لا نستخدم أسلوباً آخر فنقوم بتحديد قيم المعيار الأول (بدلاً من المعيار الثاني) المقابلة للحجر الفارغة فقط فنجد أن المستطيلات أو الأدراج المناسبة لها تعطينا أن:

$\triangle_{13} = 3 - 3 + 2 - 2 = 0$
$\triangle_{14} = 2 - 1 + 2 + 3 + 2 - 2 = 0$
$\triangle_{22} = 3 - 1 + 2 - 2 = 2$
$\triangle_{24} = 1 - 1 + 2 - 3 = -1$
$\triangle_{31} = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$
$\triangle_{32} = 3 - 1 + 2 - 2 + 3 - 2 = 3$

وهكذا نجد أنه من مصلحتنا أن نشغل الحجرة (B_2A_4) فنشكل المستطيل ذا الرؤوس المتناوبة بالإشارة وننقل أصغر الحمولات التي تقع في الرؤوس السالبة إلى الحجرة (B_2A_4) فارغة فنحصل على الحل القاعدي الآتي:

	A_1	A_2	A_3	A_4	المطلوبة	u_i
B_1	2 30	1 60	3	2	90	0
B_2	2 50	3	3	1 20	70	0
B_3	3	3	2 40	1 10	50	0
المتوفرة	80	60	40	30		
v_i	2	1	2	1		

ولاختبار فيما إذا كان هذا الحل القاعدي يمثل حلاً مثالياً نعود إلى الشروط المفروضة على النموذج المرافق والمقابلة للمتحولات القاعدية الحالية ونضعها على شكل مساويات تامة فنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$x_{11} \rightarrow u_1 + v_1 = 2$
$x_{12} \rightarrow u_1 + v_2 = 1$
$x_{22} \rightarrow u_2 + v_1 = 2$
$x_{23} \rightarrow u_2 + v_4 = 1$
$x_{34} \rightarrow u_3 + v_3 = 2$
$x_{34} \rightarrow u_3 + v_4 = 1$

ونستخدم هذه المعادلات للحصول على حل قاعدي مرافق، ولذلك نضع $u_1 = 0$ فنحصل على الحل القاعدي المرافق الآتي:

$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, v_1 = 2, v_2 = 1, v_3 = 2, v_4 = 1$

نقوم بتعويض قيم هذا الحل في الشروط المتبقية للنموذج المرافق فنجد أنه يحقق الشروط المقابلة للحجر الفارغة حيث نجد أن:

$u_1 + v_3 < 3 \rightarrow 3 - (0+2) > 0 \quad 1 > 0$
$u_1 + v_4 < 2 \rightarrow 2 - (0+1) > 0 \quad 1 > 0$
$u_2 + v_2 < 3 \rightarrow 3 - (0+1) > 0 \quad 2 > 0$
$u_2 + v_3 < 3 \rightarrow 3 - (0+2) > 0 \quad 1 > 0$
$u_3 + v_1 < 3 \rightarrow 3 - (0+2) > 0 \quad 1 > 0$
$u_3 + v_2 < 3 \rightarrow 3 - (0+1) > 0 \quad 2 > 0$

وهي جميعاً محققة وهذا يعني أن الحل القاعدي الأخير يمثل حلاً مثالياً وهو مؤلف من العناصر الآتية:

$x_{11} = 30, \quad x_{12} = 60, \quad x_{21} = 50, \quad x_{24} = 20, \quad x_{33} = 40, \quad x_{34} = 10$

وأن تكلفة النقل المقابلة له تساوي:

$$L = 30 \times 2 + 60 \times 1 + 50 \times 2 + 20 \times 1 + 40 \times 2 + 10 \times 1 = 330$$

وللتأكد من الحسابات نحسب قيمة تابع الهدف المرافق المقابلة للحل المرافق الأخير (0,0,0,2,1,2,1) فنجد أنها:

$$z = 80 \times 2 + 60 \times 1 + 40 \times 2 + 30 \times 1 = 330$$

وإن الحل المثالي السابق يعني أنه يجب علينا أن نقوم: بنقل (30) طناً من A1 إلى B1، و(60) طناً من A2 إلى B1، و(50) طناً من A1 إلى B2، و(20) طناً من A4 إلى B2، و(40) طناً من A3 إلى B3، و(10) أطنان من A4 إلى B3.

ملاحظة:

من العقبات التي يمكن أن تعترض عملية الحل بهذه الطريقة هو حصولنا على حل قاعدي يتضمن أقل من $(n + m - 1)$ مركبة غير معدومة (حالة انحلال) ونقوم بالتخلص من هذه الحالة بإضافة صفر إلى إحدى الحجر المناسبة وبحيث تقع على رأس موجب من رؤوس الدرج واعتبارها إحدى مركبات الحل القاعدي المفروض.

كما يمكن أن نصادف عند الاختبار الأخير حول مثلوية الحل القاعدية أن تكون أحد الشروط المتبقية المفروضة على النموذج المرافق محققة تماماً، وإن هذه الحالة تدلنا على وجود أكثر من حل مثالي للمسألة المطروحة ويمكننا أن نحصل على حل مثالي آخر بإجراء تبديل للمتحول المقابل لذلك الشرط.

VI- نموذج نقل المواد بأقصر فترة زمنية:

يختلف هذا النموذج عن النماذج السابقة بأنه يهدف إلى نقل كامل الكمية من مراكز الإنتاج أو التوزيع إلى مراكز الاستهلاك بأقصر فترة زمنية ممكنة، ونصادف مثل

هذه المسائل عند وضع خطط نقل المواد سريعة العطب (كالحليب والأدوية والأغذية... الخ)، وكذلك عند وضع خطط لتأمين الذخائر القتالية في حالة الحرب حيث يكون الهدف هو النقل بأسرع ما يمكن وبأقل كلفة ممكنة، ونصيغ المسألة ونموذجها الرياضي على الشكل الآتي:

لنفترض أنه لدينا m مركزاً لتصدير مادة ما وأن طاقات تلك المراكز محددة بالكميات الآتية:

$a_1 , \quad a_2 , \quad a_3 , \ldots\ldots\ldots\ldots a_m$ (واحدة)

وأنه لدينا n مركزاً استهلاكياً وأن متطلباتها محددة من تلك المادة محددة بالكميات الآتية:

$b_1 , \quad b_2 , \quad b_3 , \ldots\ldots\ldots\ldots b_m$ (واحدة)

وإننا نفترض أن:[1]

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1\text{-}6\text{-}8)$$

كما نفترض أن مصفوفة الأزمنة اللازمة لنقل الكمية المتوفرة من المركز i إلى المركز j معلومة وتساوي $[t_{ij}]$.

وإذا رمزنا لمقدار ما يجب نقله من المركز i إلى المركز j بالرموز x_{ij} فإننا نجد أن هذه المتحولات يجب أن تحقق الشروط الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i:1,2,3 \ldots\ldots\ldots m) \qquad (2\text{-}6\text{-}8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \qquad (j:1,2,3 \ldots\ldots\ldots n) \qquad (3\text{-}6\text{-}8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i: 1,2,3. . . m), (j: 1,2,3. . . .n) \qquad (4\text{-}6\text{-}8)$$

أما تابع الهدف فلا يمكننا استخلاصه على شكل تابع رياضي ولكننا سنستخلص أهم صفاته وخواصه من المناقشة الآتية:

نعلم أن أية خطة للنقل $[x_{ij}]$ لا تتضمن غير $(n + m - 1)$ متحولاً قاعدياً (غير معدوم)، وأنه مقابل أية خطة مقبولة $[x_{ij}]$ يوجد جملة من الأعداد الأزمنة t_{ij} نرمز لها

[1] إذا لم تكن تلك العلاقة محققة فإننا نضيف إلى النموذج مركزاً وهمياً كما فعلنا في النموذج السابق.

بـ$[t_{ij}]_x$ تمثل المدة الزمنية المقابلة لتنفيذ عناصر الخطة $[x_{ij}]$، وبما أن الخطة $[x_{ij}]$ لا تعتبر منفذة إلا إذا كانت قد نفذت عناصرها، وبذلك نجد أن مدة تنفيذ الخطة والتي نرمز لها بـ t_x تساوي أكبر عنصر في الجملة $[t_{ij}]_x$ وبذلك نجد أن:

$$t_x = Max_{i,j} [t_{ij}]x$$

وبما أنه لدينا عدد كبير من الخطط القاعدية فإن الخطة المثالية t_x^* هي الخطة التي تكون فيها المدة الزمنية أقل ما يمكن، أي يكون لدينا:

$$t_x^* = Min\ t_x = Min\ Max\ [t_{ij}]_x \qquad (5\text{-}6\text{-}8)$$

ونقوم بحل مثل هذه النماذج بدون تابع هدف ولكننا نضع جملة الأعداد $[t_{ij}]_x$ المقابلة لأي حل قاعدي في عمود خاص على يسار الجدول، ونعمل على الانتقال من حل قاعدي إلى آخر بوساطة طريقة السمبلكس بحيث نجعل t_x (أكبر العناصر في الجملة $[t_{ij}]_x$) أصغر ما يمكن وسنطبق ذلك على المثال العددي الآتي، ولكن قبل ذلك نشير إلى أنه يمكننا استخدام نفس النموذج لأقصر طريق وذلك باستبدال الأزمنة t_{ij} بالمسافات d_{ij}.

مثال (5):

ليكن لدينا 4 مراكز إنتاجية و3 مراكز استهلاكية وإن الكميات والأزمنة اللازمة لنقلها معطية في الجدول الآتي:

المراكز الإنتاجية / المراكز الاستهلاكية	1	2	3	4	الكميات المطلوبة
1	1 x_{11}	3 x_{12}	7 x_{13}	12 x_{14}	18
2	2 x_{21}	8 x_{22}	10 x_{23}	8 x_{24}	10
3	6 x_{31}	1 x_{32}	4 x_{33}	5 x_{34}	12
الكميات المتوفرة	11	9	13	7	40 / 40

وهنا نلاحظ أن الشرط (8-6-1) محقق لأن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 40$$

وإن الشروط التي يجب أن تحققها متحولات الخطة x_{ij} هي:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 18$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 12$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 11$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 13$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 7$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i: 1,2,3 \quad , \quad j: 1,2,34)$$

ولإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لهذه المعادلات نستخدم طريقة القاعدة الاصطناعية فندخل على كل منها متحولاً ε_i ثم نقوم بتبديل هذه المتحولات بمتحولات غير قاعدية ونحذف الأعمدة التي أخذتها المتحولات الاصطناعية ε_i فنحصل على الجدول الآتي (بعد ست عمليات تبديل):

الأزمنة t_{ij}	t_{ij} القاعدة	8	10	8	6	1	5	الثوابت
		x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	
3	x_{12}	1	0	0	0	1	0	9
7	x_{13}	0	1	0	−1	−1	−1	1
4	x_{33}	0	0	0	1	1	1	12
1	x_{11}	−1	−1	−1	1	0	0	1
2	x_{21}	1	1	1	0	0	0	10
12	x_{14}	0	0	1	0	0	1	7

ولقد وضعنا الأزمنة المقابلة لكل متحول x_{ij} في سطر وعمود فوق وعلى يسار الجدول وبما أن الجدول يعطينا حلاً قاعدياً موجباً أول X_1 هو:

$$x_{22} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = x_{34} = 0$$
$$x_{12} = 9, \quad x_{13} = 1, \quad x_{33} = 12, \quad x_{11} = 1, \quad x_{21} = 10, \quad x_{14} = 7$$

وإن قيم t_{ij} المقابلة للعناصر غير المعدومة في الحل القاعدي السابق تساوي:

$$t_{12} = 3, \quad t_{13} = 7, \quad t_{33} = 4, \quad t_{11} = 1, \quad t_{21} = 2, \quad t_{14} = 12$$

وبذلك نجد أن الفترة الزمنية التي يمكن فيها تنفيذ ذلك الحل القاعدي السابق هي x_1 Max $[t_{ij}]$ وهي تساوي:

t_{x1}= Max [3, 7, 4, 1, 2, 12] = 12

ولتحسين هذا الحل القاعدي بالنسبة للزمن[1] علينا أن ننقل المتحول القاعدي x_{14} المقابل لأكبر قيمة زمنية t_{x1}=12 إلى المتحولات غير القاعدية وذلك باستبداله بأحد المتحولين x_{24} أو x_{34}، ونختار المتحول x_{34} لأن فترته الزمنية t_{34}=5 أصغر من t_{24} = 8 وبإجراء ذلك التبديل نحصل على الجدول الآتي:

الأزمنة t_{ij}	القاعدة	8	10	8	6	1	5	الثوابت
		x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{14}	
3	x_{12}	1	0	0	0	1	0	9
7	x_{13}	0	1	1	−1	−1	1	8
4	x_{33}	0	0	−1	1	1	−1	5
1	x_{11}	−1	−1	−1	1	0	0	1
2	x_{21}	1	1	1	0	0	0	10
12	x_{14}	0	0	1	0	0	1	7

هو يعطينا حلاً قاعدياً موجباً X_2 يتطلب مدة زمنية أقصر من المدة السابقة وتساوي:

t_{x2} = Max [3, 7, 4, 1, 2, 5] = 7

وقبل متابعة تحسين الحل نلاحظ أن عدداً من المتحولات غير القاعدية تقابلها فترات زمنية أكبر من t_{x2} = 7 لذلك فإننا نحذف أعمدة تلك المتحولات من الجدول (وهي أعمدة x_{22} وx_{23} وكذلك x_{24}) ويبقى لدينا العمودان x_{31} وx_{32} ونتيجة لهذه التصفية نحصل على الجدول الآتي:

وبما أن سطر المتحول x_{13} المقابل لأكبر فترة زمنية t_{x2} = 7 لم يعد يتضمن عنصراً موجباً (غير الثابت 8) لذلك لا يمكننا اختيار عنصر موجب منه ليكون عنصراً للارتكاز لتبديل ذلك المتحول بأحد المتحولات غير القاعدية، ولهذا نعتبر الخطة التي

[1] قبل أن نقوم بعمليات النقل أو التبديل نقوم بحذف جميع الأعمدة التي تكون الفترة الزمنية t_{ij} لها أكبر من t_{x1} لأن متحول تلك الأعمدة لا يمكن أن يساهم في تحسين الحل لذلك ليس من مصلحتنا نقلها إلى القاعدة.

توصلنا إليها هي الخطة المثالية المطلوبة والتي يمكن تنفيذها في أقصر فترة زمنية ممكنة تساوي $t_{x2} = 7$.

الأزمنة	القاعدة			الثوابت
		x_{31}	x_{32}	
3	x_{12}	0	1	9
7	x_{13}	−1	−1	8
4	x_{33}	1	1	5
1	x_{11}	1	0	1
2	x_{21}	0	0	10
5	x_{34}	0	0	7

ومن الواضح أن هذه الخطة المثالية ليست وحيدة ويمكننا الحصول على خطة مثالية ثانية وثالثة إذا قمنا بتبديل المتحول القاعدي x_{33} بأحد المتحولات غير القاعدية فنحصل على خطتين مثاليتين لهما نفس الفترة الزمنية $t_{x3} = 7$، كما يمكننا الحصول على خطة مثالية رابعة إذا قمنا بتبديل x_{11} بـ x_{31}، وعلى خطة مثالية خامسة إذا قمنا بتبديل x_{12} بـ x_{32} وسيكون لهما نفس الفترة الزمنية $t_{x5} = t_{x4} = 7$.

طريقة خاصة لحل مسائل النقل حسب الزمن:

سنقوم بشرح وتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق الذي كانت معطياته كما في الجدول الآتي:

	A_1	A_2	A_3	A_4	المطلوبة
B_1	1	3	7	12	18
B_2	2	8	10	8	10
B_3	6	1	4	5	12
	11	9	13	7	40

1− نقوم أولاً بالبحث عن أصغر قيمة لـ t_{ij} في حجر الجدول فنجد أن:

$\text{Min}\,(t_{ij}) = t_{11} = t_{23} = 1$

وهما موجودتان في الحجرتين (1,1) و(3,2).

ثم نرمز بـ Ω_1 لمجموعة حجر الجدول باستثناء الحجرتين السابقتين (1,1) و(3,2).

2- نقوم بحل هذه المسألة وكأنها مسألة تدفق لذلك نضع في الحجرتين (1,1) و(3,2) أكبر تدفق ممكن فنحصل على:

$$x_{11}^{(1)} = 11 \qquad x_{32}^{(1)} = 9$$

ونضع في الحجر الأخرى أصفار أو إشارة (*) فنحصل على الجدول الآتي:

	1	2	3	4	a_i
1	11	*	*	*	18
2	*	*	*	*	10
3	*	9	*	*	12
b_j	11	9	13	7	40 / 40

وبما أنه لدينا إجمالي الكمية المنقولة يساوي:

$x_{ij} = 11 + 9 = 20$

وهي كمية أقل من الكمية المطلوبة (40) لذلك فإن الحل الزمني السابق $(i,j) \notin \Omega_1$ الذي انطلقنا منه والمؤلف من $t_{11} = t_{32} = 1$. وهو حل غير مثالي للمسألة المطروحة.

3- نقوم بالبحث عن أصغر الأزمنة في حجر Ω_1 فنجد أن:

$$\underset{\Omega_1}{\text{Min}}\ (t_{ij}) = t_{21} = 2$$

وبمحاولة إعادة توزيع الكميات نجد أننا نصطدم بعدم توفر أي كمية في المركز A_1 لنقلها إلى B_2.

وهذا ما يجعلنا لا نستفيد من هذه الخطوة.

4- لنرمز الآن لـ Ω_2 لمجموعة الحجرة المتبقية ونقوم من جديد بالبحث عن أصغر الأزمنة في Ω_2 فنجد أن:

$$\underset{\Omega_2}{\text{Min}}\,(t_{ij}) = t_{12} = 3$$

وهذا ما لا يسمح لنا بوضع أي كمية جديدة في الحجرة (1,2) لأن كامل الكمية المتوفرة في المركز (2) خصصت للمركز (3).

5- نعود ونرمز لمجموعة الحجر المتبقية (باستثناء (1,2)... الخ) بالرمز Ω_3 ونقوم من جديد بالبحث عن أصغر قيمة الأزمنة في حجر Ω_3 فنجد أن:

$$\underset{\Omega_3}{\text{Min}}\,(t_{ij}) = t_{33} = 4$$

ولذلك فإننا نقوم باشباع الحجرة (3,3) ونضع فيها $x_{33} = 12$، وعندها يجب أن نزيح الكمية (9) من الحجرة (3,2) ذات الزمن $t_{32} = 1$ إلى حجرة ذات زمن يليها مباشرة وتقع في نفس العمود فنجد أن تلك الحجرة هي (2,1)، لذلك نضع $x_{21} = 9$، وبإجراء عملية توازن بسيطة تنقص x_{11} لتصبح 9 ونضع $x_{21} = 2$ وبذلك نحصل على التوزيع الآتي:

$$x_{11} = 9,\ x_{12} = 9,\ x_{21} = 2,\ x_{33} = 12$$

6- وبإجراء عمليات مشابهة في العملية القادمة نحصل على $\text{Min}\,(t_{ij}) = t_{34} = 5$ وعلى أن:

$$x_{11} = 9,\ x_{12} = 9,\ x_{21} = 2,\ x_{33} = 12$$

7- وفي المرة السابعة نحصل أيضاً على $\text{Min}\,(t_{ij}) = t_{31} = 6$ وعلى أن:

$$x_{11} = 9,\ x_{12} = 9,\ x_{21} = 2,\ x_{33} = 12$$

8- وفي المرة الثامنة نجد أن $\text{Min}\,(t_{ij}) = t_{13} = 7$:

$$x_{11} = 1,\ x_{12} = 9,\ x_{13} = 8,\ x_{21} = 10,\ x_{33} = 5,\ x_{34} = 7$$

والبقية أصفار.

وهكذا نجد أن أكبر زمن هو الزمن المقابل للحجرة (1,3) وهي $t_x = 7$ وهو نفس الزمن الذي حصلنا في الحل السابق لهذه المسألة.

ومن الجدير بالإشارة هنا هو أن مجموع المواد المنقولة يجب أن يساوي 40 (الكمية المتوفرة) وأن هذا الشرط أصبح محققاً لأن:

$$x_{11} + x_{13} + x_{13} + x_{22} + x_{33} + x_{34} = 40$$

تمرينات ومسائل

أوجد الحلول المثالية لمسائل النقل الآتية:

1-

إنتاج / استهلاك	A_1	A_2	A_3	A_4	المطلوبة
B_1	4	3	2	7	46
B_2	1	1	6	4	34
B_3	3	5	9	4	40
المتوفرة	40	50	30	45	120 / 165

2-

إنتاج / استهلاك	A_1	A_2	A_3	A_4	المطلوبة
B_1	1	2	4	3	8
B_2	1	3	4	5	10
المتوفرة	3	5	8	2	

3-

إنتاج / استهلاك	A_1	A_2	A_3	المطلوبة
B_1	2	2	1	35
B_2	3	3	5	40
المتوفرة	25	30	20	

4-

إنتاج / استهلاك	A_1	A_2	A_3	المطلوبة
B_1	7	3	6	75
B_2	4	8	2	40
المتوفرة	20	45	30	

5- يوجد في خزانين A وB كمية من الوقود تساوي 40 ,50 طناً على الترتيب ونريد تخطيط عملية نقلها بأقل تكلفة ممكنة إلى ثلاثة مراكز استهلاكية C, D, E حاجتها على التوالي 40 ,20 ,30 فأوجد الخطة المثالية للنقل إذا علمت أن تكلفة النقل معطية في الجدول الآتي:

	A_1	B_1
C	3	2
D	2	5
E	1	6

6- وصلت إلى المرفأين B وA كمية من المستوردات ونريد نقلها إلى المدن الثلاث E وD وC بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن، علماً بأن كميات المواد المستوردة في كل من المرفأ وطلبات المدن الثلاث وتكلفة النقل إليها محددة في الجدول الآتي:

	A	**B**	**الكمية المطلوبة**
C	2	1	20
D	3	2	20
E	2	3	20
الكمية المتوفرة	30	30	60

7- يراد شحن كمية من النفط من ثلاث محطات A1, A2, A3 إلى أربع مدن B1, B2, B3, B4 وإن الكميات الموجودة في كل محطة والمطلوبة في كل مدينة وتكلفة النقل في كل اتجاه معطية في الجدول الآتي:

المدن / **المحطات**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**كميات النفط المتوفرة**
A1	7	4	15	9	120
A2	11	2	7	3	80
A3	4	5	2	8	100
كميات النفط المطلوبة	85	65	90	60	

قم بصياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة الذي يعطينا نقله أقل تكلفة ممكنة ثم أوجد الحل المثالي بالطريقة التي تراها مناسبة.

8- دخلت الميناء ثلاث سفن: الأولى تحمل 6000 طن اسمنت والثانية 4000 طن حديد والثالثة 3000 رخام، يمكن تفريغ هذه البواخر بطريقتين هما:

أ- تفريغ مباشر إلى القطار.

ب- تفريغ إلى المستودعات.

ج- ويمكن تفريغ 8000 طن فقط وفق الطريقة الأولى أما الباقي (5000) طن فينقل إلى المستودعات.

إذا كانت تكلفة تفريغ الطن الواحد إلى القطار مباشرة تساوي 4 و5 و2 على الترتيب وكانت تكلفة نقل الطن الواحد إلى المستودع تساوي 7 و6 و3 على الترتيب.

ما الخطة المثالية لتفريغ محتويات السفن الثلاث بأقل تكلفة ممكنة؟.

9- أوجد الأعداد $X\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ التي تحقق الشروط:

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -1$$
$$2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 + 4x_6 = 4\ ,\quad x_j > 0$$

والتي تجعل الزمن t_x المقابل لها يحقق العلاقة:

$$tx = \text{Min Max } (ti)x$$

علماً بأن مجموعة الأزمنة المقابلة هي:

$$(t_1 = 3, t_2 = 8, t_3 = 5, t_4 = 15, t_2 = 12, t_6 = 6)$$

الفصل التاسع
مبادئ نظرية الألعاب الاستراتيجية

I- تمهيد:

إن الحياة صراع دائم, وإن الصور التي يظهر فيها ذلك الصراع مختلفة ومتعددة, وإن اتخاذ أي قرار في خضم ذلك يحتاج دائماً إلى معلومات كافية وأسس واضحة, وذلك حتى يكون قراراً مقبولاً ويخدم الهدف الذي نسعى إليه.

وفي الحياة العملية (الاقتصادية والخدمية والعسكرية...الخ) نقابل حالات يتصارع فيها طرفان (أو أكثر) ولهما هدفان مختلفان, وإن كل طرف يتصرف بشكل واع ومضاد لتصرفات الطرف الآخر, لذلك نطلق على هذه الحالة التصارعية اسم (لعبة استراتيجية), أو باختصار اسم (لعبة), ونطلق على كل طرف من طرفيها اسم (لاعب), وعلى كل تصرف لأحدهما اسم (خطوة أو استراتيجية), وعلى نتيجة كل خطوة اسم (الربح المدفوع) وذلك باعتباره مقداراً جبرياً موجباً أو سالباً أو معدوماً.

وسنطلق على الألعاب التي يتقابل فيها طرفان (لاعبان) فقط اسم (الألعاب الزوجية), وعلى الألعاب التي يتقابل فيها أكثر من طرفين اسم (الألعاب المتعددة).

وهنا نشير إلى أنه يمكننا أن نحول اللعبة المتعددة إلى لعبة زوجية وذلك بتجميع أطرافها في مجموعتين متقابلتين, وقبل أن نتعرض إلى بعض التعاريف المتعلقة بالمفاهيم الأساسية لنظرية الألعاب نورد المثال الحسي التالي.

مثال:

لنفترض أن طفلين A و B اتفقا على أن يضع كل منهما عدداً من الحصى في يده بدون علم الآخر, وعلى أنه إذا كان كل من العددين زوجياً فإن A يدفع لـ B خمس حصيات من حصياته, وكذلك إذا كان كل من العددين فردياً فإن A يدفع أيضاً لـ B حصاتين فقط من حصياته, أما إذا كان أحد العددين فردياً والآخر زوجياً فإن B هو الذي سيدفع لـ A ثلاث حصيات من حصياته.

ولدراسة حركة هذه اللعبة نقوم بوضعها في جدول كالتالي (من وجهة نظر A):

العدد	فردي	زوجي
فردي	−2	3
زوجي	3	−5

ولقد وضعنا الأرقام التي تعبر عن ربح أو خسارة الطرف A في داخل الجدول, وهذا يعني أن أرقام الطرف B تعاكسها بالإشارة.

والسؤال الآن هو: كيف سيتصرف اللاعب A حتى يجعل ربحه أكبر ما يمكن عند تكرار اللعبة n مرة ؟ وبعبارة أخرى كيف سيتصرف A حتى يضمن أكبر متوسط للربح في كل خطوة من خطوات اللعبة؟ وذلك بفرض أن الطرف B سيتصرف هو الآخر بذكاء وسيناور ليجعل خسارته أقل ما يمكن (أو ربحه أكبر ما يمكن).

نلاحظ أولاً أن أكبر دفعة من A إلى B هي 5 واحدات عندما يكون العددان زوجيين, لذلك فإن A سيحاول أن يبتعد عن وضع عدد زوجي من الحصى في يديه, كما أنه يجب أن يتوقع أن B سوف يحاول التركيز على وضع الأعداد الزوجية ليحقق لنفسه أكبر ربح ممكن, وعندما يشعر B أن A يبتعد عن الأعداد الزوجية فإنه (أي B) سيقوم بوضع أعداد فردية (لأن ذلك يحقق له ربحاً يساوي 2) وهذا ما يؤدي إلى خسارة A بشكل متكرر.

وللتخلص من ذلك الوضع يعود A إلى وضع عدد زوجي حتى يفوت الفرصة على B ويربح (3) حصيات فيقابله B بوضع أعداد زوجية أيضاً حتى يحقق ربحاً قدره (5).....إلخ, وهكذا تدور اللعبة على شكل كر و فر حتى النهاية حيث سيربح أحد الطرفين عدداً معيناً من حصى الطرف الآخر أو يتعادلان.

والسؤال الآن: ألا توجد طريقة ما أو استراتيجية محددة لكل من A وB بحيث يضمن A أكبر ربح (أو أقل خسارة) ويضمن B أقل خسارة (أو أكبر ربح)؟.

II- تعاريف المفاهيم المختلفة لنظرية الألعاب:

الاستراتيجية:

هي جملة القواعد التي يعتمدها اللاعب في كل مرحلة من مراحل اللعب, وهي تتغير وفقاً لتطور سير عملية اللعب وتساعد اللاعب في تحديد أو اختيار الخطوة العملية في كل مرحلة, ففي لعبة الطفلين السابقين نجد أن لكل منهما استراتيجيتين فقط هما: زوجي أو فردي.

ويعتبر مفهوم الاستراتيجية مفهوماً أساسياً في نظرية الألعاب ومع أن تبني أو اعتماد استراتيجية ما يتم وفقاً لتطور سير عملية اللعب, إلا أنه يمكننا ولو نظرياً أن نفترض أن اللاعب سيعتمد الاستراتيجية المفروضة بشكل مسبق (كأن نقول: أنه لو كان كذا فسأفعل كذا وبناء على هذا الافتراض يمكننا أن نخطط اللعبة قبل أن نلعبها, وأن نخوض الحرب في وقت السلم.

الألعاب المنتهية:

وهي الألعاب التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات الممكنة منتهياً أو محدوداً.

الألعاب غير المنتهية:

وهي الألعاب التي يكون عدد الاستراتيجيات فيها غير منته ونظراً لصعوبة معالجة الألعاب غير المنتهية فإننا سنقتصر في بحثنا على الألعاب المنتهية.

الألعاب ذات المجموع الصفري:

وهي الألعاب التي يكون فيها مقدار ما يكسبه أحد الطرفين نتيجة كل خطوة مساوياً إلى مقدار ما يخسره الطرف الآخر.

وذلك بفرض عدم وجود طرف ثالث يستفيد من هذه اللعبة, أي أن اللعبة تكون ذات طرفين متعارضين تماماً, فإذا كان مقدار ما يكسبه اللاعب A نتيجة أية خطوة من خطواتها هو a, وكان ما يخسره B هو b, فعندها يكون لدينا:

$$a + b = 0$$
$$a = - b \qquad (1-2-9)$$

وهكذا نجد أنه إذا علمنا مقدار ما يكسبه الطرف A يمكننا مباشرة استنتاج مقدار ما يخسره B حيث نجد أن:

$$b = - a$$

لذلك فإننا عند دراسة وتحليل مثل هذه الألعاب سنقتصر على حساب ما يكسبه أحد الطرفين (وليكن A) وبدون أن نقوم بدراسة مكاسب أو خسائر الطرف الآخر.

الاستراتيجية المثالية:

هي تلك الاستراتيجية التي تحقق للاعب أكبر ربح ممكن (أو تضمن أقل خسارة ممكنة) وذلك عند تكرار اللعبة عدد كبير من المرات.

وعند اختيار هذه الاستراتيجية من قبل أحد الطرفين فلا بد له من أن يأخذ بعين الاعتبار أن الطرف سيتصرف بوعي وبذكاء وسيكون هدفه عرقلة الطرف الأول من تحقيق أهدافه, وهنا نشير إلى أن الاستراتيجية المثالية لمؤشر ما قد لا تكون مثالية بالنسبة لمؤشر آخر.

الاستراتيجية المنفردة:

هي إحدى الاستراتيجيات الممكنة للعبة والتي يمكن أن يختارها وبمفردها اللاعب أثناء اللعب, كأن يختار الطرف A استراتيجية الأعداد الفردية فقط أو الزوجية فقط.

الاستراتيجية المركبة:

وهي الاستراتيجية المؤلفة من عدد من الاستراتيجيات المنفردة الممكنة للعبة, ويتم استخدام كل منها في اللعب وفق جدول للتكرارات النسبية أو الاحتمالات مقابل لتلك الاستراتيجيات المنفردة.

وبعبارة أخرى فإن الاستراتيجية المركبة هي الاستراتيجية المؤلفة من جميع الاستراتيجيات الممكنة المنفردة للعبة، مرفقة بتوزيع احتمالي مقابل لتلك الاستراتيجيات, وعندها يكون استخدام كل من تلك الاستراتيجيات بنسب تساوي قيمة الاحتمال في ذلك التوزيع المقابلة لها, فإذا كانت القيمة الاحتمالية المقابلة لإحدى أو بعض الاستراتيجيات المنفردة مساوية للصفر فإن ذلك يعني عدم استخدام تلك الاستراتيجية أو الاستراتيجيات في عملية اللعب.

وبتعبير رياضي لنفترض أن الطرف A لديه الاستراتيجيات المنفردة التالية:

$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$

والتي يقابلها قانون التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P_1,\ 0,\ P_3,\ P_4,\ 0,\ P_6 \qquad (2-2-9)$$

علماً بأن هذه الاحتمالات غير سالبة وأن مجموعها يساوي الواحد أي أن:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 \qquad (3-2-9)$$

فإن هذا يعني أننا سنقوم باستخدام A_1 بنسبة P_1, وA_3 بنسبة P_3, وA_4 بنسبة P_3 أما A_2 وA_5 فلا نستخدمها في اللعب لأنهما غير مربحتين بالنسبة لنا, ويمكننا أن نقول نفس الشيء عن الاستراتيجية المركبة للطرف B.

مصفوفة المدفوعات للعبة (مصفوفة اللعبة):

لنفترض أننا أمام لعبة زوجية منتهية ومن المرتبة n.m وطرفاها هما A وB, ولنفترض أن A لديه الاستراتيجيات الممكنة التالية:

$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots, A_m$

وإن B لديه الاستراتيجيات الممكنة التالية:

$B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, B_n$

فعندما يختار الطرف A الاستراتيجية A_i ويختار الطرف B الاستراتيجية B_j فإن نتيجة اللعبة في هذه الوضعية بالنسبة لـ A ستكون عدداً محدداً نرمز له بـ a_{ij} (قد يكون موجباً أو سالباً) ونحدد إشارته انطلاقاً من مفهوم الربح والخسارة بالنسبة للاعب A, (الذي ندرس المسألة من وجهة نظره), وإذا وضعنا تلك الأعداد

a_{ij} المقابلة لاستراتيجيات كل من A و B في جدول مناسب نحصل على ما يسمى بمصفوفة المدفوعات للعبة بانسبة للطرف A والتي نضعها بجدول كالآتي:

A \ B	B_1	B_2	B_3	....	B_n	$\alpha_i = \underset{j}{\text{Min}}\, a_{ij}$
A_1	a_{11}	a_{12}	A_{13}	....	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	A_{23}	....	a_{2n}	α_2
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3n}	α_3
....	....	....	....	....	....	....
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}	α_m
$\beta_j = Ma_i x\, a_{ij}$	β_1	β_2	β_3	....	β_n	

(A)

(B)

الثمن الأدنى للعبة حسب (مبدأ أكبر الصغار Max.Min):

إذا كانت لدينا لعبة منتهية طرفاها A و B, ولهما الاستراتيجيات الآتية:

A: $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$

B: $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$

وإذا كانت $[a_{ij}]$ هي مصفوفة المدفوعات للعبة بالنسبة لـ A (نحن), فعندما نختار الاستراتيجية A_i فإن العدو سيختار استراتيجية من استراتيجياته بحيث يكون ربحنا (ربح A) أقل ما يمكن, أي أن B سيقوم بالبحث عن أصغر عنصر في السطر A_i ويأخذ الاستراتيجية المقابلة له, ولنرمز لأصغر عنصر في السطر A_i بالرمز α_i وعندها يكون:

$$\alpha_i = \underset{j}{\text{Min}}\, a_{ij} \qquad (4-2-9)$$

ومقابل ذلك فمن الطبيعي أن يقوم الطرف A باختيار تلك الاستراتيجية التي يكون العدد الصغير فيها أكبر تلك الأعداد الصغار في الاستراتيجيات الأخرى, أي أنه يجب أن يتبنى الاستراتيجية التي تقابل العدد α حيث:

$$\alpha = \underset{i}{\text{Max}}\, \alpha_i = \underset{i}{\text{Max}}\, (\underset{j}{\text{Min}}\, a_{ij}) \qquad (5-2-9)$$

وبذلك يضمن الطرف A أصغر ربح يسمح به الطرف B, وهو في الحقيقة يمثل الحد الأدنى للربح الذي يضمنه A, إذا كان B يلعب بشكل صحيح, ولكن ذلك الربح يمكن أن يصبح أكبر من α إذا لعب B أية لعبة خاطئة, لذلك نسمي العدد α المعطى بالعلاقة (9-2-5) بالثمن الأدنى للعبة الذي يضمنه A عندما يتبنى الاستراتيجية المقابلة للعدد α.

الثمن الأقصى للعبة حسب (مبدأ أصغر الكبار Min.Max):

لنقم الآن بدراسة ما يمكن أن يفكر به الطرف B عندما يبدأ اللعبة حيث نجد أن B سينطلق من أن الطرف A يبحث عن أكبر ربح ممكن, لذلك فإن B سيقوم بالبحث عن أكبر الأعداد في كل عمود من أعمدة استراتجياته (لأن تلك الأعداد هي الهدف الذي يبحث عنه الطرف A, ولأن مصفوفة المدفوعات موضوعة بالنسبة لـ A أيضاً) ويختار الاستراتيجية التي يكون العدد الكبير فيها أصغر تلك الأعداد الكبار في الاستراتجيات الأخرى, أي أن B سيقوم بحساب الأعداد β_j حيث:

$$\beta_j = \underset{i}{\text{Max}}\ a_{ij} \qquad (9-2-6)$$

ثم يختار الاستراتيجية المقابلة للعدد β الذي يساوي أصغر الأعداد β_j فيكون:

$$\beta = \underset{j}{\text{Min}}\,\beta_j = \underset{j}{\text{Min}}(\underset{i}{\text{Max}}\,a_{ij}) \qquad (9-2-7)$$

وبذلك يحدد الطرف B أكبر ربح يتنازل عنه للطرف A, وهو في الحقيقة يمثل الحد الأعلى للربح الذي يسمح به B لـ A, لذلك فإننا نسمي العدد β المعطى بالعلاقة (9-2-7) بالثمن الأقصى للعبة, الذي يضمنه B عندما يتبنى الاستراتيجية المقابلة للعدد β, ويتم حساب α_i و β_i من الجدول مباشرة ووضعهما في β عمود وسطر إلى جانب مصفوفة مدفوعات اللعبة ويتم تحديد α و β فيهما حسب المبدأين المذكورين.

ملاحظة:

يمكن البرهان على أن $\alpha \le \beta$، أي على أن الثمن الأدنى α للعبة أصغر أو يساوي β الثمن الأقصى لها.

الألعاب المستقرة (ذات النقطة السرجية):

إن الألعاب المستقرة هي الألعاب التي يتساوى فيها الثمن الأدنى مع الثمن الأقصى, أي الألعاب التي يكون فيها:

$$\alpha = \beta = \alpha_0 \qquad (8-2-9)$$

وفي مثل هذه الألعاب يكون العنصر α_0 في مصفوفة المدفوعات هو العنصر الأصغر في سطره والأكبر في عموده.

وإن هذا العنصر يقابل استراتيجية واحدة لكل من الطرفين تسميان بالاستراتيجيتين المستقرتين, وهكذا نجد أن كل من الطرفين يفضل اعتماد استراتجيته المستقرة لأنها تعتبر إستراتجية مثالية بالنسبة له, ولأن أي انحراف لأحدهما عن استراتجيته المستقرة والمثالية سيؤدي إلى خسارة تلحق به, وسيرى نفسه مضطراً للعودة إلى الاستراتجية المستقرة (إذا كانت وحيدة).

إن العنصر α_0 (عندما $\alpha = \beta$) يسمى بالنقطة السرجية تشبيهاً له بالنقطة المركزية على سرج الحصان, وتعتبر النقطة السرجية والإستراتجيتان المستقرتان (أو الاستراتجيات المستقرة إذا كان لدينا أكثر من نقطة سرجية) المقابلتان لها لكلا الطرفين هما الحل المثالي لمثل تلك الألعاب.

ثمن اللعبة:

وهو متوسط ما يربحه الطرف A في كل مرة من جراء تكرار اللعبة عدد كبير من المرات, وإذا رمزنا لذلك الثمن بـ v فإننا نجد ببساطة أنه يجب أن يحقق الشرط الآتي:

$$\alpha \le v \le \beta \qquad (9-2-9)$$

أما في الألعاب المستقرة فيكون: $v = \alpha = \beta = \alpha_0$ أي يكون:

$$v = \alpha_0 \qquad (10-2-9)$$

حيث أن α_0 هو عنصر المصفوفة الذي يمثل النقط السرجية في الألعاب المستقرة وعندها نسمي v بالثمن المستقر للعبة مستقرة.

وإذا كانت $v = 0$ فإن اللعبة تكون لعبة عادلة، وتكون اللعبة غير عادلة إذا كان ثمنها $v \neq 0$.

مثال:

لنفترض أنه لدينا اللعبة ذات مصفوفة المدفوعات التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \text{Min}\, a_{ij}$	
A_1	1	−3	−2	3	−3	
A_2	0	5	4	1	0	$\alpha = 2$
A_3	2	3	2	3	2	
$B_j = \text{Max}\, a_{ij}$	2	5	4	3		

$\beta = 2$

فإذا قمنا بحساب الأعداد $\alpha_i = \text{Min}\, a_{ij}$ والأعداد $\beta_j = \text{Max}\, a_{ij}$ فإننا نحصل على العمود الأخير والسطر الأخير على الترتيب, وبذلك نجد أن الثمن الأدنى لهذه اللعبة يساوي:

$$\alpha = \text{Max}(\alpha_i) = 2$$

وأن الثمن الأقصى لها يساوي:

$$\beta = \text{Min}(\beta_j) = 2$$

وبذلك نجد أن: $\alpha = \beta = 2$ وهذا يعني أن اللعبة المفروضة هي لعبة مستقرة وثمنها $v = 2$, ولها حل مستقر مؤلف من الاستراتيجية A_3 للطرف A والاستراتيجية B_1 للطرف B.

مثال آخر:

لتكن لدينا اللعبة ذات مصفوفة المدفوعات التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \text{Min}\, a_{ij}$
A_1	3	2	8	4	2
A_2	5	4	5	6	4
A_3	4	6	3	5	3
$\text{Max}\, a_{ij} = \beta_j$	5	6	8	6	

$\alpha = \text{Max}\, \alpha_i = 4$

$\beta = \text{Min}\, \beta_j = 5$

ومن دراسة قيم α_i وβ_j نجد أن: $\alpha = 4$ و $\beta = 5$, وهكذا نجد أن هذه اللعبة هي لعبة غير مستقرة وأن ثمنها المتوسط v يتراوح بين 4 و5 $(4 \le v \le 5)$, وأن الطرف A سيضمن أدنى ربح إذا تبنى A الاستراتيجية A_2, وأن B سيجعل ربح A لا يتجاوز 5, إذا هو تبنى الاستراتيجية B_1.

وهكذا نجد أن مقدار الربح الذي يمكن أن يحققه A هو الثمن v وهو مقدار مجهول وسنعمل على حسابه لاحقاً.

الحل المثالي للعبة:

لإيجاد الحل المثالي لأية لعبة علينا قبل كل شيء أن نميز بين الألعاب المستقرة والألعاب غير المستقرة.

الحل المثالي للألعاب المستقرة:

وهو الحل الذي يعطينا أكبر ربح ممكن بالنسبة للطرف A, ويتم الحصول عليه بواسطة, أو من خلال, حساب الثمن الأدنى والثمن الأقصى وتحديد الاستراتجيات المستقرة لكل طرف والمقابلة للثمن المستقر كما فعلنا أعلاه.

الحل المثالي للألعاب غير المستقرة:

ويتم الحصول على هذا الحل بدلالة مختلف الاستراتجيات الممكنة حيث أن حل اللعبة يتضمن عدداً من الاستراتجيات المنفردة لكل طرف من طرفيها, ويتم تبني كل استراتجية منها وفق توزيع احتمالي معين أو وفق نسب يجب حسابها.

إن سبب اللجوء إلى إيجاد الحل بوساطة الاستراتجيات المركبة هو تحقيق أكبر ربح ممكن, فمثلاً نجد أن الطرف A في المثال السابق يبحث عن طريقة لاستخدام استراتجيات عدة من خلال سير عملية اللعب حتى يحقق ربحاً v أكبر من الربح المضمون α الذي سيحققه إذا تبنى استراتجية الثمن الأدنى.

وكذلك نجد أن B يعمل جاهداً لمنع A من الوصول إلى غايته ويشرع بالبحث عن طريقة لاستخدام عدة استراتجيات لجعل ربح A أقل من الحد الأقصى β ولجعله أقل ما يمكن.

وإن هذا يوحي لنا بأن كل منهما سيبحث عن النسبة أو عدد المرات التي يجب أن يستخدم كل منها استراتجياته حتى يحقق غايته, وهذا ما يعني أن كل منهما يجب أن يبحث عن قانون التوزيع الاحتمالي الذي يجب أن يطبق وفقه كل من استراتجياته حتى يحقق غايته.

وإن التعبير الرياضي عن الحل بواسطة الاستراتجيات المركبة يمكن صياغته على الشكل التالي:

إن A يجب أن يبحث عن التوزيع الاحتمالي:

$p_A: p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots, p_m$ (11-2-9)

والمقابل لاستراتجياته $A: A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_m$

والذي يجعل ربحه أكبر ما يمكن.

وإن B كذلك يجب أن يبحث عن التوزيع الاحتمالي:

$Q_B: q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots, q_n$ (12-2-9)

والمقابل لاستراتجياته $B: B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots, B_n$

وذلك ليجعل ربح A أصغر ما يمكن (وبالتالي يجعل ربحه أكبر ما يمكن), مع العلم أن كلاً من الاحتمالات p_i والاحتمالات q_j تحقق العلاقات التالية:

$$0 \le p_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \qquad (13-2-9)$$

وأن:

$$0 \le q_j \le 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \qquad (14-2-9)$$

وبذلك نكون قد حولنا مسألة البحث عن الحل المثالي للعبة إلى عملية البحث عن قانون التوزيع الاحتمالي (p1,p2,…..,pm) الذي يجب على الطرف A أن يعمل حسبه حتى يحقق أكبر ربح ممكن وسنرمز لهذا القانون بالرمز P_A.

كما نرمز لقانون التوزيع الاحتمالي المرافق بـ Q_B.

وبعد حساب كل من P_A وQ_A فإن كل من الطرفين سيتبنى استراتجياته المنفردة في كل خطوة من خطوات اللعب وفقاً لقانون التوزيع الخاص به, ويتم تحديد الإستراتجية المنفردة في كل خطوة بواسطة توليد أرقام عشوائية أو شبه عشوائية خاضعة لقانون التوزيع المذكور.

وسنطلق اسم الاستراتجيات الفعالة على الاستراتجيات المستخدمة وهي التي لا تكون قيمة الاحتمال المقابل لهم مساوية للصفر.

وهنا نشير إلى أنه إذا كانت إحدى (أو بعض) قيم التوزيع الاحتمالي مساوية للصفر, فهذا يعني أن الإستراتجية المقابلة لها لا تدخل في عداد الاستراتجيات الفعالة ولا نستخدمها في عملية اللعب, وسنطلق اسم الإستراتجية المركبة المثالية على الإستراتجية التي تقابل التوزيع الاحتمالي المثالي وسنرمز لذلك بالثنائية (P'_A, A) وهي الإستراتجية المركبة التي تعطينا أكبر ربح لـ A, وهنا لا بد وأن نناقش موضوع الربح الذي نحصل عليه من جراء تطبيق أية إستراتجية مركبة.

إن متوسط الربح الذي يحققه A عند تطبيق أية إستراتجية مركبة وعندما يقابلها B بتطبيق إستراتجية وحيدة منفردة B_j يساوي التوقع الرياضي للأعداد a_{ij} الواقعة في العمود B_j

والخاضعة لقانون التوزيع P_A أي أن متوسط الربح في هذه الحالة والذي سنرمز له بـ a_i يساوي:

$$a_j = p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + p_3a_{3j} + \ldots\ldots\ldots + p_na_{nj} \qquad (15-2-9)$$

حيث إن a_j هو عبارة عن الربح الشرطي المقابل للإستراتجية B_j فقط.

ولنفترض الآن أن B أصبح يطبق إستراتجيته المركبة وفق قانون التوزيع الاحتمالي Q_B, وعندها نجد أن الربح الذي سيحصل عليه الطرف A سيصبح مساوياً إلى التوقع الرياضي للمقادير a_j الخاضعة للتوزيع Q_B وسنرمز لربح A في هذه الحالة:

$$a = q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + \ldots\ldots\ldots + q_na_n \qquad (16-2-9)$$

حيث إن a هو متوسط الربح الذي يحققه A إذا طبق كل من الطرفين A وB إستراتجية مركبة حسب قانون توزيع احتمالي معين لكل منهما, وأن هذا الربح a قد لا يساوي ثمن اللعبة v الذي ينتج عن تطبيق كل من طرفي اللعبة لإستراتجيته المركبة المثالية أي لـ p'_A و Q'_B, لأنه إذا كان كل من اللاعبين يطبق إستراتجيته لمركبة المثالية فإنه يكون لدينا:

$$a = v \qquad (17-2-9)$$

نظريات مختلفة:

نظرية (1):

لكل لعبة منتهية حل مثالي واحد على الأقل بواسطة الاستراتجيات المركبة.

نظرية (2):

لكل لعبة منتهية ثمن v يحقق المتراجحة التالية: $\alpha \le v \le \beta$ حيث α و β هما الثمن الأدنى والأقصى للعبة على الترتيب وv هو ثمن اللعبة الحقيقي.

نظرية (3):

إذا التزم أحد الطرفين بإستراتجيته المركبة المثالية فإن مقدار ما يربحه يبقى ثابتاً ومساوياً لثمن اللعبة v وذلك إذا كان تصرف اللاعب الآخر لا يخرج عن استراتجياته

الفعالــة (أي بغـض النظـر عـن الكيفيــة التــي 7سـيقوم بهـا الطـرف الآخـر بتطبيــق الاستراتجيات المنفردة والفعالة في إستراتجيته المركبة).

III- النموذج الرياضي للعبة من المرتبة m×n:

لقد رأينا أنه إذا كانت اللعبة مستقرة (أي لها نقطة سرجية) فإن الحل المثالي لها وهو الإستراتجية المقابلة لتلك النقطة السرجية, وإن ثمن تلك اللعبة عندها يساوي قيمة a_{ij} المقابلة لتلك النقطة السرجية نفسها.

أما بصورة عامة فإن البحث عن حل مثالي للعبة ما يستدعي البحث عن قانون التوزيع الاحتمالي P_A وكذلك عن Q_B, اللذين يعطيانا الحل بواسطة الاستراتجيات المركبة ويحددان نسبة استخدام كل منها في عملية اللعب, وهذا يستدعي بدوره إيجاد النموذج الرياضي للعبة, وهو ما سنحاول إيجاده كما يلي:

لنفترض أن A وB هما طرفي اللعبة وأن A له الاستراتجيات:

$A: A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_m$

والتي يطبقها وفق قانون التوزيع الاحتمالي (وهو ما زال مجهولاً) التالي:

$P_A: p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_m$

حيث أن:

$$0 \le p_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

وأن B له الاستراتجيات التالية:

$B: B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_n$

والتي يطبقها وفق قانون التوزيع الاحتمالي التالي:

$Q_B: q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots, q_n$

حيث أن:

$$0 \le q_j \le 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

وإن اللعبة لها مصفوفة المدفوعات التالية $\left\lfloor a_{ij} \right\rfloor$, ولنناقش أولاً المسألة من وجهة نظر الطرف A حيث نلاحظ أنه إذا قام A بتطبيق إستراتجيته المركبة وفق قانون التوزيع P_A فإن متوسط الربح الذي يحققه A عندما يتبنى B الإستراتجية المنفردة B_j يساوي إلى (انظر العلاقة (9-2-15)).

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + p_3 a_{3j} + \ldots\ldots\ldots + p_m a_{mj} \qquad (1\text{-}3\text{-}9)$$

وبما أن A يحاول دائماً أن يجعل ربحه لا يقل عن ثمن اللعبة v, الذي ينتج عن تبني الطرفين لإستراتجيتين مركبتين مثاليتين, لذلك فإن مهمته تنحصر في البحث عن إستراتجيته المركبة المثالية (p'_A), والاستفادة من كل خطأ يقع فيه الطرف B, أي عليه أن يبحث عن الأعداد $p'_A(p'_1, p'_2, p'_3, \ldots\ldots, p'_n)$ التي يكون فيها a_j لا يقل عن v, أي التي تحقق المتراجحات الآتية:

$$\begin{aligned}
&p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + p_3 a_{31} + \ldots\ldots + p_m a_{m1} \geq v \\
&p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + p_3 a_{32} + \ldots\ldots + p_m a_{m2} \geq v \\
&p_1 a_{13} + p_2 a_{23} + p_3 a_{33} + \ldots\ldots + p_m a_{m3} \geq v \qquad (2\text{-}3\text{-}9) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + p_3 a_{3n} + \ldots\ldots + p_m a_{mn} \geq v
\end{aligned}$$

وهنا يجب الانتباه إلى أنه تم تشكيل كل شرط من جداء عناصر كل عمود بقيم التوزيع الاحتمالي P_A, وبذلك تكون مصفوفة الأمثال هي منقول مصفوفة المدفوعات.

إضافة إلى الشروط (9-3-2) فإن قيم التوزيع الاحتمالي p_A يجب أن تحقق الشرطين الاحتماليين الآتيين:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots\ldots + p_m = 1 \qquad (a_3\text{-}3\text{-}9)$$

$$p_i \geq 0 \quad \text{حيث} \quad (i:1,2,3,\ldots\ldots\ldots,m) \qquad (b_3\text{-}3\text{-}9)$$

أما شرط أن يكون $p_i \leq 1$ فهو متضمن في الشرط $(a_3\text{-}3\text{-}9)$, أما تابع الهدف هنا فهو:

$$Z = v \rightarrow Max \qquad (4\text{-}3\text{-}9)$$

وما دامت الاستراتجية المثالية لكلا الطرفين غير معلومة فإن ثمن اللعبة v يبقى مجهولاً (لأنه يعطى بالعلاقة (9-2-17)), وهو قد يكون سالباً أو موجباً أو معدوماً

(يكون معدوماً عندما تكون اللعبة عادلة) ولضرورات معالجة المسألة بشكل رياضي نفترض أن ($v>0$), وهنا نشير إلى أنه لجعل ثمن اللعبة v موجباً يكفي أن نضيف إلى عناصر مصفوفة المدفوعات الـ $\lfloor a_{ij} \rfloor$ أي عدد موجب وكبير مثل M بحيث تصبح جميع مصفوفة المدفوعات غير سالبة, وفي هذه الحالة يزداد ثمن اللعبة بمقدار العدد المضاف M ويصبح مساوياً لـ v' حيث إن:

$$v' = v + M \qquad (4a-3-9)$$

إن هذه العملية ضرورية ولا بد منها عندما يكون بعض عناصر مصفوفة المدفوعات سالباً وذلك حتى لا يتضمن النموذج الرياضي متحولات سالبة أو غير مقيدة, وبعد أن نقوم بحل اللعبة والحصول على حلها المثالي نعود ونحسب الثمن الحقيقي لها من العلاقة:

$$v = v' - M \qquad (4b-3-9)$$

كما يمكن عند الضرورة ضرب عناصر مصفوفة المدفوعات بأي عدد موجب لجعلها أعداد صحيحة لأجل سهولة التعامل معها.

نعود الآن إلى إيجاد النموذج الرياضي حيث افترضنا أو جعلنا ثمن اللعبة v' موجباً ($v'>0$), ونقوم بتقسيم طرفي كل من المتراجحات (9-3-2) على ($v'>0$) ونرمز بـ x_i للمقادير الآتية:

$$x_i = \frac{p_i}{v'}, (i: 1,2,3,.....,m) \qquad (5-3-9)$$

فنحصل على الشروط الآتية:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\
&a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + ... + a_{m2}x_m \geq 1 \\
&..... \\
&a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + ... + a_{mn}x_m \geq 1
\end{aligned} \qquad (6-3-9)$$

ومن الشرط (9-3-3) نجد أن:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_m = 1/v' \qquad (7-3-9)$$

ومن الشرط (9-3-4) نجد أن: $x_1 \geq 0$

وبما أننا نريد أن نجعل ربحنا (ربح A) أكبر ما يمكن, أي نريد أن يكون v' أكبر ما يمكن, إذن يجب أن نجعل المقدار $\frac{1}{v'}$ أصغر ما يمكن. أي يجب أن نجعل المقدار:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_m \rightarrow Min \qquad (8-3-9)$$

أصغر ما يمكن.

وبذلك يأخذ النموذج الرياضي للعبة من المرتبة mxn الشكل الآتي:

يطلب إيجاد الأعداد $x'(x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_m)$ التي تعطينا أصغر قيمة للتابع:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_m \rightarrow Min \qquad (9-3-9)$$

ضمن الشروط الآتية:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + ... + a_{m2}x_m \geq 1 \\ &..... \\ &a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + ... + a_{mn}x_m \geq 1 \\ &x_i \geq 0, (i: 1,2,3,....., m) \end{aligned} \qquad (10-3-9)$$

وهو نموذج خطي يتضمن m متحولاً وعلية n شرطاً خطياً. وبحل هذا النموذج نحصل على الحل المثالي وليكن $x'(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$, ثم نقوم بحساب ثمن اللعبة v' (أو v إذا لم نقم بإضافة M) من العلاقة:

$$v' = \frac{1}{x'_1 + x'_2 + x'_3 + ... + x'_m} \qquad (11-3-9)$$

ثم نقوم بحساب عناصر التوزيع الاحتمالي من العلاقات الآتية:

$$p'_i = x'_i v', \qquad (i: 1,2,3,....., m) \qquad (12-3-9)$$

فنحصل على التوزيع الاحتمالي المقابل للإستراتجية المثالية المركبة لـ A الذي رمزنا له:

$$p'_A(p'_1, p'_2, p'_3, ..., p'_m)$$

وغالباً ما يكون بعض هذه الأعداد معدوماً لأن الحل المثالي هو حل قاعدي وينطبق على نقطة رأسية.

هذا ما كان بالنسبة إلى A, أما بالنسبة إلى الطرف B فإننا نحصل على النموذج الرياضي الذي يعطينا إستراتجيته المركبة المثالية بأن نقوم بإيجاد النموذج المرافق لنموذج الطرف A وهو هنا يأخذ الشكل الآتي:

إيجاد الأعداد $(u'_1, u'_2, u'_3, ..., u'_n)$ التي تعطينا أكبر قيمة للتابع:

$$z = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n \Rightarrow Max \qquad (13-3-9)$$

ضمن الشروط الآتية:

$$\begin{aligned} &a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + ... + a_{1n}u_n \le 1 \\ &a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + ... + a_{2n}u_n \le 1 \\ &..... \\ &a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + a_{m3}u_3 + ... + a_{mn}u_n \le 1 \\ &u_j \ge 0, (j:1,2,3,....., n) \end{aligned} \qquad (14-3-9)$$

وهو نموذج خطي يتضمن n متحولاً وعليه m شرطاً خطياً ولحله نقوم بإجراء الترتيبات اللازمة فنحصل على الحل المثالي $u'(u'_1, u'_2, u'_3, ..., u'_m)$ والذي من خلاله نجد أن:

$$v' = \frac{1}{u'_1 + u'_2 + u'_3 + ... + u'_n} \qquad (15-3-9)$$

وبعدها نحسب عناصر التوزيع Q'_B من العلاقات:

$$q'_j = u'_j \cdot v' \qquad (j:1,2,3,.....n) \qquad (16-3-9)$$

فنحصل على الإستراتجية المثالية: $Q'_B(q'_1, q'_2, q'_3, ..., q'_n)$.

وأخيراً نشير إلى أنه لأية لعبة من المرتبة mxn, بعد تحويلها إلى نموذج من نماذج البرمجة الخطية حل مثالي وذلك لأن الحل المثالي يكون غير موجود في إحدى الحالتين:

1- إذا كانت الشروط متعارضة وعندها لا يوجد أي حل مقبول.

2- إذا كانت منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تناقص التابع L (أو تزايد التابع z) وعندها يكون التابع L غير محدود من الأسفل.

ولنبرهن أن كلاً من هاتين الحالتين بعيدتان عن النماذج الخطية للألعاب.

نلاحظ أنه بعد أن نجعل جميع عناصر مصفوفة المدفوعات موجبة (أو على الأقل غير سالبة) فإننا إذا بحثنا عن أصغر عنصر من عناصر المصفوفة وليكن μ حيث $\mu \neq 0$ وأن:

$$\mu = \underset{i}{Min}\ \underset{j}{Min}\ a_{ij}$$

ووضعنا: $$x_1 = \frac{1}{\mu}, x_2 = x_3 = x_4 = ... = x_m = 0$$

فإننا نكون قد حصلنا على حل مقبول لأنه يحقق الشروط (9-3-10) وبذلك نكون قد تأكدنا من عدم تعارض الشروط.

وللتأكد من عدم وجود الحالة الثانية نلاحظ أن المتحولات $x_1,x_2,.....,x_m$ غير سالبة وأن مثالها في عبارة التابع (العلاقة 9-3-9) موجبة, وهذا يعني أن L لا يمكن أن يكون سالباً أي أن الصفر يحده من الأسفل.

أي أن الحل المثالي للألعاب من المرتبة $m\times n$ موجود دائماً, وتعتبر هذه الإشارة برهاناً كافياً على النظرية (1) التي وردت سابقاً.

ملاحظة:

يمكننا في كثير من الحالات تخفيض مرتبة اللعبة وذلك بحذف الاستراتجيات غير المربحة أو المكررة, وتكون الاستراتيجية A_i غير مربحة لـ A إذا كانت عناصرها أصغر من مقابلتها في استراتيجية أخرى, وتكون الإستراتجية B_j غير مربحة بالنسبة لـ B إذا كانت عناصرها أكبر من مقابلاتها في إستراتجية أخرى.

ونتيجة لعمليات الحذف هذه نتوصل إلى لعبة من مرتبة أدنى وقد تكون من المرتبة $(2\times n)$ أو $(m\times 2)$ وهي لعبة يمكن حلها بيانياً كما سنرى لاحقاً.

مثال:

أوجد الحل المثالي للعبة التي لطرفها A ثلاث استراتجيات: A_1,A_2,A_3 ولطرفها B ثلاث استراتجيات: B_1,B_2,B_3 ولها مصفوفة المدفوعات الآتية:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	4
A_2	−3	4	−5
A_3	4	−5	6

نقوم أولاً بإضافة العدد M=5 إلى جميع المصفوفة فنحصل على المصفوفة التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

وبذلك يكون ثمن اللعبة v قد ازداد بمقدار 5 ($v' = v + 5$) ثم نقوم بإيجاد النموذج الرياضي فنحصل على النموذج التالي (بالنسبة لـ A):

$$L = x_1 + x_2 + x_3 \to \text{Min}$$

ضمن الشروط:

$$\begin{aligned} &7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ &2x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ &9x_1 + 11x_3 \geq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(لاحظ أنه تم تشكيل المعادلات حسب الأعمدة)

لإيجاد الحل المثالي لهذا النموذج نحول تابع الهدف إلى Max وندخل عليه ثلاث متحولات إضافية وغير سالبة y_1,y_2,y_3 ونستعين بطريقة القاعدة الاصطناعية فنحصل على الشكل النظامي القاعدي الآتي:

$$z=-L=-x_1-x_2-x_3+0\cdot y_1+0\cdot y_2+0\cdot y_3-M\varepsilon_1-M\varepsilon_2-M\varepsilon_3\rightarrow Max$$
$$7x_1+2x_2+9x_3-y_1+\varepsilon_1=1$$
$$2x_1+9x_2-\quad -y_2+\varepsilon_2=1$$
$$9x_1\quad +11x_3-y_3+\varepsilon_3=1$$
$$x_j\geq 0, y_i\geq 0, \varepsilon_i\geq 0$$

نضع ذلك في جدول السمبلكس المعدلة الآتي:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
ε_1	7	2	9	−1	0	0	1
ε_2	2	9	0	0	−1	0	1
ε_3	9	0	11	0	0	−1	1
	−1	−1	−1	0	0	0	Z-0

وبإجراء التبديلات ε_1 مع x_1 و ε_2 مع x_2 و ε_3 مع x_3 فإننا نحصل على الجدول الآتي:

	y_1	y_2	y_3	B
x_1				$\frac{1}{20}$
x_2				$\frac{1}{10}$
x_3				$\frac{1}{20}$
	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$Z+\frac{1}{5}$

وبذلك نجد أن الحل المثالي هو:

$$x_1=\frac{1}{20},\qquad x_2=\frac{1}{10},\qquad x_3=\frac{1}{20}$$

الذي يعطينا أن:

$$o=z+\frac{1}{5}\qquad\Rightarrow\qquad z=-\frac{1}{5}$$

وبذلك نجد أن:

$$L = -z = +\frac{1}{5}$$

وأن الثمن الاصطناعي للعبة يساوي:

$$v' = \frac{1}{L} = 5$$

وأن الثمن الحقيقي للعبة يساوي:

$$v = v' - 5 = 0$$

وأن قيم التوزيع الاحتمالي المقابل لاستراتجيات A هي:

$$p'_1 = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}, \qquad p'_2 = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{1}{2}, \qquad p'_3 = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}$$

ومنه نجد أن التوزيع الاحتمالي لاستراتجية A المثالية المركبة هو:

$$p'_A = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

أي أن الإستراتجية المثالية المركبة لـ A تتألف من الاستراتجيات المنفردة الثلاث, ولكن تطبيق كل منها يختلف عن الأخرى, فحتى يحصل A على أكبر ربح ممكن عليه أن يطبق الإستراتجية المنفردة الأولى باحتمال قدره 1/4 (مرة كل أربع مرات) ويطبق الإستراتجية المنفردة الثانية باحتمال قدره 1/2 (مرتان كل أربع مرات) ويطبق الإستراتجية المنفردة الثالثة باحتمال قدره 1/4 أيضاً (مرة كل أربع مرات), وبذلك يضمن متوسط ربح قدره (0) عند تكرار اللعبة عدد كبير من المرات وذلك بفرض أن B هو الآخر لديه استراتيجية مثالية مقابلة.

ومن هنا يتضح لنا أن هذه اللعبة هي لعبة عادلة لأن ثمنها يساوي الصفر $(v = 0)$.

ولإيجاد الإستراتجية المركبة المثالية لـ B نقوم بإيجاد الحل المثالي المرافق لنموذج A اعتماداً على أسعار الظل في تابع الهدف فنحصل على الإستراتجية المركبة المثالية التالية:

$$Q'_B(1/4, 1/2, 1/4)$$

ويكون عندها أيضاً ثمن اللعبة $v = 0$.

ونترك عملية إيجاد الإستراتجية المثالية لـ B للقارئ على سبيل التمرين.

مثال: (مسألة التسليح والتشويش):

لنفترض أن A لديه ثلاثة أنواع من الأسلحة A_1,A_2,A_3 وأن B يقوم بثلاثة أنواع من التشويش, وأن احتمالات حسم المعركة لصالح الطرف A ولمختلف الأسلحة والتشويش معطية في المصفوفة التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0.8	0.2	0.4
A_2	0.4	0.5	0.6
A_3	0.1	0.7	0.3

وبما أن كل من A و B يرغب في حسم المعركة بأكبر احتمال ممكن إذن على كل منهما أن يبحث عن إستراتجية مثالية تحقق له ذلك.

ولإيجاد تلك الإستراتجية المثالية لكل منهما نقوم أولاً بالتخلص من الكسور في المصفوفة بضرب عناصرها بـ 10 (فيكبر ثمنها أنها بمقدار 10 مرات) فنحصل على المصفوفة الآتية:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

ويأخذ النموذج الرياضي للطرف A الشكل الآتي:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$8x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1 \qquad \text{(لاحظ أنه تم تشكيل المعادلات حسب الأعمدة)}$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq$$

وبحل هذا النموذج نحصل على الجدول الآتي:

	y_1	x_3	y_2	الثوابت الحرة
x_1				$\frac{1}{32}$
y_3				$\frac{1}{4}$
x_2				$\frac{3}{16}$
	$-\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$Z+\frac{7}{32}$

وهو يعطينا الحل المثالي التالي:

$x_1 = 1/32, \qquad x_2 = 3/16, \qquad x_3 = 0$

وهو يعطينا أن: $Z = -\frac{7}{32}$ وأن: $L = -Z = \frac{7}{32}$ وأن:

$$v' = \frac{1}{L} = 32/7$$

وبذلك نجد أن: $v = v'/10 = 32/70 = 0.457$

وهو ثمن اللعبة وهو يمثل احتمال حسم المعركة لصالح A إذا تبنى الإستراتجية ذات الاحتمالات التالية:

$$p'_1 = (\frac{1}{32})(\frac{32}{7}) = \frac{1}{7}, \qquad p'_2 = (\frac{3}{16})(\frac{32}{7}) = \frac{6}{7}, \qquad p'_3 = 0$$

أي أن الإستراتجية المثالية هي: $p'_A(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0)$

أي إذا تبنى A الإستراتجية المنفردة A_1 باحتمال قدره $\frac{1}{7}$ وتبنى A_2 باحتمال قدره $\frac{6}{7}$ وبدون أن يطبق A_3 بتاتاً فإنه سيضمن حسم المعركة لصالحه بنسبة 0.457.

أما الإستراتجية المثالية لـ B فنرمز لها بـ Q_B, ونترك أمر الحصول عليها للقارئ على سبيل التمرين, مع الإشارة إلى أنها تساوي $Q_B(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0)$.

الحل البياني للعبة من المرتبة (n×2):

لنفترض أنه لدينا اللعبة غير المستقرة التالية:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	5	4
A_2	2	1	4	3
A_3	4	2	1	5

قبل كل شيء نلاحظ أن الاستراتيجية A_2 هي استراتيجية غير مربحة بالنسبة لـ A لأن عناصرها أصغر أو تساوي من العناصر المقابلة لها في الاستراتيجية A_1 لذلك نقوم بحذفها نهائياً.

كما نلاحظ أنه (بعد حذف A_2 أو قبله) أن الإستراتجية B_4 هي إستراتجية غير مربحة بالنسبة لـ B لأن عناصرها أكبر من العناصر المقابلة لها في الإستراتجية B_1, لذلك نقوم بحذفها نهائياً.

وبالنتيجة لهذه التصفيات نحصل على اللعبة ذات المصفوفة التالية:

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	5
A_2	4	2	1

لإيجاد النموذج الرياضي لهذه اللعبة ننطلق مباشرة من العلاقات (9−3−9) و(9−3−10) فنجد أن:

$$L = x_1 + x_2 \to \text{Min}$$

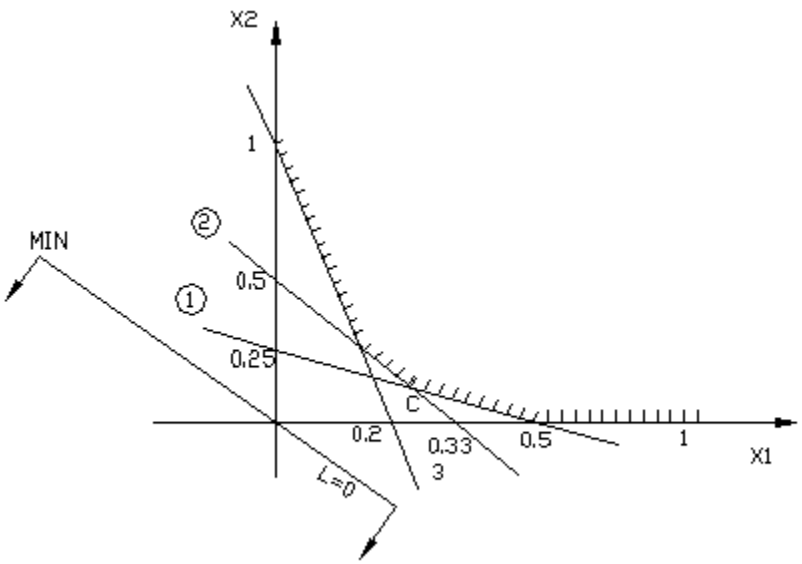
$$2x_1 + 4x_2 \geq 1 \quad (1)$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 1 \quad (2)$$

$$5x_1 + x_2 \geq 1 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

وإذا قمنا برسم مستقيمات الشروط على x_1ox_2 لحصلنا على منطقة الحلول المقبولة والمبينة على الشكل رقم (9−1) الآتي:



الشكل رقم (9-1)

ومن الشكل نلاحظ أن النقطة c الناتجة عن تقاطع المستقيمين (1) و(2) هي النقطة التي تعطينا أصغر قيمة للتابع L ونحصل على إحداثياتها من المعادلتين:

$$2x_1 + 4x_2 = 1$$
$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

وبحلهما، نجد أن: $x_1 = \frac{1}{4}$ و $x_2 = \frac{1}{8}$ وأن:

$$L = x_1 + x_2 = \frac{3}{8}$$
$$v = \frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{8}{3}$$

وأن الاحتمالات المقابلة تساوي:

$$P_1 = x_1.v = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$
$$P_2 = x_2.v = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

وبذلك نجد أن الإستراتجية المثالية لـ A هي p(2/3,1/3) وأن ثمن اللعبة:

$$v = 8/3$$

طريقة بيانية ثانية:

كان يمكن حل هذه اللعبة وأمثالها بيانياً بالاعتماد على العلاقات (9−3−2) و(9−3−3) مباشرة, حيث نجد أن نموذج هذه اللعبة يأخذ الشكل الآتي:

$$z = v \rightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$2p_1 + 4p_2 \geq v$$
$$3p_1 + 2p_2 \geq v$$
$$5p_1 + p_2 \geq v$$
$$p_1 + p_2 = 1$$
$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, v \geq 0$$

وبتعويض p_2 من المعادلة ($p_2=1-p_1$) في المتراجحات نحصل على نموذج بدلالة p_1 وv فقط وهو النموذج الآتي:

$$z = v \rightarrow Max$$

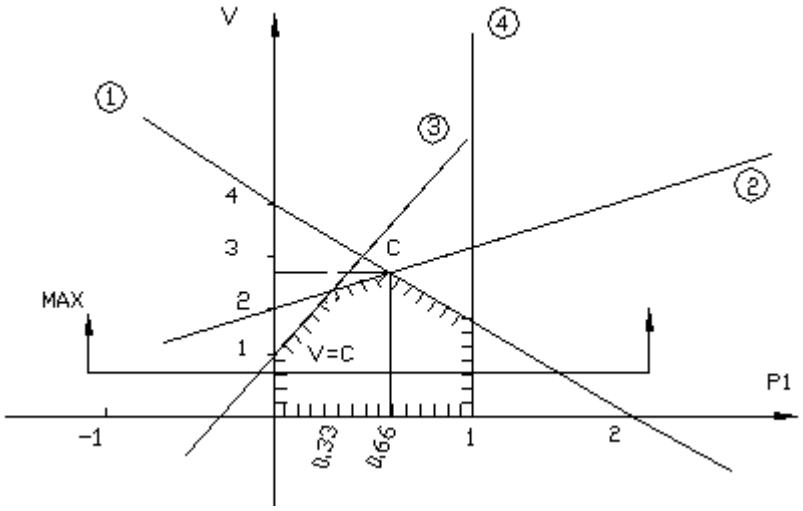
ضمن الشروط:

$$-2p_1 + 4 \geq v \quad (1)$$
$$p_1 + 2 \geq v \quad (2)$$
$$4p_1 + 1 \geq v \quad (3)$$
$$0 \leq p_1 \leq 1 \quad (4)$$
$$v \geq 0$$

وبرسم الشكل البياني لمنطقة الحلول المقبولة بدلالة p_1 وv نحصل الشكل رقم (9−2) الآتي:

وواضح من الشكل أن أكبر قيمة لثمن اللعبة v ضمن منطقة الحلول المقبولة هي النقطة c, ونحصل على إحداثي c من تقاطع المستقيمين (1) و(2) أو من حل المعادلتين المقابلتين لهما:

$$-2p_1 + 4 = v$$
$$p_1 + 2 = v$$



الشكل رقم (9-2)

وبحلهما نجد أن: $p_1=\frac{2}{3}$ وأن: $v=\frac{8}{3}$ وبذلك نحصل على أن: $p_2=\frac{1}{3}$ وأن

الاستراتيجية المثالية للطرف A هي: $p'_A(\frac{2}{3},\frac{1}{3}) \Rightarrow \text{Max}\, z=\frac{8}{3}$

وهو نفس الجواب السابق.

تمرينات ومسائل

أوجد الحل المثالي للألعاب التالية:

1-

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	-5	6	7
A_2	3	-4	-9

2-

A \ B	B_1	B_2
A_1	3	-4
A_2	−5	6
A_3	7	-8

3- تريد أحدى الشركات التجارية تحديد استراتيجية عملها لتسويق أربع سلع قبل أن تطرحها في الأسواق, ومن دراسة أجرتها على علاقة الأسعار بالكميات المطلوبة تبين أن الأرباح التي يمكن تحقيقها مقابل كل وضعية (من سعر وطلب) هي كمايلي:

السعر \ الطلب	100	200	300
A_1	6	8	10
A_2	7	10	12
A_3	7	8	9
A_4	8	5	11

أوجد الطريقة المثالية لعملية التسويق في الشركة المذكورة.

4- نريد أن نوجه الفلاحين بحيث يكون متوسط إنتاجهم من القمح خلال العام أكبر ما يمكن وذلك بتحديد نسبة الأراضي التي يجب زراعتها من كل من المحاصيل (قمح

حوراني– قمح فرنسي–قمح كندي) وحسب الظروف الجوية لذلك العام, ولنفترض أن إنتاجية الهكتار من هذه الأنواع وحسب الظروف الجوية كانت كما يلي:

الظروف / نوع القمح	جيدة	متوسطة	سيئة
حوراني	100	90	50
فرنسي	150	130	50
كندي	200	120	60

أوجد الحل المثالي لهذه اللعبة ضد الطبيعة (لا يجوز حذف الاستراتيجيات غير المربحة للطبيعة,لأن الطبيعة لا تلعب هذه اللعبة بشكل واع ولا يمكنها الاستغناء عن أي من استراتجياتها).

5– أوجد بالطريقة البيانية الحل المثالي للألعاب التالية:

أ–

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	−3	7
A_2	2	5	4	−6

ب–

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	5	−7	−4
A_2	2	6	9	−3

ج–

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	2	6	5
A_2	6	5	7	10
A_3	7	3	−4	10

الفصل التاسع
مبادئ التخطيط الشبكي

I- مقدمة وتعاريف:

إن التخطيط الشبكي هو نظام للتخطيط والإدارة، يتناول تخطيط العمليات المعقدة وإدارة تنفيذها بأقصر زمن وأقل كلفة, وهو يعطينا إمكانية لاكتشاف نقاط الاختناق ولإجراء التصحيحات اللازمة, ويعتمد هذا النظام على تجزئة المشروع أو أية عملية معقدة إلى عمليات بسيطة ثم وضعها على شكل شبكة تعكس ترتيب تلك العمليات وتوضح العلاقات بينها, وتسمى هذه الشبكة بشبكة الأعمال (Networks) وهي تتألف من عنصرين أساسين هما: الأنشطة والحوادث.

النشاط (العملية):

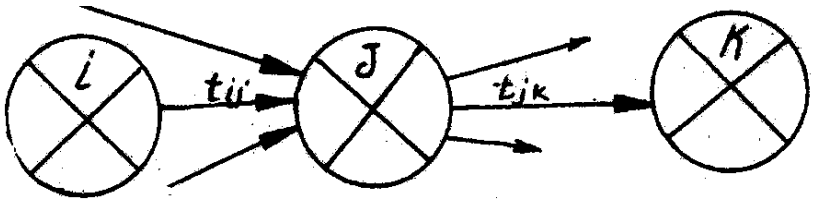
وهو أي إجراء لتنفيذ عمل ما, والنشاط يكون مصحوباً بزمن ومقروناً بكلفة, أي أن لكل نشاط مدة زمنية محددة (أو عشوائية) ويتطلب موارد إنسانية ومادية لتنفيذه, ويرسم كل نشاط على الشبكة بوساطة سهم تعلوه المدة الزمنية (t) اللازمة لتنفيذه, ويتجه من حادث بدايته إلى حادث نهايته.

الحادث:

وهو واقعة تشير إلى بداية نشاط ما أو نهايته, ولا يرافق الحادث أي زمن أو تكلفة, ويقابل لحظة زمنية معينة، ونرسم الحادث في الشبكة على شكل دائرة تتضمن رقمه (j), والحادث قد يكون نتيجة لنهاية عدد من الأنشطة أو بداية لعدد آخر منها.

الأنشطة السابقة واللاحقة:

وتسمى الأنشطة التي تنتهي بالحادث (j) بالأنشطة السابقة له, أما الأنشطة التي تبدأ من الحادث (j) فتسمى بالأنشطة اللاحقة له, وسنرمز للنشاط بدليلي حادثي انطلاقه واستقراره كما يلي:(i,j) و (j,k)....الخ, ويمكننا تمثيل ذلك على الشكل الآتي:



أنشطة لاحقة بـ (J) أنشطة سابقة لـ (J)

شكل رقم (10-1)

فالنشاط (i,j) على الشكل (10-1) وكل نشاط في حكمه يعتبر من الأنشطة السابقة للحادث (j) وهو يبدأ من (i) وينتهي في (j).

أما النشاط (j,k) وكل نشاط في حكمه يعتبر نشاطاً لاحقاً بالحادث (j) وهو يبدأ من (j) وينتهي في (k).

أما t_{ij} وt_{jk} فهما مدتا تنفيذ النشاطين (i,j) و(j,k) على الترتيب, وهما موضوعتان على السهم من الأعلى. كما سنصطلح لاحقاً أن نضع رقم الحادث ضمن الدائرة التي تمثل الحادث وفي القسم الأعلى منها بعد تقسيمها إلى أربعة أجزاء بوساطة إشارة مثل X.

قاعدة الأسبقية:

وهي القاعدة التي يتم تنظيم وتنفيذ الحوادث حسبها وتتضمن شروط الأسبقية الآتية:

لا يمكن تحقيق أي حادث ما لم تكن الأنشطة السابقة له مباشرة قد أنجزت تماماً, وإن تحقيق أي حادث يسمح بالانتقال إلى تنفيذ الأنشطة اللاحقة به مباشرة, ولا يمكن البدء في تنفيذ أي نشاط مالم يكن حادث بدايته قد تحقق تماماً.

النشاط الوهمي:

هو نشاط فرضي لا يرافقه زمن ولا تكلفة، ونستخدمه أحياناً للتخلص من بعض الحالات الشاذة, ونرسمه على الشبكة بسهم متقطع.

الحادث الوهمي:

هو حادث فرضي نستخدمه للتخلص من بعض الحالات الخاصة.

الشبكة:

وهي التمثيل المتشابك والمتتالي لمجموعة الأنشطة المتفصلة فيما بينها بوساطة حوادث تتفق مع شروط الأسبقية, وعند تشكيل الشبكات يجب أن نراعي فيها القواعد الأساسية الآتية:

1- أن يكون للشبكة حادث بداية وحيد، ولا يسبقه أي نشاط، ونرمز لهذا الحادث بالرمز p_0 ونعطيه الرقم (0).

2- ألا تتضمن الشبكة أي حادث ليس له أنشطة سابقة (غير حادث البداية p_0), وإذا صدف واعترضتنا حوادث بدون أنشطة سابقة لها, فإننا نقوم بإدخال أنشطة وهمية تصل حادث البداية أو بأي حادث آخر مناسب, ونرمز لهذه الأنشطة الوهمية بأسهم متقطعة ولا نضع لها زمناً ولا كلفة.

3- أن يكون للشبكة حادث نهاية وحيد ويسمى الهدف, ولا يلحق به أي نشاط كان, ونرمز لهذا الحادث الأخير بالرمز p_n.

4- ألا تتضمن الشبكة أية حوادث ليس لها أنشطة لاحقة بها (غير حادث النهاية P_n), وإذا اعترضتنا حوادث بدون أنشطة لاحقة فإننا ندخل على الشبكة أنشطة وهمية لوصل تلك الحوادث بالحادث الأخير أو بأي حادث آخر مناسب.

5- أن يكون تتالي الحوادث وتشابك الأنشطة في الشبكة منسجماً مع قاعدة الأسبقية السابقة، والتي تنص على ما يلي: لا يمكن أن يتحقق الحادث ما لم تنجز الأنشطة السابقة له, كما لا يمكن البدء في تنفيذ أي نشاط ما لم يكن حادث بدايته قد تحقق تماماً.

6- ألا تتضمن الشبكة أي دوار ناجم عن اتجاهات الأسهم فيها.

خطوات تشكيل الشبكة:

1- نقوم بإعداد قائمة بالحوادث والأنشطة في جدول خاص بحيث يتم توضيح الأنشطة السابقة واللاحقة لكل حادث.

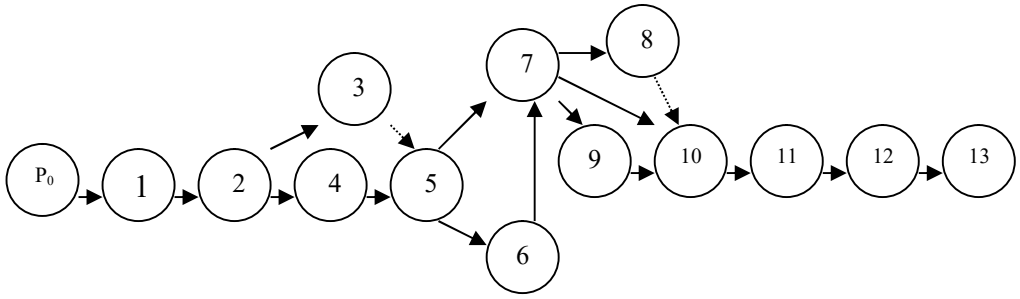
وكمثال نأخذ الأنشطة التي يتألف منها مشروع بناء منزل صغير والمعروضة في الجدول التالي (مثال فرضي):

2- نقوم برسم الشبكة انطلاقاً من حادث البداية $\mathbf{p_0}$ حتى حادث النهاية $\mathbf{p_n}$, وابتداء من اليسار إلى اليمين وبحيث نراعي جميع العلاقات بين كل نشاط والأنشطة السابقة واللاحقة له والواردة في الجدول الموجود في الصفحة الآتية.

جدول**جدول الأنشطة لبناء منزل صغير**

اسم النشاط	حادث انطلاقه	حادث استقراره	الأنشطة السابقة	الأنشطة اللاحقة	مدة التنفيذ	الكلفة
الحصول على الرخصة	p_0	1	-	(1,2)	t_{01}	C_{01}
حفر الأساس	1	2	(0,1)	(2,3)(2,4)	t_{12}	C_{12}
تمديد المجاري	2	3	(1,2)	-	t_{23}	C_{23}
تدعيم المجاري	2	4	(1,2)	(4,5)	t_{24}	C_{24}
إقامة الأعمدة	4	5	(2,4)	(5,6)	t_{45}	C_{45}
تشييد الجدران	5	6	(4,5)	(6,7)	t_{56}	C_{56}
إقامة قالب السكن	5	7	(4,5)	(7,10) (7,8) (7,9)	t_{45}	C_{45}
سكب السطح	6	7	(5,6)	(7,10) (7,8) (7,9)	t_{67}	C_{67}
تمديد شبكة الكهرباء	7	8	(6,7)	-	t_{78}	C_{68}
تمديد شبكة المياه	7	9	(5,6)	(9-10)	t_{79}	C_{69}
تركيب النوافذ والأبواب	7	10	(7,9)	(10-11)	t_{710}	C_{610}
ردم الأرضية	9	10	(7,9)	(10-11)	t_{910}	C_{910}
تلبيس الجدران	10	11	(0,10)(7,10)	(11-12)	$t_{10,11}$	$C_{10,11}$
تبليط الأرض	11	12	(10,11)	(12-13)	$t_{11,12}$	$C_{11,12}$
دهان المنزل	12	13	(11,12)	-	$t_{12,13}$	$C_{12,13}$

وكمثال على ذلك نقوم برسم شبكة الأنشطة للمثال السابق فنحصل على الشكل (2-10).



شكل رقم (10-2): شبكة الأنشطة للمثال السابق

حيث قمنا برسم الأنشطة على التوالي ابتداء من p_0 حتى حادث النهاية (13) ولقد أضفنا نشاطين وهميين هما (3,5) و(8,10) وذلك حتى لا تتضمن الشبكة حوادث لا لواحق لها.

وأخيراً نشير إلى أنه يمكننا أن نستخدم رموز أخرى لرسم الشبكات حيث يمكننا أن نمثل الأنشطة بدوائر أو مربعات أو مستطيلات، أما الأسهم فنستخدمها للدلالة على العلاقات بين تلك الأنشطة، ولكننا لن نستخدم هذه الرموز الأخيرة في بحثنا هذا.

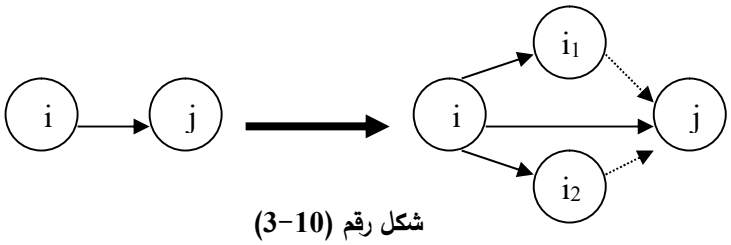
المسار:

هو أية مجموعة من الأنشطة المتتالية والتي تبدأ من حادث البداية p_0 وتنتهي عند حادث النهاية p_n, أي أن المسار هو أي طريق باتجاه الأسهم ينقلنا من حادث البداية إلى حادث النهاية.

معالجة بعض الحالات الخاصة:

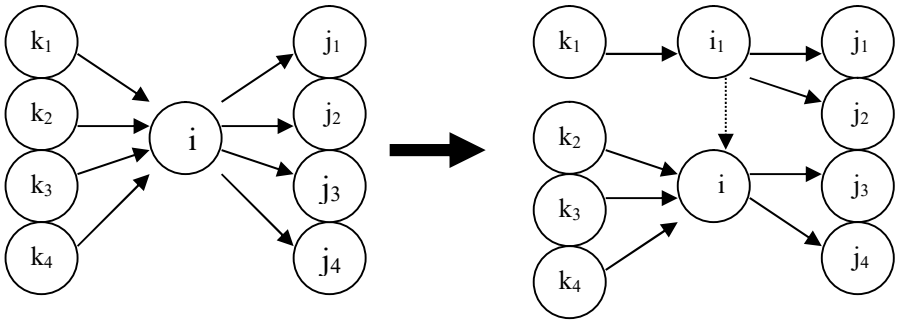
عند رسم الشبكة قد نصادف حالات غير عادية منها:

الحالة التي يكون فيها أنشطة (k نشاطاً) تشترك بحادث الانطلاق (i) وبحادث الاستقرار (j), فلتمييز هذه الأنشطة عن بعضها نقوم بإدخال (k-1) حادثاً وهمياً ثم نصلها بالحادث (j) بوساطة (k-1) نشاطاً وهمياً كما في الشكل رقم (10-3) (عندما k = 3):



شكل رقم (10-3)

الحالة التي يكون فيها للحادث (i) عدد من الأنشطة السابقة له وعدد من الأنشطة اللاحقة به, ويكون بعض الأنشطة اللاحقة لا يشترط تنفيذ إلا بعض الأنشطة السابقة له, فعندما يمكننا فصل هذه الأنشطة إلى زمرتين وذلك بإدخال نشاط وهمي كما على الشكل رقم (10-4).



شكل رقم (10-4)

تحديد المدة الزمنية لكل نشاط:

إن المدة الزمنية لكل نشاط إما أن تكون محددة تماماً, وعندها نعتبر أن مدة النشاط (i.j) هي: $t_{ij} = d_{ij}$ حيث إن d_{ij} هي كمية غير عشوائية.

وأما عندما تكون المدة الزمنية t_{ij} عشوائية فإننا نأخذ التوقع الرياضي لـ t_{ij} كأفضل تقدير لتلك المدة ونرمز له بـ $\overline{t_{ij}}$ ، ولكن حساب هذا التوقع يحتاج إلى معرفة قانون التوزيع الاحتمالي لـ t_{ij} والذي يتضمن ثوابت عددية تختلف من نشاط لآخر ,وإن أكثر قوانين التوزيع الاحتمالي المستخدمة في التخطيط الشبكي هو توزيع بيتا $\beta_{p.q}(x)$ المعرف على المجال (a,b), لذلك فلإيجاد تقدير لمتوسط المدة الزمنية $\overline{t_{ij}}$, نقوم باستقصاء حول الحد الأدنى a_{ij} والحد الأعلى b_{ij} الذي يمكن أن يستغرقه أي نشاط

(i,j), حيث يسمى المقدار a_{ij} بالتقدير المتفائل, والمقدار b_{ij} بالتقدير المتشائم لتلك المدة t_{ij}, وفي هذه الحالة يمكننا حساب $\overline{t_{ij}}$ من العلاقة الآتية:

$$\overline{t_{ij}} = \frac{3a_{ij} + 2b_{ij}}{5} \qquad (1-10)$$

وهذه العلاقة ما هي إلا منوال التوزيع (بيتا) الذي فيه (q=4 و p=3) وعندها يكون تباين t مساوياً:

$$\sigma_t^{\,2} = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{12} \qquad (2-10)$$

أما إذا كنا نعلم بالإضافة إلى a_{ij} و b_{ij} القيمة الأكثر احتمالاً m_{ij} (المنوال) فإننا نحسب t_{ij} من العلاقة:

$$\overline{t_{ij}} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6} \qquad (3-10)$$

وهذه العلاقة ما هي إلا التوقع الرياضي للتوزيع (بيتا) الذي فيه ($p = 3+\sqrt{2}, q = 3-\sqrt{2}$) وإن العلاقة (3−10) تعطينا تقديراً لمدة النشاط (i,j) ذي أصغر تباين ممكن وهو:

$$\sigma_t^{\,2} = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36} \qquad (4-10)$$

ولكن التقدير (3−10) يحتاج إلى تحديد ثلاثة أرقام بينما يكتفي (1−10) برقمين هما a و b, ويتم تحديد المقادير a_{ij} و b_{ij} و m_{ij} لكل نشاط (i,j) إما عن طريق المعلومات المتراكمة لدى مراكز البحوث العلمية أو بوساطة استقصاء لدى الخبراء العاملين عن تقديراتهم لكل من هذه الكميات.

في الحقيقة إن المخططات الشبكية تقسم حسب طبيعة المدة للأنشطة الداخلة فيها إلى نوعين أساسيين هما:

أ- المخططات الشبكية ذات المدة الزمنية المحددة وهي التي تكون فيها المدة الزمنية t_{ij} لكل نشاط (i,j) محددة تماماً, وتنطبق هذه الحالة على الأنشطة المؤتمتة أو التي تتميز بقصر مدتها.

ب- المخططات الشبكية ذات المدد الزمنية العشوائية، وهي التي تكون فيها المدة الزمنية t_{ij} لكل نشاط (i,j) عشوائية.

وتنطبق هذه الحالة على معظم المشاريع الاقتصادية, وإننا هنا لن نتناول دراستها بالتفصيل ونكتفي بأن نحسب المدة الزمنية لأنشطتها من إحدى العلاقتين (10-1) أو (10-3) السابقتين, ونعتبر المدة الزمنية للأنشطة وكأنها مدة محددة كما في الحالة الأولى.

ترقيم حوادث الشبكة:

يتم إعادة ترقيم حوادث الشبكة بعد الانتهاء من عملية رسمها بإعطاء الحوادث أرقاماً متزايدة من اليسار إلى اليمين, أي أننا سنبحث عن ترقيم للحوادث بحيث يكون فيه رقم حادث انطلاق كل نشاط أصغر من رقم حادث نهايته, أي بحيث يكون اتجاه السهم من الرقم الأصغر إلى الأكبر.

لذلك نفترض انه لدينا شبكة فيها $(n+1)$ حادثاً ونريد إعادة ترقيم حوادثها بحيث يكون $i<j$ لكل نشاط (i,j).

ويتم إعادة ترقيم الحوادث بوساطة إيجاد صفوف هذه الشبكة, وبما أن الشبكة تبدأ بحادث واحد, إذن نقوم بما يلي:

1- نضع الرقم (0) لحادث البداية p_0.

2- نحذف الأسهم الصادرة عن الحادث p_0 (ويتم الحذف بشكل تصوري) فنحصل على عدد من الحوادث لا يدخل فيها أي سهم, نسمي مجموعة هذه الحوادث بمجموعة حوادث الصف الأول ونرمز لها بالرمز u_1 ولنفترض أن عددها k_1 حادثاً, وعندها نقوم بترقيم حوادث هذه المجموعة بإعطائها الأرقام: $1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,k_1$

3- بعد الانتهاء من ترقيم حوادث الصف الأول ننتقل إلى ترقيم حوادث الصف الثاني, فنقوم بحذف تصوري للأسهم الصادرة عن حوادث الصف الأول, فنحصل على جملة

من الحوادث التي لا يدخل فيها أي سهم, نسمي هذه المجموعة من الحوادث بحوادث الصف الثاني ونرمز له بالرمز u_2.

ولنفترض أن عددها هو k_2 حادثاً وعندها نقوم بترقيم هذه الحوادث بإعطائها الأرقام:$k_1+1, k_1+2, \ldots\ldots\ldots, k_1+k_2$ وذلك لأن k_1 هو آخر رقم أستخدم لحوادث الصف الأول.

4- ولترقيم حوادث الصف الثالث نحذف الأسهم الصادرة عن حوادث الصف الثاني فنحصل على حوادث الصف الثالث u_3 والتي نفترض أن عددها هو k_3, وعندها نقوم بترقيم حوادث هذه المجموعة بإعطائها الأرقام:

$$(k_1+k_2)+1,\quad k_1+k_2+2,\quad k_1+k_2+3,\ldots\ldots\ldots,\ k_1+k_2+k_3$$

وهكذا نتابع العمل حتى نصل إلى حادث النهاية الذي يأخذ الرقم n.

ويمكن البرهان على أنه عندما نحذف جميع الأسهم الصادرة عن حوادث أي صف مثل u_L فإنه يوجد حادث واحد على الأقل في الصف التالي u_{L+1}, ومنه نستنتج أن المجموعة u_{L+1} هي غير خالية مهما تكن L, وهذا ما يضمن استمرار عملية الترقيم حتى النهاية, أما عندما تكون الشبكة كبيرة ومعقدة فإن ترقيمها يمكن أن يتم بوساطة برامج خاصة ونذكر منها خوارزمية (فورد).

ننتقل الآن إلى جوهر الموضوع وهو دراسة هذه الشبكات وتحليلها, ويتم تحليل المخططات الشبكية حسب هدف الدراسة ومن جوانب عدة أهمها:

1- تحليل المخطط الشبكي بالنسبة للزمن.

2- تحليل الشبكة بالنسبة للتكلفة.

3- تحليل الشبكات بالنسبة للمواد الأولية (مادية أو بشرية).

4- تحليل الشبكة بالنسبة للتدفق الأعظمي.

وسنعالج الفقرتين الأولى والثانية كما يلي:

II- تحليل المخططات الشبكية بالنسبة للزمن:

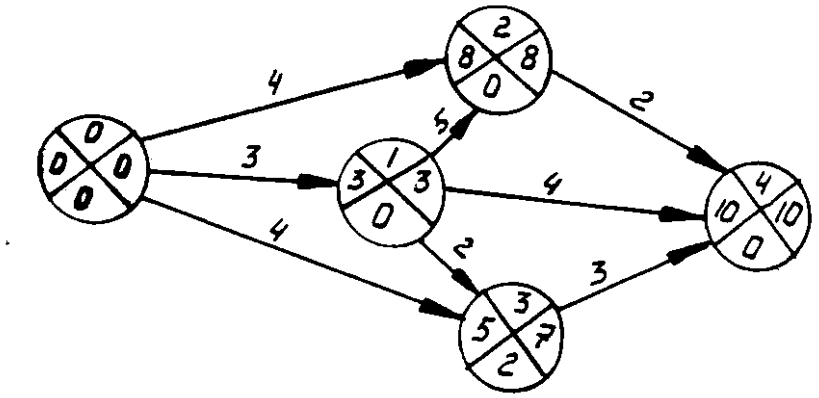
سنتناول في هذه الفقرة مسألة تحديد زمن وقوع كل حادث (j) وخاصة حادث النهاية p_n, حيث يعتبر زمن وقوع ذلك الحادث هو زمن إنجاز المشروع.

وعندها نجد أن زمن وقوع الحادث (j) يرتبط بزمن وقوع الحوادث السابقة له من مختلف الصفوف وبمدة الأنشطة السابقة له مباشرة, ولإجراء تحليل زمني لحوادث الشبكة نقوم بتعريف المفاهيم الآتية:

1- أبكر زمن لوقوع الحادث (j):

وهو اللحظة التي لا يمكن للحادث أن يتحقق قبلها, ويتم حساب هذا الزمن انطلاقاً من حادث البداية p_0, لذلك فإننا نعتبر أن زمن وقوع حادث البداية p_0 هو $T_0 = 0$.

ولنأخذ الشبكة البسيطة الآتية (الأرقام التي فوق الأسهم أو على يسارها هي t_{ij}):



شكل رقم (10-5)

واعتماداً على خواص الشبكات نجد أنه لا يمكن للحادث (2) أن يتحقق قبل أن يتم إنجاز النشاطين السابقين له وهما (0,2) و (1,2) معاً.

ونلاحظ أن مدة إنجاز النشاط (0,2) هي 4 واحدات زمنية, ولكن هذا لا يؤدي إلى تحقق الحادث (2) المشروط بإنجاز النشاط (1,2) أيضاً, ومن جهة أخرى نجد أن النشاط (1,2) لا يمكن أن يبدأ ما لم يتحقق الحادث (1) والذي لا يمكن أن يتحقق إلا إذا تم إنجاز النشاط (0,1), أي أن الحادث (1) لا يمكن أن يتحقق قبل 3 واحدات زمنية,

وحتى يتحقق الحادث (2) يجب أن يتم إنجاز النشاط (2) والذي مدته 5 واحدات زمنية, وحتى يتم إنجاز النشاطين (0,1) ثم (1,2) يلزمنا 5+3 = 8 واحدات زمنية, ومن هنا نستنتج أن الحادث (2) لا يمكن أن يتحقق قبل انقضاء 8 واحدات زمنية، وذلك لأن المدة الثانية أكبر من الأولى, لذلك نسمي العدد 8 بأبكر زمن لتحقيق الحادث (2).

وهكذا نجد أن الحادث رقم (3) لا يمكن أن يتحقق قبل أن يتم إنجاز النشاط (0,3) والذي مدته 4, ويتم إنجاز النشاطين (1,3) و(0,1) واللذين يتطلبان مدة 2+3=5 واحدات زمنية, وهي ما يسمى بأبكر زمن لتحقيق الحادث (3), ولحساب أبكر زمن لتحقيق الحادث (4) نجد أنه مرتبط بأبكر زمن لتحقيق الحوادث التي تسبقه وبمدد الأنشطة الداخلة فيه,فعن طريق النشاط (3,4) نجد أن تحقق (4) يحتاج إلى 3+5 = 8 واحدات, أما عن طريق النشاط (1,4) فإن الحادث (4) لا يحتاج إلا إلى 4+3=7 واحدات زمنية, ولكنه يحتاج عن طريق (2,4) إلى 8+2 = 10 واحدات زمنية.

وهكذا نجد أن حادث النهاية (4) لا يمكن أن يتحقق قبل انقضاء أطول هذه الأزمنة وهو 10 واحدات زمنية, وهو أيضاً أبكر زمن لتحقيق الحادث (4) وأبكر زمن لإنجاز المشروع بكامله.

ولاستنباط قانون عام لحساب أبكر زمن لتحقيق الحادث (j) نفترض أن الحادث (j) مسبوق مباشرة بـ k نشاطاً هي:

$(i_1,j), (i_2,j), (i_3,j), (i_3,j), \ldots\ldots,(i_k,j)$

وإن أبكر زمن لوقوع الحوادث $(i_k)\ldots..(i_3)\ (i_2)\ (i_1)$ هو:

$T_1,T_2,T_3,\ldots\ldots,T_K$

على الترتيب, وأن المدة الزمنية للأنشطة السابقة على الترتيب هي:

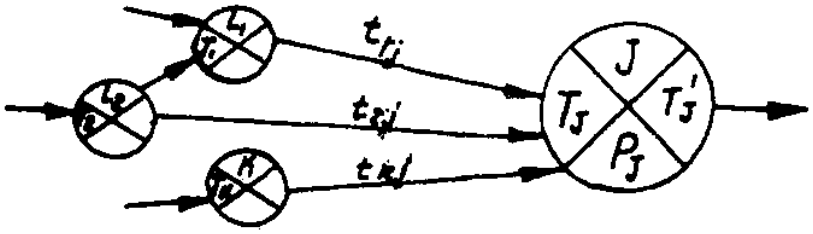
$t_{1j},t_{2j},t_{3j},\ldots\ldots,t_{kj}$

وعندها نجد أن أبكر زمن لتحقيق الحادث (j) والذي سنرمز له بالرمز T_j يساوي:

$$T_j = \underset{i=1}{\overset{k}{\mathrm{Max}}}(T_i + t_{ij}) \qquad (5-10)$$

وهو إذن يساوي أكبر المقادير T_i+t_{ij} المأخوذة من الأسهم والحوادث التي تسبق الحادث (j) مباشرة.

ولتسهيل الحسابات نقوم بتقسيم الدائرة التي تمثل الحادث إلى أربعة أقسام كما يلي (انظر الشكل (10–6)).



شكل رقم (10–6)

ونضع في القسم الأعلى رقم الحادث (j) ونضع في القسم الأيسر أبكر زمن لتحقيق الحادث T_j.

أما القسم الأيمن فنتركه لما يسمى بأقصى زمن لتحقيق الحادث (j), وإن القسم الأسفل سنخصصه لما يسمى بالاحتياطي الكلي الزمني للحادث (j).

ويتم إجراء الحسابات على الشبكة مباشرة وذلك بأن نقوم بإضافة T_i من الحادث (i) إلى المدة الزمنية t_{ij}, ثم نأخذ أكبر هذه النتائج فنحصل على T_j, ونسجلها في المكان المشار إليه.

وكمثال على ذلك قمنا بحساب T_j للشبكة التي على الشكل (10–5) وهي المسجلة في الربع الأيسر, لقد أشرنا إلى أن الحادث (j) لا يمكن أن يتحقق قبل اللحظة T_j, وذلك لأن الحوادث والأنشطة السابقة له تعيق تحققه قبل هذه اللحظة T_j, ولكن هذا لا يعني أنه سيتحقق في تلك الحظة تماماً, بل يمكن أن يتأجل تحققه إلى لحظة تلي اللحظة T_j, وأخيراً نشير إلى أنه يتم حساب أبكر زمن لتحقيق حوادث الشبكة انطلاقاً من حادث البداية (p_0) حتى حادث النهاية (p_n).

ويكون أبكر زمن T_n لتحقيق حادث النهاية (p_n) هو أبكر زمن لإنجاز المشروع بكامله.

2- أقصى زمن لتحقيق الحادث (i):

وهو اللحظة التي لا يجوز أن يتأخر تحقق الحادث (i) عنها, لحساب هذه اللحظات نسير باتجاه معاكس لما فعلناه في حساب T_j, حيث ننطلق من حادث النهاية P_n حتى حادث البداية (p_0), وحتى نتمكن من إجراء الحسابات يجب أن تكون اللحظة التي لا نريد للمشروع أن يتأخر عنها معلومة, ولهذا وحتى لا نترك المجال مفتوحاً للتهاون في تنفيذ المشاريع نعتبر أن أبكر زمن لتحقيق حادث النهاية T_n هو نفسه أقصى زمن لإنجاز المشروع ككل, وإذا رمزنا لأقصى زمن لتحقيق حادث النهاية (p_n) بالرمز T'_n وقمنا وفقاً لما سبق بوضع المساواة الآتية:

$$T'_n = T_n \qquad (6-10)$$

فإن T'_n تكون هي اللحظة التي لا نريد أن نسمح لتنفيذ المشروع أن يتأخر عنها.

وكتطبيق على مثالنا السابق نضع $T'_y = T_y = 10$، ولحساب أقصى زمن لتحقيق الحوادث الأخرى نلاحظ أن بعض الحوادث السابقة للحادث (P_n) يمكن أن تتأخر أو تؤجل أو يمدد تنفيذها إلى لحظة متأخرة عن اللحظة المبكرة Ti لها, ولكن أقصى زمن لتأخير الحادث (n-1) الذي يسبق مباشرة الحادث (P_n) هو اللحظة التالية:

$$T'_{n-1} = T'_n - t_{in}$$

ولحساب أقصى زمن للحوادث التي تسبق حادث النهاية P_n مباشرة في المثال السابق وهما الحادثان (2)، (3) نجد أن:

$$T'_2 = 10 - 2 = 8$$

$$T'_3 = 10 - 3 = 7$$

نقوم بوضع هذين الرقمين في الربع الأيمن من دائرة الحادث، ولحساب أقصى زمن للحوادث الأخرى التي تسبق الحوادث في (2) و(3)، نجد أن أقصى زمن للحادث (1) يمكن حسابه اعتماداً على الأنشطة والحوادث اللاحقة بالحادث (1) كما يلي:

من الحادث (2) حيث نجد أنها تساوي 3=5-8.

ومن الحادث (4) حيث نجد أنها تساوي 6=4-10.

ومن الحادث (3) نجد أنها تساوي 5=2-7.

وبذلك نجد أن أقصى زمن يمكن تأجيل تنفيذ الحادث (1) إلى حينه يساوي أصغر هذه الأرقام. أي أن:

$$T_1' = 8 - 5 = 3$$

ونضعها في الجزء الأيمن للدائرة الخاصة بالحادث (1) وهكذا يمكننا حساب أقصى زمن للحوادث الأخرى.

ولحساب أقصى زمن لتأخر أي حادث (i) نفترض أن عدداً L من الأنشطة (الأسهم) تنطلق من ذلك النشاط وهي:

$$(i,j_1),\quad (i,j_2),\quad (i,j_3),\ldots\ldots,(i,j_L)$$

وأن المدد الزمنية لتلك الأنشطة على الترتيب هي:

$$t_{i1},\ t_{i2},\ t_{i3},\ \ldots\ldots,\ t_{iL}$$

وأن أقصى زمن لتحقيق الحوادث اللاحقة $j_1,j_2,j_3,\ldots\ldots,j_L$ على الترتيب هو:

$$T_1',\quad T_2',\quad T_3',\ \ldots\ldots,\quad T_L'$$

وبناء على ذلك يمكننا أن نحسب أقصى زمن لتحقيق الحادث (i) من العلاقة الآتية:

$$T_i' = \underset{j=1}{\text{Min}}\,(T_j' - t_{ij}) \qquad (7-10)$$

ويتم حساب هذه الأزمنة انطلاقاً من حادث النهاية (p_n) حتى حادث البداية (p_0) حيث سنجد حكماً أن أقصى زمن للحادث (p_0) يساوي أيضاً إلى أبكر زمن له, أي أن:

$$T_0' = T_0 = 0$$

أما عملية الحساب فيمكن أن تتم على الشبكة مباشرة بأن نقوم بطرح المدة الزمنية t_{ij} للنشاط (i,j) من أقصى زمن للحادث (j) للأنشطة اللاحقة بالحادث (i) ثم نأخذ أصغرها فنحصل على T_i'.

وكمثال على ذلك حسبنا T_i' لحوادث الشبكة التي على الشكل (10-5) ووضعنا النتائج في الربع الأيمن لدوائر الحوادث.

3- احتياط الزمن عند الحادث (j) (مجال التعويم):

بما أن أبكر زمن لتحقيق الحادث يختلف بصورة عامة عن أقصى زمن يسمح به لحدوثه، فإن ذلك يؤدي إلى ظهور احتياط زمني لمعظم حوادث الشبكة، وإن هذا الاحتياطي الزمني بالنسبة للحادث (J) يساوي:

$$R_J = T'_J - T_J \qquad (8-10)$$

وهو عبارة عن مجال $[T_J, T'_J]$ يسمى بمجال التعويم وهو المدة التي يمكن لنا أن نؤخر تنفيذ الحادث (J) دون أن يؤثر ذلك على مدة تنفيذ المشروع ككل وهي T_n، وبعبارة أخرى هو المدة التي يمكن للحادث (j) أن يتأخر دون أن يؤثر ذلك على المدة النهائية لتنفيذ المشروع T_n. وعند إجراء الحسابات على الشبكة نضع قيمة R_J في الربع الأسفل لدائرة (J).

4-الاحتياطي الكلي للزمن عند النشاط (I,J):

ويحسب هذا الاحتياطي من العلاقة التالية:

$$r_{i,J} = T'_J - T_i - t_{ij} \qquad (9-10)$$

وإن هذا الاحتياطي هو أكبر مقدار زمني يمكن أن يستخدم لزيادة مدة تنفيذ النشاط (I,J) (طبعاً إذا كانت طبيعة ذلك النشاط تسمح بذلك). وبدون أن يؤدي ذلك إلى زيادة مدة تنفيذ المشروع ككل، أي بدون أن يؤثر ذلك على لحظة تحقق الحادث الأخير T_n.

ويمكن النظر إلى r_{ij} على أنه أكبر مقدار زمني يمكننا أن نستخدمه لتأخير بداية النشاط (I,J) عن أبكر زمن لتحقيق الحادث (i) وهو T_i وذلك بدون أن نزيد من لحظة تحقيق الحادث الأخير T_n، ولكن تأخير بداية النشاط (I,J) بمقدار يساوي إلى كامل الاحتياطي r_{ij} يقتضي أن تبدأ الأنشطة اللاحقة مباشرة له في لحظة أقصى زمن للحادث (J) التي تبدأ منه.

وإن أي تأخير أو تأجيل للحظة بداية النشاط (i,J) أو أي تمديد لمدته الزمنية بمقدار Δ_{ij} يزيد عن r_{ij} سيؤدي حتماً إلى تأخير حادث النهاية P_n، أي سيؤدي إلى تأخير تنفيذ المشروع بأكمله.

كما يمكن اعتبار الاحتياطي الكلي r_{ij} على انه الفرق بين مدة تنفيذ المشروع T_n ومدة أطول مسار يمر عبر ذلك النشاط (i,j)، وأخيراً نشير إلى أن r_{ij} لا يخص النشاط (i,j) وحده بل قد تشترك به الأنشطة الواقعة مع (i,j) على مسار واحد ما.

5- الاحتياطي الزمني الحر عند النشاط (i,j):

ويحسب هذا الاحتياطي من العلاقة الآتية:

$$r'_{i,J} = T_J - T_i - t_{ij} \qquad (10-10)$$

وإن هذا الاحتياطي هو اكبر مقدار زمني يسمح لنا بأن نستخدمه لزيادة مدة النشاط (i,J) وبدون أن يعيق ذلك إمكانية أن تبدأ الأنشطة اللاحقة لحادثة (J) في أبكر زمن لها وهو T_J، ويسمى بالاحتياطي الزمني الحر من النوع II عند النشاط (i,j).

وانه يمكننا اعتبار r'_{ij} على أنه أكبر مقدار زمني يسمح لنا به لتأخير بداية النشاط (i,j) عن أبكر زمن لتحقق حادث بدايته (i) وهو T_i, وذلك بدون أن تتأثر بدايات الأنشطة اللاحقة للحادث (J) عن أبكر زمن لها وهو T_J.

وفي بعض المراجع قد نصادف نوعاً آخر من الاحتياطي الزمني الحر (يسمى بالنوع I ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$r_{ij} = T'_J - T'_i - T_{ij}$$

وهو عبارة عن أكبر مقدار يسمح به لزيادة مدة النشاط (i,J) بدون أن نعيق إمكانية أن تنتهي الأنشطة السابقة مباشرة لحادثه (i) في أقصى زمن محدد لإنجازها وهو T'_i .

ولكننا سوف نقتصر في تحليلنا على النوع المعرف بالعلاقة (10- 10).

6- الاحتياطي الزمني المستقل أو الخاص بالنشاط (i,J):

وهو يحسب من العلاقة الآتية:

$$r'' = Max\left[0,(T_J - T'_i - t_{ij})\right] \qquad (11-10)$$

وهو أكبر مقدار زمني يسمح لنا به لزيادة مدة النشاط (i,J) أو لتأخير بدايته بحيث تنتهي جميع الأنشطة السابقة مباشرة لحادثه (i) في أقصى زمن محدد لها وهو T'_i , وبحيث تبدأ جميع الأنشطة اللاحقة مباشرة لحادثه (J) في أبكر زمن محدد لها وهو T_J, وهكذا نجد أن استخدام الاحتياطي r''_{ij} لصالح النشاط (i,J) وحده لن يؤثر على احتياطي أي من الأنشطة الأخرى.

ملاحظة هامة:

من العلاقتين (10 – 10) و(10 – 9) يمكننا ببساطة أن نستنتج أن:

$$r_{ij} - r'_{ij} = T'_J - T_J = R_J \qquad (12-10)$$

أي أن الفرق بين الاحتياطي الكلي والحر يساوي احتياطي الحادث R_J, كما نستنتج أن $r_{iJ} \geq r'_{iJ}$, وعندما تكون $R_J = 0$ فإن $r_{iJ} = r'_{iJ}$, وهذا يعني أنه عندما تكون $R_J = 0$ فإن الاحتياطيين r_{iJ} و r'_{iJ} متساويان للأنشطة الداخلة في الحادث (J).

ومن جهة أخرى نجد من العلاقتين (10– 10) و(10–11) أن:

$$r'_{iJ} - r''_{iJ} = \begin{cases} T'_i - T_i = R_i & ; r''_{iJ} = T_J - T'_i - t_{iJ} > 0 \\ r'_{ij} & ; r''_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (13-10)$$

وهذا يعني أنه عندما تكون $R_i=0$ فإن $r'_{ij} = r''_{ij}$ للأنشطة المنبثقة عن الحادث (i), كما نستنتج أيضاً أن: $r'_{iJ} \geq r''_{iJ}$.

7–المسار الحرج:

إن تحديد المسار الحرج يعتبر هدفاً أساسياً في التحليل الزمني للمخططات الشبكية ونتيجة مرجوة لجميع الحسابات السابقة.

فإذا قمنا بدراسة أي مخطط شبكي لوجدنا أنه يتألف من عدد من المسارات التي تصل حادث بدايته (p_0) وباتجاه الأسهم, بحادث نهايته (p_n), وإن كلاً من هذه المسارات يتألف من عدد من الأنشطة, وإن المدة الزمنية لكل مسار تساوي مجموع المدد الزمنية للأنشطة الواقعة عليه, ولهذا فإنه يمكننا أن نعرف المسار الحرج بما يلي:

هو المسار ذو أطول مدة من بين المسارات الممكنة للشبكة، أي الذي مدته تساوي T_n, ولكن من الأسهل أن نحدد المسار الحرج عن طريق تحديد الأنشطة الواقعة عليه, لذلك فإنه يعرف كما يلي:

المسار الحرج: هو أي مسار مؤلف من أنشطة حرجة فقط, ومن التعريف الأخير يتضح أنه يمكن أن نصادف أكثر من مسار حرج في المخطط الشبكي, ولتحديد المسار الحرج علينا إذن أن نحدد النشاط الحرج والذي نعرفه كما يلي:

النشاط الحرج: هو النشاط الذي ينعدم عنده الاحتياطي الكلي للزمن أي يكون (i,J) حرجاً إذا كان $r_{iJ} = 0$، كما يكون الحادث (J) حرجاً إذا كان فيه $R_J = 0$.

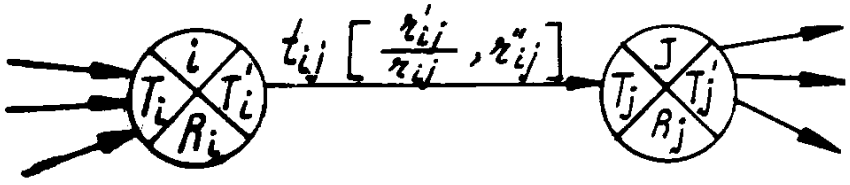
ولكن العلاقة (10−12) تعطينا أن: $r_{iJ} \geq r'_{iJ}$ ولكن وبما أن $r'_{iJ} \geq 0$ إذن عندما يكون $r_{iJ} = 0$ فإن $r'_{ij} = 0$، وينجم عن هذا أن $R_J = 0$ أيضاً, ومن العلاقة (10−12) يمكننا أن نستنتج أنه عندما تكون $r'_{iJ} = 0$ فإن $r''_{iJ} = 0$ وينجم عنهما أيضاً أن $R_i = 0$.

مما تقدم نخلص إلى النتيجة الآتية: إذا كان النشاط (i,J) حرجاً فإن $r_{iJ} = r'_{iJ} = r''_{ij} = 0$ كما أن $R_i = R_J = 0$. ولكن الشرط $R_i = R_J = 0$ هو شرط لازم ولكنه غير كافٍ ليكون النشاط (i,j) حرجاً.

إذن فلتحديد المسار أو المسارات الحرج نبحث عن الأنشطة الحرجة انطلاقاً من حادث البداية (p_0) متتبعين الأنشطة التي احتياطها الكلي r_{iJ} معدوماً, حتى نصل إلى حادث النهاية (p_n), ونشير عادة إلى الأنشطة الحرجة بسهم مضاعف لتمييزه عن الأنشطة الأخرى, وبذلك يكون طول المسار الحرج هو مجموع مدد الأنشطة الحرجة الواقعة عليه ويساوي T_n, ويستفاد من تحديد الأنشطة الحرجة في معرفة الأنشطة التي لا تتحمل أي تأخير في تنفيذها للتركيز عليها عند التنفيذ.

كما يستفاد من الاحتياطات الزمنية المختلفة في إعادة النظر في توزيع الموارد ووسائل العمل على الأنشطة لاختصار مدة تنفيذها, وإن هذه الاحتياطات هي التي تعبر عن مرونة المخطط الشبكي, وكلما تضاءلت هذه المجالات أصبح المخطط صلباً, ويصبح المخطط صلباً تماماً عندما تكون جميع أنشطته حرجة, وعندها لن يكون في هذا المخطط أي مجال للتسامح في تأخير أي نشاط من أنشطة المخطط المذكور.

وأخيراً نشير إلى أننا سنصطلح عند إجراء الحسابات على الشبكة, كتابة النتائج على الشكل التالي:



شكل رقم (10-7)

8-احتمال إنجاز المشروع قبل موعد محدد T_f:

لقد أشرنا سابقاً إلى أن مدة إنجاز المشروع هي T_n زمن تحقق حادثة الأخير (اعتباراً من زمن p_0), وأن هذه المدة هي مجموع مدد الأنشطة الواقعة على المسار الحرج, وبما أن مدة كل نشاط يمكن أن تكون محددة أو عشوائية فإن مسألة حساب احتمال تحقق المشروع قبل موعد محدد T_f, وفي حالة عشوائية المدد الزمنية لأنشطة المشروع, ينظر إليها كما يلي:

إذا كانت t_{iJ} المدة الزمنية للنشاط (i,J) عشوائية فإن توقعها وتباينها يحسبان من العلاقتين (10-3) و(10-4) على الترتيب, وإن التوقع الرياضي لمدة إنجاز المشروع يساوي مجموع التوقعات الرياضية لمدد الأنشطة الواقعة على المسار الحرج أي أن:

$$\bar{t} = \sum \overline{t_{iJ}} = T_n \qquad (14-10)$$

وكذلك بالنسبة لتباين هذه المدة فهو يساوي:

$$\sigma_t^2 = \sum \sigma_{t_{ij}}^2$$

وإذا كان عدد تلك الأنشطة كافياً فإن احتمال تحقق المشروع قبل الموعد المحدد T_f, يمكن حسابه من جدول تابع الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري ϕ حيث نجد أن:

$$p(t \le T_f) = \phi\left(\frac{T_f - T_n}{\sqrt{\sum \sigma_{t_{ij}}^2}}\right) \qquad (15-10)$$

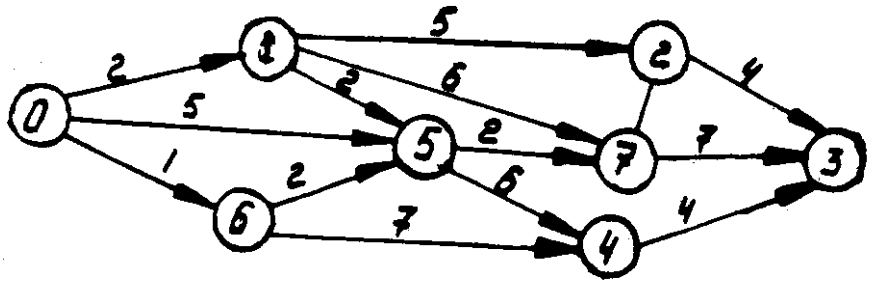
ويمكننا أيضاً حساب احتمال تحقق أي حادث (J) قبل موعد محدد T_f فنجد أن:

$$p(t_j \le T_f) = \phi\left(\frac{T_f - T_J}{\sqrt{\sum \sigma_{t_{ij}}^2}}\right) \qquad (16-10)$$

حيث أن T_J هو أبكر زمن لتحقق (J) وأن المجموع مأخوذ على أنشطة أطول طريق يصل (J) بحادث البداية p_0.

مثال (1):

ليكن لدينا المخطط الشبكي الآتي:



شكل رقم (10-8)

حيث تشير الأعداد التي فوق الأسهم إلى مدة النشاط, والمطلوب:

1- إعادة ترقيم حوادث هذه الشبكة.

2- حساب T وT' وR وr وr' وr''.

3- تحديد المسار الحرج.

الحل:

1- لإجراء عملية إعادة الترقيم بحيث يكون $i < J$ لكل نشاط (i,J) نبدأ من حادث البداية فنعطيه الرقم (0), ثم نحذف جميع الأسهم المنبثقة عنه فيظهر لنا الحادثان (1) و(6) بدون سوابق, لذلك نعطيهما الرقمين 1و2 [1لـ(1) و2 لـ (6)], ثم نقوم بحذف جميع الأسهم المنبثقة عن (1) فلم نجد أي حادث بدون سوابق, لذلك ننتقل إلى (6) ونحذف جميع الأسهم المنبثقة عنه فيظهر لنا الحادث (5) لذلك نعطيه الرقم (3), وبعدها نحذف الأسهم الصادرة عن (5) فيظهر لنا الحادثان (7) و(4) فنعطيهما الترقيمين 4 و5 [4 لـ(4) و5 لـ(7)], وعندما نحذف الأسهم المنبثقة عن (7) سيظهر لنا الحادث (2) فنعطيه الرقم (6) ويبقى الحادث الأخير الذي يأخذ الرقم (7) وبذلك تأخذ الشبكة المرقمة حسب ترتيب الأنشطة فيها, الشكل (10-9).

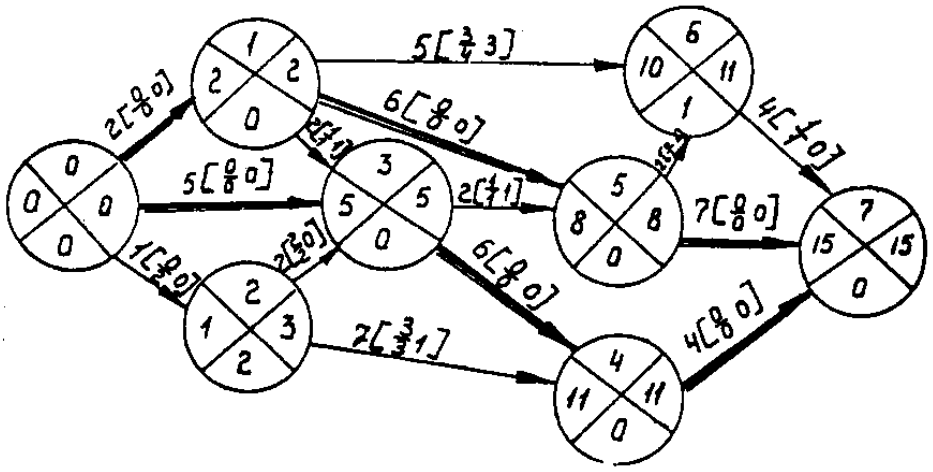
2- نقوم بحساب المؤشرات الزمنية ونسجلها على الشبكة مباشرة حيث نجد أنه عندما نضع $T_0 = 0$ فإن أبكر زمن لتحقيق الحوادث المختلفة يحسب حسب ترتيبها في الترقيم الجديد وانطلاقاً من حادث البداية وهي تساوي:

$T_1 = \text{Max}\ (T_0+T_{01}) = \text{Max}\ (0+2) = 2$

$T_2 = \text{Max}\ (T_0+T_{02}) = \text{Max}\ (0+1) = 1$

$T_3 = Max\ (T_0+T_{03}, T_1+t_{13};\ T_2+t_{23}) = Max\ (0+5;\ 2+2,1+2) = 5$
$T_4 = Max\ (T_3+t_{34}, T_2+t_{24}) = Max\ (5+6,1+7)=11$
$T_5 = Max\ (T_1+t_{15}, T_3+t_{35}) = Max\ (2+6;\ 5+2)= 8$
$T_6 = Max\ (T_1+t_{16}, T_5+t_{56}) = Max\ (2+5,8+2) = 10$
$T_7 = Max\ (T_4+t_{47}, T_5+t_{57}, T_6+t_{67}) = Max\ (11+4;\ 8+5,10+4) = 15$

−3



شكل رقم (10−9)

ثم نقوم بتسجيل هذه الأزمنة في الربع الأيسر لدوائر الحوادث على الشكل (10−9) السابق, أي أن أبكر مدة زمنية لإنجاز المشروع بأكمله هي 15 واحدة زمنية, ولحساب أقصى زمن لتحقيق الحوادث نضع $T'_7 = T_7 = 15$, ونبدأ بحساب هذه الأزمنة انطلاقاً من حادث النهاية حتى نصل إلى p_0.

$$T'_6 = Min(T'_7 - t_{67}) = Min(15-4) = 11$$
$$T'_5 = Min(T'_7 - t_{57}) = Min(15-7) = 8$$
$$T'_4 = Min(T'_7 - t_{47}) = Min(15-4) = 11$$
$$T'_3 = Min(T'_4 - t_{34},\ \ T'_5 - t_{35}) = Min(11-6,\ \ 8-2) = 5$$
$$T'_2 = Min(T'_3 - t_{23},\ \ T'_4 - t_{24}) = Min(5-2,\ \ 11-7) = 3$$
$$T'_1 = Min(T'_3 - t_{13},\ \ T'_5 - t_{15},\ \ T'_6 - t_{16}) = Min(5-2;\ \ 8-6;\ \ 11-5) = 2$$
$$T'_0 = Min(T'_1 - t_{01},\ \ T'_2 - t_{02},\ \ T'_3 - t_{03}) = Min(2-2;\ \ 3-1;\ \ 5-5) = 0$$

وإن هذه الأزمنة هي المسجلة في الربع الأيمن لدوائر الحوادث.

أما بالنسبة لاحتياطي الحوادث حسبها من العلاقة:

$$R_i = T_i' - T_i \qquad (i:1,2,\ldots\ldots,7)$$

ونسجلها على الشبكة مباشرة وهي الأرقام التي في الربع الأسفل.

ولحساب الاحتياطي الكلي للزمن r_{ij} لمختلف الأنشطة نعتمد على العلاقة (9–10) فنجد أن:

$$r_{01} = T_1' - T_0 - t_{01} = 2 - 0 - 2 = 0$$
$$r_{02} = T_2' - T_0 - t_{02} = 3 - 0 - 1 = 2$$
$$r_{03} = T_3' - T_0 - t_{03} = 5 - 0 - 5 = 0$$
$$r_{13} = T_3' - T_1 - t_{13} = 5 - 2 - 2 = 1$$
$$r_{15} = T_5' - T_1 - t_{15} = 8 - 2 - 6 = 0$$
$$r_{16} = T_6' - T_1 - t_{16} = 11 - 2 - 5 = 4$$
$$r_{23} = T_3' - T_2 - t_{23} = 5 - 1 - 2 = 2$$
$$r_{24} = T_4' - T_2 - t_{24} = 11 - 1 - 7 = 3$$
$$r_{34} = T_4' - T_3 - t_{34} = 11 - 5 - 6 = 0$$
$$r_{35} = T_5' - T_3 - t_{35} = 8 - 5 - 2 = 1$$
$$r_{47} = T_7' - T_4 - t_{47} = 15 - 11 - 4 = 0$$
$$r_{56} = T_6' - T_5 - t_{56} = 11 - 8 - 2 = 1$$
$$r_{57} = T_7' - T_5 - t_{57} = 15 - 8 - 7 = 0$$
$$r_{67} = T_7' - T_6 - t_{67} = 15 - 10 - 4 = 1$$

وهي الأرقام المسجلة في أسفل الكسر ضمن القوسين وفوق أسهم الشبكة.

أما بالنسبة للاحتياطيين الآخرين r_{iJ}' و r_{iJ}'' فنلاحظ أن كل منهما معدوم عندما تكون $r_{ij} = 0$ ولهذا يكفي أن نحسبهما للحالات التي تكون فيها $r_{iJ} \neq 0$ وهي:

$$r'_{02} = T_2 - T_0 - t_{02} = 1 - 0 - 1 = 0$$
$$r'_{13} = T_3 - T_1 - t_{13} = 5 - 2 - 2 = 1$$
$$r'_{16} = T_6 - T_1 - t_{16} = 10 - 2 - 5 = 3$$
$$r'_{23} = T_3 - T_2 - t_{23} = 5 - 1 - 2 = 2$$
$$r'_{24} = T_4 - T_2 - t_{24} = 11 - 1 - 7 = 3$$
$$r'_{35} = T_5 - T_3 - t_{35} = 8 - 5 - 2 = 1$$
$$r'_{56} = T_6 - T_5 - t_{56} = 10 - 8 - 2 = 0$$
$$r'_{67} = T_7 - T_6 - t_{67} = 15 - 10 - 4 = 1$$

وهي الأرقام المسجلة في أعلى الكسر ضمن القوسين وفوق أسهم الشبكة.

أما r''_{iJ} فنجد أنها تساوي:

$$r''_{02} = \text{Max}[0,(T_2 - T'_0 - t_{02})] = \text{Max}[0,(1-0-1)] = 0$$
$$r''_{13} = \text{Max}[0,(T_3 - T'_1 - t_{13})] = \text{Max}[0,(5-2-2)] = 1$$
$$r''_{16} = \text{Max}[0,(T_6 - T'_1 - t_{16})] = \text{Max}[0,(10-2-5)] = 3$$
$$r''_{23} = \text{Max}[0,(T_3 - T'_2 - t_{23})] = \text{Max}[0,(5-3-2)] = 0$$
$$r''_{24} = \text{Max}[0,(T_4 - T'_2 - t_{24})] = \text{Max}[0,(11-3-7)] = 1$$
$$r''_{35} = \text{Max}[0,(T_5 - T'_3 - t_{35})] = \text{Max}[0,(8-5-2)] = 1$$
$$r''_{56} = \text{Max}[0,(T_6 - T'_5 - T_{56})] = \text{Max}[0,(10-8-2)] = 0$$
$$r''_{67} = \text{Max}[0,(T_7 - T'_6 - t_{67})] = \text{Max}[0,(15-11-4)] = 0$$

وهي الأرقام المسجلة على يمين الكسر ضمن القوسين فوق أسهم الشبكة.

4- لتحديد المسار الحرج نقوم بتحديد الأنشطة الحرجة انطلاقاً من حادث البداية متتبعين الأنشطة التي يكون فيها $r_{ij} = 0$ فنجد أن الأنشطة الحرجة هي:

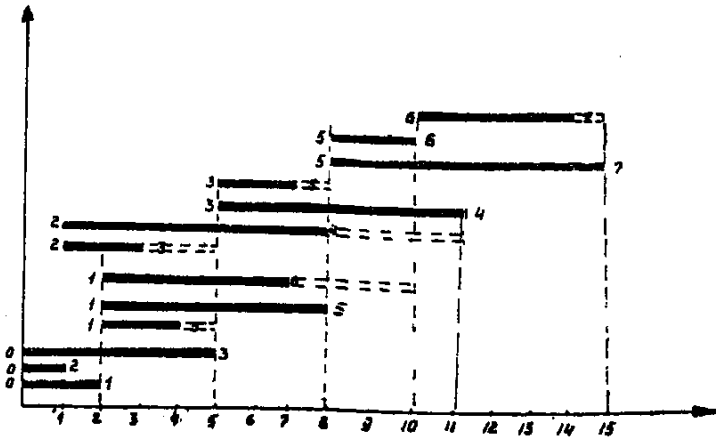
(0,1) ,(0,3) ,(1,5) ,(3,4) ,(4,7) ,(5,7)

وهي تشكل مسارين حرجين هما المشار إليهما بأسهم مضاعفة, أما بقية الأنشطة فهي غير حرجة لأن احتياطها الكلي غير معدوم.

III- تحليل المخطط الشبكي من حيث التكلفة:

1- مدرج الأنشطة:

بعد أن نكون قد حسبنا T_J و T'_J و R_J و r_{ij} و r'_{ij} ثم r''_{ij} لحوادث وأنشطة الشبكة، نقوم بعرض أنشطة هذه الشبكة على شكل مدرج بياني، محوره الأفقي هو الزمن الذي مبدؤه في النقطة $T_O = 0$ ونمثل كل نشاط (i,J) بشريط يبدأ من النقطة التي فاصلتها الزمنية $t_i = T_i$ وينتهي في النقطة التي فاصلتها t_{Ij} + T_i = t_j، أي نمثل كل نشاط بشريط طوله يساوي مدة ذلك النشاط t_{iJ} ويبدأ من نقطة مقابلة لأبكر زمن لتحقيق حادثه (i)، ونرفق طرفي كل شريط ممثل لنشاط (i.j) بالدليلين i و j بحيث نضع i في بدايته و j في نهايه. وحتى يتسنى لنا تنسيق هذه الأشرطة نقوم بتركيبها فوق بعضها من الأسفل إلى الأعلى وذلك حسب تزايد رقم الحادث (i) ثم حسب تزايد رقم الحادث (j)، ونتيجة لهذا الاستعراض نحصل على ما يسمى بمدرج الأنشطة الذي فيه يتوضع لنا طول مدة كل نشاط ومكانه الطبيعي في عملية تنفيذ المشروع، ويستفاد من هذا المدرج في دراسة الموارد البشرية أو المادية اللازمة لتنفيذ الأنشطة التي سيجري تنفيذها بآن واحد (فوق بعضها بعضاً)، وبالتالي إعادة توزيع تلك الأنشطة بحيث لا تتطلب موارد أكثر من الموارد المتاحة، ومع أننا لن نتطرق هنا لمثل هذه المسائل وسنكتفي باستخدام المدرج لتوضيح فكرة النموذج الرياضي الذي سنستعرضه لاحقاً، وكمثال على المدرجات نرسم مدرج الأنشطة للمثال السابق فنحصل على الشكل الآتي:



الشكل (10-10)

ومن هذا الشكل يتضح لنا أن هناك إمكانية لزحزحة أماكن بعض الأنشطة كما أن هناك إمكانية لتمديدها بمقادير معينة (بمقادير الأشرطة المنقطة) بدون أن يؤثر ذلك على المدة الزمنية لإنجاز المشروع ككل T_n . وإن مثل هذه الزحزحة أو التمديد يساعداننا في إيجاد الوضعية الملائمة لجميع الأنشطة التي تجعل تكلفة المشروع أقل ما يمكن أو تخفض من استخدامه للموارد البشرية أو المادية... الخ.

وسنبحث فيما يلي عن التوضع الأمثل للأنشطة والذي يعطينا أصغر تكلفة ممكنة للمشروع وذلك في الحالات الآتية:

أ- أصغر تكلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بالمدة الحرجة T_n.

ب- أصغر تكلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بمدة T أكبر من T_n.

ج- أصغر تكلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بـ T وتكون مدد الأنشطة عشوائية.

د- أقصر مدة للمشروع عندما تكون التكلفة محددة بـ C.

2- النموذج الرياضي لأصغر كلفة عندما تكون مدة المشروع محددة بالمدة الحرجة للمشروع T_n:

لنفترض أن المدة الزمنية لكل نشاط (i,J) محددة تماماً وتساوي: $t_{iJ} = d_{iJ}$ (أو $t_{iJ} = \overline{t_{iJ}}$)، وبناءً على ذلك قمنا بحساب أبكر زمن لتحقيق الحادث (i) وهو T_i وأبكر زمن لتحقيق الحادث (j) وهو T_j وتوصلنا إلى أن مدة المشروع تساوي T_n وأن الأنشطة الحرجة أصبحت معلومة .....الخ.

كما نفترض أن تكلفة النشاط (i,J) في ظل مدته المحددة d_{iJ} هي C_{iJ} ولكن هذه التكلفة تزداد إذا أردنا الإسراع في تنفيذ ذلك النشاط وتنقص إذا مددنا مدة تنفيذه أي أن C_{iJ} تتناسب عكسا مع t_{iJ}، ويمكن التعبير عن علاقتهما بإحدى العلاقتين:

$$c_{iJ} = \frac{a_{iJ}}{t_{iJ}} \qquad (17-10)$$

$$c_{iJ} = -\alpha_{iJ} t_{iJ} + \beta_{iJ} \qquad (\alpha_{iJ} > 0, \beta_{iJ} > 0) \qquad (18-10)$$

ولكن العلاقة الأولى لا تصلح لمسائل البرمجة الخطية (لأنها منحنية) لذلك فإننا نعتبر أن c_{iJ} مرتبطة مع t_{ij} وفق العلاقة الثانية (10−18).

وبما أن الأنشطة غير الحرجة مصحوبة باحتياطي زمني ما، إذن فإنه يمكننا استخدام هذا الاحتياطي لتمديد المدة الزمنية لمعظم الأنشطة غير الحرجة بدون أن يؤثر ذلك على المدة الحرجة T_n للمشروع، وهذا ما يقلل من تكلفة تلك الأنشطة ويقلص من تكلفة المشروع ككل.

وهكذا يمكننا أن نصيغ المسألة على الشكل الآتي:

يطلب استخدام احتياطي الزمن المحسوب ضمن الشروط السابقة وضمن المدة الحرجة للمشروع T_n للحصول على مخطط مثالي لأنشطة المشروع وبحيث تكون تكلفة المشروع أقل ما يمكن.

إن مثل هذا المخطط المثالي يعني أن نجعل معظم الأنشطة حرجة، أي أنه إذا ثبتنا لحظة بداية النشاط T_i، فإن لحظة نهايته T_J يمكن اعتبارها متحولاً مجهولاً ويجب تحديده بحيث يؤدي إلى تمديد المدة t_{ij} مع البقاء على T_n ثابتة، وهذا ما يمكن تطبيقه على جميع الأنشطة غير الحرجة (باستثناء التي تقع بين حادثين حرجين).

وننطلق من أن مدة النشاط (i,J) تساوي:

$$t_{iJ} = T_J - T_i \qquad (19-10)$$

ومن أن $T_O = 0$ وأن $T_n = const$، وأن أبكر زمن T_i لجميع حوادث أي مسار حرج يبقى هو الآخر ثابتاً وأن مدة أي نشاط حرج (أو كان طرفاه واقعين على مسار حرج) هي الأخرى ستبقى ثابتة.

ولهذا نقسم حوادث وأنشطة الشبكة إلى مجموعتين هما:

المجموعة K :

وهي مجموعة الحوادث الواقعة على مسار حرج. ومن الواضح هنا أن $P_O \in K$ وكذلك $P_n \in K$.

المجموعة R:

وهي مجموعة الأنشطة التي يكون أحد طرفيها على الأقل غير واقع على مسار حرج: أي أن R هي:

$$R = \{(i,J) : i \notin K \quad \text{أو} \quad J \notin K\}$$

وهكذا يمكننا صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة على الشكل الآتي:

يطلب إيجاد الحل الذي يعطينا أصغر قيمة لتابع الهدف الآتي:

$$L = \sum_{(i,J)\in R} C_{iJ} = \sum_{(i,J)\in R} [-\alpha_{iJ}(T_J - T_i) + \beta_{iJ}] \Rightarrow Min \qquad (20-10)$$

ضمن الشروط الآتية:

$$T_J - T_i \geq d_{iJ} : \forall (i,J) \in R \qquad (21-10)$$

$$T_J = T'_J = const : \forall J \in K \qquad (22-10)$$

$$T_O = 0$$
$$T_n = const \qquad (23-10)$$

والشروط الفردية:

$$T_J \geq 0 \qquad (24-10)$$

وهو نموذج عادي من نماذج البرمجة الخطية، وعندما نقوم بحله (حسب السمبلكس) نحصل على قيم للمتحولات المجهولة ($T_1 \quad T_2 \quad \ldots\ldots T_{n-1}$) التي تعطينا القيم الجديدة لأبكر زمن لكل حادث غير واقع على مسار حرج وبحيث تكون تكلفة المشروع أقل ما يمكن.

وهذا ما يعطينا المخطط المثالي ذا التكلفة الدنيا من بين المخططات التي يمكن تنفيذها ضمن المدة المحددة بالمدة الحرجة T_n.

3- النموذج الرياضي لأصغر تكلفة عندما تحدد مدته بمدة T (حيث T أكبر من T_n):

لنفترض أن المدة الحرجة للمشروع قد حسبت ضمن الشروط التي تعتبر أن مدة أي نشاط (i,J) محددة بالمقدار d_{Ij} وكانت تساوي T_n ونريد الآن أن نجد المخطط المثالي ذا التكلفة الدنيا والذي يتم تنفيذه ضمن مدة زمنية T.

وما هذه المسألة إلا تعميم للمسألة السابقة. ولكنها تختلف عنها بما يلي:

يجوز لنا أن نتصرف بالمدة الزمنية لجميع الأنشطة بما فيها الأنشطة الحرجة، ولكن بشرط أن تبقى مدة المشروع مساوية للمدة المحددة مسبقاً وهي T، وإذا رمزنا لمجموعة أنشطة الشبكة بـ U فإن تابع الهدف يأخذ الشكل الآتي:

$$L = \sum_{(i,J)\in u}\left[-\alpha_{iJ}\left(T_J - T_i\right)+\beta_{iJ}\right] \Rightarrow Min \qquad (25-10)$$

أما الشروط الخطية فتصبح أعقد مما كانت عليه، حيث أنها لم تعد تقتصر على بعض الأنشطة وأصبحت تشمل جميع الأنشطة في الشبكة بما فيها الأنشطة الحرجة نفسها.

وهكذا نجد أن الشروط الخطية تأخذ الشكل الآتي:

$$T_J - T_i \geq d_{iJ} : (i,J) \in U \qquad (26-10)$$

$$T_O = 0 \qquad (27-10)$$
$$T_n = T$$

$$T_J \geq 0 \qquad (28-10)$$

وهو أيضاً يعتبر نموذجاً عادياً من نماذج البرمجة الخطية، وعندما نحله بطريقة السمبلكس نحصل على المخطط المثالي ذي التكلفة الدنيا من بين المخططات التي يمكن وضعها وتنفيذها خلال مدة لا تتجاوز المدة المحددة T.

مثال (2):

لنأخذ معطيات المثال السابق والذي كنا قد حسبنا فيه كل من T_J و T_n وحددنا الأنشطة الحرجة .....الخ، ووجدنا أن $T_n = T_7 = 15$، لنفترض الآن بأننا نريد أن نجد المخطط المثالي لهذا المثال بحيث يتم تنفيذه في مدة $T = 25$ وبأقل تكلفة ممكنة، ولنفترض أن تكلفة كل نشاط فيه مرتبطة مع مدته وفق العلاقات الآتية:

$C_{01} = -10\ t_{01} + 200$
$C_{02} = -3t_{02} + 40$
$C_{03} = -5t_{03} + 150$
$C_{13} = -2t_{13} + 70$
$C_{23} = -6t_{23} + 170$
$C_{34} = -2t_{34} + 90$
$C_{24} = -4t_{24} + 140$
$C_{15} = -t_{15} + 80$
$C_{35} = -5t_{35} + 120$
$C_{16} = -2t_{16} + 60$
$C_{56} = -5t_{56} + 50$
$C_{47} = -9t_{47} + 180$
$C_{57} = -5t_{57} + 140$
$C_{67} = -9t_{67} + 200$

الحل:

من الواضح أن هذا المثال ينطبق على الحالة– ج– لأن مدة المشروع المقترحه T = 25 أكبر من مدته الحرجة $T_n = 15$، وعند حساب تكلفته وفقاً للمدد الزمنية المحددة على الشبكة وللمعادلات السابقة نجد أنها تساوي 1467، ونصيغ المسألة كما يلي:

يطلب إيجاد قيم المتحولات ($T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$) التي تعطينا أصغر تكلفة أو قيمة لتابع الهدف الآتي:

$$L = \sum_{(i,J)\in U}\left(-\alpha_{iJ}t_{iJ} + \beta_{iJ}\right) \Rightarrow \text{Min}$$

ولكن بما أن $t_{iJ} = T_J - T_i$ وأن $T_O = 0$, $T = 25$، فإنه لوقمنا بتعويض هذه القيم في تابع الهدف والشروط لوجدنا أن المسألة تصبح كما يلي:

يطلب إيجاد الحل الذي يعطينا أصغر قيمة للتابع:

$$L = -5T_1 + 7T_2 - 6T_3 + 3T_4 + 4T_5 + 2T_6 + 115 \rightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط الآتي:

$T_1 \geq 2$	$T_5 - T_1 \geq 6$
$T_2 \geq 1$	$T_5 - T_3 \geq 2$
$T_3 \geq 5$	$T_6 - T_1 \geq 5$
$T_3 - T_1 \geq 2$	$T_6 - T_5 \geq 2$
$T_3 - T_2 \geq 2$	$25 - T_4 \geq 4$
$T_4 - T_3 \geq 6$	$25 - T_5 \geq 7$
$T_4 - T_2 \geq 7$	$25 - T_6 \geq 4$

والشروط $T_J \geq 0$

ويمكننا تخفيض عدد الشروط الخطية بالتخلص من المتراجحات التي تحوي على متحول واحد (الثلاثة الأولى والثلاثة الأخيرة) وذلك بإجراء التحويلات الآتية:

$t_1 = T_1 - 2$	$t_2 = T_2 - 1$	$t_3 = T_3 - 5$
$t_4 = 21 - T_4$	$t_5 = 18 - T_5$	$t_6 = 21 - T_6$

ومن الملاحظ من هذه الفرضيات أن: $t_i \geq 0$ وإذا قمنا بتعويض هذه القيم في تابع الهدف وفي الشروط السابقة فإننا نحصل على النموذج المكافئ الآتي:

$$L = -5t_1 + 7t_2 - 6t_3 - 3t_4 - 4t_5 - 2t_6 + 1259$$

ضمن الشروط التالية:

$t_3 - t_1 + 1 \geq 0$ $\quad\quad$ $- t_5 - t_1 + 10 \geq 0$

$t_3 - t_2 + 2 \geq 0$ $\quad\quad$ $- t_5 - t_3 + 11 \geq 0$

$- t_4 - t_3 + 10 \geq 0$ $\quad\quad$ $- t_6 - t_1 + 14 \geq 0$

$- t_4 - t_2 + 13 \geq 0$ $\quad\quad$ $- t_6 + t_5 + 1 \geq 0$

والشروط $t_j \geq 0$

ولإيجاد الحل المثالي لهذا النموذج الخطي نحله بوساطة طريقة السمبلكس، لذلك نحول المتراجحات إلى الشكل $\leq$ ثم نقوم بإدخال ثمانية متحولات إضافية على المتراجحات الجديدة وهي $y_1\ y_2 \ldots\ldots y_8$ ، ونحول تابع الهدف إلى اكبر قيمة فيأخذ النموذج الشكل الآتي:

$$Z + 1259 = 5t_1 - 7t_2 + 6t_3 + 3t_4 + 4t_5 + 2t_6 \rightarrow Max$$

ضمن الشروط التالية:

$t_1 - t_3 + y_1 = 1$ $\quad\quad$ $t_1 + t_5 + y_5 = 10$

$t_2 - t_3 + y_2 = 2$ $\quad\quad$ $t_3 + t_5 + y_6 = 11$

$t_3 + t_4 + y_3 = 10$ $\quad\quad$ $t_1 + t_6 + y_7 = 14$

$t_2 + t_4 + y_4 = 13$ $\quad\quad$ $- t_5 + t_6 + y_8 = 1$

والشروط $t_j \geq 0$

نضع هذه المعادلات في جدول السمبلكس المعدل التالي:

المتحولات / المعادلات	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	الثوابت
y_1	1	0	-1	0	0	0	1
y_2	0	1	-1	0	0	0	2
y_3	0	0	1	1	0	0	10
y_4	0	1	0	1	0	0	13
y_5	1	0	0	0	1	0	10
y_6	0	0	1	0	1	0	11
y_7	1	0	0	0	0	1	14
y_8	0	0	0	0	-1	1	1
تابع الهدف	5	-7	6	3	4	2	Z+ 1259

وبملاحظـة أن أكبـر عنصـر موجـب فـي السـطر الأخيـر هـو الـ (6) المقابـل لـ t_3 إذن يكون عمود t_3 هو عمود الارتكاز وبحساب θ من جراء تقسيم عناصر عمود الثوابت على عناصر عمود الارتكاز واختيار أصغرها، نجد أن عنصر الارتكاز سيكون هو العنصر (1) في السطر الثالث والعمود الثالث. لذلك نقوم بتبديل t_3 بـ y_3 فنحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / المعادلات	t_1	t_2	y_3	t_4	t_5	t_6	الثوابت
y_1	1	0	1	1	0	0	11
y_2	0	1	1	1	0	0	12
t_3	0	0	1	1	0	0	10
y_4	0	1	0	1	0	0	13
y_5	1	0	0	0	1	0	10
y_6	0	0	-1	-1	1	0	1
y_7	1	0	0	0	0	1	14
y_8	0	0	0	0	-1	1	1
تابع الهدف	5	-7	-6	-3	4	2	Z+ 1199

وبملاحظة أن اكبر عنصر موجب في السطر الأخير هو الـ (5) المقابل لـ t_1 إذن يكون عمود t_1 هو عمود الارتكاز، ومن جراء تقسيم عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود الأول واختيار أصغرها نجد أن عنصر الارتكاز هو العنصر (1) الواقع في السطر الخامس نقوم بإجراء الحسابات فنحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / المعادلات	y_5	t_2	y_3	t_4	t_5	t_6	الثوابت
y_1	-1	0	1	1	-1	0	1
y_2	0	1	1	1	0	0	12
t_3	0	0	1	1	0	0	10
y_4	0	1	0	1	0	0	13
t_1	1	0	0	0	1	0	10
y_6	0	0	-1	-1	1	0	1
y_7	-1	0	0	0	-1	1	14
y_8	0	0	0	0	-1	1	1
تابع الهدف	-5	-7	-6	-3	-1	2	Z+ 1149

وبملاحظة أن العنصر الموجب الذي بقي في السطر الأخير هو العنصر (2) المقابل لـ t_6، ومنه نجد أن عنصر الارتكاز هو (1) في السطر الثامن وبإجراء تبديل t_6 مع y_8 وبعد الحسابات نحصل على الجدول التالي:

المتحولات / المعادلات	y_5	t_2	y_3	t_4	t_5	y_8	الثوابت
y_1	0	0	1	1	-1	0	1
y_2	0	1	1	1	0	0	12
t_3	0	0	1	1	0	0	10
y_4	0	1	0	1	0	0	13
t_1	1	0	0	0	1	0	10
y_6	0	0	-1	-1	1	0	1
Y_7	0	0	0	0	0	-1	13
t_6	0	0	0	0	-1	1	1
تابع الهدف	-5	-7	-6	-3	+1	-2	Z+ 1147

وهنا نلاحظ أنه ظهر عنصر موجب هو (1) المقابل لـ t_5، وبعد تحديد عنصر الارتكاز المشار إليه نقوم بحساب عناصر الجدول الجديد الآتي:

المتحولات / المعادلات	y_5	t_2	y_3	t_4	y_6	y_8	الثوابت
y_1	0	0	0	0	1	0	2
y_2	0	1	1	1	0	0	12
t_3	0	0	1	1	0	0	10
y_4	0	1	0	1	0	0	13
t_1	1	0	1	1	-1	0	9
t_5	0	0	-1	-1	1	0	1
y_7	0	0	0	0	0	-1	13
t_6	0	0	-1	-1	1	1	2
تابع الهدف	-5	-7	-5	-2	-1	-2	Z+ 1146

وبذلك يكون قد توصلنا إلى الحل المثالي المطلوب ونحصل عليه بوضع:

$t_2 = t_4 = y_3 = y_5 = y_6 = y_8 = 0$

وهذا يعطينا أن المتحولات الأخرى تساوي:

$t_1 = 9,\ \ t_3 = 10,\ \ t_5 = 1,\ \ t_6 = 2,\ \ y_1 = 2,\ \ y_2 = 12,\ y_4 = 13,\ y_7 = 13$

ومنها نجد أن الحل المثالي هو:

$t_1 = 9,\quad t_2 = 0,\quad t_3 = 10,\quad t_4 = 0,\quad t_5 = 1,\quad t_6 = 2$

وهو يعطينا قيمة أكبر للتابع Z نحسبها من:

$$Z + 1146 = 0 \Rightarrow \quad Z = -L = -1146 \Rightarrow \quad L = 1146$$

ومن هذا الحل ومن الفرضيات السابقة نجد أن أبكر زمن لحوادث الشبكة أصبح يساوي:

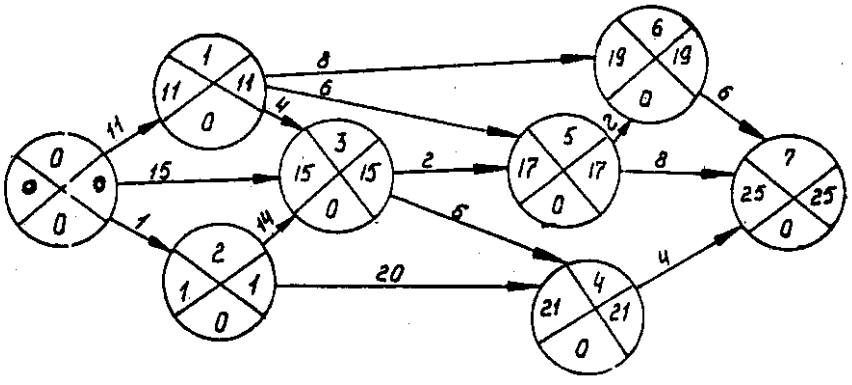
$T_1 = 11,\quad T_2 = 1,\quad T_3 = 15,\quad T_4 = 21,\quad T_5 = 17,\quad T_6 = 19$

أما T_7 فهي محددة منذ البداية (كشرط للمسألة) وتساوي $T_7=25$، وهكذا نجد أن تمديداً معيناً لمدة المشروع ولمدد الأنشطة فيه أدى إلى إنقاص تكلفة المشروع حتى بلغت 1146 بدلاً من 1467.

وحتى نستطيع رسم مدرج لأنشطة الشبكة نحسب المدد الجديدة لأنشطة الشبكة فنجد أن:

$t_{01} = T_1 - T_0 = 11$
$t_{02} = T_2 - T_0 = 1$
$t_{03} = T_3 - T_0 = 15$
$t_{13} = T_3 - T_1 = 4$
$t_{15} = T_5 - T_1 = 6$
$t_{16} = T_6 - T_1 = 8$
$t_{23} = T_3 - T_2 = 14$
$t_{24} = T_4 - T_2 = 20$
$t_{34} = T_4 - T_3 = 6$
$t_{35} = T_5 - T_3 = 2$
$t_{47} = T_7 - T_4 = 4$
$t_{56} = T_6 - T_5 = 2$
$t_{57} = T_7 - T_5 = 8$
$t_{67} = T_7 - T_6 = 6$

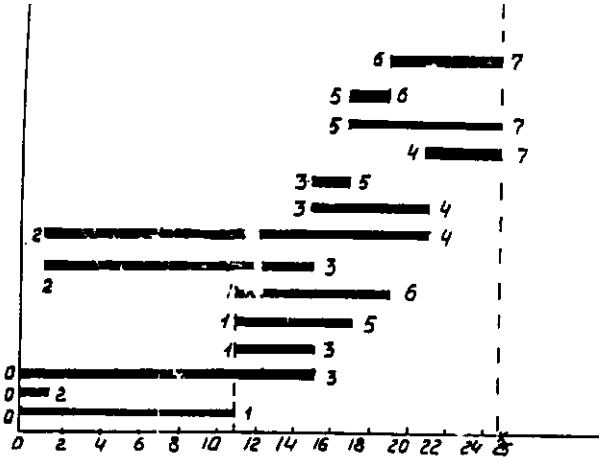
أي أن المخطط المثالي لأصغر تكلفة عندما $T_7 = 25$ هو المخطط التالي:



الشكل رقم (10–11)

ومن الواضح أن جميع أنشطة هذه الشبكة أصبحت حرجة, أي أن المخطط الشبكي أصبح مخططاً صلباً.

وسنقوم الآن برسم مدرج لأنشطة هذا المخطط الأخير فنحصل على المدرج المبين على الشكل رقم (10–12).

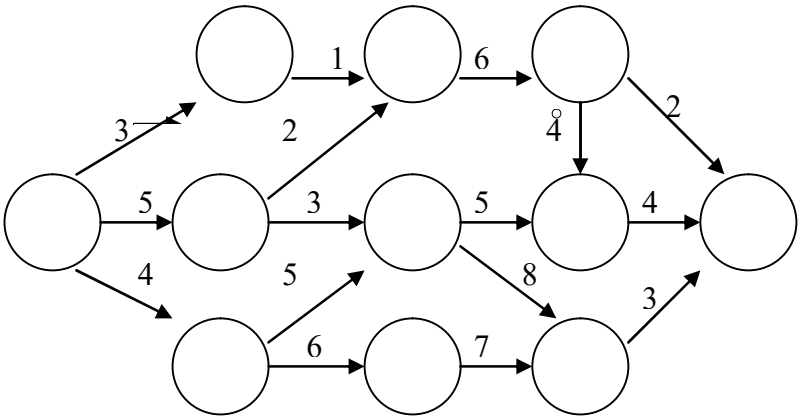


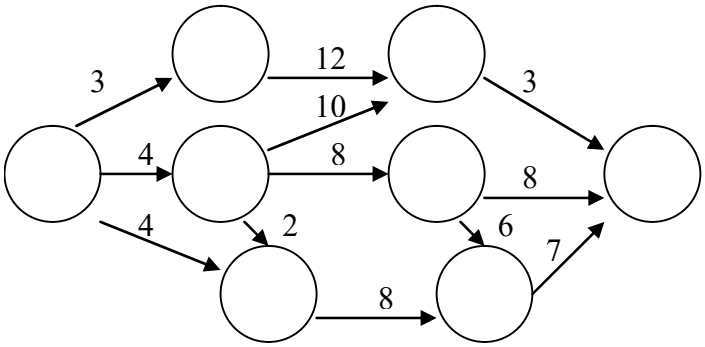
الشكل رقم (10–12)

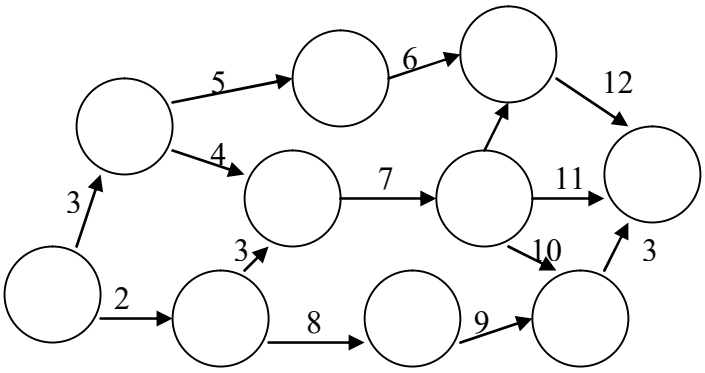
وأخيراً نشير إلى أن هذه المسألة تأخذ طابعاً مختلفاً تماماً عما سبق عندما نشترط أن تكون مدة المشروع أصغر من المدة الحرجة $T < T_n = 15$ ونترك أمر البحث عن الحل المثالي لهذه الحالة ولنفس المثال للقارئ, علماً بأن مثل هذه الحالة قد تكون غير قابلة للحل.

تمرينات

1 -أوجد المسار الحرج للشبكات الآتية:

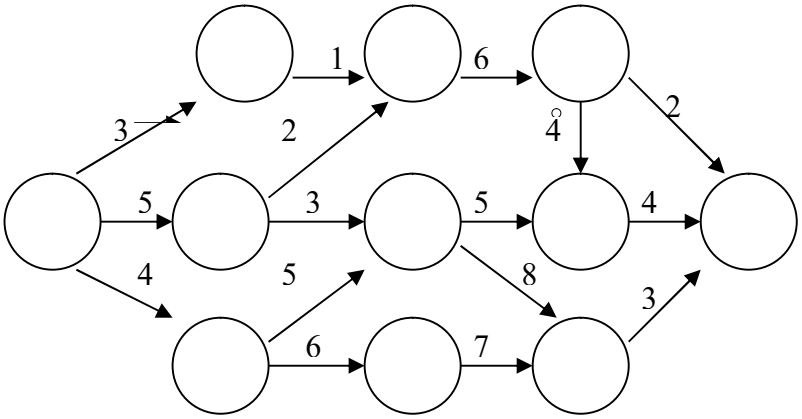


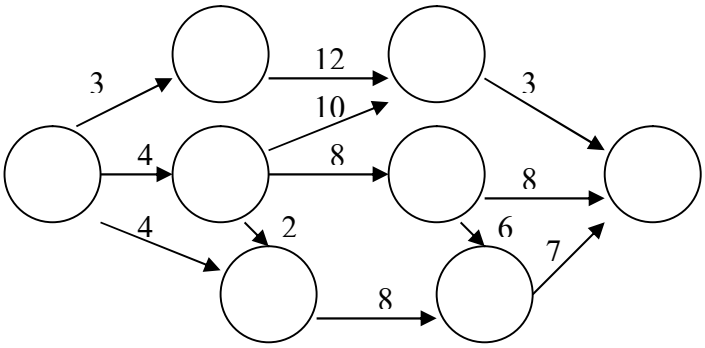


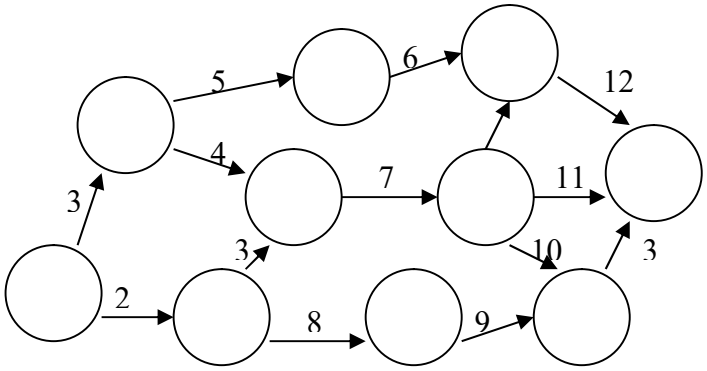


تمرينات

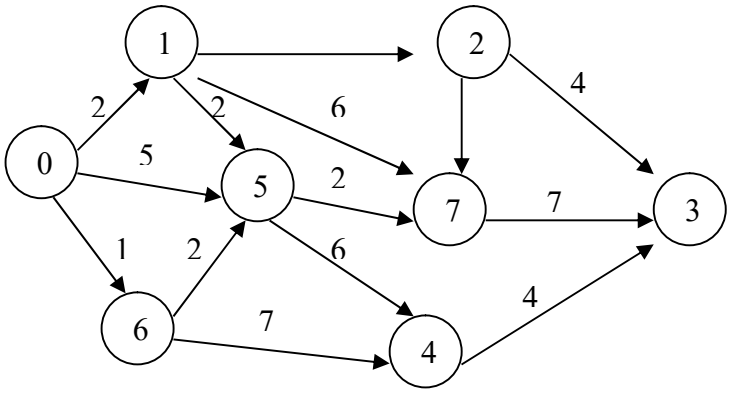
1- أوجد المسار الحرج للشبكات الآتية:







2- أوجد المخطط الشبكي ذا التكلفة الصغرى لإنجاز الشبكة الآتية:

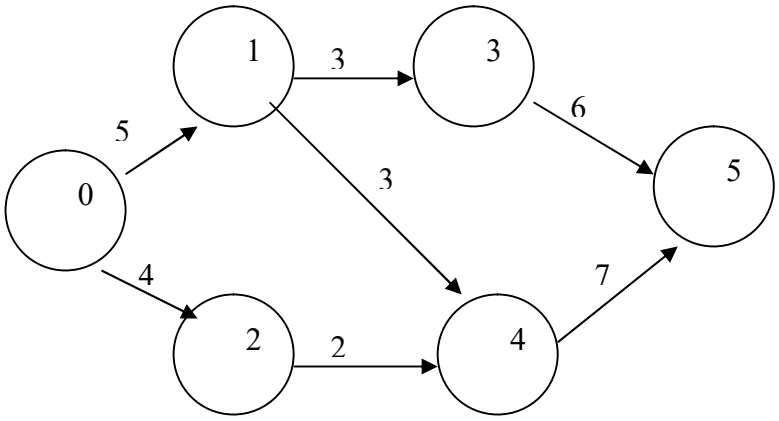


وذلك خلال مدة تساوي المدة الحرجة T_n وبفرض أن تكلفة الأنشطة C_{iJ} مرتبطة مع مددها الزمنية وفق العلاقة:

$$C_{iJ} = \frac{-i}{i+J} t_{iJ} + 5$$

3- أعد نفس المسألة السابقة على أن يكون التنفيذ ضمن مدة محددة.

4- أوجد المخطط ذا التكلفة الصغرى لإنجاز الشبكة الآتية:

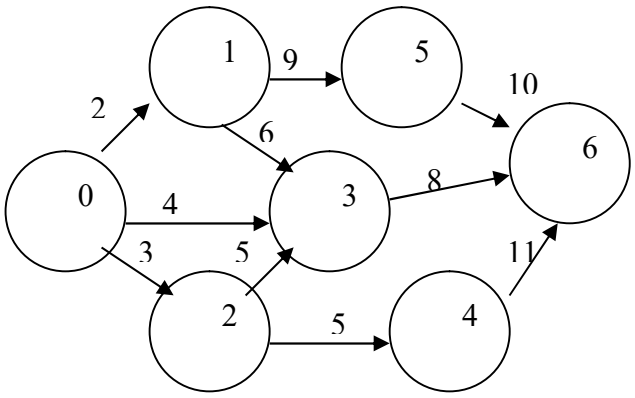


وذلك ضمن مدة زمنية محددة T = 18 وبفرض أن تكلفة الأنشطة مرتبطة مع مددها الزمنية بالعلاقة الآتية:

$$C_{iJ} = \frac{-1}{i+J} t_{iJ} + 10$$

حيث إن i,J هما دليل دليلا الأنشطة الحرجة وغير الحرجة التي ستدخل في النموذج الرياضي لهذه المسألة.

5- أوجد المخطط ذي التكلفة الصغرى لإنجاز الشبكة الآتية:



وذلك في مدة تساوي المدة الحرجة T_n, وبفرض أن تكلفة الأنشطة C_{iJ} مرتبطة مع مددها الزمنية وفق العلاقة:

$$C_{iJ} = -\frac{2}{i+J} t_{iJ} + 6$$

حيث أن i و j هما دليلا الأنشطة غير الحرجة والتي يمكن تحديد مددها الزمنية.

جدول الأنشطة لبناء منزل صغير

اسم النشاط	حادث انطلاقه	حادث استقراره	الأنشطة السابقة	الأنشطة اللاحقة	مدة التنفيذ	الكلفة
الحصول على الرخصة	p_0	1	-	(1,2)	t_{01}	C_{01}
حفر الأساس	1	2	(0,1)	(2,3)(2,4)	t_{12}	C_{12}
تمديد المجاري	2	3	(1,2)	-	t_{23}	C_{23}
تدعيم المجاري	2	4	(1,2)	(4,5)	t_{24}	C_{24}
إقامة الأعمدة	4	5	(2,4)	(5,6)	t_{45}	C_{45}
تشييد الجدران	5	6	(4,5)	(6,7)	t_{56}	C_{56}
إقامة قالب السكن	5	7	(4,5)	(7,8) (7,9) (7,10)	t_{45}	C_{45}
سكب السطح	6	7	(5,6)	(7,8) (7,9) (7,10)	t_{67}	C_{67}
تمديد شبكة الكهرباء	7	8	(6,7)	-	t_{78}	C_{68}
تمديد شبكة المياه	7	9	(5,6)	(9-10)	t_{79}	C_{69}
تركيب النوافذ والأبواب	7	10	(7,9)	(10-11)	t_{710}	C_{610}
ردم الأرضية	9	10	(7,9)	(10-11)	t_{910}	C_{910}
تلبيس الجدران	10	11	(0,10)(7,10)	(11-12)	$t_{10,11}$	$C_{10,11}$
تبليط الأرض	11	12	(10,11)	(12-13)	$t_{11,12}$	$C_{11,12}$
دهان المنزل	12	13	(11,12)	-	$t_{12,13}$	$C_{12,13}$

الفصل الحادي عشر
سياقات بواسون وماركوف

إن تطور السياقات أدى إلى ظهور العديد من السياقات العشوائية التي يمكن جمعها تحت عدد من التسميات أو الأنواع, كالآتي:

1- سياقات (بواسون).
2- سياقات (ماركوف).
3- سياقات (غاوص).
4- سياقات (براون – فينر).
5- السياقات المتفرعة.

وكل واحد من هذه الأنواع يشمل مجموعة كبيرة من السياقات العشوائية التي لها خصائص غيرها عن غيرها. وسنحاول باختصار أن نستعرض بعض هذه السياقات وهي:

سياقات بواسون:

إن سياق بواسون هو تيار من الحوادث العشوائية المنقطعة يتوارد باستمرار وتسجل حوادثه بحسب تواردها، وأفضل مثال على ذلك المكالمات الهاتفية الواردة على مركز الهاتف، أو سيل الالكترونات المنبثقة عن القطب الموجب في لمبة كهربائية أو جزئيات α الناتجة عن تحلل مادة مشعة أو توارد الناس على طلب الخدمات ....الخ.

تعريف سياق بواسون:

يعرف سياق بواسون بأنه أي سياق تتصف حوادثه بالخواص الآتية:

التجانس والانتظام:

أي أنه إذا أخذنا أي مجال [t_0, $t_0 + t$] طوله t وبدايته t_0 فإن احتمال أن يكون عدد الحوادث التي يمكن أن تقع ضمن هذا المجال مساويا لـ k (حيث $k = 0,1,2, \ldots$)، يتعلق فقط بطول المجال t ولا يتعلق ببدايته t_0.

وعندما يكون هذا الشرط محققاً فإننا سنرمز إلى احتمال أن يحدث k حادثاً في المجال الذي طوله t بالرمز $P_k(t)$، ومن الواضح هنا أن$P_k(t)$ غير سالب وأن:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

مما سبق نستنتج أن $P_k(t)$ يكون متساوياً بالنسبة إلى مجالين لهما الطول t نفسه، ولهذا يسمى السياق سياقاً متجانساً أو منتظماً.

الاستقلال:

إذا أخذنا اللحظات الزمنية الآتية:

$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \ldots < t_m$

وأخذنا الفترات غير المتقاطعة الآتية:

$[t_0, t_1[, [t_1, t_2[, [t_2, t_3[\ldots [t_{m-1}, t_m]$

ورمزنا إلى عدد الحوادث التي يمكن أن تقع في كل منها بالرموز:

$k_1, k_2, k_3, \ldots . k_m$

حيث إن: k_j: 0, 1, 2, ...

فإن الكميات k_j تكون متحولات عشوائية ومستقلة عن بعضها بعضاً، وهذا يعني أن السياق الذي يتصف بهذه الخاصة لا يسمح بأن تؤثر أو تتأثر احتمالات حوادث فترة ما بحدوث أو عدم حدوث حوادث فترة مجاورة لها، ويكون لدينا:

$P(k_1 \cap k_2 \cap k_3) = P(k_1) \cdot P(k_2) \cdot P(k_3)$ ……..

إن هذه الخاصة تؤكد استقلال قيم السياق في أي مجالين غير متقاطعين، كما أن الخاصة الأولى تؤكد ثبات قانون التوزيع الاحتمالي في المجالات المتساوية الطول.

الاعتيادية:

إذا افترضنا أن $\varphi(t)$ هو احتمال أن يحدث أكثر من حادثين في مجال طوله t أي أن:

$$\varphi(t) = p_2(t) + p_3(t) + \ldots \qquad (1-11)$$

وبما أن $\sum_{k=}^{\infty} p_k(t) = 1$ فيكون:

$$\varphi(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t) \qquad (1-11)$$

فإن:

$$\frac{\varphi(t)}{t} \underset{t\to 0}{\to} 0 \qquad (2-11)$$

أي أنه عندما يصبح t صغيراً بشكل لا نهائي فإن $\varphi(t)$ يصبح صغيراً من مرتبة أعلى، وهذا يعني أن احتمال أي يحدث حادثان أو أكثر في مجال صغير جداً يساوي الصفر.

التناسب الاحتمالي:

وهو أن يكون احتمال وجود حادث واحد في مجال صغير جداً طوله t يتناسب تقريباً مع t وبعبارة أخرى يكون:

$$\frac{P_1(t)}{t} \underset{t\to 0}{\to} \lambda \qquad :\lambda > 0 \qquad (3-11)$$

استخراج قانون التوزيع لسياقات بواسون:

انطلاقاً من الخواص الأربع السابقة سنبرهن على أن عدد الحوادث k التي يمكن أن تظهر في أي مجال طوله t يخضع لتوزيع بواسون المعروف، أي سنبرهن على أن:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k_!} . e^{-\lambda t} \qquad (4-11)$$

نحسب أولاً احتمال ألا يقع أي حادث في المجال [0,t]، لذلك نعطي المجال السابق تزايداً قدره Δt، ولنحسب الاحتمال $P_0(t + \Delta t)$ أي احتمال عدم وقوع حادث في المجال $[0, t + \Delta t]$.

من الواضح أن المجال $[0, t + \Delta t]$ مؤلف من المجالين غير المتقاطعين $[0, t[$ و $[t, t + \Delta t]$، وبحسب الخاصة الثانية فإن احتمال ألا يقع أي حادث في $[0, t + \Delta t]$ يساوي:

$$P_0 (t + \Delta t) = P_0 (t) P_0 (\Delta t) \qquad (5-11)$$

من العلاقة (11−1) نجد أن:

$$P_0 (\Delta t) = 1- P_1 (\Delta t) - \varphi (\Delta t) \qquad (6-11)$$

اعتماداً على الخاصة الرابعة والعلاقة (11−3) نجد أنه يمكننا كتابة $P_1(\Delta)$ على الشكل الآتي:

$$P_1 (\Delta t) = (\lambda + \varepsilon_1) \Delta t \qquad (7-11)$$

ومن العلاقة (11−2) نجد أنه يمكننا أن نكتب $\varphi(t)$ على الشكل الآتي:

$$\varphi (\Delta t) = \varepsilon_2 \Delta t \qquad (8-11)$$

حيث أن ε_1 وε_2 ينتهيان إلى الصفر عندما $\Delta t \to 0$، وبالتعويض في العلاقة (11−6) نحصل على:

$$P_0 (\Delta t) = 1- (\lambda + \varepsilon_1) \Delta t - \varepsilon_2 \Delta t \qquad (9-11)$$

ومنه نجد أن العلاقة (11—5) تأخذ الشكل الآتي:

$$P_0 (t + \Delta t) = P_0 (t) [1- (\lambda + \varepsilon_1) \Delta t - \varepsilon_2 \Delta t] \qquad (10-11)$$

ولحساب تفاضل P_0 أو تزايده المقابل للتزايد Δt نجد أن:

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -[(\lambda+\varepsilon_1)+\varepsilon_2].P_0(t) \qquad (11-11)$$

وعندما $\Delta t \to 0$ فإن العلاقة (11−11) تنتهي إلى المعادلة التفاضلية الآتية:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \qquad (12-11)$$

ولحلها نقوم بما يلي:

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

$$[\ln P_0(t)]' = -\lambda \qquad (13-11)$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda t$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

ولمتابعة البرهان سنبحث عن احتمال أن يقع k حادثاً في المجال $[0, t + \Delta t]$، وهذا يكافئ القول أن يقع l حادثاً في المجال $[0, t[$ و k-l حادثاً في المجال $[t, t + \Delta t]$ بحيث يكون مجموعها k حادثاً في المجال $[0, t + \Delta t]$، وبحسب دستور الاحتمال الكلي فإن وقوع k حادثاً في المجال $[0, t + \Delta t]$ يساوي:

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)\, P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t) \,.\, P_1(\Delta t) + R \qquad (14-11)$$

حيث أن R يساوي:

$$R = P_{k-2}(t)\, P_2(\Delta t) + P_{k-3}(t) \,.\, P_3(t) + \ldots P_0(t).\, P_k(\Delta t) \qquad (15-11)$$

ومن الواضح أن R تحقق المتراجحة الآتية:

$$0 < R \le P_2(\Delta t) + P_3(\Delta t) + \ldots P_k(\Delta t) \le \varphi(\Delta t) \qquad (16-11)$$

حيث أن $\varphi(\Delta t)$ هو التابع المعرف بالعلاقة (11−9) الذي يساوي:

$$\varphi(\Delta t) = \varepsilon_2 \Delta t \Rightarrow 0 \le R \le \varepsilon_2 \Delta t$$

أي أن R تحقق العلاقة الآتية: $0 \le \frac{R}{\Delta t} \le \varepsilon_2$ وحيث أن $\varepsilon_2 \to 0$ عندما $\Delta t \to 0$

واعتماداً على العلاقتين (11−7) و (11−9) نجد أن العلاقة (11−14) تأخذ الشكل الآتي:

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)\,[1-(\lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,\Delta t] + P_{k-1}(t)\,[(\lambda + \varepsilon_1)\,\Delta t] + R$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) P_k(t) + (\lambda + \varepsilon_1) P_{k-1}(t) + \frac{R}{\Delta t} \qquad (17-11)$$

وعندما تنتهي $\Delta t \to 0$ فإن العلاقة (11−17) تنتهي إلى المعادلة التفاضلية الآتية:

$$P'_k(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) \qquad (11-18)$$

وهي جملة لا نهائية من المعادلات التفاضلية الخطية تتميز بأن شروطها الابتدائية هي $P_k(0) = 0$ وذلك عندما $k > 0$، أما عندما $k = 0$ فإن $P_0(0) = 1$، ولإيجاد الحل العام لـ (11−18) نعتمد على التابع المولد للاحتمالات $U(t,x)$ الذي يكتب على شكل سلسلة لا نهائية كما يلي:

$$U(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, x^k \qquad (11-19)$$

وباشتقاقها نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} P'_k(t)\, x^k \qquad (11-20)$$

وبما أنه عندما $k > 0$ فإن العلاقة (11−18) تعطينا:

$$P'_k(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$$

أما من أجل $k = 0$ فإن العلاقة (11−13) تعطينا أن:

$$P'_0(t) = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda P_0(t)$$

واعتماداً على ذلك يمكننا كتابة العلاقة (11−20) كما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda P_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [-\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)]\, x^k$$

$$= -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, x^k + \lambda x \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(t)\, x^{k-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda u + \lambda x u = \lambda (x-1) \cdot u$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda (x-1) \qquad (11-21)$$

وبمكاملة الطرفين بالنسبة إلى t وفي المجال $[0,t]$ نحصل على:

$$\ln u(x,t) - \ln u(x,0) = \lambda (x-1)\, t \qquad (22-11)$$

وبملاحظة أن $P_0(0) = 1$ و $P_k(0) = 0$ عندما $k > 0$ فإننا نجد من العلاقة (19−11) أن:

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)\, x^k = 1 \qquad \Rightarrow \quad \ell n\, u(x,0) = 0 \qquad (23-11)$$

ولهذا فإن العلاقة (21−11) تأخذ الشكل الآتي: $\ln u(x,t) = \lambda (x-1)\, t$

ومنها نجد أن: $u(x,t) = e^{\lambda (x-1) t} = e^{-\lambda t}.e^{\lambda t x}$

وباستبدال $e^{\lambda t x}$ بمنشوره بحسب سلسلة (تايلور) نجد أن:

$$u(x,t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k \qquad (24-11)$$

وبمقارنة (24−11) مع (19−11) نستنتج أن:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (25-11)$$

وهو قانون توزيع بواسون المعروف وبذلك يكون قد تم البرهان على أن السياق x (t) الذي يتصف بالخواص السابقة يتميز بأن احتمال أن يقع k حادثاً في المجال [0, t] يعطى بوساطة قانون توزيع بواسون السابق.

وإذا رمزنا بـ $x(t)$ إلى عدد الحوادث التي يمكن أن تقع في المجال [0, t] فإن x (t) يأخذ قيماً صحيحة ومتزايدة مع تزايد t، وإن:

$$P[x(t) = k] = \frac{(\lambda t)^K}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (26-11)$$

توابع القيم المميزة لسياقات بواسون:

لمتابعة دراسة خواص هذا السياق نحسب توابع قيمه المميزة، فنجد أن تابعي التوقع الرياضي والتباين يساويان كما هو معروف:

$$\mu_x(t) = \lambda t \qquad (27-11)$$

$$D_X(t) = \lambda t \qquad (28-11)$$

ولإيجاد تابع العزم الارتباطي للمقطعين (للسطحين) المقابلين للمجالين: [o,t1] و[o,t1]. (حيث إن: $t_1<t_2$) نلاحظ أن:

$$\mu_x(t_1) = \lambda t_1 \qquad \mu_x(t_2) = \lambda t_2$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}_x(t_1,t_2) &= E\{[x(t_1)-\lambda t_1][x(t_2)-\lambda t_2]\}\\ &= E[x(t_1)x(t_2)]-\lambda t_2 E[x(t_1)]-\lambda t_1 E[x(t_2)]-\lambda t_1 t_2\\ &= E[x(t_1)\cdot x(t_e)]-\lambda t_2(\lambda t_1)-\lambda t_1[\lambda t_2]+\lambda t_1 t_2\end{aligned}$$

أي أن:

$$\operatorname{cov}_X(t_1,t_2) = E[x(t_1).x(t_2)]-\lambda^2 t_1 t_2 \qquad (29-11)$$

ولحساب التوقع $E[(x(t_1).x(t_2)]$ نلاحظ أن $x(t_1)$ و $x(t_2)$ غير مستقلين وذلك لأنهما يقابلان مجالين متداخلين. ولكننا نلاحظ أن:

$$x(t_2) = x(t_1) + [x(t_2) - x(t_1)]$$

وأن $x(t_1)$ و$[x(t_2) - x(t_1)]$ مقطعان (سطحان) مستقلان لأنهما يقابلان مجالين غير متقاطعين هما $[0, t_1]$ و $[t_1, t_2]$، وبذلك نجد أن:

$$\begin{aligned}E[x(t_1)\,x(t_2)] &= E\{x^2(t_1)+x(t_1)[x(t_2)-x(t_1)]\}\\ &= E[x^2(t_1)]+E[x(t_1)]\cdot E[x(t_2)-x(t_1)]\\ &= E[x^2(t_1)]+\lambda t_1(\lambda t_2-\lambda t_1)\end{aligned}$$

وبما أنه لدينا علاقة تربط التباين مع العزوم هي:

$$E[x_2^2(t_1)] = D_x(t_1)+\mu_x^2(t_1) = \lambda t_1+\lambda^2 t_1^2$$

وبذلك نجد أن:

$$\begin{aligned}E[x(t_1)\,x(t_2)] &= \lambda t_1+\lambda^2 t_1^2+\lambda t_1(\lambda t_2-\lambda t_1)\\ E[x(t_1)\,x(t_2)] &= \lambda^2 t_1 t_2+\lambda t_1\end{aligned} \qquad (30-11)$$

وبالتعويض في (11−29) نجد أن:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}_x(t_1,t_2) &= \lambda^2 t_1 t_2+\lambda t_1-\lambda^2 t_1 t_2\\ \operatorname{cov}_x(t_1,t_2) &= \lambda t_1\end{aligned} \qquad (31-11)$$

حيث $t_1 < t_2$ كما افترضنا سابقاً.

وعندما $t_1 = t_2 = t$ فإننا نحصل على التباين Dx(t) الذي يساوي:

$$Dx(t) = Vx(t,t) = \lambda t$$

وبذلك يكون تابع الارتباط المعياري مساوياً لـ:

$$R(t_1,t_2) = \frac{V_x(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}} = \frac{\lambda t_1}{\sqrt{\lambda t_1 \cdot \lambda t_2}}$$

$$R(t_1,t_2) = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \qquad (32-11)$$

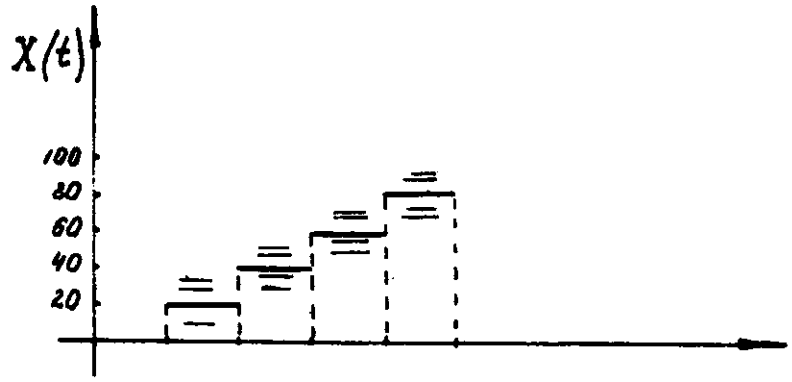
حيث أن $t_1 < t_2$ كما افترضنا سابقاً.

مثال (1):

إن عدد المكالمات الهاتفية التي ترد على مركز الهاتف هو سياق عشوائي x(t) تابع لطول الفترة الزمنية t، وبافتراض أن متوسط عدد المكالمات خلال الدقيقة (كواحدة زمن) يساوي 20 مكالمة، والمطلوب دراسة هذا السياق وإيجاد توابع قيمه المميزة؟

الحل:

إن الشكل البياني الذي يرسمه أحد مسارات هذا السياق مبين على الشكل رقم (1-11).



الشكل (11-1)

وإن قانون التوزيع الذي يخضع له أحد مقاطع هذا السياق في اللحظة t هو قانون بواسون بوسيط قدره ($\lambda\ t = 20\ t$)، أي أن احتمال أن يتلقى مركز الهاتف k مكالمة خلال الفترة [0, t] يساوي:

$$P_k(t) = \frac{(20t)^k}{k!} e^{-20t}$$

ومن العلاقتين (11−27) و(11−28) نجد أن:

$\mu_x(t) = 20\ t$
$D_x = 20\ t$

ولحساب تابع العزم الارتباطي بين مقطعين متقابلين للحظتين $t_1 = 10$ و$t_2 = 15$ نجد من العلاقة (11−31) أن:

$$cov_x(10,15) = \lambda\ t_1 = 20 \cdot 10 = 200$$

وإن تابع الارتباط المعياري يساوي:

$$R_x(10,15) = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} = \sqrt{\frac{10}{15}} = 0{,}8165$$

سياقات (ماركوف):

مقدمة عامة:

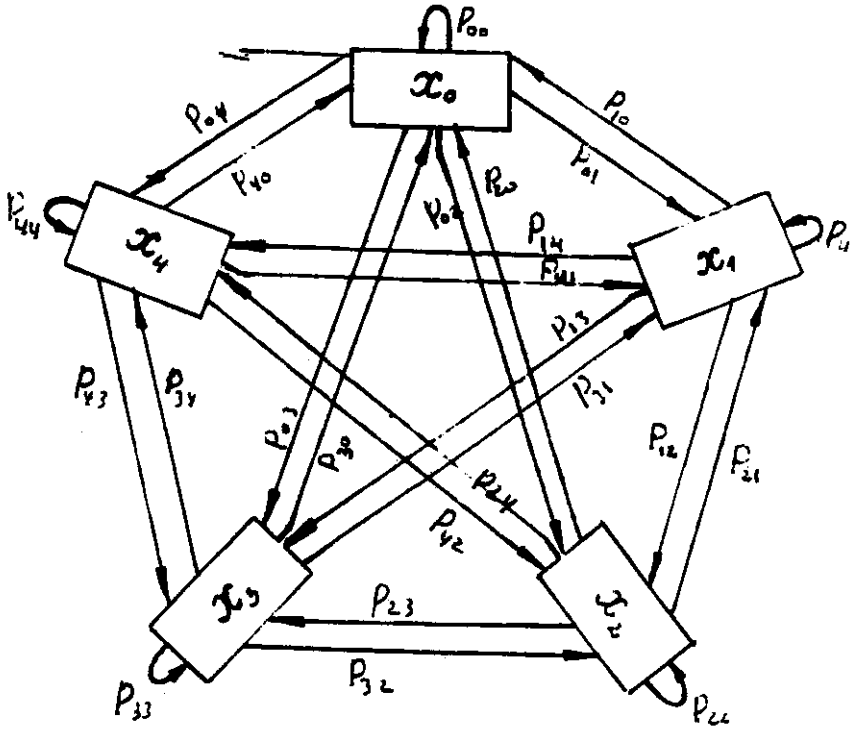
تتميز السياقات التي تسمى بسياقات (ماركوف) بأن سلوكها المستقبلي لا يرتبط إلا بقيمتها الحالية أو الآنية، أي أن السياق الماركوفي لا يرتبط بالقيم التي كان السياق قد أخذها في الماضي، وهذا يعني أن السلوك المستقبلي لهذه السياقات لا يرتبط بالماضي إلا عبر الحاضر بشكل متسلسل.

إن سياقات ماركوف قد تكون مستمرة أو منقطعة ولكننا هنا سنقتصر على السياقات المنقطعة، وسنفترض أن متحولها t يأخذ $(m + 1)$ قيمة منقطعة ومتصاعدة ومتساوية الأبعاد عن بعضها بعضاً هي:

$$t: t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_k, \ldots, t_m \qquad (11-33)$$

وإن السياق x(t) ينتقل أو يتحول من وضعية إلى أخرى عند حلول كل لحظة من اللحظات (35-11)، فإذا كان السياق في الوضعية x_j فإنه يمكن أن ينتقل منها إلى أية وضعية من الوضعيات الممكنة (36-11) (بما فيها الوضعية x_j نفسها كحالة خاصة للانتقال في الموضع نفسه).

ويمكن تمثيل هذه التنقلات بيانياً كما في الشكل (11-2) حيث تمثل الأسهم إمكانية انتقال x(t) من كل وضعية إلى الوضعيات الأخرى.



الشكل (11-2)

وتسمى هذه السياقات (المنقطعة) بسلاسل ماركوف، ومن الواضح أن انتقال السياق x(t) من وضعية إلى أخرى يتم وفق توزيع احتمالي يحدد أفضلية انتقاله من الوضعية الذي هو فيها إلى كل الوضعيات الأخرى (بما فيها بقائه في الوضعية نفسها).

لنرمز إلى احتمال أن يأخذ السياق x(t) في اللحظة t_k الوضعية x_j بعد أن كان في اللحظة t_{k-1} متوضعاً في الوضعية x_i، بالرمز $P_{ij}(t_{k-1}, t_k)$ أو اختصاراً بالرمز P_{ij}^k (k: 0, 1, 2, . . . , m) وأن (i,j: 0, 2, 3, . . . n).

إن الاحتمال P_{ij}^k يسمى احتمال الانتقال من الوضعية x_i إلى الوضعية x_j خلال الفترة (t_{k-1}, t_k)، ولقد أشرنا إلى هذه الاحتمالات على الشكل (11-2) برموز مختصرة من الشكل P_{ij} ووضعناها مرافقة لأسهم الانتقالات الممكنة.

من خلال هذه المقدمة يتضح أن الاحتمال P_{ij}^k يساوي:

$$P_{ij}^k = P[(x(t_k) = x_j) / (x(t_{k-1}) = x_i)] = P(x_j/x_i) \qquad (34-11)$$

وبما أن الاحتمال P_{ij}^k لا يتأثر بما كان عليه x (t) قبل الوضعية x_i إذن فإن إضافة الوضعيات السابقة لا يؤثر في قيمته، وهكذا نجد أنه يمكننا كتابة الاحتمال السابق على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} P_{ij}^k &= P[x_j / x_i] = P[x_j / x_i \cap x_{i-1} \cap x_{i-2} \ldots \cap x_1 \cap x_0] \\ &= P(x_j / x_0 \cap x_1 \cap \ldots \cap x_{i-1} \cap x_i) \\ &= P[x(t_k) = x_o] \prod_{j=1}^{k} P[x(t_k) = x_j / x(t_{k-1}) = x_{j-1}] \end{aligned} \qquad (35-11)$$

$$P_{ij}^k = P(x_0)P(x_1 / x_0) \cdot P(x_2 / x_1) \cdot P(x_3 / x_2) \ldots\ldots P(x_j / x_{j-1}) \qquad (36-11)$$

وإذا افترضنا أن x(t) كان في الوضعية x_i فإن احتمالات انتقاله إلى أية وضعية x_j (حيث j ستأخذ القيم (j= 0, 1, 2, . . n) في اللحظة t_k تشكل توزيعاً احتمالياً سنرمز إليه بالرمز الخاص $P_{i(xj)}^k$ حيث إن:

$$P_i^k(x_j) : p_{i0}^k,\ p_{i1}^k,\ p_{i2}^k, \ldots . p_{in}^k \qquad (37-11)$$

ويسمى هذا التوزيع (بشعاع احتمالات الوضعيات المختلفة من الوضعية x_i وفي اللحظة t_k لسلاسل ماركوف) ويكتب على الشكل:

$$P_i^k(x_j) = \left[p_{i0}^k,\ p_{i1}^k,\ p_{i2}^k, \ldots . p_{in}^k\right] \qquad (38-11)$$

ومن الواضح هنا أنه مهما تكن $0 \le j \le n$ فإن:

$$p_{ij}^k \ge 0 \quad , \quad \sum_{j=0}^{n} p_{ij}^k = 1 \qquad (39-11)$$

وإن هذا يعني أن السياق $x(t)$ سينتقل حتماً خلال الفترة (t_{k-1}, t_k) من الوضعية x_i إلى أحدى الوضعيات الممكنة x_j.

سلاسل (ماركوف) المتجانسة:

تعريف: نقول عن سياق ماركوف $x(t)$ أنه سلسلة ماركوفية متجانسة بالنسبة إلى الزمن إذا كانت احتمالات الانتقال p_{ij}^k لا تتأثر باللحظات الزمنية t_k.

وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$$p_{ij}^k = p_{ij} \qquad (40-11)$$

حيث إن p_{ij} هو احتمال انتقال $x(t)$ من الوضعية x_i إلى الوضعية x_j في أية لحظة t.

وبما أن p_{ij} يتعلق بدليلين فقط إذن يمكننا أن نكتب احتمالات الانتقال على شكل مصفوفة مربعة تسمى (مصفوفة الانتقال الاحتمالية) ونكتبها على الشكل الآتي:

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \cdots p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n1} \cdots p_{nn} \end{bmatrix} \qquad (41-11)$$

وهنا نلاحظ أن عناصر كل سطر فيها ما هو الإشعاع احتمالات الوضعيات المختلفة من الوضعية المقابلة لذلك السطر، واعتماداً على العلاقة (11-42) نجد أن:

$$P_{ij} \geq 0 \qquad \sum_{j=02}^{n} P_{ij} = 1$$

أي أن مجموع عناصر كل سطر في المصفوفة $[p_{ij}]$ يساوي الواحد، ولكن هذا الكلام لا ينطبق على الأعمدة إذ أنه لا يمكننا أن نستنتج أن مجموع عناصر كل عمود مساو لمقدار معين.

إذا كانت عناصر المصفوفة $[p_{ij}]$ موجبة فإننا نسمي السلسلة بالسلسلة التشابكية.

يستفاد من مصفوفة الانتقال الاحتمالية في حساب أشعة احتمالات الوضعيات p_{ij}^{k} المعرفة في (11−41) وذلك من خلال النظرية الآتية.

نظرية:

إن شعاع احتمالات الوضعيات لسلسلة ماركوف في اللحظة t_k يساوي جداء شعاع احتمال الوضعيات في اللحظة t_{k-1} بمصفوفة الانتقال الاحتمالية، أي أن:

$$P_i^k(x_j) = P_i^{k-1}(x_j) \cdot [p_{ij}] \qquad (42-11)$$

البرهان:

سنبرهن على صحة هذه النظرية عندما يكون للسياق وضعيتان فقط هما x_1, x_0 ولنفترض أن مصفوفة الانتقال هي:

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{oo} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \qquad (43-11)$$

وسنبرهن على أن

$$P_0^k(x_j) = P_0^{k-1}(x_j)[p_{ij}]$$

لنبحث أولاً عن احتمال أن تأخذ سلسلة (ماركوف) القيمة x_0 في اللحظة t_k وسنرمز إليه بالرمز $p_0(t_k)$، فنجد أن الحادث يمكن أن يتحقق إذا تحقق أحد الحادثين الآتيين:

الحادث A: وهو حادث أن تكون السلسلة في اللحظة t_{k-1} في الوضعية x_0 وخلال الفترة (t_{k-1}, t_k) لم تخرج منها.

الحادث (B): وهو حادث أن تكون السلسلة في اللحظة t_{k-1} في الوضعية x_1 وخلال الفترة (t_{k-1}, t_k) تكون قد خرجت منها إلى x_0.

وبذلك نجد أن احتمال أن تأخذ السلسلة القيمة x_0 يساوي:

$$p_0(t_k) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ومن جهة أخرى نجد أن الاحتمال $P(A)$، ما هو إلا احتمال أن تبقي السلسلة في الوضعية x_0 وهو يساوي:

$$P(A) = P[x_0 / x_0] = p_{00}^{k-1} \cdot p_{00}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن P(B) يساوي:

$$P(B) = P(x_0 / x_1) = p_{01}^{k-1} \cdot p_{10}$$

وهكذا نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$p_0(t_k) = p_{00}^{k-1} \cdot p_{00} + p_{01}^{k-1} \cdot p_{10} = \begin{bmatrix} p_{00}^{k-1} \\ p_{01}^{k-1} \end{bmatrix} \cdot [p_{00} \quad p_{10}] \qquad (44-11)$$

وبطريقة مشابهة نجد أن احتمال أن تأخذ سلسلة (ماركوف) القيمة x_1 في اللحظة t_k وسنرمز إليه بـ$p_1(t_k)$ وهو يساوي:

$$p_1(t_k) = p_{00}^{k-1} \cdot p_{01} + p_{01}^{k-1} \cdot p_{11} = \begin{bmatrix} p_{00}^{k-1} \\ p_{01}^{k-1} \end{bmatrix} \cdot [p_{01} \quad p_{11}] \qquad (45-11)$$

وهكذا نجد أن شعاع احتمالات انتقال الوضعيات في اللحظة t_k ومن الوضعية x_0 إلى كلتا الوضعيتين x_0 وx_1 يساوي:

$$\begin{aligned} p_0^k(x_j) &= [p_0(t_k), p_1(t_k)] \\ &= \left[p_{00}^{k-1} \cdot P_{00} + p_{01}^{k-1} \cdot p_{10} \quad , \quad p_{00}^{k-1} \cdot p_{01} + p_{01}^{k-1} \cdot p_{11}\right] \end{aligned} \qquad (46-11)$$

ومن العلاقة (11−42) نجد أن المطلوب يساوي:

$$p_0^k(x_j) = \left[p_{00}^{k-1} \cdot p_{00} + p_{01}^{k-1} \cdot p_{10} + p_{00}^{k-1} p_{01} + p_{01}^{k-1} + p_{01}^{k-1} p_{11}\right] \qquad (47-11)$$

وبمقارنة العلاقتين (11−46) و(11−47) نجد أنهما متطابقتان وبذلك يكون قد تم البرهان.

وبالطريقة نفسها يمكن البرهان على هذه النظرية في الحالة التي يكون فيها لـ x (t) أكثر من قيمتين.

نتائج هامة:

بما أن العلاقة (11−46) صحيحة بالنسبة إلى قيم k (k: 1, 2, . . . , m) وبما أنها علاقة تكرارية (تراجعية) إذن فهي تعطينا سلسلة التساويات الآتية:

$$p_0^k(x_j) = P_i^{k-1}(x_j)\cdot[p_{ij}] = P_i^{k-2}(x_j)\cdot[p_{ij}]^2$$
$$= P_i^{k-3}(x_j)\cdot[p_{ij}]^3 = \ldots = P^0{}_i(x_j)\cdot[p_{ij}]^k \qquad (48-11)$$

ومنها نحصل على العلاقة الآتية:

$$p_0^k(x_j) = P^0{}_i(x_j)\cdot[p_{ij}]^k \qquad (49-11)$$

أي أن شعاع احتمالات الوضعيات $P_i^k(x_j)$ في أية لحظة t_k (قانون التوزيع الاحتمالي لها) يتحدد تماماً بوساطة الشعاع الابتدائي $P_i^0(x_j)$ ومصفوفة الانتقال $[P_{ij}]$.

وبما أن اللحظات $(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m)$ متساوية الأبعاد عن بعضها بعضاً إذن فإن المصفوفة $[p_{ij}]^k$ هي مصفوفة الانتقال التي تقابل الفترة (t_0, t_k) والتي طولها (kt)، وهي تتمتع بخواص المصفوفة $[p_{ij}]$ نفسها حيث إن مجموع عناصر كل سطر فيها يساوي الواحد.

إذا كانت الفترة (t_0, t_k) طويلة فإن الاحتمال P_{i0}^{kt} لابد وأن يصبح موجباً وأنه لم يعد يتأثر بالوضعية الابتدائية x_{i0} عندما $k \to \infty$ وأن نهاية هذا الاحتمال تصبح مساوية لمقدار ثابت p_j متعلق بالوضعية x_j فقط، أي أن:

$$\lim_{k\to\infty} p_{i0\,j}^k = p_j \qquad (50-11)$$

وتسمى هذه الخاصة بالخاصة التشابكية لسلاسل (ماركوف) المتجانسة، واعتماداً على (11−50) نجد أن:

$$\lim_{k\to\infty}[p_{ij}]^k = \lim_{k\to\infty}[p_{ij}^{kt}] \qquad (51-11)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} p_{00}^{kt} & p_{01}^{kt} & \cdots & p_{on}^{kt} \\ p_{01}^{kt} & p_{11}^{kt} & \cdots & p_{1n}^{kt} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_{00}^{kt} & p_{0n}^{kt} & \ldots\ldots & p_{nn}^{kt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \ldots\ldots & p_n \\ p_0 & p_1 & \ldots\ldots & p_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_0 & p_1 & \ldots\ldots & p_n \end{bmatrix}$$

أي أنه إذا كانت السلسلة تشابكية, فإن مصفوفة الانتقال $\left[p_{jJ}^{kt}\right]$ خلال الفترة التي طولها (kt) عندما $k \to \infty$ تنتهي إلى مصفوفة ذات أسطر متساوية.

واعتماداً على (11−50) نجد أن العلاقة (11−51) تأخذ الشكل الآتي:

$$\lim_{k\to\infty} p_j^k(x_J) = p_j^o(x_J).\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & ..... & p_n \\ p_0 & p_1 & p_2 & ..... & p_n \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ p_0 & p_1 & p_2 & ..... & p_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{j0}^0 & p_{j1}^0 & p_{j2}^0 & ..... & p_{jn}^0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & ..... & p_n \\ p_0 & p_1 & p_2 & ..... & p_n \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ p_0 & p_1 & p_2 & ..... & p_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[p_0 \sum_{J=1}^{n} p_{jJ}^0, p_1 \sum_{J=1}^{n} p_{jJ}^0, ..., p_n \sum_{J=1}^{n} p_{jJ}^0 \right] = [p_0, p_1, ..., p_n]$$

أي أن يكون لدينا:

$$\lim_{k\to\infty} p_J^k(x_J) = [p_0, p_1, p_2, ..., p_n] \qquad (11-52)$$

وكذلك يكون لدينا:

$$\lim_{k\to\infty} p_j^{k-1}(x_J) = [p_0, p_1, p_2, ..., p_n] \qquad (11-53)$$

وبوضع العلاقتين (11−52) و(11−53) في العلاقة (11−49) نحصل على:

$$[p_0, p_1, p_2, ..., p_n] = [p_0, p_1, p_2, ..., p_n].[p_{jJ}] \qquad (11-54)$$

وبمقارنة طرفي العلاقة (11−54) نحصل على جملة من المعادلات الخطية تربط بين الاحتمالات $[p_0, p_1, p_2, ..., p_n]$ وعناصر المصفوفة $[p_{jJ}]$ هي:

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_0p_{00} + p_1p_{10} + p_2p_{20} + p_3p_{30} + ... + p_np_{no} \\ p_1 &= p_0p_{01} + p_1p_{11} + p_2p_{21} + ... + p_np_{n1} \\ &..... \\ p_n &= p_op_{on} + p_1p_{1n} + p_2p_{2n} + ... + p_np_{nn} \end{aligned}\right\} \qquad (11-55)$$

وهي n + 1 معادلة خطية تحتوي على (n+1) مجهولاً هي:

$p_0,\quad p_1,\quad p_2,\quad . . .,\quad p_n$

وبملاحظة أن هذه الاحتمالات ترتبط معاً بالعلاقة:

$$p_0 + p_1 + p_2 \ldots p_n = 1 \qquad (56-11)$$

وهـذا يعنـي أن جملـة المعـادلات (11−59) مرتبطـة خطيـاً، وباسـتبدال أحـد المعادلات من (11−55) بالعلاقة (11−56) نحصل على (n+1) معادلة خطية مستقلة تحتوي على (n+1) مجهولاً نحلها فنحصل على الاحتمالات $p_0\ p_1\ p_2 \ldots p_n$ وذلك بفرض أن عناصر المصفوفة $[p_{ij}]$ معلومة.

مثال (2):

لتحديد مقدار الطلب الشهري على كل من ثلاث بضائع متنافسة x_2, x_1, x_0 سألنا في لحظة ما t_0 عينة مؤلفة من 1000 شخص، فتبين أن 500 منهم يشترون البضاعة x_0 و200 البضاعة x_1 و300 البضاعة x_2، وبعد مرور شهر تبين أن من بين 500 شخص كانوا يشترون x_0 بقي 450 شخصاً وإن 40 شخصاً تحول إلى البضاعة x_1 و10 تحولوا إلى x_2 ومن بين 200 كانون يشترون البضاعة x_1 بقي −60 شخصاً وإن 80 شخصاً تحولوا إلى البضاعة x_2، ومن بين 300 شخصاً كانوا يشترون x_2 بقي 60 شخص بينما تحول 210 أشخاص إلى البضاعة x_0 و30 شخصاً إلى البضاعة x_1.

والمطلوب:

تحديد عناصر شعاع احتمالات الوضعيات بعد مرور شهر.

تحديد أي من البضائع تتمتع بطلب أكبر.

تحديد عناصر شعاع احتمالات الوضعيات بعد مرور فترة طويلة.

الحل:

بما أن سلوك المستهلكين في كل شهر يرتبط بالشهر الذي يسبقه فقط، إذن فهذه هي سلاسل (ماركوف)، إن شعاع احتمالات الوضعيات المختلفة في اللحظة t_0 بحسب التعريف الإحصائي للاحتمال يساوي:

$$P_i^0(x_j) = [\frac{500}{1000}, \frac{200}{1000}, \frac{300}{1000}] = [0.5,\ 0.2,\ 0,3]$$

وبعد مرور شهر نلاحظ أن زبائن السلعة x_0 يتوزعون على الشكل الآتي:

$$P_{oj} = [\frac{450}{500},\ \frac{40}{500},\ \frac{10}{500}] = [0.9,\ 0.08,\ 0.02]$$

وإن زبائن السلعة x_1 يتوزعون على الشكل الآتي:

$$P_{oj} = [\frac{80}{200},\ \frac{60}{200},\ \frac{60}{200}] = [0.4,\ 0.3,\ 0.3]$$

وإن زبائن السلعة x_2 يتوزعون على الشكل الآتي:

$$P_{2j} = [\frac{210}{300}, \frac{30}{300}, \frac{60}{300}] = [0.7,\ 0.1,\ 0.2]$$

وهكذا نجد أن مصفوفة الانتقال هي:

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,08 & 0,02 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

وبحسب العلاقة (11–49) نجد أن شعاع احتمالات الوضعيات يساوي:

$$P_i^1(x_j) = P_i^0(x_j) \cdot [p_{ij}]$$

$$= [0,5 \quad 0,2 \quad 0,3] \cdot \begin{bmatrix} 0,9 & 0,08 & 0,02 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$P_i^1(x_j) = [0.74,\quad 0.13,\quad 0.13]$$

ومن عناصر هذا الشعاع نلاحظ أن البضاعة x_0 هي البضاعة التي تتمتع بطلب أكبر.

وإذا افترضنا أن سلوك المستهلكين سيتغير بالطريقة نفسها خلال شهور عدة لاحقة، أي أننا سنفترض أن السلسلة متجانسة فعندئذ يمكننا استخدام العلاقة (11–49) لحساب شعاع احتمالات الوضعيات بعد عدة شهور ويمكننا أن نحدد البضاعة التي تتمتع بطلب أكبر في حينها.

لكن عندما تزداد الفترة الزمنية بحيث يمكن عدها طويلة جداً فإننا نحسب شعاع احتمالات الوضعيات من العلاقات (11–56)، وبما أن $P_{ij} > 0$ إذن الخاصة التشابكية محققة، وبذلك نجد أن:

$$P_0 = P_0 \cdot 0{,}9 + P_1 \cdot 0{,}4 + P_2 \cdot 0{,}7$$
$$P_1 = P_0 \cdot 0{,}08 + P_1 \cdot 0{,}3 + P_2 \cdot 0{,}1$$
$$P_2 = P_0 \cdot 0{,}02 + P_1 \cdot 0{,}3 + P_2 \cdot 0{,}2$$

ولحل هذه المعادلات الخطية نلاحظ أنها مرتبطة ببعضها بعضاً وفق العلاقة $P_0 + P_1 + P_2 = 1$ لذلك نستبدل العلاقة الثالثة بها فنحصل على العلاقات الآتية:

$$P_0 = 0{,}9\ P_0 + 0{,}4\ P_1 + 0{,}7\ P_2$$
$$P_1 = 0{,}08\ P_0 + 0{,}3\ P_1 + 0{,}1\ P_2$$
$$P_2 = 1 - P_1 - P_0$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على شعاع احتمالات الوضعيات بعد فترة طويلة وهو: $P_0 = 0.84, P_1 = 0.10, P_2 = 0{,}06$ أي أن:

$$P_J = [0.84, 0.10, 0.06]$$

وهذا يشير إلى زيادة الطلب على السلعة x_0.

سياقات غاوص (السياقات الطبيعية):

إن السياقات الطبيعية هي السياقات الأكثر انتشاراً في الطبيعة والحياة ولها مكانة خاصة بين السياقات العشوائية.

تعريف: نقول عن سياق $x(t)$ أنه سياق طبيعي (غاوصي) إذا كان مقطعه $x(t_k)$ في أية نقطة t_k يخضع لتوزيع طبيعي من الشكل:

$$\varphi[x(t_k)] = \frac{1}{\sigma_x(t_x)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x(t)-\mu(t_k)}{\sigma_x^2(t_k)}\right]^2} \qquad (57-11)$$

حيث إن $\mu(t_x)$ و $\sigma^2(t)$ هما توقع المقطع $\delta_x^2(t_k)$ تباينه.

كما ينتج من هذا التعريف أنه إذا كان $X(t_1)$ و$X(t_2)$ مقطعين للسياق $X(t)$ في النقطتين t_1 و t_2 على الترتيب فإن توزيعهما المشترك هو:

$$\varphi[x(t_1),x(t_2)]=\frac{1}{2\pi\sigma(t_1)\sigma(t_2)\sqrt{(1-r)^2}}e^{-\frac{1}{2(r-1)^2}A} \qquad (58-11)$$

حيث إن r هو معامل الارتباط بين $x(t_1)$ و $x(t_2)$ وحيث إن:

$$A=\left(\frac{x(t_1)-\mu(t_1)}{\sigma(t_1)}\right)^2-r\frac{[x(t_1)-\mu(t_1)][x(t_2)-\mu(t_2)]}{\sigma(t_1).\sigma(t_2)}+\left(\frac{x(t_2)-\mu(t_2)}{\sigma(t_2)}\right)^2 \qquad (59-11)$$

وبصورة عامة فإن التوزيع المشترك لأي جملة من مقاطعه:

$x(t_1)$, $x(t_2)$,$x(t_3)$, ……, $x(t_m)$

ما دامت متحولات عشوائية وتقابل النقاط $t_1t_2t_3$……t_n ؛ هو توزيع طبيعي ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\varphi(x_1x_2x_3.....x_m)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}[Vij]}e^{-\frac{1}{2}V_{ij}^{-1}.[x(t_1)-\mu(t_i)][x(t_i)-\mu(t_i)]} \qquad (60-11)$$

حيث إن $[v_{iJ}]$ هي مصفوفة توابع العزوم الارتباطية المختلفة وهي تساوي:

$$[V_{iJ}]=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & V_{12} & V_{13} & ..... & V_{1m}\\ V_{21} & \sigma_1^2 & V_{23} & ..... & V_{23}\\ ..... & ..... & ..... & ..... & .....\\ V_{m1} & V_{m2} & ..... & ..... & \sigma_1^2\end{bmatrix} \qquad (61-11)$$

وإن:

$$V_{iJ}=E[x(t_i)-E(t_i)][x(t_j)-E(t_j)] \qquad (62-11)$$

وإن: $[V_{iJ}]^{-1}$ هو مقلوب المصفوفة $[V_{iJ}]$.

ومن الواضح أن كل واحد من التوزيع المنفرد أو التوزيعات المشتركة المشتركة لأية جملة من المقاطع يتحدد بتحديد توابع التوقع: $E(t_m)$ ….. $E(t_3)$ $E(t_2)$ $E(t_1)$ وبتحديد عناصر مصفوفة العزوم الارتباطية $[V_{iJ}]$:

إذا كان السياق الطبيعي $x(t)$ مستقراً فإنَّ توقعه وتباينه يكونان ثابتين وتابع عزمه الارتباطي يتبع k فقط.

$$\left.\begin{aligned} \mu_x(t) &= \mu_x \quad , \quad D_x(t) = D_x \\ V_x(t_i, t_j) &= V_x(\tau), \quad \tau = t_j - t_i \end{aligned}\right\} \qquad (63-11)$$

ويمكن البرهان على أنه إذا كان x(t) و y(t) سياقين طبيعيين فإن مجموعهما أو أي تركيب خطي لهما مثل ax(t)+by(t) هو الآخر سياق طبيعي, وذلك لأن مقاطعه تخضع للتوزيع الطبيعي.

كما يمكن البرهان على أن العديد من السياقات العشوائية تنتهي إلى السياقات العشوائية الطبيعية عندما يزداد عدد التجارب n ليصبح كبيراً بشكل كافٍ.

تمرينات

1- إن تيار السيارات المتجهة باتجاه واحد على طريق عام هو سياق بسيط بكثافة ثابتة λ لنفترض أن شخصاً ما وقف على طرف الطريق وأراد إيقاف أول سيارة قادمة.

<u>والمطلوب:</u>

أ- إيجاد التوزيع الاحتمالي للزمن T الذي يستغرقه ذلك الشخص في الانتظار ثم حساب توقعه وتباينه.

ب- أعد الطلب السابق نفسه عندما يكون السياق متصفاً بالخاصة التشابكية وله الكثافة نفسها λ.

2- سلسلة ماركوفيه لها المصفوفة الانتقالية الآتية:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

<u>المطلوب:</u>

أ- حدد عدد حالات هذه السلسلة؟

ب- ماهي احتمالات الانتقال من حالة إلى أخرى تبعد عنها بمقدار خطوتين؟

ج- هل هذه المصفوفة تشابكية؟

3- سلسلة ماركوفية لها المصفوفة الانتقالية الآتية:

$$\begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد المعادلات المميزة والقيم المميزة للمصفوفة.و إذا كان $p_1=1$ و $p_2 = \frac{2}{3}$ فبرهن أنها تشابكية ؟

4- ليكن لدينا كيسان, في الأول N_1 كرة سوداء وفي الثاني N_2 كرة بيضاء, نقوم بسحب كرة من كل كيس ونبادلهما بالمكان وإذا كان عدد الكرات السوداء في الكيس الأول هو الذي يحدد حالة الجملة.

والمطلوب:

أ- ما هو عدد حالات السلسلة الماركوفية التي تحدد تنقلات هذه الجملة؟

ب- إيجاد احتمالات الانتقال من أجل خطوة واحدة؟

ج- ثم إيجاد القيم التقاربية لهذه الاحتمالات؟

الفصل الثاني عشر
صفوف الانتظار في الخدمات الجماهيرية

I- تعاريف ومصطلحات:

كثيراً ما يتعرض الباحثون والعاملون في مجال بحوث العمليات إلى تحليل العمليات التي تقدمها أنظمة الخدمة الجماهيرية, وكأمثلة على ذلك نذكر الأنظمة الآتية:

- خدمات مقاسم الهاتف الآلية أو العادية أو الخارجية.
- خدمات مراكز الصيانة والإصلاح.
- خدمات نوافذ قطع التذاكر في القطارات أو السيارات أو الطائرات.
- خدمات محطات الوقود وغسيل السيارات.
- خدمات تنظيم استقبال وتفريغ الطائرات في المطارات والسفن في الموانئ.
- خدمات مكاتب الاستعلامات والاستقبال في الفنادق والمعارض.
- خدمات صناديق الدفع والتسديد في المصارف.
- خدمات المحاسبة في المحلات التجارية الكبيرة.
- خدمات محلات الحلاقة والتجميل.
- خدمات العيادات الطبية المختلفة.
- خدمات مكاتب البريد والبرق.
- خدمات شبكة الإنترنت.

وحتى نستطيع أن نقوم بإجراء المعالجة الرياضية لهذه العمليات الخدمية لا بد لنا من استعراض بعض المفاهيم الأساسية التي تدخل في نطاق الخدمات الجماهيرية وأهمها:

1- النظام:

هو جملة من المكونات البشرية والمادية ترتبط فيما بينها بعلاقات محددة وتعمل على تقديم نوع أو أكثر من الخدمات الجماهيرية, وقد يكون النظام مؤلف من وحدة واحدة أو من عدة واحدات مستقلة أو مرتبطة ببعضها بعضاً.

2- الزبون:

وهو طالب الخدمة من النظام, ويمكن أن يكون شخصاً أو هيئة اعتبارية أو طلب من جهة ما.

3- تيار الزبائن أو الطلبات:

وهو سلسلة الأشخاص أو الطلبات التي ترد بالتوالي إلى النظام في لحظات زمنية عشوائية أو محددة.

4- صف الانتظار (الدور):

وهو جملة الأشخاص أو الطلبيات المنتظرين بالدور لتقديم الخدمة من النظام.

5- قواعد الخدمة:

هناك قواعد عدة تستخدمها أنظمة الخدمة وهي:

أ- قاعدة (من يصل أولاً يخدم أولاً) ويرمز لها بالمصطلح FIFO, وذلك من العبارة الإنكليزية First In- First Out وتستخدم هذه القاعدة في معظم أنظمة الخدمة العامة.

ب- قاعدة (من يصل أخيراً يخدم أولاً) ويرمز لها بالمصطلح LIFO وذلك من العبارة الإنكليزية Last In- First Out وتستخدم هذه القاعدة في بعض الأنظمة الخاصة مثل:

- الدخول والخروج إلى ومن المصاعد العامة ذات الباب الواحد.
- الدخول والخروج إلى ومن الحافلات ذات الباب الواحد.

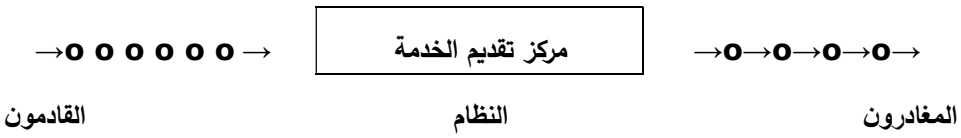
ج- قاعدة السماح بتقديم الخدمة أولاً لحالات الطوارئ والأطفال والنساء.

د- قاعدة تقديم الخدمة للزبائن بطريقة عشوائية.

6- أشكال صفوف الانتظار:

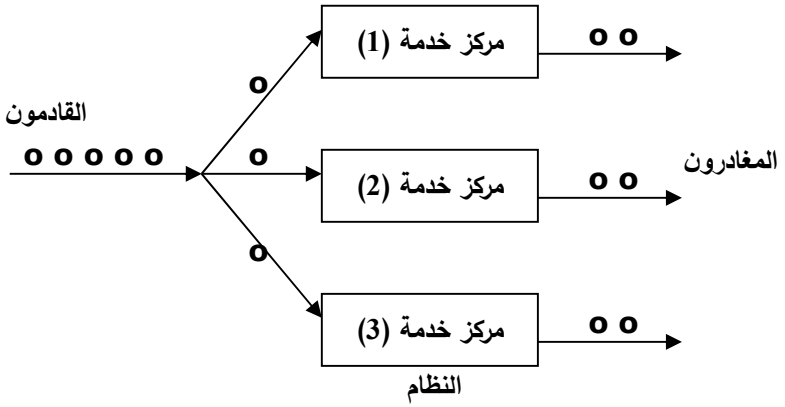
يمكن للمشرفين على أنظمة الخدمة أن يقوموا بتنظيم العمل خلالها وفق أحد الأشكال الآتية:

أ- صف واحد ومركز واحد: ويمثل بيانياً كما في الشكل الآتي:



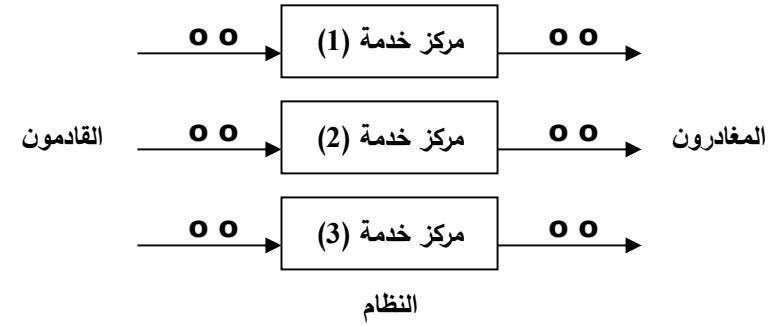
الشكل رقم (12-1)

ب- صف واحد وعدة مراكز متوازية: ويمثل بيانياً كما في الشكل الآتي:



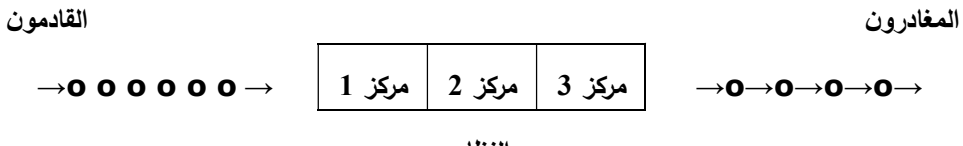
الشكل رقم (12-2)

ج- عدة صفوف متوازية وعدة مراكز متوازية: ويمثل بيانياً كما في الشكل الآتي:



الشكل رقم (12-3)

د- صف واحد ومراكز متعاقبة عدة: وتمثل بيانياً كما في الشكل الآتي:



الشكل رقم (12-4)

7- سلوك الزبائن:

وهو كيفية تعامل الزبون مع الدور أو الصف الموجود، وهو أمر هام قد يعرض نظام الخدمة إلى خسائر فادحة, وهنا يمكن أن نصنف الزبائن حسب سلوكهم إلى الصنفين الآتيين:

أ- الزبون الصبور أو المضطر: وهو الزبون الذي يتقبل وجود الدور ويتحمل انتظار تقديم الخدمة، مثل: المراجعة في عيادة الطبيب أو استلام حوالة مالية من المصرف ....الخ.

ب- الزبون المتردد: وهو الذي لا يتقبل الانتظار لتقديم الخدمة ويمكن أن يستنكف عن طلبها من النظام، ويعود راجعاً دون أن يحصل على الخدمة أو يتحول بها إلى نظام آخر, أو يؤجلها إلى وقت مناسب؛ مثل الحلاقة عندما لا يوجد مكان للانتظار وغسيل السيارة عندما لا يوجد مكان لوقوف السيارة ....الخ.

8- أنواع أنظمة الخدمة:

اعتماداً على ما سبق يمكننا تصنيف أنظمة الخدمة حسب عدد مراكز الخدمة فيها إلى الأصناف الآتية:

أ- أنظمة خدمة بصف واحد ومركز واحد للخدمة ويرمز لها بالرمز M/M/1.

ب- أنظمة خدمة بصف واحد وعدة مراكز للخدمة ويرمز لها بالرمز M/M/c.

ج- أنظمة خدمة بعدة صفوف وعدة مراكز للخدمة.

كما يمكن تصنيف أنظمة الخدمة حسب تعاملها مع الزبائن إلى الصنفين الآتيين:

أ- أنظمة خدمة بدون تراجع الزبائن: وفيها لا يمكن للزبون أن يتراجع عن طلب الخدمة بسبب حاجته إليها أو بسبب احتكار النظام لها.

ب- أنظمة خدمة مع تراجع الزبائن: وفيها يمكن للزبون أن ينسحب ويتراجع عن طلب الخدمة بسبب طول الدور أو طول فترة الانتظار أو سوء الخدمة ويكون طول الدور فيها محدوداً.

كما يمكن تصنيف أنظمة الخدمة حسب طريقة وصول الزبائن إليها إلى صنفين أيضاً:

أ- أنظمة خدمة ذات وصول محدد: كما هو الحال في العيادة الطبية إلى تنظم مواعيد استقبال المرضى مسبقاً وفي المطارات التي تنظم وصول الطائرات وفق جداول محددة.

ب- أنظمة خدمة ذات وصول عشوائي: كما هو الحال في محطات الوقود أو نوافذ قطع التذاكر وغيرها.

وهكذا نلاحظ أن نوع نظام الخدمة يؤثر كثيراً على حجم الخدمات المقدمة, وإن أي خطأ في تنظيم هذه الخدمات يؤدي إلى خسائر كبيرة وإلى تفاقم مشكلة الصفوف في المجتمع.

9- تحليل العمل في نظام محدد (وبصف واحد ومركز خدمة واحد):

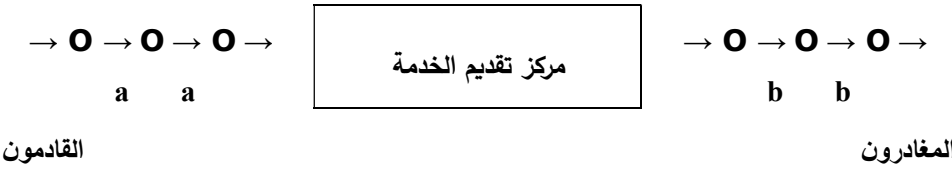
سنعالج في هذه الفقرة كيفية العمل في نظام محدد لتوضيح تأثير بعض المؤشرات السابقة على تقديم الخدمات الجماهيرية, لذلك نفترض أن النظام المدروس يحقق الفرضيات الآتية:

أ- إن الزبائن أو الطلبات تصل إلى النظام خلال فترات زمنية متساوية ومحددة، أي إن الفترة الزمنية بين كل زبون والذي يليه تساوي مقداراً ثابتاً a، أي أن عدد القادمين في واحدة الزمن يساوي $\frac{1}{a}$.

ب- إن الفترة الزمنية اللازمة لخدمة أي زبون ثابتة وتساوي b، أي أن عدد المغادرين في واحدة الزمن يساوي $\frac{1}{b}$.

ج- إن نظام الخدمة في النظام حسب القاعدة (من يصل أولاً يُخدم أولاً).

د- إن طول الصف هو إجمالي عدد الزبائن المتواجدين في النظام (ويساوي عدد المنتظرين في الصف + عدد المتواجدين في الخدمة), وسنرمز له بالرمز r والشكل الآتي يوضح لنا كيفية العمل في مثل ذلك النظام.



الشكل رقم (12-5)

ولتحليل العمل في هذا النظام ندرس العلاقة بين الفترتين الزمنيتين a وb وهنا نميز الحالات الآتية:

أ- إذا كان a<b: وهذا يعني أن سرعة تقديم الخدمة التي تساوي $\frac{1}{b}$ أقل من سرعة وصول الزبائن إلى مركز الخدمة والتي تساوي $\frac{1}{a}$، أي أن سرعة وصول الزبائن إلى المراكز أكبر من سرعة مغادرتهم له, ومن الواضح إن هذه الحالة هي التي تؤدي إلى تشكل الصف منذ البداية وإلى تزايده غير المحدود

في النهاية. ولا يمكن حل المسائل في مثل هذه الحالات إلا بإحداث أنظمة جديدة للخدمة أو زيادة القدرة التخدمية للنظام المذكور.

ب- إذا كانت $a = b$: وهذا يعني سرعة الوصول $\frac{1}{a}$ تساوي سرعة التخديم $\frac{1}{b}$، فإذا كان المركز جاهزاً لتقديم الخدمة ولا يوجد زبون ينتظر في الصف، فإن الزبون الأول سيحصل على الخدمة مباشرة, وسيصل الزبون الثاني في اللحظة نفسها التي تنتهي خدمة الزبون الأول ويحصل على الخدمة مباشرة أيضاً. وبذلك لا يبقى أحد منتظراً في الصف, أما إذا كان الصف يتضمن عدداً من الزبائن عند بداية العمل فإن طول ذلك الصف يبقى ثابتاً.

ج- إذا كان $a>b$: وهذا يعني أن سرعة الوصول $\frac{1}{a}$ أقل من سرعة التخديم $\frac{1}{b}$, وهذا يؤدي إلى أنه مهما كان طول الصف r في النظام فإنه سيتقلص بالتدريج حتى يبلغ $r = 1$ أو $r = 0$ وبذلك لم يبق أحد منتظراً في الصف.

ملاحظة:

مما سبق نستنتج إن الحالة الثالثة هي التي ستكون موضوع هذا الفصل لأنها تتضمن مشكلة قابلة للحل والمعالجة.

مثال (1):

نفترض أن نظاماً ما يستقبل زبوناً واحداً كل 4 دقائق (a=4) ويقدم له الخدمة خلال دقيقة واحدة (b=1), وعندما بدأ العمل كان على مدخله صفاً من 12 زبوناً, فكم من الوقت يلزمه حتى يتخلص من الصف الموجود ومن ما يلحق به من زبائن.

حتى يقوم النظام بتخديم الـ 12 زبوناً الأوائل يلزمه 12×1=12 دقيقة وخلال هذه الفترة سينضم إلى الصف السابق 3 زبائن (زبون كل 4 دقائق) فيلزمه لتخديمهم 3 دقائق أيضاً. وبذلك يكون الوقت اللازم للتخلص من وجود الصف ومتابعة العمل بدونه 12+3=15 دقيقة.

ورغم أن أنظمة الصفوف المحددة غير منتشرة في الحياة العملية, فإننا وقبل أن ندخل في معالجة أنظمة الصفوف العشوائية سنستعرض أهم المؤشرات المستخدمة في قياس فعالية عمل النظام واستخلاص العلاقات الرياضية التي تربط بين هذه المؤشرات لاستخدامها في التحليل العشوائي اللاحق.

10- مؤشرات فعالية النظام:

إن أهم المؤشرات المستخدمة في قياس فعالية الخدمات في النظام المؤشرات الآتية:

أ- متوسط عدد الزبائن أو الطلبات القادمة إلى النظام خلال واحدة الزمن، ونرمز له بـ λ ومتوسط الفترة الفاصلة بين زبونين متتاليين $\frac{1}{\lambda}$.

ب- متوسط عدد الطلبات التي يمكن أن ينجزها النظام خلال واحدة الزمن، ونرمز له بـ μ ومتوسط الفترة الفاصلة بين إنجاز طلبيتين متتاليتين $\frac{1}{\mu}$.

ج- متوسط نسبة الطلبات التي لا يمكن أن ينجزها النظام خلال واحدة الزمن وترتد عنه دون الاستفادة من أي خدمة.

د- متوسط مدة الانتظار في الصف أو الدور.

هـ- متوسط عدد الزبائن أو الطلبات المتواجدين في الصف وينتظرون الخدمة (طول الدور).

و- احتمال أن يصبح الزبون أو الطلب القادم في متناول الخدمة خلال واحدة الزمن.

ز- قانون التوزيع الاحتمالي لزمن الانتظار.

ح- قانون التوزيع الاحتمالي لعدد الزبائن أو لطلبات المنتظرين في الصف أو الدور.

ط- متوسط الدخل الذي يحققه النظام في واحدة الزمن أو من كل زبون على حده.

ي- القدرة التمريرية المطلقة وهي نفسها متوسط عدد الطلبات التي يمكن أن ينجزها النظام خلال واحدة الزمن.

ك- القدرة التمريرية النسبية وهي النسبة المتوسطة لعدد الطلبات المنجزة على عدد الطلبات القادمة خلال واحدة الزمن.

ل- عدد القنوات المعتمدة في النظام (للنظام متعدد القنوات) وهو عدد مراكز الخدمة المتوازية فيه.

م- متوسط عدد الطلبات داخل النظام (في الدور وقيد الخدمة) وهو متوسط طول الصف.

ن- متوسط مدة بقاء الطلبات داخل النظام (في الدور وقيد الخدمة).

س- قانون التوزيع لمدة البقاء داخل النظام.

ع- احتمال البقاء داخل النظام أكثر من زمن محدد.

وسنقوم بدراسة بعض هذه المؤشرات من خلال أنواع الأنظمة المختلفة ووفقاً للشروط والفرضيات المرافقة.

ومما تقدم يتبين لنا أن عمليات الخدمات الجماهيرية (صفوف الانتظار) تشكل سياقات عشوائية ذات صفات وخصائص محددة.

وإن المعالجة الرياضية لهذه السياقات تحتاج إلى معرفة نوعيتها ومعرفة قانون الاحتمالي لحركتها, وتكون تلك المعالجة مبسطة إذا كان التيار المار من نظام الخدمة يشكل سياقاً عشوائياً ماركوفياً مستقراً, حيث يمكننا في هذه الحالة وصف عمل ذلك النظام بوساطة جملة من المعادلات التفاضلية التي تعبر عن خصائصه الأساسية وتقيس فعالية الخدمات فيه, وذلك من خلال معالجة النظام وتيار الزبائن المار فيه. وحتى يكون السياق ماركوفياً يجب أن يكون تيار الحوادث المار بالنظام والذي يحوله من حالة لأخرى تياراً (بواسونياً) وهي السياقات المعروضة في الفصل السابق.

II- نظام الخدمة بصف واحد ومركز واحد أو النموذج M/M/1:

1-قوانين التوزيع الاحتمالية للنظام M/M/1:

يعتمد هذا النموذج على الفرضيات الآتية:

أ- إن الخدمة فيه تتم حسب قاعدة (من يصل أولاً يُخدم أولاً).

ب- إن وصول الزبائن إلى النظام يتم بشكل عشوائي وبمعدل ثابت مقداره λ في واحدة الزمن.

ج- إن خدمة الزبائن داخل النظام تتم بمعدل ثابت مقداره μ في واحدة الزمن.

د- إن نظام الصفوف فيه يتمتع بصفة الاستقرار أي أنه يصبح سياقاً ماركوفياً مستقراً.

هـ- إن وصول أي زبون مستقل عن وصول الزبائن الآخرين.

و- إن زمن خدمة الزبون مستقل عن زمن خدمة أي زبون آخر.

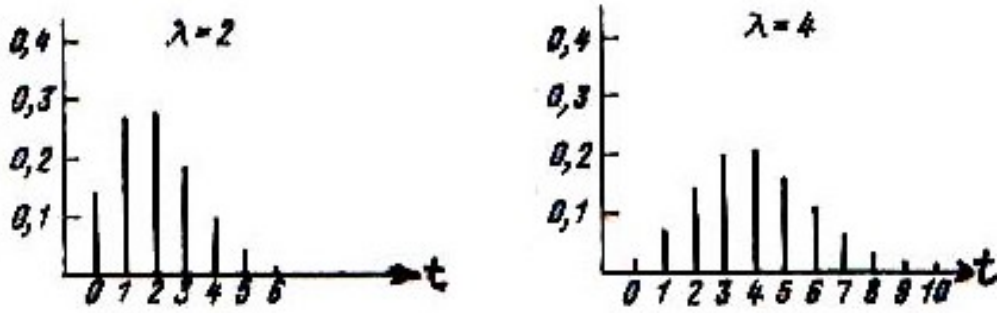
إن الفرضية الثانية تعني أنه إذا كان عدد القادمين في واحدة الزمن هو X, وكان بمعدل ثابت λ، فإن X يعتبر متحولاً عشوائياً ويخضع في سلوكه لقانون توزيع بواسون الاحتمالي والذي يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad \begin{matrix} x:0,1,2,\ldots. \\ \lambda > 0 \end{matrix} \qquad (1-12)$$

وإن توقعه الرياضي يساوي:

$$E(x) = \lambda \qquad (2-12)$$

والشكل الآتي يبين لنا الشكل العام البياني لتوزيع بواسون:



الشكل رقم (12-6)

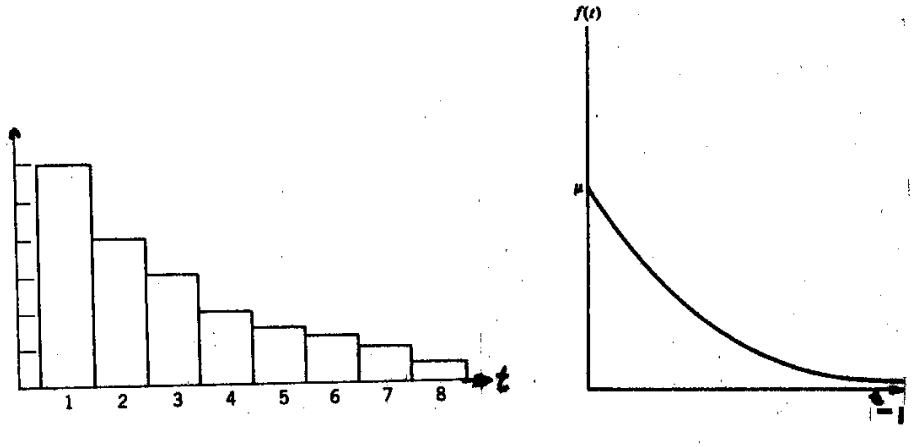
وإذا رمزنا للفترة الزمنية الفاصلة بين وصول الزبون والآخر بالرمز T فإن T هي الأخرى تعتبر متحولاً عشوائياً وتخضع في سلوكها إلى قانون التوزيع الأسي والذي يعطى بالعلاقة:

$$g(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad > 0\ \lambda\, t > 0\ , \qquad (3-12)$$

وإن توقعها الرياضي يساوي:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad (4-12)$$

والشكل الآتي يبين لنا الشكل البياني العام للتوزيع الأسي:



الشكل رقم (12-7)

وكذلك نجد أنه لو كان عدد الزبائن الذين تلقوا الخدمة من النظام في واحدة الزمن هو Y وكانت الخدمة تقدم لهم بمعدل ثابت μ، فإن Y يعتبر متحولاً عشوائياً ويخضع في سلوكه لقانون توزيع بواسون الاحتمالي والذي يعطى بالعلاقة:

$$f(y) = P(Y = y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} \qquad \begin{matrix} y: 0,1,2,3,\ldots.. \\ \mu > 0 \end{matrix} \qquad (5-12)$$

وإن توقعه الرياضي يساوي:

$$E(Y) = \mu \qquad (6-12)$$

وإذا رمزنا للفترة الفاصلة بين خروج زبون وآخر يليه من النظام بالرمز τ فإن τ هو الآخر متحول عشوائي يخضع في سلوكه لقانون التوزيع الأسي الذي يعطى بالعلاقة:

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad t>0\ ,\quad \mu>0 \qquad (7-12)$$

وإن توقعه الرياضي يساوي:

$$E(\tau) = \frac{1}{\mu} \qquad (8-12)$$

واعتماداً على هذه القوانين يمكننا حساب الاحتمالات الضرورية المختلفة وأهمها:

أ- احتمال أن لا يتجاوز عدد القادمين X عدداً k يحسب من العلاقة:

$$p(X \le k) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 3) + ... + p(x = k)$$

$$p(X \le k) = \sum_{x=0}^{k} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ... + \frac{\lambda^k}{k!}\right] \qquad (9-12)$$

وإذا أردنا حساب الاحتمال المعاكس فإننا نطبق العلاقة:

$$p(X > k) = 1 - p(x \le k) \qquad (10-12)$$

وكحالة خاصة نحسب احتمال أن لا يزيد عدد القادمين عن شخص واحد فقط، حيث نجد أن:

$$p(X \le 1) = p(x = 0) + p(x = 1) = e^{-\lambda}(1 + \frac{\lambda}{1!}) \qquad (11-12)$$

وتحسب قيمته حسب λ.

أما الاحتمال المعاكس فيحسب من العلاقة:

$$p(X > 1) = 1 - p(x \le 1)$$

ب- احتمال أن لا تزيد الفترة T الفاصلة بين وصول زبون وآخر يليه عن مقدار L ويحسب من العلاقة (وباعتبار أن t متحول مستمر):

$$p(T \le L) = \int_0^L \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^L = -\left[e^{-\lambda L} - 1\right] = 1 - e^{-\lambda L} \qquad (12-12)$$

$$p(T \le L) = 1 - e^{-\lambda L}$$

ج- احتمال أن لا يزيد عدد المخدمين Y عن عدد محدد N ويحسب من العلاقة:

$$P(Y \le N) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + ... + P(Y = N)$$

$$P(Y \le N) = \sum_{y=0}^{N} \frac{\mu^{y} e^{-\mu}}{y!} \qquad (a-9-12)$$

وإذا أردنا حساب الاحتمال المعاكس فإننا نطبق العلاقة:

$$P(Y > N) = 1 - P(Y \le N) \qquad (a-10-12)$$

د- احتمال أن لا تزيد الفترة الفاصلة بين خدمة زبون وآخر يليه عن مدة قدرها h ويحسب من العلاقة:

$$P(\tau \le h) = 1 - e^{-\mu.h} \qquad (a-11-12)$$

وإذا أردنا حساب الاحتمال المعاكس نطبق العلاقة:

$$P(\tau > h) = 1 - P(\tau \le h) = e^{-\mu h} \qquad (a-12-12)$$

أمثلة تطبيقية:

مثال (2):

يصل إلى ورشة الإصلاح 4 طلبيات في اليوم الذي مدته 8 ساعات عمل. احسب الاحتمالات الآتية:

أ- احتمال أن يرد إلى الورشة طلبان فقط في الساعة.

ب- احتمال أن يرد إلى الورشة طلبان على الأكثر في الساعة.

ج- التوقع الرياضي لعدد الطلبيات في اليوم.

د- احتمال أن تكون الفترة الفاصلة بين الطلب والآخر الذي يليه أقل من ساعة واحدة.

هـ- حساب التوقع الرياضي للفترة الزمنية الفاصلة بين طلبين متتاليين.

الحل:

لقد أشرنا إلى إن عدد الطلبيات X يخضع لتوزيع بواسون الذي وسيطه λ، حيث λ هي عبارة عن معدل وصول الطلبيات خلال واحدة الزمن، وبما أن العمل في

الورشة لا يستمر طوال اليوم بل يقتصر على 8 ساعات منه, لذلك يجب اعتبار واحدة الزمن هي الساعة, وبذلك نجد أن قيمة λ في الساعة تساوي:

$$\lambda = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

أ- إن احتمال أن يرد إلى الورشة طلبان فقط في الساعة يحسب من العلاقة (12-1) ويساوي:

$$P(X=2) = \frac{(\frac{1}{2})^2 e^{-\frac{1}{2}}}{2!} = 0.0758$$

ب- إن احتمال أن يرد إلى الورشة طلبان على الأكثر في الساعة يحسب من العلاقة (12-9) ويساوي:

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 e^{-\frac{1}{2}}}{0!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}}}{2!}$$

$$= 0.6065 + 0.3033 + 0.0758$$

$$= 0.9856$$

ج- لحساب التوقع الرياضي لعدد الطلبيات في اليوم نعلم أن متوسط عدد الطلبيات في الساعة يساوي $\lambda = \frac{1}{2}$ وبما أن عدد ساعات العمل في اليوم هو 8 ساعات فقط فإن توقع عدد الطلبيات في اليوم يساوي:

$$E = 8 \cdot \lambda = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

د- لحساب احتمال أن تكون الفترة الزمنية الفاصلة بين طلبين متتاليين لا تتجاوز ساعة واحدة نطبق العلاقة (12-12):

$$P(T \le 1) = 1 - e^{-\lambda \cdot \ell} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935$$

ولحساب احتمال أن تكون الفترة الزمنية الفاصلة بين طلبين متتاليين أكبر من ساعة واحدة فإننا نطبق العلاقة (12-10-a)

$$P(T > 1) = 1 - P(T \le 1) = 1 - 0.3935 = 0.6065$$

هـ- ولحساب التوقع الرياضي لمدة الفترة الزمنية الفاصلة بين طلبين متتاليين نجد أن:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ساعة}$$

مثال (3):

يقدم مكتب الاستعلامات في الهاتف 5 خدمات في الدقيقة والمطلوب حساب:

أ- احتمال أن يتم تقديم 10 خدمات تماماً في الدقيقة.

ب- احتمال أن يتم تقديم 10 خدمات على الأقل في الدقيقة.

ج- احتمال أن تكون الفترة الفاصلة بين أي خدمتين متتاليتين أقل من 0.25 دقيقة.

د- حساب التوقع الرياضي لعدد الخدمات في الساعة.

هـ- حساب التوقع الرياضي لمدة الفترة الفاصلة بين خدمتين متتالتين.

<u>الحل:</u>

أ- لحساب احتمال أن يتم تقديم 10 خدمات في الساعة نستخدم قانون توزيع بواسون ونعتبر أن واحدة الزمن هي الدقيقة، وبذلك نجد أن: $\mu = 5$ وأن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$P(Y = 10) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{5^{10} e^{-5}}{10!} = \frac{65800.26}{3628800} =$$

$$P(Y = 10) = 0.01813$$

ب- ولحساب احتمال أن يتم تقديم 10 خدمات على الأقل في الدقيقة نطبق العلاقة:

$$P(Y \ge 10) = 1 - P(Y < 10) = 1 - F_5(10)$$

حيث $F_5(x)$ هو الاحتمال التراكمي لتوزيع بواسون عند $\mu = 5$ وإن قيمته المحسوبة معروضة في الجدول (1) الملحق في آخر الكتاب, وتساوي $F_5(10) = 0.9682$ ومنه نجد أن:

$$P(Y \geq 10) = 1 - 0.9682 = 0.0318$$

ج- ولحساب احتمال أن تكون الفترة الفاصلة بين خدمتين متتاليتين أقل من 0.25 دقيقة نطبق العلاقة:

$$P(\tau \leq 0.25) = 1 - e^{-5(0.25)} = 0.7135$$

د- أما التوقع الرياضي لعدد الخدمات في الساعة فيساوي:

$E = (60)(5) = 300$ خدمة

وإن التوقع الرياضي لمدة الفترة الفاصلة بين خدمتين متتاليتين يساوي:

$$E(t) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{5} = 0.20\,\text{minute} = 12\,\text{second}$$

2-مؤشرات فعالية النظام M/M/1 (طول الصف غير محدد بعدد ما):

إن أهم المؤشرات المستخدمة في قياس فعالية النظام M/M/1 لتقديم الخدمات الجماهيرية المؤشرات الآتية:

λ: متوسط عدد الزبائن أو الطلبات القادمين على النظام خلال واحدة الزمن, ويسمى هذا المتوسط بسرعة الوصول, ومنه يمكن أن نشتق متوسط الفترة الزمنية a الفاصلة بين الزبون والآخر (حيث $a = \frac{1}{\mu}$).

μ: متوسط عدد الزبائن أو الطلبات الذي يمكن أن يخدمه النظام خلال واحدة الزمن, ويسمى هذا المتوسط بسرعة الخدمة في النظام أو بالقدرة التمريرية للنظام. ومنه يمكن أن نشتق متوسط الزمن اللازم لخدمة الزبون الواحد b (حيث $b = \frac{1}{\lambda}$).

وهنا يجب أن نشير إلى أنه يجب أن يكون $\lambda < \mu$, وإلا فإن المشكلة تكون غير قابلة للمعالجة إلا بوساطة تطوير النظام إو بإحداث أنظمة جديدة مترافقة كما رأينا سابقاً.

W_s : متوسط مدة بقاء الزبون داخل النظام (في الصف وفي مركز الخدمة) وهو يساوي:

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad (13-12)$$

W_q : متوسط مدة بقاء الزبون في الصف فقط: وهو يساوي:

$$W_q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) W_s = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad (14-12)$$

ويرتبط W_s مع W_q بالعلاقة:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

L_s: متوسط عدد الزبائن المتواجدين داخل النظام (في الصف وفي مركز الخدمة) وهو يساوي:

$$L_s = \lambda \cdot W_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad (15-12)$$

L_q: متوسط عدد الزبائن المتواجدين في الصف فقط, وهو يساوي:

$$L_q = \lambda \cdot W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad (16-12)$$

ويرتبط L_s مع L_q بالعلاقة:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \qquad (17-12)$$

UF: معامل الخدمة: ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$UF = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{لمركز واحد} \qquad (18-12)$$

وهو معامل يجب أن يكون أصغر من الواحد لأن: $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

مثال (4):

يصل الزبائن بسياراتهم إلى أحد محلات الصيانة بمعدل $\lambda = 3$ في الساعة وتقدم الخدمة لهم بمعدل $\mu = 4$ في الساعة. وبفرض أن طول الصف غير محدد فالمطلوب:

أ- حساب متوسط مدة بقاء الزبون في محل الصيانة (في الصف وعلى المنصة).

ب- حساب متوسط مدة بقاء الزبون في الصف فقط.

ج- حساب متوسط عدد المتواجدين في محل الصيانة (في الصف وعلى المنصة).

د- حساب متوسط عدد المتواجدين في الصف منتظرين دورهم في الصيانة وذلك بفرض أن الزبون القادم لا يرجع وينتظر حتى تقدم له الخدمة.

الحل:

أ- نعلم أن متوسط مدة بقاء الزبون في محل الصيانة W_s يحسب من العلاقة:

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4-3} = 1\,\text{hr}$$

ب- كما نعلم أن متوسط مدة بقاء الزبون في الصف فقط يحسب من العلاقة:

$$W_q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) W = \frac{3}{4} \cdot 1 = 0.75\,\text{hr} = 45\,\text{min}$$

ج- ونعلم أن متوسط عدد المتواجدين في محل الصيانة (في الصف وعلى المنصة):

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3 \text{ زبائن}$$

د- ونعلم أن متوسط عدد المتواجدين في الصف فقط يحسب من العلاقة:

$$L_q = \lambda \cdot W_q = 3 \cdot 0.75 = 2.25 \text{ زبوناً}$$

مثال (5):

يصل المرضى إلى مركز الإسعاف بمعدل شخص واحد كل ساعة ويمكث المريض فيه بمعدل 20 دقيقة لتقديم الإسعافات الأولية اللازمة. وبفرض أن طول الصف غير محدد والمرضى مضطرون للانتظار، فالمطلوب: حساب مؤشرات فعالية هذا المركز.

الحل:

من معطيات المسألة نجد أن:

$$\mu = \frac{60}{20} = 3 \quad , \quad \lambda = 1$$

وبذلك نجد أن:

$$W_s = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ ساعة}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0.5 - \frac{1}{3} = 0.1667 \text{ ساعة}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3-1} = 0.5 \text{ زبوناً}$$

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0.5 - \frac{1}{3} = 0.1667 \text{ زبوناً}$$

3-صفوف الانتظار كسياق عشوائي للنموذج M/M/1:

سنعتمد في هذه المعالجة على ثلاث فرضيات هي:

أ- إن عدد القادمين أو المغادرين خلال الفترة الزمنية (0, t) الذي سنرمز له بالرمز N(t) يشكل سياقاً عشوائياً ويتميز بالاستقلالية:

أي أنه إذا كانت لدينا اللحظات الزمنية الآتية:

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k$$

فإن المتحولين العشوائيين المعرفين بالعلاقتين:

$$Z_{(i+1)} = N(t_{i+1}) - N(t_i) \qquad i: 0\ 1\ 2\ 3\ \ldots (k-2) \qquad (19\text{-}12)$$

$Z_{(i+2)} = N(t_{i+2}) - N(t_{i+1})$

هما متحولان مستقلان ولهما توزيعان مستقلان.

ب- نفترض أنه يوجد في النظام n زبوناً في النظام، وإن احتمال أن يدخل النظام زبون واحد فقط خلال الفترة من t إلى $t+\Delta t$ يتناسب مع طول تلك الفترة Δt ويساوي:

$$P_n = \lambda_n \cdot \Delta t + 0(\Delta t) \qquad (20\text{-}12)$$

حيث λ_n معدل الوصول، وبذلك يكون الاحتمال المعاكس مساوياً لـ $1 - P_n = 1 - \lambda_n \Delta t - 0(\Delta t)$.

وإن احتمال أن يغادر النظام زبون واحد فقط خلال الفترة من t إلى $t + \Delta t$ يتناسب مع طول الفترة Δt ويساوي:

$$q_n = \mu_n \Delta t + 0(\Delta t) \qquad (21\text{-}12)$$

حيث μ_n معدل المغادرة، وبذلك يكون الاحتمال المعاكس مساوياً لـ $1 - q = 1 - \mu_n \Delta t - 0(\Delta t)$

كما نفترض أن حيث $0 (\Delta t)$ كمية صغيرة جداً بالنسبة إلى Δt وتحقق العلاقة:

$$\lim_{\Delta t \to o} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \qquad (22\text{-}12)$$

لذلك سنقوم بإهمال الحد $0 (\Delta t)$ في العمليات الحسابية القادمة.

ج- لنفترض أنه يوجد في النظام n زبوناً في اللحظة t وإن احتمال أن يتجاوز عدد القادمين والمغادرين معاً العدد واحد خلال الفترة من t إلى $t + \Delta t$ يساوي $o (\Delta t)$.

إذا رمزنا لاحتمال أن يتضمن النظام n زبوناً في اللحظة t بالرمز $P_n(t)$ فإن هذا الاحتمال ينتهي عندما يتحول النظام إلى وضعية الاستقرار إلى الاحتمال P_n أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{(t)} \to p_n \qquad (23\text{-}12)$$

حيث أن P_n هو احتمال أن يكون عدد المتواجدين في النظام وهو في وضعية الاستقرار مساوياً لـ n زبوناً تماماً، أي أن الاحتمال $P_n(t)$ يأخذ قيمة ثابتة P_n عندما يكون النظام في وضعية الاستقرار.

نظرية (1):

إذا كان P_n هو احتمال أن يكون عدد المتواجدين وهو في وضعية الاستقرار مساوياً لـ n، وإذا كان P_0 احتمال عدم وجود أي زبون فيه فإن الفرضيات السابقة تعطينا أنهما مرتبطان بالعلاقة الآتية:

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \cdot (P_0) \qquad (24\text{-}12)$$

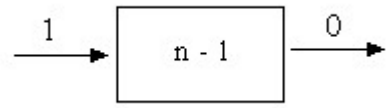
كما إن P_0 يساوي:

$$P_o = \frac{1}{1 + \sum_{n=1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i}} \qquad (25\text{-}12)$$

البرهان:

لنرمز لاحتمال أن يكون عدد المتواجدين في النظام مساوياً n زبوناً في اللحظة t بالرمز $P_n(t)$ ويبقى مساوياً لـn زبوناً في اللحظة $(t + \Delta t)$ بالرمز $P_n(t + \Delta t)$، وحتى نحسب الاحتمال $P_n (t + \Delta t)$ نحلل الإمكانيات إلى الحوادث المتنافية الآتية:

الحادث الأولe_1: يكون عدد المتواجدين في اللحظة t مساوياً (n-1) زبوناً (بشرط $n \geq 1$)، وخلال الفترة $(t, t + \Delta t)$ يدخل إلى النظام زبون واحد ولا يخرج منه أحد كما في الشكل الآتي:

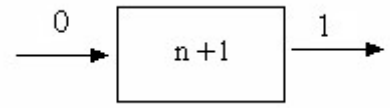


الشكل رقم (12-8)

وإن احتمال تحقق هذا الحادث المركب من حوادث مستقلة حسب الفرضيات السابقة يساوي (بعد إهمال الحد $0\ (\Delta t)$):

$$P(e_1) = [\lambda_{n-1}\Delta t].P_{n-1}(t).[1-\mu_{n-1}\Delta t]$$

الحادث الثاني e_2: يكون عدد المتواجدين في النظام (n+1) زبوناً في اللحظة t وخلال الفترة $(t, t + \Delta t)$ يخرج من النظام زبون واحد ولا يدخل إليه أحد، كما في الشكل الآتي:

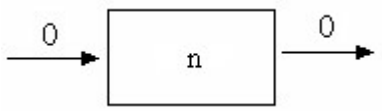


الشكل رقم (12-9)

وإن احتمال تحقق هذا الحادث المركب من حوادث مستقلة حسب الفرضيات السابقة يساوي:

$$P(e_2) = [1-\lambda_{n+1}\Delta t]\cdot P_{n+1}(t)\cdot[\mu_{n+1}\cdot\Delta t]$$

الحادث الثالث e_3: يكون عدد المتواجدين في النظام n زبوناً في اللحظة t وخلال الفترة $(t, t + \Delta t)$ لا يدخل إلى النظام أحد ولا يخرج منه أحد، كما في الشكل الآتي:

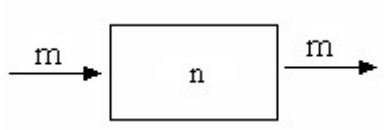


الشكل رقم (12-10)

وإن احتمال تحقق هذا الحادث المركب من حوادث مستقلة أيضاً يساوي حسب الفرضيات السابقة:

$$P(e_3) = [1-\lambda_n\cdot\Delta t]\cdot P_n(t)\cdot[1-\mu_n\,\Delta t]$$

الحادث الرابع e_4: يكون عدد المتواجدين في النظام في اللحظة t مساوياً لـn زبوناً وخلال الفترة $(t, t + \Delta t)$، يدخل إليه m زبوناً ويخرج منه m زبوناً $(m \geq 1)$ كما في الشكل الآتي:



الشكل رقم (12-11)

وإن احتمال تحقق هذا الحادث المركب من حوادث مستقلة يساوي:

$$P(e_4) = [\lambda_n \Delta t]^m \cdot P_n(t) \cdot [\mu_n \Delta t]^m$$

وبذلك نجد أن احتمال أن يكون عدد المتواجدين في النظام في اللحظة $(t + \Delta t)$ مساوياً لـ n زبوناً يساوي مجموع احتمالات تلك الحوادث المتنافية أي أن:

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) \\ &= P_{n-1}(t) \cdot \lambda_{n-1}\Delta t \cdot (1-\mu_{n-1}\Delta t) + P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1}\Delta t)(\mu_{n+1}\Delta t) \\ &\quad + P_n(t)(1-\lambda_n\Delta t)(1-\lambda_n\Delta t) + P_n(t)(\lambda_n\Delta t)^m(\mu_n\Delta t)^m \end{aligned} \qquad (26\text{-}12)$$

وبعد إصلاح هذه المعادلة ودمج الحدود التي تتضمن $(\Delta t)^2$ أو $(\Delta t)^m$ لكونها صغيرة جداً في حد واحد $0\ (\Delta t)$ نحصل على العلاقة الآتية:

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P_{n-1}(t) \cdot \lambda_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t) \cdot \mu_{n+1}\Delta t + P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n + \mu_n)\Delta t \\ &\quad + 0(\Delta t) \end{aligned}$$

ثم نقوم بمعالجتها لاستخراج مشتق الاحتمال بالنسبة لـ t فنحصل على العلاقة الآتية:

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t).\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t).\mu_{n+1} - P_n(\lambda_n + \mu_n) + o$$

وذلك بشرط أن يكون: $n \geq 1$.

وأخيراً نجد أن مشتق الاحتمال $p_{(t)}$ يساوي:

$$p'_n(t) = p^{(t)}_{n-1}\lambda_{n-1} + p^{(t)}_{n+i}\mu_{n+1} - p^{(t)}_n(\lambda_n + \mu_n) \qquad (27\text{-}12)$$

حيث $n \geq 1$

ومن هذه العلاقة يمكننا استخراج عدد لا نهائي من المعادلات التفاضلية وذلك بإعطاء n القيم الممكنة له، حيث إن: $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$.

أما إذا أردنا أن يكون $n = o$ (لا يوجد أحد من النظام) فإن الحادث الأول e_1 يصبح مستحيلاً وبذلك يكون احتمال وقوعه مساوياً الصفر أي: $P(e_1) = 0$ كما تكون $\mu_0 = 0$، لأنه لا يمكن خروج أحد من النظام لعدم وجود أحد فيه وبذلك تأخذ العلاقة (27-12) الشكل الآتي:

$$P_0'(t) = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t) \qquad (28\text{-}12)$$

وحتى نستفيد من شروط النظرية نبحث عن مصير هذه المعادلات عندما يتحول النظام إلى وضعية الاستقرار. حيث نجد حسب الفرضية (4) أن:

$$\lim P_n(t) = P_n = \text{عدد ثابت} \qquad \forall n \geq 0$$

وبذلك تصبح المشتقات $P_n'(t)$, $P_0'(t)$ مساوية للصفر ونحصل على جملة المعادلات العادية الآتية:

$$P_0'(t) = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0 \qquad \text{عندما } n=0 \qquad (29\text{-}12)$$

$$P_1'(t) = \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 - (\lambda_1 + \mu_1) P_1 = 0 \qquad \text{عندما } n=1 \qquad (30\text{-}12)$$

$$P_2'(t) = \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 - (\lambda_2 + \mu_2) P_2 = 0 \qquad \text{عندما } n=2 \qquad (31\text{-}12)$$

$$P_3'(t) = \lambda_2 P_2 + \mu_4 P_4 - (\lambda_3 + \mu_3) P_3 = 0 \qquad \text{وعندما } n=3$$

من المعادلة الأولى نجد مباشرة:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} . P_0 \qquad (32\text{-}12)$$

وبتعويض P_1 في المعادلة الثانية نحصل على أن:

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 - (\lambda_1 + \mu_1)(\frac{\lambda_0}{\mu_1}) P_0 = 0$$

وبذلك نجد أن:

$$\mu_2 p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1} P_0 + \lambda_0 P_0 - \lambda_0 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0.\lambda_1}{\mu_1.\mu_2} P_0 \qquad (33\text{-}12)$$

وبتعويض P_1 , P_2 في المعادلة الثالثة نحصل على أن:

$$\lambda_1.\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 + \mu_3 P_3 - (\lambda_2 + \mu_2)\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} P_0 = 0$$

$$\mu_3 P_3 = \frac{\lambda_0.\lambda_1.\lambda_2}{\mu_1.\mu_2} P_0 + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda_0.\lambda_1.\lambda_2}{\mu_1.\mu_2.\mu_3} P_0 \qquad (34-12)$$

وهكذا يمكننا أن نتابع البرهان حتى نتوصل إلى العلاقة العامة الآتية:

$$P_n = \frac{\lambda_0.\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3.....\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3.....\mu_n}.P_0 = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i} * P_0 \qquad (35\text{-}12)$$

وهي العلاقة الأولى المطلوبة في هذه النظرية:

ولاستخراج العلاقة الثانية نعتمد على أن الاحتمالات:

$$P_0 \qquad P_1 \qquad P_2 \qquad P_3 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad P_n \qquad \ldots\ldots\ldots$$

تشكل توزيعاً احتمالياً لعدد المتواجدين في النظام وإن مجموعها يساوي الواحد أي أن:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_n + \ldots\ldots\ldots = 1$$

أي أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \qquad (36\text{-}12)$$

ومن العلاقة (12−35) نجد أنه يمكننا كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}.P_0 = 1 \qquad (37\text{-}12)$$

ومنها نجد أن:

$$P_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}\right]=1$$

وبذلك نجد أن:

$$P_0=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}} \qquad (38\text{-}12)$$

وهو المطلوب.

ويكون المجموع في مقام الكسر السابق متقارباً إذا كانت $\lambda_i < \mu_i$ مهما تكن i.

نظرية (2):

إضافة للفرضيات (1) و(2) و(3) المذكورة سابقاً نفترض أنه إذا كان النظام في اللحظة $t = 0$ فارغاً (أي كان $n = 0$) وكانت معدلات الوصول ثابتة وتساوي $\lambda_n = \lambda$ وكانت جميع معدلات المغادرة معدومة وتساوي $\mu_n = 0$ فإن الاحتمال $P_n(t)$ يعطى بالعلاقة الآتية (توزيع بواسون لعدد القادمين إلى النظام n):

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

<u>البرهان:</u>

ضمن الفرضيات السابقة نجد أن المعادلة (12-27) تأخذ الشكل الآتي:

$$P_n'(t)=\lambda P_{n-1}(t)-\lambda P_n$$

والمعادلة (12-28) تأخذ الشكل الآتي:

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \qquad (39\text{-}12)$$

وبحل هاتين المعادلتين التفاضليتين كما ورد في الفصل السابق نجد أن:

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n e^{-(\lambda t)}}{n!} \qquad (40\text{-}12)$$

وهو قانون توزيع بواسون الذي توقعه $E(n) = \lambda t$، ويأخذ هذا القانون شكلاً مبسطاً إذا كانت $t = 1$ (في واحدة الزمن) وهو:

$$P_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \qquad (a - 40\text{-}12)$$

ويصبح توقعه:

$$E(n) = \lambda$$

نظرية (3):

إذا كان عدد الزبائن القادمين n إلى مركز الخدمة خاضعاً إلى توزيع بواسون السابق وبمعدل ثابت λ فإن مدة الفترة الزمنية T الفاصلة بين الزبون والذي يليه تخضع لقانون التوزيع الأسي الآتي:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (41\text{-}12)$$

والذي توقعه الرياضي $E(t) = \frac{1}{\lambda}$.

البرهان:

بما أن عدد الواصلين n خلال الفترة $[0,t]$ يخضع لتوزيع بواسون الآتي:

$$f(t) = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$$

حيث إن: $n = 0, 1, 2, \ldots$ فإننا نحصل على احتمال أن يكون عدد الواصلين مساوياً لـ x من العلاقة:

$$P\,(n = x) = f\,(x)$$

ولنفترض أن الفترة الفاصلة بين الزبون والذي يليه هي T، وأن النظام كان فارغاً في اللحظة $t = 0$، فإن الزمن اللازم حتى يصل زبون واحد أو أكثر قبل اللحظة t يساوي احتمال أن يتواجد في النظام زبون واحد على الأقل قبل اللحظة t، أي أن:

$$G\,(t) = P\,(T < t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$$

وبما أنه لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n\cdot e^{-\lambda t}}{n!}=1$$

فإن المجموع السابق يساوي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n\cdot e^{-\lambda t}}{n!}=1-e^{-\lambda t}$$

أي أن تابع التوزيع لطول الفترة T يساوي:

$$G(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$$

ومنه نحصل على قانون التوزيع الاحتمالي للفترة الزمنية (t) g من مشتق G (t) فنجد أن:

$$g(t)=\frac{\partial G(t)}{\partial t}=\frac{\partial(1-e^{-\lambda t})}{\partial t}=\lambda\cdot e^{-\lambda t}$$

وهو المطلوب.

نتائج هامة:

من النظريات السابقة وضمن نفس الفرضيات المذكورة يمكننا أن نحسب بعض المؤشرات وضمن الفرضيات والشروط الآتية:

نفترض أن جميع معدلات الوصول λ_n متساوية أي أن $\lambda = \lambda_n$، كما نفترض أن معدلات المغادرة (بعد الخدمة) متساوية، أي أن $\mu = \mu_n$.

كما نشترط أن يكون $\lambda < \mu$ (ونرمز للكسر $\frac{\lambda}{\mu}$ بـ ρ أي سنضع $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$)

وسنقوم بحساب المؤشرات الآتية:

1- حساب الاحتمال P_0 المقابل لعدم وجود أحد في النظام عندما يكون في وضعية الاستقرار، فمن العلاقة (12-25) وضمن الفرضيات السابقة نجد أن P_0 يصبح مساوياً لـ:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^n} = \frac{1}{1+[\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}]} = \frac{1}{1+[\frac{\lambda}{\mu-\lambda}]} = \frac{\mu-\lambda}{\mu} = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

وذلك لأن المجموع في مقام الكسر السابق هو مجموع متوالية هندسية حدها الأول $\frac{\lambda}{\mu}$ وأساسها $\frac{\lambda}{\mu}$ وبذلك نجد أن:

$$P_0 = 1-\frac{\lambda}{\mu} = 1-\rho \qquad (42\text{-}12)$$

وكذلك نجد أن الاحتمال P_n يصبح مساوياً:

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 = (\frac{\lambda}{\mu})^n (1-\frac{\lambda}{\mu}) \qquad (43\text{-}12)$$

$$P_n = \rho^n \cdot (1-\rho) \qquad n \geq 1 \qquad (44\text{-}12)$$

يسمى العدد $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ بمعامل الخدمة أو بكثافة المرور Traffic Intensity ومن أهم خواصه أنه $0 < \rho \leq 1$.

أما إذا كان $\rho > 1$ فإن العدد المتوقع للقادمين سيزداد حتى يتجاوز العدد المتوقع للمغادرين ويخرج النظام عن حالة الاستقرار.

2- حساب العدد المتوقع للمتواجدين في النظام ونرمز له بـ Ls وهو يساوي:

$$L_S = E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n(1-\rho) \qquad (45\text{-}12)$$

$$L_S = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n = (1-\rho)[\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4 + 5\rho^5 + ...]$$

$$L_s = (1-\rho)\cdot\rho[1 + 2\rho + 3\rho^2 + 4\rho^3 + 5\rho^4 + ...]$$

ولحساب المجموع اللانهائي الذي داخل القوس نأخذ السلسلة الهندسية الآتية:

$$\rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5 + ... = \rho\frac{1}{1-\rho}$$

ثم نأخذ مشتق الطرفين بالنسبة لـ ρ فنحصل على:

$$1+2\rho+3\rho^2+4\rho^3+5\rho^4+.....=\frac{1\cdot(1-\rho)-(-1)\rho}{(1-\rho)^2}=\frac{1}{(1-\rho)^2}$$

وبتعويض ذلك في علاقةLs نحصل على أنّ:

$$L_s=(1-\rho)\cdot\rho\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{1-\rho} \qquad (46-12)$$

وبتعويض ρ بـ $\frac{\lambda}{\mu}$ نحصل على أن:

$$L_s=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (47\text{-}12)$$

وهو القيمة المتوقعة لعد المتواجدين داخل النظام.

أما بالنسبة لتوقع عدد المتواجدين في الصف فقط الذي نرمز له بـLq، فنجد أنه يخضع لاحتمالات ولكن عدد المتواجدين فيه يكون (n −1) زبوناً فقط، وبذلك نجد أن:

$$L_q=E(n-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=\sum_{i=1}^{\infty}nP_n-\sum_{i=1}^{\infty}P_n$$

$$Lq=\frac{\rho}{1-\rho}-(1-P_0)=\frac{\rho}{1-\rho}-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (48\text{-}12)$$

وبتعويض ρ بـ $\frac{\lambda}{\mu}$ نجد أن:

$$Lq=\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (49\text{-}12)$$

3- لحساب متوسط مدة الانتظار والبقاء في النظام والذي سنرمز له بـ W_s نجد أن يساوي: عدد المتواجدين فيه Ls مضروبا بمتوسط المدة اللازمة لكل منهم $\frac{1}{\lambda}$.

$$W_s=L_s\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \qquad (50\text{-}12)$$

4- لحساب متوسط مدة الانتظار والبقاء في الصف فقط والتي يرمز لها بـ W_q نجد أن يساوي:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad (51\text{-}12)$$

وذلك لأن W_q تساوي W_s مطروحاً منها المدة اللازمة للزبون $\frac{1}{\mu}$.

5- في الحقيقة إن حساب W_s وW_q يتم بطريقة أخرى، وهي طريقة التوزيع الاحتمالي الذي تخضع كل منهما له, وسنعالج ذلك كما يلي:

لإيجاد التوزيع الاحتمالي لمدة الانتظار في النظام نرمز لها بـ T, ولنفترض أن الزبون القادم سيجد أمامه n زبوناً؛ واحد منهم في النظام و الـ (n-1) الباقين في الصف, وعندها يكون على ذلك القادم أن ينتظر مدة تساوي:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + ...t_n + t_{n+1}$$

حيث t_1' هو الوقت الباقي اللازم لخدمة الزبون الموجود في الخدمة وt_2 ،t_3، t_4 .... t_n. هي المدد اللازمة لخدمة الزبائن المنتظرين في الصف, وt_{n+1} المدة اللازمة لخدمة ذلك الزبون القادم.

وإذا فرضنا أن $W_{(T/n+1)}$ هو قانون التوزيع الشرطي لمدة الخدمة اللازمة لـ n زبوناً المتواجدين في النظام قبل وصول الزبون المذكور. وبما أن المدة الأولى t_1' تخضع احتمالياً إلى التوزيع الأسي بتوقع قدره μ وإن المدد $t_2,t_3,t_4,....t_n,t_{n+1}$ تخضع إلى توزيعات أسية بتوقع موحد μ. فإن التوزيع الشرطي $W(T/n+1)$ المطلوب هو توزيع (غاما إيرلانغ) لأن المتحول T هو مجموع متحولات أسية، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$W(T/n+1) = \frac{\mu(\mu t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad \text{(لمجموع المتحولات)}$$

وعندها نجد أن التوزيع المنفرد لـ T يساوي جداء الاحتمالات P_n بالاحتمالات الشرطية.

$$W(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot W(T/n+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (1-\rho) \frac{\mu(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

$$= (1-\rho) \cdot \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

$$= (1-\rho) \cdot \mu e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu t)^n}{n!}$$

$$= (1-\rho)\mu e^{-\mu t} \cdot e^{\rho\mu t}$$

$$W(T) = (1-\rho)\mu e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad (52\text{-}12)$$

وهو عبارة عن توزيع أسي وتوقعه الرياضي يساوي مقلوب أمثال t، أي أن:

$$E(T) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

وبذلك نجد أن المدة المتوقعة لانتظار أي زبون موجود في النظام تساوي:

$$W_s = E(T) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (53\text{-}12)$$

وكذلك نجد أن المدة المتوقعة للانتظار في الصف فقط W_q يمكن أن تحسب بالطريقة نفسها. ولكننا سنستخرجها بطريقة أسهل وذلك بطرح المدة اللازمة لخدمة الزبون $\frac{1}{\mu}$ من W_s فنجد أن:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad (54\text{-}12)$$

6- حساب احتمال أن يكون عدد المتواجدين في النظام أكبر من عدد k. بما أن الاحتمالات Pn تشكل توزيعا مستقلا لعدد المتواجدين في النظام فإنه يكون لدينا:

عدد المتواجدين n	الاحتمال
n = 0	$P_0 = (1-\rho)$
n = 1	$P_1 = \rho(1-\rho)$
n = 2	$P_2 = \rho^2(1-\rho)$
n = 3	$P_3 = \rho^3(1-\rho)$
– – –	– – – – – –
n = k	$P_k = p^k(1-\rho)$
n = k + 1	$P_{k+1} = p^{k+1}(1-\rho)$
n = k + 2	$P_{k+2} = p^{k+2}(1-\rho)$
- - -	– – – –

وبذلك نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$p(n > k) = p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots\ldots = 1 - [p_0 + p_1 + p_2 + \ldots\ldots p_k]$$
$$= 1 - [(1-\rho) + \rho(1-\rho) + \rho^2(1-\rho) + \ldots\ldots \rho^k(1-\rho)]$$
$$= 1 - (1-\rho)[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots\ldots \rho^k]$$
$$= 1 - (1-\rho)1 \cdot \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} = 1 - 1 + \rho^{k+1} = \rho^{k+1}$$

أي أن:

$$p(n > k) = \rho^{k+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \qquad (55\text{-}12)$$

7- حساب احتمال أن تكون مدة البقاء في النظام T أكبر من فترة محددة t، يمكن حساب هذا الاحتمال من قانون التوزيع الذي تخضع له المدة T وهو التوزيع الأسي الذي وجدناه في العلاقة (12-52) الآتي:

$$W(T) = (1-\rho)\mu e^{-\mu(1-p)t}$$

وبذلك نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي :

$$p(T > t) = \int_t^{\infty} (1-\rho)\mu e^{-\mu(1-\rho)t} dt = \left[-e^{-\mu(1-\rho)t}\right]_t^{\infty}$$

$$p(T > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad (56\text{-}12)$$

مثال (6):

يستقبل مدخل السيارات في المطار 120 سيارة في الساعة، ويستغرق دفع رسم الدخول عن كل سيارة 25 ثانية. فإذا كان تيار الوصول يخضع لتوزيع بواسون وكانت مدة الخدمة تخضع للتوزيع الأسي فاحسب مايلي:

أ- احتمال ألا يوجد في النظام أية سيارة.

ب- توقع عدد السيارات المتواجدة في النظام (في الصف وفي مركز الخدمة).

ج- توقع عدد السيارات المنتظرة في الصف لدخول المحطة.

د- نسبة الوقت الذي يكون فيها المخدم مشغولاً.

هـ- حساب احتمال أن يكون عدد السيارات المتواجدة في النظام أكبر من 5 سيارات.

و- حساب احتمال أن تكون مدة الانتظار في النظام أكثر من 3 دقائق.

الحل:

قبل البدء في الإجابة نحسب معالم النظام الآتية (في الساعة):

$$\lambda = 120 \qquad \mu = \frac{60 \cdot 60}{25} = 144 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{120}{144} = \frac{10}{12}$$

أ- إن احتمال عدم وجود أي سيارة في النظام يساوي:

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{10}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

ب- توقع عدد السيارات المتواجدة في النظام يساوي:

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{10}{12}} = 5 \text{ سيارات}$$

ج- توقع عدد السيارات المتواجدة في الصف فقط:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{10}{12}\right)^2}{1-\frac{10}{12}} = \frac{100}{24} = 4{,}167 \text{ سيارة}$$

د- إن نسبة الوقت الذي يكون فيها المخدم مشغولا تساوي نسبة تتمة الوقت الذي يكون فيه عاطلاً أي أن:

$$R = 1 - p_0 = 1 - (1-\rho) = \rho = \frac{10}{12}$$

هـ- احتمال أن يكون عدد السيارات المتواجدة في النظام أكبر من 5 سيارات يساوي:

$$p(n > 5) = \rho^{5+1} = \left(\frac{10}{12}\right)^6 = 0{,}3349$$

و- احتمال أن تكون مدة الانتظار في النظام أكثر من 3 دقائق يساوي:

$$p(T > \frac{3}{60}) = e^{-\mu(1-\rho)\frac{3}{60}} = e^{-144\left(1-\frac{10}{12}\right)\frac{3}{60}} = e^{-1.2} = 0{,}3012$$

حالة خاصة:

عندما يكون الصف محدوداً (في نظام الصف الواحد والمركز الواحد M/M/1).

لنفترض أن الحد الأعلى لعدد الزبائن المسموح به في النظام يساوي M.

وفي هذه الحالة لا يشترط أن يكون $\lambda < \mu$ لأنه عندما يتجاوز الصف العدد M فإن الزبون يعود راجعاً ولا يدخل النظام، وفي هذه الحالة تأخذ معاملات المعادلات التفاضلية السابقة الشكل الآتي:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda \ \text{for} \ n: 0,1,2,.....M-1 \\ 0 \ \text{for} \ n: M, M+1, M+2,..... \end{cases} \qquad (57-12)$$

$$\mu_n = \mu \ \text{ for } n: 0,1,2,.....$$

وبتعويض ذلك في المعادلة التي تعطينا الاحتمال P_0 وهي (12-25) نحصل على أن:

$$P_0 = \frac{1}{\left[1+\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]} = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{M}\rho^n} \qquad (58-12)$$

حيث استخدمنا نفس المصطلح $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ بدون شرط, وهنا نميز بين الحالتين الآتيتين:

1- إذا كانت $\lambda \neq \mu$ فإن المجموع الذي في مقام الكسر يصبح مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول ρ وأساسها ρ وعدد حدودها M, وبذلك نجد أن:

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho\frac{1-\rho^M}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}} \qquad \text{عندما: } \lambda \neq \mu \qquad (59-12)$$

2- إذا كانت $\lambda = \mu$ فإن المجموع في مقام الكسر يصبح مساوياً لـ:

$$\sum_{i=1}^{M}\rho = \sum_{i=1}^{M}1 = M$$

وبذلك نجد أن:

$$P_0 = \frac{1}{1+M} \qquad (60-12)$$

ومن العلاقة (12-44) نجد أن الاحتمالات P_n ترتبط مع الاحتمال P_0 بالعلاقتين الآتيتين:

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}} \qquad \text{عندما: } \lambda \neq \mu \qquad (61-12)$$

$$P_n = P_0 = \frac{1}{1+M} \qquad \text{عندما: } \lambda = \mu \text{ وإن: } \rho = 1 \text{ فإن} \qquad (62-12)$$

وكذلك نجد من العلاقة (12-45) أن توقع عدد الزبائن في النظام L_s يعطى عندما $\lambda \neq \mu$ بالعلاقة:

$$L_s = \sum_{n=1}^{M} n \cdot P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}} \sum_{n=1}^{M} n \cdot \rho^n \qquad \lambda \neq \mu$$

لحساب المجموع الأخير نكتبه كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{M} n\cdot\rho^{n} = \rho + 2\rho^{2} + 3\rho^{3} + 4\rho^{4} + \ldots\ldots + M\rho^{M}$$

ولحساب هذا المجموع نأخذ مجموع حدود المتوالية الهندسية الآتية:

$$1 + \rho + \rho^{2} + \rho^{3} + \rho^{4} + \ldots\ldots + \rho^{M} = \frac{1-\rho^{M+1}}{1-\rho}$$

ثم نحسب مشتق الطرفين فنحصل على:

$$0 + 1 + 2\rho + 3\rho^{2} + 4\rho^{3} + \ldots\ldots + M\rho^{M-1} = \frac{-(M+1)\rho^{M}(1-\rho) + (1-\rho^{M+1})}{(1-\rho)^{2}}$$

ثم نضرب الطرفين بـ ρ فنجد أن:

$$\rho + 2\rho^{2} + 3\rho^{3} + 4\rho^{4} + \ldots\ldots + M\rho^{M} = \rho\frac{-(M+1)\rho^{M}(1-\rho) + (1-\rho^{M+1})}{(1-\rho)^{2}}$$

وبذلك يصبح الطرف الأيسر مساوياً للمجموع $\sum_{n=1}^{M} n\rho^{n}$ لذلك نكتب ذلك كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{M} n\rho^{n} = \frac{\rho}{1-\rho}\left[-(M+1)\rho^{M}\right] + \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1-\rho^{M+1}}{1-\rho}$$

وبضرب الطرفين بالكسر $\frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}$ نحصل على قيمة L_s حيث يكون لدينا:

$$L_s = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\sum_{n=1}^{M} n\cdot\rho^{n} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\cdot\frac{\rho}{1-\rho}\left[-(M+1)\cdot\rho^{M}\right] + \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(M+1)\cdot\rho^{M+1}}{1-\rho^{M+1}} \qquad \text{عندما } \lambda \neq \mu : \qquad (63-12)$$

أما عندما $\lambda = \mu$ فإن: $P_n = \frac{1}{1+M}$ ويكون لدينا:

$$L_s = \sum_{n=1}^{M} n\cdot P_n = \frac{1}{1+M}\sum_{n=1}^{M} n = \frac{1}{1+M}\frac{M}{2}(1+M) = \frac{M}{2}$$

$$L_s = \frac{M}{2} \qquad \text{عندما: } \lambda = \mu \qquad (64-12)$$

وكذلك نجد أن توقع عدد الزبائن في الصف يساوي:

$$L_q = \sum_{n=1}^{M}(n-1)P_n = \sum_{i=1}^{M} n \cdot P_n - \sum_{n=1}^{M} P_n$$

$$L_q = L_s - (1-P_0) \qquad \lambda \neq \mu$$

$$L_q = \frac{M}{2} - \left(1 - \frac{1}{1+M}\right) = \frac{M(M-1)}{2(M+1)} \qquad \lambda = \mu \qquad (65-12)$$

أما بالنسبة لتوقع مدتي الانتظار في النظام أو في الصف, فهو يتوقف على وجود شواغر في الصف أم لا، لأنه عندما تكون جميع الشواغر مشغولة فإن الوافدين يتراجعون ويصبح معدل الوصول معدوماً، أي يصبح: $\lambda = 0$. لذلك يصبح ضرورياً أن نعرف مؤشراً جديداً يتعلق بمعدل وصول الزبائن الفعلي ونرمز له بـ λ_e ونستخرجه من العلاقة (12-17) حيث نجد أن:

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_e}{\mu}$$

ومنها نجد أن:

$$\lambda_e = \mu(L_s - L_q) = \mu[L_s - (L_s - (1-P_0))] = \mu(1-P_0)$$

وبذلك يكون لدينا:

$$\lambda_e = \mu(1-P_0) \qquad (66-12)$$

وأخيراً نحصل على أن توقع مدتي الانتظار في النظام أو في الصف تساويان:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} \qquad (67-12)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} \qquad (68-12)$$

مثال (7):

يوجد في أحد محلات الحلاقة حلاق واحد وست مقاعد لانتظار الزبائن، وبفرض أن الزبون الذي لا يجد مقعداً شاغراً يرجع ولا يدخل المحل, وأن معدل وصول الزبائن $\lambda = 3$ في الساعة وإن معدل مدة البقاء في خدمة الحلاقة 15 دقيقة والمطلوب:

1- احتمال عدم وجود أي زبون في المحل (احتمال أن يصبح الزبون في الخدمة فور دخوله).

2- توقع عدد الزبائن في المحل.

3- توقع عدد الزبائن في الصف.

4- معدل الوصول الفعلي.

5- توقع مدة البقاء في النظام.

6- توقع مدة البقاء في الدور.

7- احتمال أن يتواجد في المحل 5 زبائن.

8- حساب نسبة الزبائن الراجعين.

9- حساب نسبة الزبائن الراجعين إذا تمت إضافة مقعد واحد للانتظار.

الحل:

نلاحظ أن:

$$M = 6 + 1 = 7$$
$$\lambda = 3 / hr$$
$$\mu = \frac{60}{15} = 4 / hr$$
$$\rho = \frac{3}{4}$$

وبذلك يكون لدينا حسب العلاقة (12-60) والعلاقات التي تليها عندما $\lambda \neq \mu$ أن:

-1

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}} = \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^8} = 0.2778$$

-2

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(M+1)\cdot\rho^{M+1}}{1-\rho^{M+1}} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} - \frac{8\left(\frac{3}{4}\right)^8}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^8} = 2.11$$

-3

$$L_q = L_s - (1 - P_0) = 2.11 - (1 - 0.2778) = 1.39$$

-4

$$\lambda_e = \mu(1 - P_0) = 4(1 - 0.2778) = 2.89 / hr$$

-5

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{2.11}{2.89} = 0.73\,hr = 43.8\,min$$

-6

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{1.39}{2.89} = 0.48897\,hr = 28.86\,min$$

7- احتمال وجود 5 أشخاص في المحل:

$$P_5 = (\rho)^5 P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 (0.2778) = 0.0659$$

8- أما نسبة الزبائن الراجعين فتساوي احتمال عدم وجود شواغر في المحل أي تساوي احتمال وجود سبع أشخاص في المحل وتساوي:

$$P_7 = (\rho)^7 \cdot P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^7 (0.2778) = 0.037 = 3.7\%$$

9- عند إضافة مقعد واحد للانتظار تصبح $M = 7 + 1 = 8$ وعندها نجد أن تلك النسبة تساوي احتمال وجود ثمانية أشخاص في المحل, أي أن:

$$P_8 = (\rho)^8 P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot P_0 = 0.0278 = 2.78\%$$

إيجاد القيمة المثلى لمعدل الخدمة μ في النموذج M/M/1 غير المحدود:

إن القيمة المثلى للمعدل μ هي القيمة التي تؤمن أفضل الخدمات بأقل التكاليف، وللحصول عليها نفترض أنه لدينا البيانات الآتية عن التكاليف:

C_1- تكلفة خدمة الزبون الواحد في المركز.

C_2- تكلفة انتظار الزبون في النظام خلال واحدة الزمن.

وإذا رمزنا لقيمة التكلفة الإجمالية للانتظار والخدمة بالرمز $T(\mu)$ فإننا نجد أن:

$$T(\mu)= C_1\,\mu + C_2\,.\,L_s = C_1\,\mu + C_2\,\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

ولحساب القيمة المثلى نأخذ مشتق $T(\mu)$ ونضعه مساوياً للصفر فنجد أن:

$$T'(\mu) = C_1 + C_2\,\frac{-\lambda}{(\mu-\lambda)^2} = 0$$

ومنها نجد أن:

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}\cdot\lambda} \qquad (69-12)$$

مثال (8):

لنفترض أن مركزاً لخدمة المواطنين يقبل $\lambda=100$ شخصاً في الساعة فما هو معدل الخدمة المثالي لـ μ .

إذا علمت أن تكلفة خدمة الزبون $C_1 = 600$ وتكلفة انتظاره في النظام $C_2 = 6$.

الحل:

من العلاقة السابقة نجد أن القيمة المثلى لـ μ هي:

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}.\lambda} = 100 + \sqrt{\frac{6}{600}.100} = 101$$

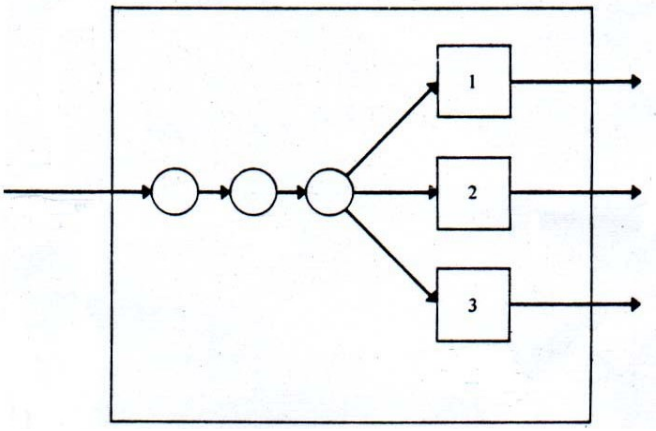
وختاماً لهذه الفقرة نورد جدولاً خاصاً بأهم العلاقات الرياضية التي تستخدم في حساب بعض مؤشرات صفوف الانتظار ذات الصف الواحد والمركز الواحد أي النموذج M/M/1.

العلاقة عندما يكون الصف غير محدد	الرمز	العلاقة عندما يكون الصف محدداً بـ M مكاناً
–	λ	$\lambda_e = \mu(L_s - L_q) = \mu(1 - P_0)$
–	μ	–
$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$	ρ	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$	W_S	$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$
$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$	W_q	$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$
$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$	L_s	$L_s = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(M+1)\cdot\rho^{M+1}}{1-\rho^{M+1}} & : \lambda \neq \mu \\ \frac{M}{2} & : \lambda = \mu \end{cases}$
$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$	L_q	$L_q = L_s - (1 - P_0) = L_s - \frac{\lambda_e}{\mu}$ $L_q = \frac{M(M-1)}{2M+1} \quad : \lambda = \mu$

العلاقة عندما يكون الصف غير محدد	الرمز	العلاقة عندما يكون الصف محدداً بـ M مكاناً
$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$	–	–
$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = L_s - \rho$	–	–
$P_0 = 1 - \rho$	P_0	$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}} & : \lambda \neq \mu \\ \frac{1}{M+1} & : \lambda = \mu \end{cases}$
$P_n = \rho^n (1-\rho)$	P_n	$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & : \lambda \neq \mu \\ P_0 & : \lambda = \mu \end{cases}$
$P(n > k) = \rho^{k+1}$	P(n>k)	–
$P(T > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}$	P(T>t)	–

III- نظـام الخدمـة بصـف واحـد وعـدة مراكـز للخدمـة M/M/C(والصف غير محدود):

ويمثل هذا النظام بيانياً كما في الرسم الآتي:



الشكل رقم (12-12)

وهنا نفترض أن:

1- إن عدد مراكز الخدمة يساوي S مركزاً مستقلاً.

2- إن كل مركز يقدم الخدمة للزبائن بمعدل ثابت يساوي μ.

3- إن معدل الوصول العام ثابت ويساوي λ.

4- إن معامل الخدمة أو التمرير $\rho = \frac{\lambda}{\mu s}$ وسوف لن ندخله في المعادلات الآتية.

وبناء على هذه الفرضيات يحسب احتمال أن يتواجد في النظام n زبوناً فقط من العلاقة

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & for: n = 0,1,2,3,.....,s-1 \quad (80-12) \\ \frac{1}{s!\, s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & for: n = s, s+1,..... \quad (81-12) \end{cases}$$

وكذلك نجد أن احتمال أن يكون عدد الزبائن في النظام أكبر أو يساوي عدد مراكز الخدمة أي أن احتمال أن تكون مراكز النظام مشغولة يساوي:

$$P(n \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!(1-\lambda/\mu s)} P_0 \qquad (82-12)$$

وكذلك نجد أن احتمال عدم مشغولية النظام بأي من الزبائن يساوي:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!(1-\lambda/\mu s)} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s} \qquad (83-12)$$

أما العدد المتوقع للمنتظرين في الصف فيساوي:

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{s \cdot s!(1-\lambda/\mu s)^2} \cdot P_0 \qquad (84-12)$$

والعدد المتوقع للمنتظرين من النظام يساوي:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \qquad (85-12)$$

والمدة المتوقعة للبقاء في النظام تساوي:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \qquad (86-12)$$

أما المدة المتوقعة للبقاء في الصف فتساوي:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad (87-12)$$

أما احتمال أن تكون مدة البقاء في النظام أكثر من مدة محددة t فيساوي:

$$P(T > t) = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)}\right)}{s!\left(1-\frac{\lambda}{\mu \cdot s}\right)\left(s-1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} P_0\right] \qquad (88-12)$$

مثال (9):

لنفترض أنه يوجد 3 أنسات للطباعة (رغداء+ ميساء+ منال) يعملن في شركة الغدير للخدمات الطباعية, وكل واحدة منهن تستطيع أن تطبع 6 رسائل في الساعة, فإذا كان معدل وصول الزبائن لطباعة رسائلهم يساوي 15 رسالة في الساعة. والمطلوب حساب مؤشرات فعالية العمل في هذا المكتب.

الحل:

لدينا المعلومات الآتية:

عدد مراكز الخدمة: $S = 3$

معدل الوصول: $\lambda = 15$

معدل الخدمة في كل من المراكز: $\mu = 6$

وهنا نلاحظ أنه لحساب مؤشرات فعالية العمل يلزمنا معرفة الاحتمال P_0 لذلك نقوم بحسابه في البداية من العلاقة المفصلة الآتية:

$$P_0 = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\frac{1}{6\left(1-\frac{\lambda}{3\mu}\right)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right]} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{15}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{15}{6}\right)^2+\frac{1}{6\left(1-\frac{15}{18}\right)}\left(\frac{15}{6}\right)^3} = 0.0449$$

$$P_0 = 0.0449$$

وبذلك نجد أن احتمال أن يكون عدد الرسائل أكبر أو يساوي S, أي أن احتمال أن يكن الطابعات الثلاثة مشغولات بالعمل يساوي عندما (S=3) ما يلي:

$$P(n \geq 3) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{s!\left(1-\frac{\lambda}{\mu \cdot s}\right)} P_0 = \frac{\left(\frac{15}{6}\right)^3}{6\left(1-\frac{15}{18}\right)}(0.0449) = 0.7025$$

وكان يمكن حساب هذا الاحتمال من العلاقة:

$$P(n \geq 3) = 1 - [P_0 + P_1 + P_2]$$

ولذلك نقوم بحساب P_1 أي احتمال أن تكون رسالة واحدة في النظام

$$P_1 = \frac{1}{1!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0 = \frac{15}{6} 0.0449 = 0.11225$$

كما نقوم بحساب P_2 من العلاقة:

$$P_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{6}\right)^2 (0.0449) = 0.14031$$

وبذلك يكون لدينا:

$$P(n \geq 3) = 1 - [0.0449 + 0.11225 + 0.14031] = 0.7025$$

ولحساب العدد المتوقع للرسائل في الصف L_q نطبق العلاقة:

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}{s \cdot s!\left(1-\frac{\lambda}{\mu \cdot s}\right)^2} = \frac{\left(\frac{15}{6}\right)^4}{3 \cdot 6 \cdot \left(1-\frac{15}{6 \cdot 3}\right)^2}(0.0449) = 3.51125 \text{ رسالة}$$

ولحساب العدد المتوقع للرسائل في النظام (في الانتظار وقيد الطباعة) نطبق العلاقة:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 3.51124 + \frac{15}{6} = 6.01124 \text{ رسالة}$$

ولحساب المدة المتوقعة لبقاء الرسالة في النظام (في الانتظار وفي الطباعة):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{6.01124}{15} = 0.40075 \text{ hr} = 24 \text{min}$$

والمدة المتوقعة لبقاء الرسالة في الصف تساوي:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.51124}{15} = 0.23408\text{hr} = 14\,\text{min}$$

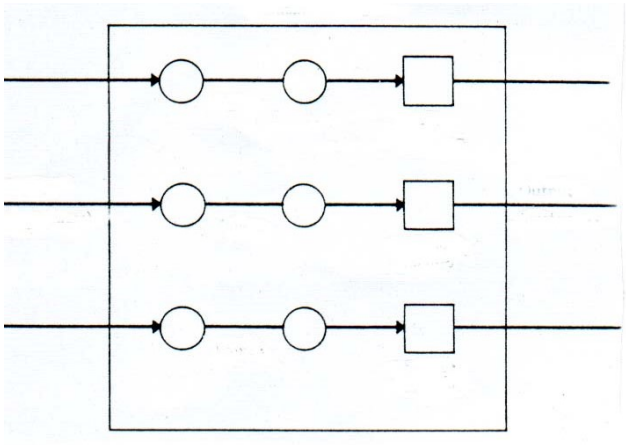
ولحساب احتمال أن تكون مدة بقاء الرسالة في النظام منتظرة الطباعة مع مدة إنجاز طباعتها أكثر من 20 دقيقة تساوي:

$$P\left(T > \frac{20}{60}\right) = e^{-6\left(\frac{20}{60}\right)}\left[1 + \frac{\left(\frac{15}{6}\right)^3\left[1 - e^{-6\left(\frac{20}{60}\right)\left(3-1-\frac{15}{6}\right)}\right]}{6\left(1-\frac{15}{18}\right)\left(3-1-\frac{15}{6}\right)}(0.0449)\right]$$

$$P\left(T > \frac{20}{60}\right) = 0.46198$$

ملاحظة هامة (حول حالة عدة صفوف وعدة مراكز):

لنفترض أننا جعلنا مراكز الخدمة منفصلة ومستقلة عن بعضها بعضاً, أي جعلنا كل مركز يستقبل زبائن بشكل مستقل عن الآخر ويتشكل له صف مستقل عن الآخر. وذلك تماماً كما في الشكل المتوازي الآتي:



الشكل رقم (12-13)

ومن أجل المقارنة مع المثال السابق نفترض أن معدلات الوصول لكل من هذه المراكز متساوية وتساوي:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 5 \qquad (\text{مجموعها} = 15)$$

وإن معدلات تقديم الخدمة متساوية وتساوي:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu = 6$$

وبذلك يمكننا أن نعتبر كل مركز نظاماً مستقلاً عن الآخر ونطبق عليه معادلات النظام M/M/1, وعندها نجد أن المدة المتوقعة لبقاء الرسالة داخل النظام (في الانتظار والطباعة) في كل من المراكز السابقة تحسب من العلاقة الآتية:

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6-5} = 1\,\text{hr}$$

وها نلاحظ أن عملية الانتقال من نظام ذي صف واحد وعدة مراكز إلى نظام من عدة صفوف وعدة مراكز قللت من فعالية النظام وزادت من مدة بقاء الرسائل أو الزبائن في داخل النظام, وذلك لأن Ws كانت 24 دقيقة في النظام الأول فازدادت إلى ساعة كاملة في النظام المتوازي، أي ازدادت بمقدار 2.5 مرة, وهذا يعني أن فعالية العمل قد تناقصت بمقدار 2.5 مرة عما كانت عليه في النظام الأول علماً بأن ظروف الوصول والخدمة لم تتغير.

وهكذا ننصح بالعمل بنظام الصف الواحد وبعدة مراكز خدمة لمعالجة مسائل الدور وتقديم الخدمات الجماهيرية.

حالة خاصة: صف واحد محدد وعدة مراكز خدمة M/M/C:

لنفترض هنا أن عدد مراكز الخدمة يساوي s مركزاً وأن M الحد الأعظمي لعدد الزبائن الذي يمكن أن يتواجد في الصف في أي وقت كان وأن λ_n معدلات الوصول وتساوي:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{for}: n = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, M-1 \\ 0 & \text{for}: n = M, M+1, M+2,\ldots\ldots \end{cases} \qquad (89-12)$$

وأن μ_n معدلات الخدمة وتساوي:

$$\mu_n = \begin{cases} n \cdot \mu & \text{for}: n = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S \\ s \cdot \mu & \text{for}: n = s+1, s+2,\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (90-12)$$

حيث إن $1 < S < M$ وإن الزبون يعود راجعاً إذا وجد الأمكنة مشغولة r ومن المعادلات السابقة والمعادلة (12-25) يمكننا أن نستخلص العلاقات الآتية:

1- احتمال عدم وجود أحد في النظام P_0 ويساوي:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{n=s+1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{n-s}} \qquad (91\text{-}12)$$

2- احتمال وجود n زبوناً في النظام P_n ويساوي حسب n ما يلي:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & for: n \le s \\ \frac{1}{s!\, s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & for: s < n \le M \\ 0 & for: n > M \end{cases} \qquad (92\text{-}12)$$

3- وكذلك نجد أن التوقع الرياضي لعدد المتواجدين في الصف فقط L_q يساوي:

$$L_q = \sum_{n=S+1}^{M}(n-S)P_n$$

وهو يساوي:

$$L_q = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)}{s!(1-\lambda/\mu s)^2}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{M-s} - (M-S)\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{M-s}\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)\right] \qquad (93\text{-}12)$$

4- وكذلك نجد أن توقع عدد المتواجدين في النظام:

$$L_s = L_q + S - \sum_{n=0}^{s-1}(S-n)P_n = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} \qquad (94\text{-}12)$$

أما المعدل الفعلي لقدوم الزبائن فيحسب من العلاقة:

$$\lambda_e = \mu\left[S - \sum_{n=0}^{s-1}(S-n)p_n\right]$$

أما متوسط مدة البقاء في النظام وفي الصف فتساويان:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} \qquad (95-12)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} \qquad (96-12)$$

مثال (10):

لنفترض أن لدينا محلاً للحلاقة ويعمل به عاملان للحلاقة ويوجد فيه خمسة مقاعد للانتظار. وأن الزبون القادم يعود راجعاً إذا كانت المقاعد جميعاً مشغولة. وأن معدل وصول الزبائن إلى المحل يساوي 3.7634/hr وأن متوسط المدة اللازمة لحلاقة الزبون 15 دقيقة عند كل من العاملين، والمطلوب حساب مؤشرات فعالية العمل في هذا المحل:

الحل:

لدينا في هذا المثال أن: الحد

M=7

$\lambda = 3.7634$

$\mu = \frac{60}{15} = 4$

S=2

وبذلك نجد أن احتمال عدم وجود أحد في النظام P_0 يساوي:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=o}^{2} \frac{1}{n!}\left(\frac{3.67314}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{3.7634}{4}\right)^2 \sum_{n=3}^{7} \left(\frac{3.7634}{4.2}\right)^{n-2}}$$

$$P_0 = 0.36133 \quad ; \quad s = 2$$

$$P_1 = \frac{1}{n!}\left(\frac{3.7634}{4}\right)(0.36133) = 0.339957$$

$$P_7 = \frac{1}{2!2^{7-2}}\left(\frac{3.7634}{4}\right)^7 (0.36133) = 0.00368$$

$$L_q = \frac{0.36133(\frac{3.7634}{4})^2(\frac{3.7634}{4\cdot 2})}{2!.\left[1-\frac{3.7634}{4\cdot 2}\right]^2}\left[1-(\frac{3.7634}{4})^{7-2}-(7-2)(\frac{3.7634}{4\cdot 2})^{7-2}(1-\frac{3.7634}{4})\right]$$

$$L_q = 0.2457$$

$$L_s = L_q + 2 - [2P_0 + 2P_1] = 0.2457 + [2 - [2(0.36133) + 0.339957] = 1.183083$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{1.83083}{3.7495} = 0.3155 \text{ hr } = 19 \text{ min}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{0.2457}{3.7495} = 0.065528 \text{ hr } = 3.93 \text{ min}$$

وهي مؤشرات جيدة من جميع الجوانب.

وأخيراً نورد جدولاً بأهم العلاقات الرياضية المستخدمة في نظام الخدمة بصف واحد وعدة مراكز أي النظام M/M/C ولكلتا الحالتين صف محدد وصف غير محدد.

العلاقات الأساسية للنموذج M/M/C

في حالة الصف غير المحدود	الرمز	في حالة الصف المحدد
$P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n + \frac{1}{S!(1-\frac{\lambda}{\mu s})}(\frac{\lambda}{\mu})^s}$	P_0	$P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^s \sum_{n=s+1}^{m} (\frac{\lambda}{\mu s})^{n-s}}$
$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n . P_0 & n = O, 1, 2\ 3, 4 \ldots s-1 \\ \frac{1}{S! S^{n-S}}(\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 & n \geq S \end{cases}$	P_n	$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n . P_0 & n \leq s \\ \frac{1}{S! S^{n-s}}(\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 & s < n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$

العلاقات الأساسية للنموذج M/M/C

في حالة الصف غير المحدود	الرمز	في حالة الصف المحدد
$P(n \geq S) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!\left(1-\frac{\lambda}{\mu S}\right)} P_0$	$P(n \geq S)$	-
$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{S+1}}{S.S!\left(1-\frac{\lambda}{\mu S}\right)^2} P_O$	L_q	$L_q = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S\left(\frac{\lambda}{\mu S}\right)}{S!\left(1-\lambda/\mu S\right)^2}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{M-S} -(M-S)\left(\frac{\lambda}{\mu S}\right)^{M-S}\left(1-\frac{\lambda}{\mu S}\right)\right]$
$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	L_s	$L_S = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$ $L_S = L_q + S - \sum_{n=0}^{S-1}(S-n)P_n$
-	λ_e	$\lambda e = \mu\left[S - \sum_{n=0}^{S-1}(S-n)P_n\right]$

العلاقات الأساسية للنموذج M/M/C

في حالة الصف غير المحدود	الرمز	في حالة الصف المحدد
$W_S = \frac{L_S}{\lambda}$	W_s	$\frac{L_S}{\lambda_e}$
$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$	W_q	$\frac{L_q}{\lambda_e}$
$P(T > t) = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^S\left[1 - e^{-\mu t(S-1-\frac{\lambda}{\mu})}\right]}{S!(1-\frac{\lambda}{\mu S})(S-1-\frac{\lambda}{\mu})}.P_0\right]$	-	-

تمرينات

1- يستقبل أحد المطارات الطائرات حسب قاعدة FIFO وبمعدل 6 طائرات في الساعة فإذا كانت طاقة الاستقبال في المطار تساوي 8 طائرات في الساعة ويستغرق إخراج المسافرين القادمين ساعة واحدة فالمطلوب:

أ- تحديد الفرضيات التي تناسب هذه العمليات.
ب- حساب احتمال أن يكون النظام مشغولاً.
ج- حساب احتمال أن لا يكون النظام مشغولاً بأي طائرة.
د- متوسط زمن الانتظار للهبوط.
هـ- متوسط عدد الطائرات التي تنتظر السماح لها بالهبوط.
و- متوسط عدد الطائرات الموجودة في النظام.
ز- احتمال أن تكون المدة التي تقضيها الطائرة في النظام أكبر من خمس ساعات.

2- يصل مرضى الإسعاف إلى المستشفى بمعدل خمسة مرضى في الساعة الواحدة. فإذا كان معدل الخدمة فيه يساوي سبعة مرضى في الساعة الواحدة فالمطلوب:

أ- حساب احتمال أن يكون الزمن بين المريض والمريض الذي يليه أكبر من خمس دقائق.
ب- حساب احتمال عدم وجود أي مريض في النظام.
ج- حساب احتمال وجود أكثر من مريضين في النظام.
د- حساب احتمال وصول أكثر من سبعة مرضى إلى النظام في الساعة.
هـ- حساب L_S و L_q و W_S و W_q.
و- حساب احتمال أن تكون مدة البقاء في النظام أكبر من 10 دقائق.

3- تقوم إحدى الجامعات بتسجيل الطلاب المنتسبين إليها حسب نظام M/M/C وبصف واحد ومركزين للخدمة. فإذا كان معدل وصول الطلاب يساوي 500 طالباً في اليوم، وكان كل من المركزين يقدم الخدمة بمعدل 300 طالباً في اليوم، وإذا علمت أن مدة العمل هي 8 ساعات يومياً فالمطلوب:

أ- وضع الفرضيات المناسبة لهذا النظام.

ب- حساب أن يكون كلا المركزين مشغولين بالخدمة.

ج- احتمال أن لا يوجد أحد من النظام.

د- حساب متوسط هذه الانتظار في الصف حساب متوسط مدة الانتظار في النظام.

هـ- حساب متوسط عدد الطلاب في النظام.

و- حساب متوسط عدد الطلاب في الصف.

ز- حساب احتمال أن تكون مدة الانتظار في النظام أكبر من.

4- تستقبل محطة للوقود سيارة كل 5 دقائق وتقدم لها الخدمة خلال دقيقتين فالمطلوب:

أ- ما متوسط الزبائن من النظام.

ب- ما متوسط الزبائن من النظام.

ج- ما متوسط مدة البقاء في النظام.

د- ما متوسط مدة الانتظار في الصف.

هـ- ما احتمال أن لا يوجد أي زبون في المحطة.

و- ما احتمال أن يتواجد في المحطة أكثر من 3 سيارات.

الفصل الثالث عشر
إدارة المخزون

I- مقدمة وتعاريف:

تعتبر إدارة المخزون من أهم وظائف الإدارة، وهي تلعب دوراً كبيراً في عمليات الإنتاج والتسويق، وخاصة في المنشآت الإنتاجية والمؤسسات التجارية، لأن هذه المنشآت والمؤسسات لابد لها من أن يكون لديها مستودعات تحتفظ فيها بأدواتها ومعداتها وبضائعها المصنعة وشبه المصنعة، وبالمواد الخام اللازمة لتشغيلها ولصيانة آلاتها أو لتأمين مخزون يغطي حاجات السوق من المواد الغذائية أو السكنية.....الخ.

وللتخزين أنواع مختلفة وأهداف متعددة ونذكر منها الأمثلة الآتية:

1- تخزين قطع الغيار لضمان استمرارية الإنتاج.
2- تخزين المواد لغرض الحماية من زيادة الأسعار.
3- تخزين المواد للمضاربة في السوق!
4- تخزين الأدوية لتأمين حاجة السوق وخاصة في حالة الكوارث.
5- تخزين الأغذية لتأمين حاجة السكان.
6- تخزين الدم لتأمينه في حالات الطوارئ والضرورة.

وبما أن أساليب ونظم التخزين خارجة عن موضوع هذا الكتاب فإننا سنقتصر على معالجة كيفية تحديد حجم المخزون وحساب تكاليفه لأن ذلك يؤثر كثيراً على كفاءة وربحية المنشأة الإنتاجية أو المؤسسة التجارية, فالمخزون يعتبر أصلاً من أصول المنشأة ويمكنه أن يغير من الوضع المالي للمنشأة ويحقق لها أرباحاً كبيرة أو يوقعها بخسائر فادحة.

وفي العصر الحالي تتطلب إدارة المخزون أن يكون لديها نظام معلوماتي متطور يتجاوب بسرعة في تلبية الطلبات ويحدد أتوماتيكياً الكميات المتبقية في المستودع في أي لحظة زمنية, ويقدم إنذاراً أو إبلاغاً عن المواد التي أصبحت كمياتها أقل من الحد الأدنى, ويطلب فوراً تأمين تزويد المستودع بالكميات المناسبة لكل من هذه المواد.

وفي الواقع إن السؤال الأول الذي يطرح على مديري المستودعات هو: ما هو الحجم المناسب من المخزون من كل مادة من المواد المخزنة لتأمين الطلب في واحدة الزمن؟ وللإجابة على هذا السؤال نلاحظ أنه إذا كان حجم المخزون كبيراً جداً فإن ذلك يضمن توفر المادة المخزونة بشكل جيد ولكنه يوقع المنشأة أو المؤسسة بخسائر كبيرة أهمها:

1- إن قيمة المخزون هي رأس مال مجمد ولا يستفاد منه خلال فترة التخزين (إلا إذا ارتفعت الأسعار) وبذلك تخسر المؤسسة الفائدة المستحقة عليه.

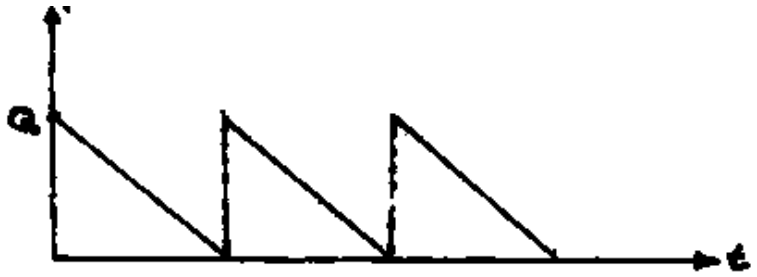
2- إذا كانت كمية المخزون كبيرة فإن فترة تسويقها تكون كبيرة أيضاً وهذا ما يعرضها للتلف أو العطب أو لانخفاض الأسعار وبذلك تتكبد المؤسسة خسائر فادحة من جراء ذلك.

3- أما إذا كانت كمية المخزون صغيرة جداً فإن ذلك قد يؤدي إلى اختناق في تأمين المواد الأولية اللازمة للإنتاج وبالآتي إلى توقف الإنتاج أو يؤدي إلى قصور في تأمين حاجة السوق من المواد الغذائية وبالآتي إلى ارتفاع الأسعار أو إلى اضطراب في الحياة الاجتماعية.

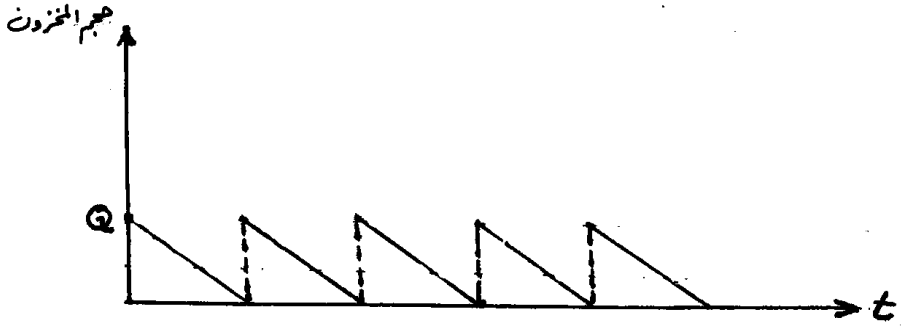
وبصورة عامة إن حجم كمية المخزون يتأثر بحجم الطلب عليه وبتكرار الطلبات في واحدة الزمن. فإذا افترضنا مؤقتاً أن هذين العاملين ثابتان لمادة ما، فإننا سنجد أن حجم المخزون المتبقي في المستودع سيتناقص مع الزمن إلى أن يبلغ مستوى معيناً (صفر مثلاً)، ثم يتم إعادة التخزين من جديد ويعود العمل إلى ما كان عليه.

ولتوضيح العلاقة بين حركة حجم المخزون مع الزمن نقدم الرسمين المبينين على الشكلين الآتيين:

حجم المخزون



الشكل رقم (13-1): حركة حجم المخزون عندما يكون كبيراً



الشكل رقم (13-2): حركة حجم المخزون عندما يكون صغيراً

إن معالجة وتحليل مواضيع إدارة المخزون أفرزت عدة نماذج هي:

1- النماذج السكونية للمخزون:

أ- النموذج السكوني دون قبول عجز في المخزون.

ب- النموذج السكوني مع قبول عجز في المخزون.

ج- النموذج السكوني مع احتياطي الأمان.

د- نموذج الأسعار المتغيرة.

هـ- النموذج السكوني لعدة مواد دون عجز.

2- النماذج الديناميكية للمخزون:

أ- نموذج التكاليف الخطية.

ب- نموذج التكاليف المنحنية.

3- النماذج العشوائية للمخزون:

أ- نموذج المدة الواحدة بمخزون ابتدائي.

ب- نموذج المدة الواحدة بمخزون ابتدائي وتكلفة ثابتة للطلبيات.

ج- نموذج المدتين.

الفرضيات الأساسية:

إن الفرضيات الأساسية لبناء هذه النماذج تتلخص بما يلي:

1- إن حجم المخزون في بداية الزمن يساوي مقداراً Q وهو ما سنبحث عن تحديده وحسابه.

2- إن الطلب على المخزون مستمر وبمعدل ثابت قدره λ خلال واحدة الزمن, أي أنه يخضع للتوزيع الاحتمالي المنتظم في واحدة الزمن.

3- عندما يبلغ حجم المخزون الصفر. يتم تزويد المستودع فوراً بنفس الكمية Q.

4- إن تكلفة إعداد الطلبية Q وإرسالها إلى المورد تساوي في كل مرة مقداراً ثابتاً K وهو لا يتأثر بحجم الطلبية أو زمانها. وتسمى التكلفة الثابتة للطلبية.

5- إن تكلفة شراء وإيصال واستلام وترتيب الطلبية Q يساوي C لكل واحدة منها ويبلغ إجمالي هذه التكلفة عند كل طلبية = Q.C وتسمى التكلفة المتغيرة للطلبية.

6- إن تكلفة التخزين تساوي مقداراً ثابتاً h عن كل واحدة موجودة في المستودع خلال واحدة الزمن. وتشمل تكلفة السيولة المجمدة وتكلفة المساحة المشغولة وتكلفة الحماية والأمن والتأمين والضرائب والرسوم المختلفة.

7- إن تكلفة العجز الناتج عن نقص المخزون يساوي مقداراً ثابتاً عن كل واحدة غير موجودة في المستودع خلال واحدة الزمن (مثل غرامات التأخير أو فائدة المبلغ المدفوع أو خسارة الزبون كفرصة ضائعة أو فقدان الثقة بالمستودع...إلخ).

وسنحاول في هذا الفصل أن نقوم بتحديد الكمية Q وحسابها، وهي الكمية التي يجب طلبها ووضعها في المستودع عند بداية كل فترة بحيث تكون التكلفة الإجمالية للتخزين في واحدة الزمن أصغر ما يمكن. وسنميز بين حالات عدة هي: حالة عدم

السماح بقبول عجز في المخزون، وحالة السماح بقبول عجز في المخزون، وحالة اشتراط وجود احتياطي.

وسنفرز فقرة خاصة لحالة تغيير الأسعار وأخرى للنموذج المتعدد أما النماذج الديناميكية والعشوائية فنتركها للباحثين في الدراسات العليا.

II- النموذج السكوني بدون عجز ولمادة واحدة:

إن الفرضيات السابقة تعطينا في هذه الحالة أن تكلفة العجز غير داخلة في التكلفة الإجمالية، وإن المؤشرات التي تدخل في التكلفة الإجمالية هي:

1- حجم الطلبية الثابت Q.

2- حجم الطلب على المخزون في واحدة الزمن λ.

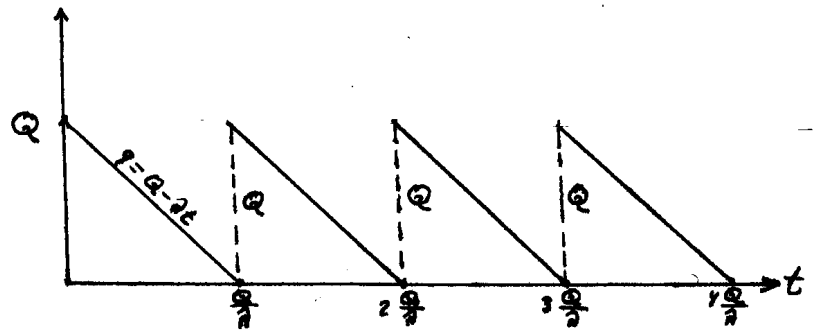
3- التكلفة الثابتة لأعداد الطلبية $C_1=k$.

4- تكلفة الشراء والتوصيل والاستلام $C_2=C.Q$.

5- تكلفة التخزين خلال واحدة الزمن للكمية المتبقية في المستودع

6- مدة نفاذ الكمية المخزنة وتساوي $\frac{Q}{\lambda}$ (لأن حجم الطلب في واحدة الزمن λ). وهي نفسها مدة الدورة التخزينية.

وبذلك يمكننا تمثيل حركة المخزون بوساطة الشكل الآتي:

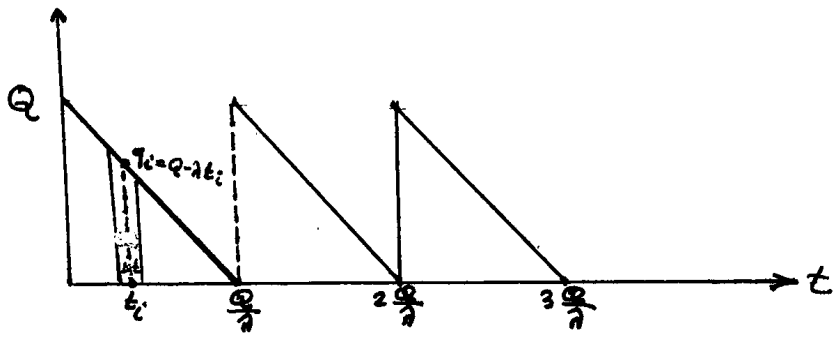


الشكل رقم (13–3): مستوى المخزون عبر الزمن

وإذا رمزنا للكمية المتبقية في المستودع في اللحظة (t) وخلال الفترة الزمنية الأولى $\left[0\ ,\ \frac{Q}{\lambda}\right]$ بالرمز q_t، فإن q_t تعطى بدلالة الزمن بوساطة معادلة المستقيم الآتي:

$$q_t = Q - \lambda t \qquad (1-13)$$

وحتى نستطيع حساب تكلفة التخزين نجزئ المجال الزمني $\left[0,\ \frac{Q}{\lambda}\right]$ إلى n مجالاً جزئياً طول كل منها Δt كما هو مبين في الشكل الآتي:



الشكل رقم (13–4): تكلفة التخزين في اللحظة t_i

ومن الشكل السابق نجد أنه إذا كانت t_i هي نقطة ما من المجال الجزئي i فإن الكمية المتبقية من المخزون المقابلة لذلك المجال الجزئي تساوي: $q_i = Q - \lambda t_i$ وبذلك نجد أن تكلفة المخزون خلال ذلك المجال الجزئي تساوي:

$$C_i = h.q_i.\Delta t = h(Q - \lambda t_i)\Delta t \qquad (2-13)$$

وهكذا نجد أن تكلفة التخزين الكلية خلال الفترة $\left[0,\ \frac{Q}{\lambda}\right]$ تساوي مجموع الكلف الجزئية وتساوي تقريباً:

$$C_3 \approx \sum_{i}^{n} h.(Q - ht_i)\Delta t \qquad (3-13)$$

وعندما تنتهي $\Delta t \to 0$ فإن عدد المجالات الجزئية $n \to \infty$ وإن المجموع السابق ينتهي إلى التكامل على المجال السابق $\left[0, \quad \frac{Q}{\lambda}\right]$ ويساوي:

$$C_3 = \lim_{n\to\infty} h.(Q - \lambda t_i)\Delta t = \int_0^{\frac{Q}{\lambda}} h(Q - \lambda t)dt \qquad (4-13)$$

وبإجراء التكامل نجد أن:

$$C_3 = \left[hQt - h\frac{\lambda}{2}t^2 \right]_0^{\frac{Q}{\lambda}} = \left[(hQ\frac{Q}{\lambda} - h\frac{\lambda}{2}\frac{Q^2}{\lambda^2}) - 0 \right] = \frac{hQ^2}{2\lambda}$$

وبذلك نجد أن تكلفة التخزين خلال الفترة $\left[0, \quad \frac{Q}{\lambda}\right]$ تساوي:

$$C_3 = \frac{hQ^2}{2\lambda} \qquad (4-13)$$

وأخيراً نجد أن التكلفة الإجمالية TOTAL COST للتخزين خلال الفترة $\left[0 \ , \ \frac{Q}{\lambda}\right]$ وفي حالة عدم العجز تساوي مجموع الكلف الثابتة والمتغيرة وكلفة التخزين وتساوي:

$$TC(Q) = C_1+C_2+C_3$$

$$TC(Q) = K + C.Q + \frac{hQ^2}{2\lambda} \qquad (5-13)$$

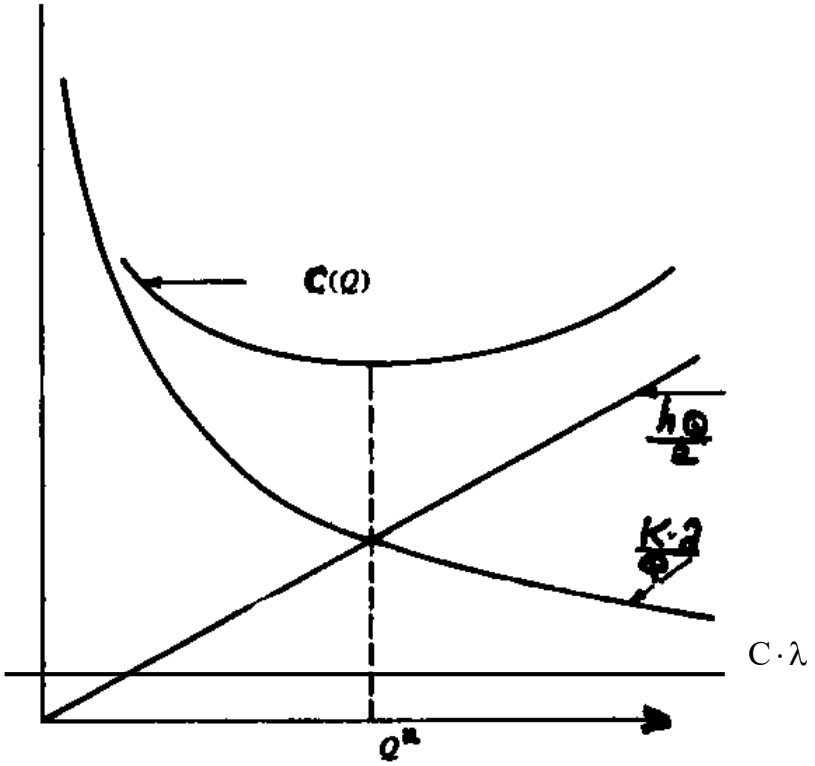
وحتى نحصل على تكلفة التخزين في واحدة الزمن نقسم TC(Q) على طول الفترة $\frac{Q}{\lambda}$ ونرمز للناتج بـ C(Q) فنجد أن:

$$C(Q) = \frac{TC(Q)}{Q/\lambda}$$

$$C(Q) = \frac{K + C.Q + \frac{hQ^2}{2\lambda}}{\frac{Q}{\lambda}}$$

$$C(Q) = \frac{k.\lambda}{Q} + C.\lambda + \frac{hQ}{2} \qquad (6-13)$$

والشكل البياني (13-5) يبين لنا الخط البياني لكل من هذه التكاليف مع مجموعها C(Q):



الشكل رقم (13-5): الشكل العام للتكاليف المختلفة

ولحساب حجم الطلبية Q التي تجعل التكلفة في واحدة الزمن C(Q) أصغر ما يمكن، نأخذ مشتق C(Q) بالنسبة إلى Q ونضعه مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة الآتية:

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = -\frac{k.\lambda}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

ومنها نجد أن:

$$Q^2 = \frac{2k.\lambda}{h}$$

أي أن حجم الطلبية الذي يجعل التكلفة الإجمالية للتخزين في واحدة الزمن C(Q) أصغر ما يمكن يعطى بالعلاقة:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.k.\lambda}{h}} \qquad (7-13)$$

وللتأكد من أن هذه النقطة تقابل نهاية صغرى للتابع C(Q) نأخذ المشتق الثاني له فنجد أن:

$$\frac{d^2C(Q)}{dQ^2} = \frac{2\lambda}{Q^3} > 0 \qquad (8-14)$$

وبما أن المشتق الثاني موجب فإن النقطة *Q تقابل نهاية صغرى للتابع C(Q) وهي نقطة وحيدة لأن $Q > 0$.

مثال (1):

لنفترض أن تاجراً يقوم بتخزين وبيع بيض الدجاج, وأن معدل الطلب على ذلك البيض في مستودعه يساوي 2000 صندوقاً في الأسبوع. وأن تكلفة إعداد الطلبية الواحدة المؤلفة من Q صندوقاً تساوي 20 ل.س وأن تكاليف تخزين الصندوق الواحد لمدة أسبوع تساوي 8 ل.س والمطلوب:

1- حساب الحجم المثالي للطلبية Q^* الذي يجعل تكاليف التخزين أصغر ما يمكن.

2- حساب مدة الدورة التخزينية بالساعات إذا علمت أن عدد أيام العمل في الأسبوع ستة أيام وأن عدد ساعات العمل في كل يوم 10 ساعات فقط.

الحل:

لدينا البيانات الآتية:

$h = 8$ $\qquad$ $K = 20$ $\qquad$ $\lambda = 2000$

وبذلك نجد أن الحجم المثالي للطلبية يعطى بالعلاقة:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.k.\lambda}{h}} = \sqrt{\frac{2.20.2000}{8}} = 100 \text{ صندوقاً}$$

$$Q^* = 100 \text{ صندوقاً}$$

ولحساب مدة الدورة التخزينية T^* نطبق العلاقة:

$$T^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{100}{2000} = 0.05 \text{ أسبوعاً} = 0.05 \times 6 \times 10 = 3 \text{ ساعات}$$

أي أنه يجب على ذلك التاجر أن يجدد الطلبية كل ثلاث ساعات، وأن يطلب 100 صندوق فقط.

مؤشرات النموذج السكوني دون عجز:

بعد أن نحصل على الحجم المثالي لحجم الطلبية Q^* فإنه يمكننا حساب عدد من المؤشرات الاقتصادية الهامة، التي تلعب دوراً كبيراً في عمليات اتخاذ القرارات المختلفة حول إدارة المخزون في المستودع وتنظيم عمليات الإمداد والبيع وتقدير قيمة المبيعات وحساب الربح الصافي...إلخ.

وانطلاقاً من الفرضيات السابقة فإنه يمكننا حساب المؤشرات الآتية:

1- الحجم المثالي للطلبية *Q ويحسب من العلاقة: $Q^* = \sqrt{\frac{2.k.\lambda}{h}}$.

2- مدة الدورة الفاصلة بين الطلبية والأخرى بانتظام وتحسب من العلاقة:

$$T^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}} \qquad (9-13)$$

3- عدد الطلبيات اللازمة خلال واحدة الزمن وتحسب من العلاقة:

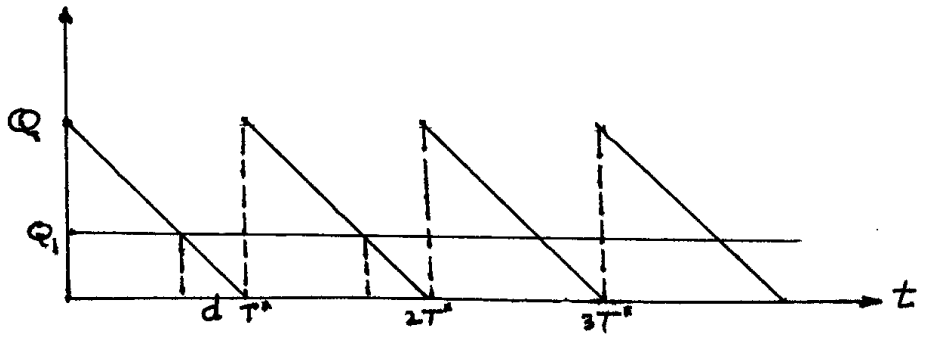
$$n^* = \frac{\lambda}{Q^*} = \sqrt{\frac{\lambda h}{2k}} = \frac{1}{T^*} \qquad (10-13)$$

4- كمية إعادة الطلب Q_1: وهي الكمية التي يجب عندها إعادة الطلب قبل نفاذ المخزون وتحسب بعد معرفة المدة اللازمة لاستلام الطلبية d من العملية التناسبية الآتية:

$$\frac{d}{T^*} = \frac{Q_1}{Q^*}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{d}{T^*}.Q^* = \frac{d}{\frac{Q^*}{\lambda}}.Q^*$$

$$Q_1 = d.\lambda \qquad (11-13)$$



الشكل رقم (13-6): تحديد كمية إعادة الطلب Q_1

5- إجمالي تراكم المخزون في المستودع خلال مدة الدورة التخزينية وتحسب من العلاقة:

$$Y^* = \int_0^{T^*} (Q^* - \lambda t)dt = \left[Q^* t - \lambda \frac{t^2}{2} \right]_0^{T^*} = \left[Q^* T^* - \lambda \frac{T^{*2}}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{Q^{*2}}{\lambda} - \lambda \frac{Q^{*2}}{2\lambda^2} \right] = \frac{Q^{*2}}{2\lambda} \qquad (12-13)$$

6- متوسط حجم المخزون الموجود في المستودع خلال واحدة الزمن من الفترة $[0,T^*]$ يساوي:

$$\overline{Y} = \frac{Y^*}{T^*} = \frac{Q^*}{2} \qquad (13-13)$$

7- أصغر تكلفة للتخزين خلال واحدة الزمن وتحسب من العلاقة:

$$C(Q^*) = \frac{k.\lambda}{Q^*} + C.\lambda + h.\frac{Q^*}{2} \qquad (14-13)$$

8- إجمالي تكلفة التخزين خلال مدة الدورة التخزينية ويحسب من العلاقة:

$$TC(Q^*) = C(Q^*).T^* \qquad (15-13)$$

ومن جهة أخرى نجد أنه يساوي:

$$TC(Q^*) = k + C.Q^* + \frac{h}{\lambda}\frac{Q^{*2}}{2} \qquad (16-13)$$

أي أن إجمالي تكلفة التخزين للطلبية خلال مدة الدورة = تكلفة إعداد الطلبية K + تكلفة شراء الطلبية + تكلفة التخزين للكمية المتبقية من الطلبية في المستودع.

9- إجمالي قيمة المبيعات خلال واحدة الزمن ويحسب من العلاقة:

$$V = p.\lambda \qquad (17-13)$$

حيث إن P هو سعر مبيع الواحدة من البضاعة المخزونة.

10- إجمالي قيمة المبيعات خلال الدورة التخزينية ويحسب من العلاقة:

$$W = P.\lambda.T^* = p.\lambda \times \frac{Q^*}{\lambda} = p.Q^* \qquad (18-13)$$

11- متوسط الربح خلال واحدة الزمن ويحسب من العلاقة:

$$B = V - C(Q^*) \qquad (19-13)$$

12- متوسط الربح خلال الدورة التخزينية ويحسب من العلاقة:

$$B' = W - TC(Q^*) \qquad (20-13)$$

مثال (2):

بناءً على بيانات المثال السابق احسب المؤشرات المختلفة لعمليات تخزين البيض ثم احسب صافي الربح الشهري لذلك التاجر. علماً بأن مدة استلام الطلبية تبلغ ساعة واحدة وأن سعر شراء صندوق البيض واصلاً إلى المستودع 70 ل.س وأن سعر مبيع الصندوق 80 ل.س.

الحل:

لدينا البيانات الآتية:

$P = 80 \qquad h = 8 \qquad C = 70 \qquad K = 20 \qquad \lambda = 2000$

ولحساب المؤشرات المختلفة لذلك المثال نقوم بما يلي:

1- لقد وجدنا أن الحجم المثالي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.k.\lambda}{h}} = \sqrt{\frac{2.20.2000}{8}} = 100 \text{ صندوقاً}$$

2- إن مدة الدورة تساوي:

$$T^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{100}{2000} = 0.05 \text{ أسبوعاً} = 3 \text{ ساعات}$$

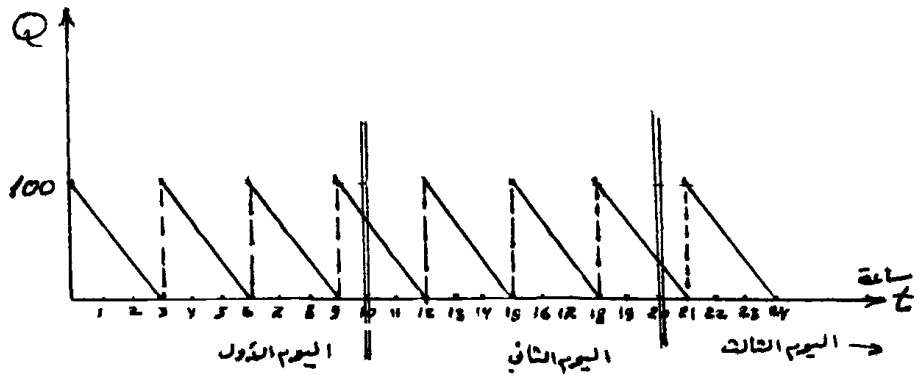
3- إن عدد الطلبيات اللازمة خلال كل أسبوع:

$$n^* = \frac{\lambda}{Q^*} = \frac{2000}{100} = 20 \text{ طلبية}$$

والشكل رقم (13-7) يبين حركة العمل في ذلك المخزن، حيث تتجدد الطلبية كل ثلاث ساعات (3) في كل يوم وطيلة أيام الأسبوع.

4- أما كمية إعادة الطلب خلال كل دورة فتساوي:

$$Q = d.\lambda = \frac{1}{60} \times 2000 = 33.33 \text{ واحدة}$$



الشكل رقم (13-7): حركة المخزون للمثال

5- ومتوسط حجم المخزون خلال واحدة الزمن ضمن كل دورة يساوي:

$$\overline{Y} = \frac{Q^*}{2} = \frac{100}{2} = 50 \quad \text{صندوقاً}$$

6- أصغر تكلفة للتخزين خلال واحدة الزمن (الأسبوع) تساوي:

$$C(Q^*) = \frac{20 \times 2000}{100} + 70 \times 20000 + 8 \times \frac{100}{2}$$
$$= 400 + 140000 + 400 = 140800$$

7- إجمالي تكلفة المخزون خلال مدة الدورة التخزينية فقط يساوي:

$$T(CQ^*) = C(Q^*).T^* = 140800 \times (0.05) = 7040$$

ويمكن حسابه من جهة أخرى حيث نجد أن:

$$TC(Q^*) = k + C.Q^* + \frac{h}{\lambda}\frac{Q^{*2}}{2} = 20 + 70 \times 100 + \frac{8}{2000} \times \frac{(100)^2}{2} = 7040$$

8- إجمال قيمة المبيعات خلال واحدة الزمن (الأسبوع) يساوي:

$$V = P.\lambda = 80 \times 2000 = 160000$$

9- إجمالي قيمة المبيعات خلال الدورة التخزينية يساوي:

$$W = P.Q^* = 80.100 = 8000$$

10- متوسط الربح خلال واحدة الزمن (الأسبوع) ويساوي:

$$B = V - C(Q^*) = 160000 - 140800 = 19200 L.S / W$$

11- متوسط الربح خلال الدورة التخزينية يساوي:

$$B' = W - TC(Q^*) = 8000 - 7040 = 960\ L.S / T^*$$

12- وأخيراً نحسب متوسط الربح للتاجر في الشهر حيث نجد أن:

$$B_1 = 19200 \times \frac{30}{7} = 82285.70\ L.S / MONTH$$

13- ومن أجل المقارنة نفترض أن التاجر أراد أن يجعل عدد طلباته في الأسبوع ستة فقط (طلبية واحدة فقط في اليوم) فإن حجم الطلبية الواحدة يصبح:

$$Q = \frac{2000}{6} = 333.33 \text{ واحدة}$$

وبذلك تبلغ تكلفة التخزين خلال الأسبوع ما يلي:

$$C(Q) = \frac{20 \times 2000}{333.33} + 70(2000) + 8 \cdot \frac{333.33}{2} = 141453.32$$

وبذلك ينخفض ربحه الأسبوعي من 19200 إلى:

$$B = 160000 - 14153.32 = 18546.68$$

وينخفض ربحه الشهري من 82285.70 إلى 79485.77 ل.س.

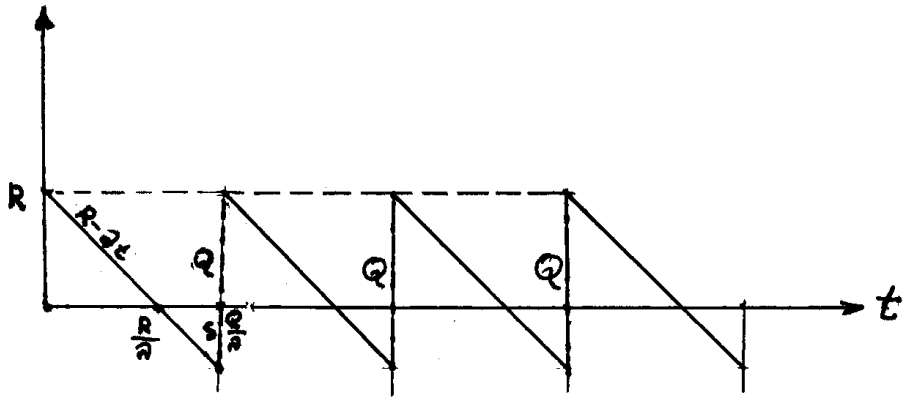
III- النموذج السكوني مع العجز لمادة واحدة:

ويستخدم هذا النموذج لتخزين بعض المواد القابلة للعطب أو الفساد مثل الإسمنت والحليب...إلخ, ويحدث العجز في المخزون عندما يكون حجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية أقل من حجم الطلب على المادة المخزونة خلال تلك الدورة.

لذلك فإنه لمعالجة هذه الحالة نضيف إلى الفرضيات الأساسية السابقة فرضية جديدة وهي:

إن مقدار العجز المسموح به في كل دورة تخزينية يساوي مقداراً ثابتاً S وإن تكلفة العجز تبلغ P لكل واحدة من الطلب غير المحقق خلال واحدة الزمن وهي تشمل غرامات التأخير وفقدان ثقة الزبائن وغير ذلك.

ثم نرمز لحجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية بالرمز R ولحجم الطلبية التي ترد إلى المستودع في نهاية كل دورة بالرمز Q حيث (R < Q), ولمقدار العجز خلال كل دورة بالرمز S, وعندها يكون لدينا S = Q - R , والشكل رقم (13-8) يوضح حركة حجم المخزون في المستودع خلال كل دورة تخزينية.



الشكل رقم (13-8): حركة حجم المخزون مع العجز

بفرض أن λ هي كالسابق تمثل معدل الطلب على المادة في واحدة الزمن فإننا هنا نلاحظ ما يلي:

إن حجم المخزون المتوفر r مرتبط بالزمن بواسطة العلاقة: $r_t = R - \lambda t$، وإن مدة نفاذ المخزون تساوي $\frac{R}{\lambda}$، وإن مدة الدورة التخزينية تساوي $\frac{Q}{\lambda}$ وهي أكبر من $\frac{R}{\lambda}$، وبذلك تتجزأ مدة الدورة التخزينية الأولى $[0, \frac{Q}{\lambda}]$ إلى فترتين هما: الفترة $\left[0, \frac{R}{\lambda}\right]$ فترة العمل, والفترة $\left[\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}\right]$ فترة العجز.

وإن حساب تكاليف التخزين خلال الفترة الأولى $\left[0,\frac{R}{\lambda}\right]$ يتم حسب النموذج السابق (بدون عجز), أما تكاليف التخزين خلال الفترة الثانية $\left]\frac{R}{\lambda},\frac{Q}{\lambda}\right]$ فنحتاج إلى حسابات جديدة. وبصورة عامة فإن إجمالي تكاليف التخزين في هذه الحالة يساوي: إجمالي التكاليف خلال دورة واحدة = تكاليف الطلبية C_1 + تكاليف الشراء C_2 + تكاليف التخزين C_3 + تكاليف العجز C_4.

$$TC(Q)=C_1+C_2+C_3+C_4$$

ولدينا حسب الفرضيات السابقة أن:

تكاليف الطلبية = مقدار ثابت, أي أن: $C_1=K$

تكاليف شراء الطلبية بسعر C يساوي: $C_2 = C.Q$

وأما تكاليف التخزين فتقتصر على الفترة الأولى $\left[0,\frac{R}{\lambda}\right[$ وهي تساوي كما في العلاقة (13-4) ما يلي:

$$C_3 = \int_0^{\frac{R}{\lambda}} h(R-\lambda t)\,dt = h\frac{R^2}{2\lambda} \qquad (21\text{-}13)$$

وأما تكاليف العجز والتي تستمر خلال الفترة الثانية $\left]\frac{R}{\lambda},\frac{Q}{\lambda}\right]$ فتساوي:

$$C_4 = (-1)\int_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}} P(R-\lambda t)dt = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

ولقد ضربنا التكامل السابق بـ (1-) حتى نجعل قيمته موجبة (لأن المساحة تحت المحور سالبة).

وبذلك نجد أن إجمالي التكاليف خلال الدورة التخزينية يساوي:

$$TC=(Q,R)=K+C.Q+h\frac{R^2}{2\lambda}+\frac{P(Q-R)^2}{2\lambda} \qquad (22\text{-}13)$$

وللحصول على إجمالي التكاليف خلال واحدة الزمن نقسم TC(Q,R) على مدة الدورة $\frac{Q}{\lambda}$ فنحصل على أن:

$$C(Q,R)=\frac{K+C\cdot Q+h\frac{R^2}{2\lambda}+\frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}}{\frac{Q}{\lambda}}$$

$$C(Q,R)=\frac{\lambda\cdot K}{Q}+\lambda\cdot C+\frac{hR^2}{2Q}+\frac{P(Q-R)^2}{2\cdot Q} \qquad (23\text{-}13)$$

ولإيجاد حجم الطلبية المثالي Q^* وكذلك R^* الذين يجعلان C(Q,R) أصغر ما يمكن, يمكننا أن نطبق نماذج البرمجة اللاخطية, وذلك وفق النموذج الآتي:

$$L=C(Q.R)\rightarrow \min \qquad (24-13)$$

وضمن القيود: $Q\geq R$

والشروط: $Q\geq 0 \quad , \quad R\geq 0$

ولكننا سنتبع أسلوباً آخر وهو حساب المشتقات الجزئية للتابع C(Q,R) ووضعها مساوية للصفر لنحصل على نقطة النهاية الصغرى له. وبذلك نجد أن المشتقين الجزئيين لـ C(Q,R) بالنسبة لـ Q,R يعطيانا المعادلتين الآتيتين:

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial Q}=\frac{-\lambda\cdot K}{Q^2}+0-\frac{hR^2}{2Q^2}+\frac{2P(Q-R)(2Q)-2P(Q-R)^2}{4Q^2}$$

$$=\frac{1}{Q^2}\left[-\lambda K-\frac{hR^2}{2}+P(Q-R)Q-\frac{1}{2}P(Q-R)^2\right]=0$$

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial R}=0+0+\frac{2hR}{2Q}+\frac{2P(Q-R)(-1)}{2Q}=0$$

وبعد الاختصار على Q^2 و $2Q$ في العلاقتين السابقتين نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$-\lambda K-\frac{h}{2}R^2+P(Q-R)Q-\frac{1}{2}P(Q-R)^2=0 \qquad (25\text{-}13)$$

$$2hR-2P(Q-R)=0 \qquad (26\text{-}13)$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على الحجم المثالي للطلبية Q^* والحجم المثالي لبداية المخزون R^* الذين يجعلان تابع إجمالي التكاليف في واحدة الزمن أصغر ما يمكن, والذين يساويان:

$$Q^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda k}{h}\right)\left(\frac{p+h}{p}\right)} \qquad (27\text{-}13)$$

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda k}{h}\right)\left(\frac{p}{p+h}\right)} \qquad (28\text{-}13)$$

ومن المعادلة (13-26) نجد أن Q^* و R^* مرتبطان بالعلاقة:

$$Q^* = \frac{p+h}{p} R^* \qquad (29\text{-}13)$$

وبما أن $h > 0$ فإن $\frac{p+h}{p} > 1$ وهذا يعني أن $Q^* \geq R^*$ أي أن حلي المعادلتين (13-25) و(13-26) يحافظان على الشرط الأساسي وهو $Q \geq R$.

وحتى يستكمل العمل يجب أن نقوم بدراسة فيما إذا كان ذلك الحل يقابل نهاية صغرى أم عظمى، وذلك بحساب مصفوفة (هيسان) للمشتقات الجزئية والتأكد من أن مصغراتها الأساسية غير سالبة والمصفوفة تساوي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial Q \partial R} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial R \partial Q} & \frac{\partial^2 C}{\partial R^2} \end{vmatrix}$$

وبعد حساب هذه المشتقات وتعويض قيمتها عند النقطة (Q^*,R^*) نجد أن المصغرات الأساسية لهذه المصفوفة غير سالبة، أي أن النقطة (Q^*,R^*) تقابل نهاية صغرى للتابع C.

وبعد أن نحصل على Q^* و R^* يمكننا حساب قيمة تابع إجمالي التكاليف خلال واحدة الزمن الذي يبلغ أصغر قيمة له عند هاتين القيمتين لـ Q و R. وبذلك يكون لدينا:

$$C(Q^*,R^*)=\frac{\lambda\cdot K}{Q^*}+\lambda\cdot C+\frac{hR^{*2}}{2Q^*}+\frac{p(Q^*-R^*)^2}{2Q^*} \qquad (30-13)$$

أما قيمة تابع إجمالي التكاليف خلال الدورة التخزينية التي مدتها $T^*=\frac{Q}{\lambda}$ فيساوي:

$$TC(Q^*,R^*)=k+C.Q^*+h\frac{R^{*2}}{2\lambda}+\frac{p(Q^*-R^*)^2}{2\lambda} \qquad (31-13)$$

كما يمكننا حساب المؤشرات الأخرى المذكورة في الفقرة السابقة. ولكن لحساب كمية إعادة الطلبية نطبق العلاقة الآتية:

$$Q_1=\lambda.d-s \qquad (32-13)$$

حيث d هي المدة اللازمة لاستلام الطلبية.

مثال (3):

يقوم أحد المستودعات بتخزين وبيع مادة الاسمنت فإذا علمت أن معدل الطلب الشهري عليه يبلغ 300 طناً، وأن المدة اللازمة لاستلام الطلبية بعد تقديم طلب عليها تساوي خمسة أيام، وإن تكلفة إعداد الطلبية الواحدة تساوي 200 ل.س، وأن سعر شراء الطن من الاسمنت واصلاً يساوي 5000 ل.س، وأن تكلفة تخزين الطن الواحد خلال واحدة الزمن تساوي 10 ل.س، وأن تكلفة العجز عن كل طن خلال واحدة الزمن تساوي 50 ل.س. وإذا علمت أن نظام المستودع يسمح بوقوع عجز محدود فالمطلوب:

1- حساب الحجم المثالي للطلبية الأولى *R وللطلبية الدورية *Q.

2- احسب كمية العجز المسموح بها.

3- حساب المؤشرات المختلفة للعمل في هذا المستودع.

4- حساب الربح الصافي له خلال كل دورة إذا علمت أن سعر مبيع الطن الواحد 5500 ل.س.

الحل:

لدينا البيانات الآتية:

$d=5 \qquad p=50 \qquad h=10 \qquad C=5000 \qquad k=200 \qquad \lambda=300$

بما أن النموذج يسمح بالعجز لذلك نقوم بحساب R^* من العلاقة:

$$R^* = \sqrt{(\frac{2\lambda k}{h})(\frac{p}{p+h})} = \sqrt{(\frac{2\cdot 300\cdot 200}{10})(\frac{50}{50+10})}$$

$$R^* = \sqrt{10000} = 100 \text{ طناً}$$

أما الحجم المثالي للطلبية فنحسبه من العلاقة:

$$Q^* = \sqrt{(\frac{2\lambda k}{h})(\frac{p+h}{p})} = \sqrt{(\frac{2\cdot 300\cdot 200}{10})(\frac{50+10}{50})}$$

$$Q^* = \sqrt{14400} = 120 \text{ طناً}$$

وكان يمكن حساب Q^* من العلاقة:

$$Q^* = \frac{P+h}{p}R^* = \frac{50+10}{50}\times 100 = 120 \text{ طناً}$$

وهكذا نجد أن كمية العجز المسموح به:

$$S^* = Q^* - R^* = 120 - 100 = 20 \text{ طناً}$$

وبذلك نجد أن مدة الدورة التخزينية وهي $\left[0, \frac{Q^*}{\lambda}\right]$ – تساوي:

$$T^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{120}{300} = 0.4 \text{ شهراً } = 0.4\times 30 = 12 \text{ يوماً}$$

أما مدة نفاذ المخزون فهي $\left[0, \frac{R^*}{\lambda}\right]$ تساوي بالحساب:

$$t^* = \frac{R^*}{\lambda} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \text{ شهراً } = \frac{1}{3}\times 30 = 10 \text{ أيام}$$

أما عدد الطلبيات اللازمة لتحقيق الطلب خلال شهر فيحسب من العلاقة:

$$n^* = \frac{\lambda}{Q^*} = \frac{300}{120} = 2.5 \text{ طلبية}$$

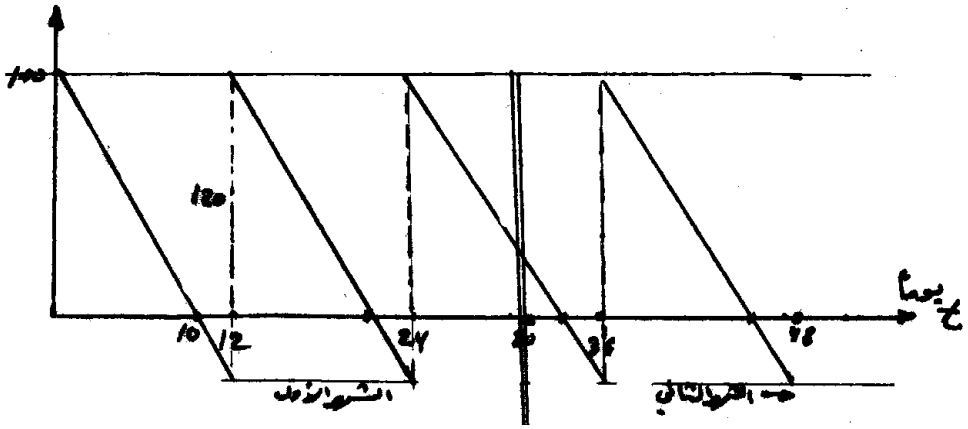
وأما كمية إعادة الطلبية فتساوي:

$$Q = d.\lambda - S^* = \frac{5}{30}.300 - 20 = 30 \text{ طناً}$$

وإن متوسط حجم المخزون يساوي هنا:

$$\overline{Y} = \frac{R^*}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ طناً}$$

والشكل البياني (13–9) يبين لنا حركة ذلك المخزون خلال شهر:



الشكل رقم (13–9)

أما أصغر تكلفة للتخزين خلال واحدة الزمن (الشهر) فتساوي:

$$C(Q^*, R^*) = \frac{300 \cdot 200}{120} + 300 \cdot 5000 + 10\frac{(100)^2}{2 \cdot 120} + \frac{50(120-100)^2}{2 \cdot 120}$$
$$= 500 + 1500000 + 416.667 + 83.333$$

$$C(Q^*, R^*) = 1501000 \text{ L.S/شهر}$$

أما أصغر تكلفة للتخزين خلال الدورة وحسب (13–31) فتساوي:

$$TC(Q^*, R^*) = 200 + 5000.120 + 10.\frac{(100)^2}{2 \cdot 300} + \frac{50(120-100)^2}{2-300}$$
$$= 200 + 600000 + 166.667 + 33.33$$

$TC(Q^*, R^*) = 600400$ L.S /دورة

وإن إجمالي قيمة المبيعات خلال الدورة التخزينية الواحدة يساوي:

$V = 120 \cdot 5500 = 660000$ L.S /دورة

وإن ربحه خلال الدورة التخزين يساوي:

$B = V - TC = 660000 - 600400 = 59600$ L.S /دورة

أما ربحه الشهري فيساوي:

$B_1 = n^*.B = 2.5 \times 59600 = 149000$ L.S /شهر

IV- النموذج السكوني مع الاحتياطي لمادة واحدة:

ويستخدم هذا النموذج لتخزين المواد التي تشترط وجود احتياطي أمان لحالات الطوارئ والإسعاف: كالأدوية والأغذية والوقود...الخ.

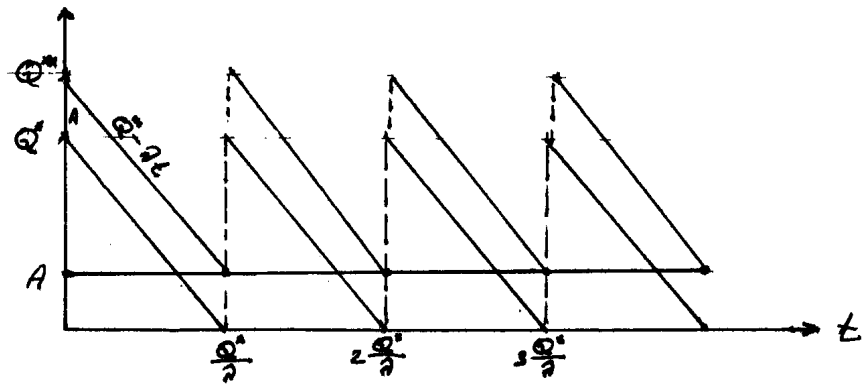
وتختلف معالجة هذا النموذج عن النموذج السابق (مع العجز) باستبدال العجز بالاحتياطي وبوضع فرضية بديلة جديدة وهي:

إن مقدار احتياطي الأمان في كل دورة تخزين وعلى مدار الزمن يجب أن يساوي مقداراً ثابتاً A، وإن تكلفة تخزين ذلك الاحتياطي تبلغ h عن كل واحدة منه خلال واحدة الزمن.

وهنا نلاحظ أن إجمالي تكلفة تخزين ذلك الاحتياطي يساوي: $C_4 = h.A$، وهو يشكل مقداراً ثابتاً ويضاف إلى التكلفة الإجمالية للتخزين. وإن الشكل رقم (13-10) الآتي يبين لنا حركة المخزون في هذه الحالة.

ومن الشكل يمكننا أن نستنتج أن الحجم المثالي للطلبية الأولى يساوي:

$$Q^{**} = Q^* + A = \sqrt{\frac{2.\lambda.k}{h}} + A \qquad (13-33)$$



الشكل رقم (13-10): حركة المخزون مع احتياطي A

وبعد أن يتم تأسيس الطلبية الأولى فإن حركة المخزون تسير كالعادة حتى حتى تبلغ المستوى A ثم تعود لتتجدد بطلبية جديدة حجمها المثالي Q^*. وبذلك نجد أن قيمة الكمية المخصصة للاحتياطي تساوي C.A وتحسب لمرة واحدة فقط وأن التكلفة الإجمالية للمخزون خلال كل دورة من الدورات المتتالية فتساوي:

$$TC(Q^*) = k + C.Q^* + \frac{hQ^{*2}}{2\lambda} + h.A.T^* \qquad (34-13)$$

أما التكلفة الإجمالية للمخزون خلال واحدة الزمن من الدورات المتتالية فتساوي:

$$C(Q^*) = \frac{k.\lambda}{Q^*} + C.\lambda + \frac{h}{2}Q^* + h.A \qquad (35-13)$$

أما كمية إعادة الطلب فتحسب من العلاقة:

$$Q_1 = d.\lambda + A \qquad (36-13)$$

أما بقية المؤشرات الأخرى فتحسب كالعادة.

مثال (4):

يقوم مستودع أحد المستشفيات بتخزين الدم وفق الشروط والبيانات الآتية:

يشترط ألا يقل مقدار احتياطي الأمان عن 5 كيلو غرام علماً بأن معدل الطلب الشهري على الدم في ذلك المستشفى يساوي 20 كيلو غرام شهرياً. وان تكلفة تخزين الكيلو غرام الواحد تساوي 6 ل.س في الشهر وأن تكلفة إعادة الطلبية تساوي

15 ل.س وأن سعر شراء الكيلوغرام الواحد من بنك الدم يساوي 800 ل.س، وإن المدة اللازمة لاستلام الطلبية 3 أيام.

والمطلوب:

1- حساب الحجم الأمثل للطلبية الأولى وللطلبيات المتتالية.

2- تحديد كمية إعادة الطلب.

3- حساب مدة الدورة التخزينية وعدد الدورات في الشهر.

4- حساب إجمالي تكلفة التخزين خلال الدورة التخزينية.

5- حساب إجمالي تكلفة التخزين خلال واحدة الزمن الشهر.

6- حساب التكلفة الاستثمارية للتخزين خلال عام.

الحل:

لدينا:

$$C = 800 \quad d = 3 \quad k = 15 \quad h = 6 \quad \lambda = 20 \quad A = 5$$

وبذلك نجد أن الحجم الأمثل للطلبية الأولى:

$$Q^{**} = Q^{*} + A = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 15}{6}} + 5 = 10 + 5 = 15 \text{ Kg}$$

ومنها نجد أن الحجم الأمثل للطلبيات المتتالية: $Q^{*} = 10 \text{ Kg}$

وإن كمية إعادة الطلب تعطى بالعلاقة:

$$Q_1 = d.\lambda + A = \frac{3}{30}.20 + 5 = 7$$

أما مدة الدورة التخزينية فتساوي:

$$T^{*} = \frac{Q^{*}}{\lambda} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ شهر} = 15 \text{ يوماً}$$

وكذلك نجد أن عدد الدورات خلال شهر يساوي:

$$n^{*} = \frac{1}{T^{*}} = 2 \text{ دورة}$$

وأن قيمة الكمية المخصصة للاحتياطي تساوي: $800\times 5 = 4000$ وتحسب لمرة واحدة.

أما إجمالي تكاليف التخزين خلال الدورة الواحدة فيساوي:

$$TC(Q^*) = 15 + 800\times 10 + \frac{6\cdot(10)^2}{2.20} = 6\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 8045 \text{ L.S/دورة}$$

أما إجمالي تكاليف التخزين في واحدة الزمن فيساوي:

$$C(Q^*) = \frac{15\times 20}{10} + 800\cdot 20 + \frac{6}{2}.10 + 6\cdot 5 = 16090 \text{ L.S/شهر}$$

وبذلك نجد أن التكلفة الاستثمارية خلال عام تساوي:

$$CI = C(Q^*)\cdot 12 + 4000 = 16090\cdot 12 + 4000 = 197080 \quad \text{L.S/year}$$

V- نموذج الأسعار المتغيرة (الخصومات) بدون عجز:

في بعض الحالات يتم خصم نسب معينة على أسعار المادة عند الشراء، وإن هذه الخصومات تؤثر على الحجم المثالي للطلبية Q^*. ولمعالجة هذه الحالة نفترض أن هناك أربعة مستويات لأسعار المادة متناسبة عكساً مع حجم الكمية المشتراة وهي:

$$= \begin{cases} C_1 & : FOR\ \ 0 \le Q < q_1 \\ C_2 & : FOR\ \ q_1 \le Q \le q_2 \\ C_3 & : FOR\ \ q_2 \le Q < q_3 \\ C_4 & : FOR\ \ q_3 \le Q < \infty \end{cases} \text{ سعر واحدة المادة} \qquad (37-13)$$

حيث إن: $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$.

فإذا كانت التكلفة C_i مستقلة عن الكمية المطلوبة. فإننا نقوم بحساب التكلفة الإجمالية في واحدة الزمن من العلاقة:

$$C_i(Q) = \frac{\lambda k}{Q} + \frac{hQ}{2} + \lambda C_i \qquad (38-13)$$

حيث .....i:1,2,3,4, لجميع الحالات السعرية السابقة:

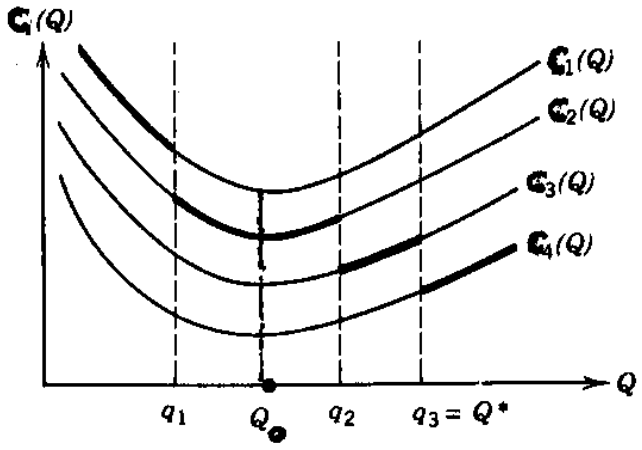
إن التابع $C_i(Q)$ يتميز بأنه يحقق المتراجحات الآتية:

$$C_1(Q) > C_2(Q) > C_3(Q) > C_4(Q) \qquad (39\text{-}13)$$

وإن كل من هذه التوابع محدب ويمر بنهايته الصغرى مقابل النقطة Q_0 (وهي لا تتعلق بمستوى السعر C_i)، وإن هذه النقطة تحسب من العلاقة:

$$Q^0 = \sqrt{\frac{2\lambda \cdot K}{h}} \qquad (40\text{-}13)$$

ويبين الشكل (13-11) المنحنيات البيانية لتلك التوابع حسب مستويات الكميات q_1, q_2, q_3 .



الشكل رقم (13-11): المنحنيات البيانية لتوابع التكلفة

وبعد حساب Q_0 من العلاقة السابقة نقارنها بالمستويات السابقة. ولنفترض أن:

$q_1 < Q_0 < q_2$ وعندها نلاحظ من الشكل أن الحجم المثالي للطلبية Q^* لا يمكن أن يكون على يسار Q_0، لأن ذلك يجعل تكلفة التخزين $C_i(Q)$ أكبر من القيمة المقابلة لـ Q_0. إذن نستنتج أن الحجم المثالي للطلبية Q^* يقع على عين الكمية Q_0, ومن الشكل نستنتج أيضاً أن Q^* تساوي:

$$Q^* = \min[C_2(Q_0), C_3(q_2), C_4(q_3)]$$

ومن الشكل أيضاً نجد أن أصغر قيمة لهذه التوابع هي $C_4(q_3)$ وتقابل القيمة المثالية لحجم الطلبية q_3 أي أن $Q^* = q_3$.

ملاحظة:

إن هذا الحل ليس دائماً مساوياً لـ q_3 لأنه كان يمكن أن يكون $Q^* = q_2$ لو تم تحريك المستوى q_3 إلى اليمين بشكل كافٍ.

مثال (5):

تريد كلية الاقتصاد تأمين حاجتها من الورق. فإذا علمت أن معدل الطلب لديها على تلك السلعة يبلغ 300 ماعوناً في السنة, وإن تكلفة شراء الواحدة بالمفرق 200 ل.س وإن تكلفة تخزين الواحدة تبلغ 10% من سعر واحدة المخزون سنوياً, وإن تكلفة إعداد الطلبية تساوي 150 ل.س, وإن الموردين يقدمون خصومات كما يلي:

خصم 2% إذا كانت الكمية $50 \le Q < 100$

خصم 3% إذا كانت الكمية $100 \le Q < 200$

خصم 5% إذا كانت الكمية $200 \le Q$

والمطلوب:

حساب الكمية المثالية Q^* التي تجعل التكاليف الإجمالية للتخزين أصغر ما يمكن.

<u>الحل:</u>

لدينا $\lambda = 300, \ C = 200, \ K = 150$ أما h فتساوي:

$$h = \frac{10}{100} \cdot 200 = 20 \, L.S$$

وإن مستويات الأسعار حسب الخصومات السابقة تساوي:

عندما $Q < 50$ فإن $C = 200$. لا يوجد خصم

عندما $50 \le Q < 100$ فإن: الخصم 3% وإن سعر الشراء يساوي:

$$C_2 = 200(1 - \frac{2}{100}) = 196$$

عندما $100 \le Q < 200$ فإن الخصم 5% وإن سعر الشراء يساوي:

$$C_3 = 200(1 - \frac{3}{100}) = 194$$

عندما Q≤200 فإن الخصم 5% وإن سعر الشراء يساوي:

$$C_4 = 200(1-\frac{5}{100}) = 190$$

ولحساب الكمية الأولية للمخزون نطبق العلاقة الآتية:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\cdot\lambda\cdot k}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 300\cdot 150}{20}} = 67$$

وبما أن شراء مثل هذه الكمية يستحق خصماً 2% فإن سعر الشراء للواحدة C_2=196 وإن إجمالي تكاليف التخزين يساوي حسب العلاقة (13−38) ما يلي:

$$C_2(67) = \frac{300\cdot 150}{67} + \frac{20\cdot 67}{2} + 300(196) = 60141.64$$

ولحساب توابع التكاليف الأخرى نأخذ الحدود الدنيا للمجالات الكمية المبينة في جدول الخصم ونحسب $C_3(100)$ و$C_4(200)$ فنجد أنه عندما نشتري الكمية q_2=100 فإن سعر الواحدة سيصبح C_3=194 وإن إجمالي تكاليف التخزين ستساوي:

$$C_3(100) = \frac{300\times 150}{100} + \frac{20\cdot 100}{2} + 300(194) = 59650 \text{ L.s}$$

أما عندما نشتري الكمية q_3=200 فإن سعر الواحدة C_4=190 وأن إجمالي تكاليف التخزين ستساوي:

$$C_4(200) = \frac{300\cdot 150}{200} + \frac{20\cdot 200}{2} + 300(190) = 59225 \text{ L.s}$$

وأخيراً نقوم بحساب إجمالي تكاليف التخزين عندما نشتري كامل الحاجة Q=300 فنجد أن سعر الواحدة سيكون C_4=190 وإن إجمالي تكاليف التخزين يساوي:

$$C_4(300) = \frac{300\cdot 150}{300} + \frac{20\times 300}{2} + 300(190) = 60150 \text{ L.s}$$

وهنا نلاحظ أن أدنى قيمة لإجمالي تكاليف التخزين هو 59225 ويقابل الكمية Q^*=200.

VI- نموذج التخزين المتعدد والحجم المحدود:

لنفترض الآن أن المستودع يقوم بتخزين وبيع m مادة, وإن حجم (أو مساحة) المستودع محدوداً ويساوي B واحدة. وإن كل واحدة من المادة i من هذه المواد تشغل مكاناً قدره S_i من حجم المستودع، ثم نفترض أن النموذج يحقق الفرضيات الآتية:

1- إن معدل الطلب على المادة i يساوي λ_i في واحدة الزمن.

2- إن الكمية الأولية المتوفرة من المادة i في بداية الزمن تساوي Q_i.

3- أنه كلما وصل مستوى التخزين من المادة i إلى صفر يتم تعويضها بنفس الكمية Q_i.

4- إن سعر شراء الواحدة من المادة i يساوي C_i.

5- يوجد تكلفة ثابتة قدرها K_i من أجل إعداد كل طلبية من المادة i.

6- إن تكلفة تخزين المادة i في واحدة الزمن تساوي h_i وأنه يتم طلب كل من هذه المواد في أوقات مختلفة ومستقلة عن بعضها بعضاً.

مما تقدم يتبين لنا أن الحجم المحدود للمستودع الذي يساوي B واحدة يتحكم بكمية المخزون من مختلف المواد، وحتى لا يتم تجاوز ذلك الحجم يجب أن تحقق الكميات المطلوبة الشرط الآتي:

$$S_1Q_1 + S_2Q_2 + S_3Q_3 + ... + S_mQ_m \le B \qquad (41-13)$$

وإن التكلفة الإجمالية لتخزين المادة i في واحدة الزمن يعطى بالعلاقة:

$$C_i(Q_i) = \frac{\lambda_i k_i}{Q_i} + \frac{h_i Q_i}{2} + \lambda_i C_i \qquad i:1,2,3,\ldots\ldots,m \qquad (42-13)$$

وإن المجموع العام لتكلفة التخزين يعطي بوساطة العلاقة الآتية:

$$C(Q_1,Q_2,Q_3,.....,Q_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i k_i}{Q_i} + \frac{h_i Q_i}{2} + \lambda_i C_i\right) \qquad (43-13)$$

والمطلوب جعل هذه التكلفة أصغر ما يمكن ضمن شرط المكان (13-41), ولحل مثل هذه المسألة يمكن أن نطبق نماذج البرمجة اللاخطية، ولكننا هنا نتبع أسلوباً آخر وهو استخدام مضاريب (لاغرانج) لذلك نشكل تابع (لاغرانج) الآتي:

$$L(Q_i,\mu)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i k_i}{Q_i}+\frac{h_i Q_i}{2}+\lambda_i C_i\right)+\mu[S_1Q_1+S_2Q_2+.....+S_mQ_n-B]$$

ولإيجاد النهاية الصغرى المشروطة بـ (13−41) نحسب المشتقات الجزئية بالنسبة لكل Q_i وبالنسبة للمضروب μ ونضعها مساوية للصفر فنحصل على المعادلات الآتية:

$$\frac{\partial L(Q_i,\mu)}{\partial Q_i}=\frac{-\lambda_i k_i}{Q_i^2}+\frac{h_i}{2}+\mu s_i=0 \qquad (44-13)$$

حيث إن: i:1 2 3 4……..m.

$$\frac{\partial L(Q_i,\mu)}{\partial \mu}=S_1Q_1+S_2Q_2+.....S_mQ_m-B=0 \qquad (45-13)$$

وبحل مجموعة المعادلات الأولى (m معادلة) نحصل على أن Q_i تعطى بالعلاقة:

$$Q_i=\sqrt{\frac{2\lambda_i k_i}{h_i+2\mu S_i}} \qquad (46-13)$$

حيث إن: i: 1 2 3 ……m

وتصبح المعادلة (13−45) كما يلي:

$$S_1Q_1+S_2Q_2+S_3Q_3+.....S_mQ_m=B \qquad (47-13)$$

وهنا نلاحظ أن الحل ($Q_1,Q_2,Q_3,\ldots\ldots Q_m$) الذي حصلنا عليه من(13−46) يجب أن يحقق الشرط (13−47) ولمعالجة هذا الموضوع لنفترض جدلاً أن الحل السابق لا يحقق الشرط (13−47)، أي أن:

$$S_1\sqrt{\frac{2\lambda_1 k_1}{h_1+2\mu S_1}}+S_2\sqrt{\frac{2\lambda_2 k_2}{h_2+2\mu S_2}}+.....S_m\sqrt{\frac{2\lambda_m k_m}{h_m+2\mu S_m}}>B \qquad (48-13)$$

وبملاحظة أن قيمة الطرف الأيسر تصغر كلما كبرت قيمة μ. أي أنه يمكننا ولو بشكل تجريبي أن نجد قيمة وحيدة وموجبة لـ μ مثل μ^* وذلك بزيادة قيمة μ تدريجياً حتى تتحقق المعادلة الآتية:

$$S_1\sqrt{\frac{2\lambda_1 k_1}{h_1+2\mu^* S_1}}+S_2\sqrt{\frac{2\lambda_2 k_2}{h_2+2\mu^* S_2}}+.....S_m\sqrt{\frac{2\lambda_m k_m}{h_m+2\mu^* S_m}}=B \qquad (50-13)$$

وبذلك نجد أن الحجم المثالي لطلبيات المادة i يعطى بالعلاقات الآتية:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2\lambda_i k_i}{h_i + 2\mu^* S_i}} \qquad (51-13)$$

حيث إن: i: 1 ,2, 3, 4, ……..m.

وحيث إن μ^* يجعل الشرط (13−41) مساواةً. أي أن الكميات *Q تحقق المساواة:

$$S_1 Q_1^* + S_2 Q_2^* + ... + S_m Q_m^* = B \qquad (52-13)$$

مثال (6):

لنفترض أن أحد المستودعات يقوم بتخزين وبيع ثلاث مواد C,B,A وأن المساحة المخصصة للتخزين تساوي 700م^2 فقط. وأن البيانات الخاصة بالمواد المخزنة كانت كما يلي:

المؤشر \ المادة		A	B	C
λ_i	معدل الطلب في العام	5000	2000	10000
K_i	تكلفة إعداد الطلبية	500	300	200
h_i	تكلفة تخزين الواحدة	10	15	5
S_i	المساحة اللازمة لكل واحدة م^2	0.70	0.80	0.40

والمطلوب: إيجاد الكميات المثالية لطلبيات هذه المواد.

الحل:

نقوم بحساب الكميات Q_3,Q_2,Q_1 بشكل تجريبي من العلاقة (13−51) وذلك بإعطاء μ قيماً مختارة كما يلي:

1− نضع $\mu = 0$ فنحصل على أن:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_1 k_1}{h_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{10}} = 707.11$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\lambda_2 k_2}{h_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 300}{15}} = 282.84$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2\lambda_3 k_3}{h_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 200}{5}} = 894.43$$

وبتعويض قيم هذا الحل في معادلة المكان نجد أنها لا تحقق الشرط (13−47) وذلك لأن:

$$S_1Q_1 + S_2Q_2 + S_3Q_3 =$$
$$0.7(707.11) + 0.8(282.84) + 0.4(894.43) = 1079 > 700$$

وهذا يعني أن مساحة المستودع لا تكفي لتخزين هذه الكميات.

2− نضع $\mu = 3$ فنجد أن:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda_1 \cdot k_1}{h_1 + 2\mu S_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{10 + 2 \cdot 3 \cdot (0.70)}} = 593.39$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\lambda_2 k_2}{h_2 + 2\mu S_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 300}{15 + 2 \cdot 3(0.80)}} = 246.18$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2\lambda_3 k_3}{h_3 + 2\mu S_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 200}{5 + 2 \cdot 3(0 \cdot 40)}} = 735.21$$

وبتعويض قيم هذا الحل نجد أنه أيضاً لا يحقق الشرط (13-47) وذلك لأن:

$S_1Q_1 + S_2Q_2 + S_3Q_3 = 0.7(593.39) + 0.8(246.18) + 0.4(735.21) = 906.40 > 700$

وهي مازالت أكبر من مساحة المستودع 700 م2.

3− نضع $\mu = 5$ فنجد أن:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda_1 \cdot K_1}{h_1 + 2\mu S_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{10 + 2 \cdot 5(0.70)}} = 542.33$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda_2 \cdot K_2}{h_2 + 2\mu S_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 300}{15 + 2 \cdot 5(0.80)}} = 228.42$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda_3 \cdot K_3}{h_3 + 2\mu S_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 200}{5 + 2 \cdot 5(0.40)}} = 666.67$$

وبتعويض هذا الحل في الشرط (13-47) نجد أن المساحة تساوي:

$S = 0.7\ (542.33) + 0.8\ (228.42) + 0.4\ (666.67) = 829 > 700$

أي أن الشرط (13-47) مازال غير محقق.

4- لنضع الآن $\mu = 8$ فنجد أن:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{10 + 2 \cdot 8(0.7)}} = 485.64$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 300}{15 + 2 \cdot 8(0.8)}} = 202$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 200}{5 + 2 \cdot 8(0.4)}} = 592.35$$

وبتعويض ذلك في الشرط (13-47) نجد أن:

$S = 0.7\ (485.64) + 0.8\ (202) + 0.4\ (592.35) = 738.49 > 700$

أي أن المساحة اللازمة مازالت أكبر من مساحة المستودع.

5- لنضع أخيراً أن $\mu = 10$ فنجد أن:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{10 + 2 \cdot 10(0.7)}} = 456.54 \approx 457$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 300}{15 + 2 \cdot 10(0.8)}} = 196.75 \approx 197$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 200}{5 + 2 \cdot 10(0.4)}} = 554.7 \approx 555$$

نعوض ذلك في الشرط (13-47) فنحصل على أن:

$$S = 0.7\ (456.44) + 0.8\ (196.75) + 0.4\ (554.7) = 699.5$$

وهي مساحة أصبحت تساوي تقريباً المساحة المخصصة للتخزين في المستودع. وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المثالي الذي يعطينا الكميات المثالية للطلبيات من المواد الثلاث وهي:

$$Q_1^* = 457 \qquad Q_2^* = 197 \qquad Q_3^* = 555$$

وهذه الكميات هي التي تجعل التكلفة الإجمالية للتخزين أقل ما يمكن وتستغل كامل المساحة المخصصة للتخزين في المستودع.

تمرينات

1- يقدر معدل الطلب على المضادات الحيوية في أحد الصيدليات بـ 2000 وحدة شهرياً. فإذا كانت تكلفة إعداد الطلبية 5ل.س وتكاليف تخزين كل واحدة 3 ل.س شهرياً, وكانت مدة استلام الطلبية يومين, وكان سعر شراء الواحدة 50 ل.س ومبيعها بـ 60 ل.س، والمطلوب:

أ- حساب الكمية المثالية للطلبية (بدون عجز).

ب- حساب كمية إعادة الطلب.

ج- حساب مؤشرات التخزين المختلفة.

د- حساب الربح الشهري من هذه المضادات.

2- يقوم أحد المستودعات بتخزين مادة الجبن, ويقدر معدل الطلب عليه بـ 500 عبوة شهرياً, فإذا كان العمل في ذلك المستودع يقبل حدوث عجز في المخزون، وكان سعر شراء العبوة 700 ل.س, وتكلفة إعداد الطلبية 30 ل.س ومدتها 4 أيام, وإن تكلفة تخزين العبوة الواحدة 60ل.س شهرياً. وإن تكلفة العجز عن كل عبوة 20 ل.س. والمطلوب حساب:

أ- الحجم المثالي للطلبية الأولى R^* وللطلبية الدورية Q^* .

ب- حساب المؤشرات المختلفة للتخزين في هذا المستودع.

ج- حساب الربح الصافي خلال كل دورية إذا علمت أن سعر مبيع العبوة الواحدة 800ل.س.

3- إذا كان أحد المستودعات يقوم بتخزين وبيع 4 مواد, وكانت المساحة المخصصة للتخزين تساوي 1000م2 فقط, وكانت لدينا البيانات الآتية عن المخزون:

المادة / المؤشر	A	B	C	D
معدل الطلب في الشهر	3000	2000	5000	4000
تكلفة إعداد الطلبية	200	300	400	500
تكلفة تخزين الواحدة	15	20	25	30
المساحة اللازمة لكل واحدة م^2	0.5	0.40	0.20	0.30

والمطلوب: إيجاد الكميات المثالية لطلبيات هذه المواد.

الفصل الرابع عشر
نظرية القرارات الإدارية

I- مقدمة وتعاريف:

إن نظرية القرارات الإدارية تعتمد على البيانات المتوفرة عن الموضوع المدروس، وتستخدم أساليب كمية لمعالجة وتوظيف لكل البيانات لاتخاذ والقرارات اللازمة، ولذلك فإننا سنميز بين عدة أنواع للبيانات المتوفرة هي:

البيانات المؤكدة: وهي البيانات المعلومة والمحددة تماماً.

البيانات غير المؤكدة: وهي البيانات غير المعلومة أو غير المحددة بدقة كافية.

البيانات العشوائية: وهي البيانات التي تتكرر وفق قانون توزيع احتمالي معين.

وتدخل في نظرية القرارات الإدارية عدة مصطلحات ومفاهيم أهمها المفاهيم الآتية:

1- صانع القرار: وهو المدير أو المسؤول الذي يحق له قانونياً اتخاذ قرار حول مسألة معينة، وهو يملك عادة خيارات عدة أو مواقف أو بدائل أو استراتيجيات يستخدمها في اتخاذ القرار المناسب لأهداف المشروع, وتسمى هذه الخيارات أو المواقف بالأفعال وسنرمز له بالرموز: $A\ (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \ldots\ldots\ldots a_m)$. حيث إن m عدد الأفعال المتاحة لصانع القرار.

2- الحالات التي يمكن أن تأخذها الطبيعة (أو السوق أو الطرف الآخر) في المستقبل التي سنرمز لها بالرموز: $\theta(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\ldots\ldots\theta_n)$، حيث n عدد الحالات التي تأخذها الطبيعة عند حركتها.

3- مقدار الربح (أو الخسارة) الذي سيحققه (أو سيدفعه) صانع القرار عند اتخاذه أي موقف من البدائل الممكنة (الأفعال) ai، مقابل أية حالة من الحالات الممكنة لحركة الطبيعة θ_j، ونرمز لهذه المقادير بالرموز $X(ai,o_j)$ أو اختصاراً بالرمز Xij. وهو يمكن أن يكون مقداراً كمياً (عدداً معيناً) أو نوعياً (وسط، جيد، ممتاز) وإن هذه المقادير تأخذ شكل جدول أو مصفوفة كما يلي:

الجدول رقم (14-1) جدول الربح

حالات الطبيعة / الأفعال الممكنة	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	....	θ_N
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	....	x_n
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	....	x_{2n}
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}		x_{3n}
.....	....	....	....	....	....	....
a_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	x_{m4}	....	x_{mn}
التوزيع الاحتمالي	p_1	p_2	p_3	p_4	....	p_n

4- قانون التوزيع الاحتمالي الذي تخضع له الحالات الممكنة للطبيعة وهو يمكن أن يكون على شكل سلسلة عددية أو على شكل تابع رياضي يقابل كل حالة من حالات الطبيعية مثل:

$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots P_N$

علماً بأن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد $\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$ وأن كل منها $P_J \geq 0$

5- هدف صانع القرار: غالباً ما يكون هدف صانع القرار محصوراً في أحد الأمرين الآتيين:

أ- زيادة ربح المؤسسة وجعله أكبر ما يمكن.

ب- تقليل خسارة المؤسسة وجعلها أصغر ما يمكن.

وحتى يستطيع صانع القرار أن يحقق الهدف الذي ينشده يجب عليه أن يبحث عن البيانات اللازمة لاتخاذ القرار، وأن يستخدم الطرق والأساليب المعروفة لاستخراج

قرار سليم وصائب عن طريق المفاضلة بين الخيارات الممكنة، وبصورة عامة إن عملية اتخاذ القرار تمر بعدة خطوات هي المبينة في الفقرة الآتية:

6- خطوات اتخاذ القرار: لاشك أن صانع القرار مهما كان خبيراً سيحاول أن يفكر بوضع أسس معينة للقرار الذي سيتخذه وأن يقارنه بقرارات أخرى، وأن يبحث عن الوسائل التي تساعده على اتخاذ قراره. وإن عملية اتخاذ القرار تمر بالخطوات الآتية:

أ- حصر الخيارات أو البدائل أو الأفعال المتاحة لصاحب القرار والتي رمزنا لها بـ $(a_1\ a_2\ \ldots\ldots a_m)$.

ب- دراسة حركة الطبيعة أو السوق أو الإنتاج في المستقبل لتحديد حالاتها الممكنة (المتوقعة والمفاجئة) والمتحولات المرتبطة بها, وهي الحالات التي تسمى بحالات الطبيعة States of nature التي رمزنا لها بـ $\theta(\theta_1\theta_2\theta_3.....\theta_n)$.

ج- وضع جدول بمقادير الربح (أو الخسارة) مقابل كل خيار من الخيارات المتاحة وكل حالة من الحالات الممكنة وهي التي رمزنا لها بـ X_{ij} كما في الجدول (13-1) السابق.

7- شروط اتخاذ القرار: ويشترط عند اتخاذ القرار أن تتحقق الشروط الآتية:

أ- أن تكون البدائل المتاحة لصاحب القرار قد أخذت بعين الاعتبار.

ب- أن تكون حالات الطبيعة قد حددت تماماً ولم يتم إغفال أي منها.

ج- أن تكون حالات الطبيعة متنافية، أي أن حدوث أي منها يمنع حدوث الأخرى.

د- أن تكون البدائل الممكنة مستقلة عن الحالات الطبيعية، أي أنه عندما يتم اختيار أحد البدائل فإن ذلك لا يؤثر على حدوث أي حالة من حالات الطبيعة.

هـ- لا يمكن القول إن حالة ما ستحدث بالتأكيد، بل يفترض أن يكون حدوث كل حالة طبيعية وفق نسبة مئوية معينة (وفق توزيع احتمالي معين).

8- الحالات المختلفة لاتخاذ القرار:

أ- اتخاذ القرار في حالة التأكد.

ب- اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد.

ج- اتخاذ القرار في حالة المخاطرة.

ولذلك فإننا سنخصص فقرة خاصة لكل حالة من هذه الحالات ضمن التحليل الكمي لاتخاذ القرارات.

II- التحليل الكمي لاتخاذ القرارات:

1- اتخاذ القرارات في حالة التأكد:

إن حالة التأكد تعني أن أحدى حالات الطبيعة قد حدثت, وأخذنا علماً بذلك. وبناءً على ذلك فإنه يصبح من السهل على صانع القرار أن يقوم بتحليل ودراسة أرباح هذه الحالة وتحديد الوضع المناسب واتخاذ القرار الصائب. وذلك بإجراء عملية مفاضلة بين قيم الأرباح المدرجة تحت تلك الحالة واختيار أكبرها من حالة الربح (وأصغرها في حالة الخسارة)، ثم اعتماد البديل المقابل لتلك القيمة المختارة.

مثال (1):

لنفترض أن صاحب أحد المصانع طلب من الوزارة أن توافق له على تصنيع برادات وغسالات وثلاجات، ولكن الوزارة لم توافق إلا على تصنيع البرادات فقط، وتركت له حرية اختيار القياسات والأحجام. وإذا كانت مقادير الربح الناتجة عن إنتاج البرادات حسب أحجامها كما يلي:

جدول رقم (14-2) مصفوفة الربح لحالة التأكد

القرار	الثلاجة	الغسالة	مقدار الربح من كل براد	حجم البراد
	*	*	2000	كبير
إنتاج البراد المتوسط	*	*	2500	متوسط
	*	*	1500	صغير

ومن الواضح هنا أن صاحب المصنع سيدرس عمود الأرباح وسيختار أكبر قيمة منه وهي 2500 المقابلة للحجم المتوسط، وسيقرر إنتاج برادات من الحجم المتوسط.

2- اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد:

إن صانع القرار في هذه الحالة لا يعلم أي شيء عن الحالة التي ستأخذها الطبيعة (السوق والإدارة). ولا حتى عن احتمالات حدوث أي منها، أي بالأحرى لا يوجد لديه أية معلومة عن مستقبل حركة الطبيعة. لذلك فإنه يفترض أن الحالات الممكنة متكافئة وتدخل في التحليل بالفرصة نفسها, ثم يقوم بإجراء مفاضلة بين البدائل المتاحة لديه في كل الظروف. ولإجراء هذه المفاضلة يتم استخدام أحد القواعد التالية (أو بعضها أو كلها):

أ- قاعدة لابلاس (متوسط الربح أو الخسارة):

وتعتمد هذه القاعدة على حساب متوسط الربح (أو الخسارة) المقابل لكل بديل من البدائل الممكنة، ثم البحث عن أكبر قيمة له، واعتبار البديل المقابل لتلك القيمة هو القرار المناسب.

مثال (2):

ليكن لدينا جدول الأرباح للحالات والبدائل الآتية:

جدول رقم (14-3) مصفوفة الربح لحالة عدم التأكد.

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	θ_1	θ_2	θ_3	متوسط الربح
a_1	100	200	300	$\frac{100+200+300}{3}=200$
a_2	-300	150	600	$\frac{-300+150+600}{3}=150$
a_3	130	200	400	$\frac{130+200+400}{3}=243$
a_4	160	300	200	$\frac{160+300+200}{3}=220$

وبمقارنة عناصر العمود الأخير نلاحظ أكبر قيمة لمتوسط الربح هي 243 المقابلة لـa_3، لذلك يعتبر البديل a_3 هو القرار المناسب حسب هذه القاعدة، ومما يؤخذ على هذه القاعدة أنها لا تبحث عن الحد الأقصى للربح الذي يمكن تحقيقه بل تكتفي بأكبر قيمة لمتوسط الربح.

ب- قاعدة أكبر الكبار Maxi Max (قاعدة المتفائل):

وتعتمد هذه القاعدة على حساب أكبر قيمة للربح مقابل كل بديل (في كل سطر) ثم البحث عن أكبر هذه الكبار، واعتبار القيمة التي تقابله القرار المناسب.

مثال (3):

نقوم بتطبيق ذلك على مثالنا السابق فنجد أن:

جدول رقم (14-4) – مصفوفة الربح

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	θ_1	θ_2	θ_3	$Y_i = \underset{j}{Max}\, x_{ij}$
a_1	100	200	300	300
a_2	300-	150	600	600
a_3	130	200	400	400
a_4	160	300	200	300

وبمقارنة عناصر العمود الأخير نجد أن:

$$Y = \underset{i}{Max}\left[\underset{j}{Max}\, X_{ij}\right] = 600 \qquad (1-14)$$

أي أن أكبر كبار القيم هي القيمة 600 المقابلة للبديل a_2، وبذلك يكون البديل a_2 هو البديل المناسب، ولكن يؤخذ على هذه القاعدة أنها لا تأخذ بعين الاعتبار الحالات السيئة للطبيعة (مثل θ_1 أو θ_4)، لذلك فإنها تعطينا أقصى قيمة يمكن أن يصل إليها الربح فيما إذا كانت الأحوال الطبيعية جيدة. ولذلك سميت بقاعدة المتفائل.

ج- قاعدة أكبر الصغار Maxi Min (قاعدة المتشائم أو قاعدة وولد)

وتعتمد هذه القاعدة على حساب أصغر قيمة للربح فيما إذا كانت الأحوال الطبيعية سيئة وأخذت حالات غير مناسبة.

مثال (4):

نقوم بتطبيق ذلك على مثالنا السابق فنجد أن:

جدول رقم (14-5) – مصفوفة الربح

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	θ_1	θ_2	θ_3	$Z_i = \underset{j}{Min}\, X_{ij}$
a_1	100	200	300	100
a_2	-300	150	600	-300
a_3	130	200	400	130
a_4	160	300	200	160

وبمقارنة عناصر العمود الأخير نجد أن:

$$Z = \underset{i}{Max}\left[\underset{j}{Min}\, X_{ij}\right] = 160 \qquad (2-14)$$

أي أن أكبر الصغار هي القيمة 160 المقابلة للبديل a_4، وهي تعطينا أكبر قيمة للربح فيما إذا كانت الأحوال الطبيعية سيئة جداً ولذلك سميت هذه القاعدة بقاعدة المتشائم.

د- قاعدة هورويز (Hurwiez):

لقد لاحظنا أن قاعدة أكبر الكبار تعطينا القيمة القصوى لمقدار الربح، وأن قاعدة أكبر الصغار تعطينا القيمة الدنيا لمقدار الربح، ولكن معظم المدراء لا ينظرون إلى المستقبل نظرة متفائلة تماماً ولا متشائمة تماماً، بل ينتظرون من المستقبل أن يأخذ حالة وسطى بين حالتي التفاؤل والتشاؤم. وبناءً على ذلك وضع (هورويز) قاعدة مركبة من القاعدتين، ولاستخراجها نرمز بـ $Y_i = \underset{j}{Max} X_{ij}$ وبـ $Z_i = \underset{j}{Min} X_{ij}$ ونعرف القيمة التي تحددها قاعدة هورويز بالعلاقة:

$$H = \underset{i}{Max}\left[\alpha.Y_i + (1-\alpha).Z_i\right] \qquad (3-14)$$

حيث $0 \le \alpha \le 1$ وهي تعطينا قيمة معينة محصورة يبين Y و Z أي أن $Z \le H \le Y$ وهنا نلاحظ أن قيمة المؤشر H مرتبطة بالقيمة التي نعطيها لـ α، وهذا ما يجعلها تميل نحو القيمة Y, إذا كانت $\alpha > 0.5$، أو نحو القيمة Z إذا كانت $\alpha < 0.5$، وأنه إذا وضعنا $\alpha = 0$ فإننا نحصل على القيمة المتشائمة Z، وإذا وضعنا $\alpha = 1$ فإننا نحصل على القيمة المتفائلة Y.

مثال (5):

نقوم بتطبيق هذه القاعدة على مثالنا السابق ونضع $\alpha = 0.3$ فنجد الجدول (6-14).

وبمقارنة عناصر العمود الأخير نلاحظ أن أكبر قيمة فيه هي 211 أي:

$$H = \underset{i}{Max}\left[190,-30,211,202\right] = 211$$

وبما أن هذه القيمة تقابل البديل a_3 فإن البديل a_3 هو القرار المناسب.

ملاحظة:

إن هذه القاعدة تتأثر كثيراً بقيمة α التي سندخلها على المعادلة (3-13) وهذا قد يغير من البديل المقابل وبالتالي القرار المناسب.

جدول رقم (14-6)

هـ- قاعدة أصغر كبار الأسف MINIMAX (قاعدة سافاج):

وتعتمد هذه القاعدة على مقادير جديدة تسمى مقادير الأسف وتحسب من العلاقة الآتية:

$$S = \left[\underset{i}{Max}\, X_{ij}\right] - X_{ij} \qquad (4-14)$$

حيث إن $\underset{i}{Max}\ [x_{ij}]$ هي أكبر قيمة في كل عمود.

وهذا يعني أنه وبتطبيق هذه القاعدة علينا أن نحسب أكبر قيمة في كل عمود ثم نقوم بتشكيل جدول جديد وذلك بطرح كل كل X_{ij} من القيمة الكبرى في عموده فنحصل على جدول مقادير الأسف، وبعدها نقوم بتطبيق قاعدة Min Max على الجدول الجديد، ونحسب أكبر مقدار للأسف في كل سطر ثم نختار أصغر هذه الكبار ونعتبر البديل الذي يقابله هو القرار المناسب.

مثال (6):

ولتوضيح ذلك نقوم بتطبيق هذه القاعدة على المثال السابق فنجد أن:

جدول رقم (14-7): جدول مقادير الأسف

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	Q_1	Q_2	Q_3	مقادير الأسف			$\underset{i}{Max}\, X_{ij}$
				Q_1	Q_2	Q_3	
a_1	100	200	300	60	100	300	300
a_2	-300	150	600	460	150	0	460
a_3	130	200	400	30	100	200	200
a_4	160	300	200	0	0	400	400
$\underset{i}{Max}\, X_{ij}$	160	300	600	-	-	-	

ولشرح كيفية حصولنا على بيانات هذا الجدول قمنا بما يلي:

1- حسبنا أكبر عنصر في كل عمود $\underset{i}{Max}\, X_{ij}$ وسجلناه في السطر الأخير.

2- قمنا بطرح عناصر كل عمود من قيمة $\underset{j}{Max}\, X_{ij}$ فحصلنا على جدول الأسف الملاصق للجدول الأساسي, مثلاً حصلنا على عناصر العمود الأول لجدول الأسف كما يلي $\left[\text{Max}\, X_{ij} = 160\right]$:

$160 - 100 = 60$

$160 - (-300) = 460$ و

$160 - 130 = 30$

$160 - 160 = 0$

وكذلك الأمر بالنسبة إلى عناصر الأعمدة الأخرى في جدول الأسف.

3- قمنا بإيجاد أكبر العناصر في كل سطر من جدول الأسف فحصلنا على العمود الأخير.

4- نقوم بعد ذلك بمقارنة عناصر العمود الأخير ونختار أصغرها فنحصل على أصغر قيمة من كبار جدول الأسف وهي القيمة 200 التي تمثل أصغر كبار جدول الأسف وتساوي:

$$\underset{i}{Mini}\left[\underset{j}{Max}\, X'_{ij}\right] = 200$$

وبما أنها تقابل البديل a_3 فيكون البديل a_3 هو القرار المناسب، وهذا يعني أن صانع القرار لو اتخذ البديل a_3 قراراً له فإنه سيواجه أصغر كبار الأسف وهو 200 ل.س.

III- اتخاذ القرارات في حالة المخاطرة:

سنعالج في هذه الفقرة كيفية التوصل إلى القرار المناسب عندما تكون حركة حالات الطبيعة عشوائية وخاضعة لتوزيع احتمالي معين.

ولكن ذلك التوزيع الاحتمالي قد لا يكون معروفاً تماماً بل يكون توزيعاً مفترضاً من قبل الخبراء أو من قبل صانع القرار نفسه، وهذا الأمر يتضمن مخاطرة كبيرة تنعكس آثارها على القرار نفسه.

والعمل الصحيح هو أن يتم حساب الاحتمالات المقابلة لحالات الطبيعة أو تقديرها من خلال حقائق علمية وبيانات إحصائية مأخوذة من التجارب والدراسات السابقة.

وإن عملية اتخاذ القرار في حالة المخاطرة تعتمد على ثلاث قواعد هي:

1- قاعدة مستوى الطموح:

وتهدف هذه القاعدة إلى تحقيق مستوى معين من الربح يطمح إليه صانع القرار, أو التوقف عند مستوى معين من الخسارة لا يرغب بتجاوزه،

مثال (7):

إذا كان مستوى طموح صانع القرار في مثالنا السابق كما يلي:

أ- أن لا يقل الربح عن 400 ل.س.

ب- وأن لا تزيد الخسارة عن 100 ل.س.

وبالعودة إلى مثال الجدول السابق التالي:

الجدول رقم (14-8)

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	100	200	300
a_2	-300	150	600
a_3	130	200	400
a_4	160	300	200

ومن خلال دراسة عناصر الأسطر في هذا الجدول نلاحظ أن:

سطر البديل a_1 لا يوجد فيه عنصر يحقق مستوى طموح صاحب القرار في الربح (لذلك يستبعد هذا البديل).

سطر البديل a_2 يوجد فيه عنصر يحقق مستوى طموح صاحب القرار في الربح وهو 600.

سطر البديل a_3 يوجد فيه عنصر يحقق مستوى طموح صاحب القرار في الربح وهو 400.

سطر البديل a_4 لا يوجد فيه عنصر يحقق مستوى طموح صاحب القرار في الربح (لذلك يستبعد هذا البديل).

وبذلك نجد أن البديلين a_2 وa_3 فقط يحققان مستوى طموح صاحب القرار في تحقيق ربح لا يقل عن 400 ل.س، وبإجراء الدراسة نفسها على تلك الأسطر لتحديد الأسطر التي تحقق مستوى طموح صاحب القرار في الخسارة نلاحظ أن:

سطر البديل a_2 لا يحقق مستوى ذلك الطموح من الخسارة وبذلك يتم استبعاد البديل a_2، ويبقى لدينا على البديل a_3 فقط لأنه يحقق مستوى طموح الربح ومستوى طموح الخسارة لصانع القرار، ولذلك يكون البديل a_3 هو القرار المناسب حسب هذه القاعدة.

2- قاعدة الحالة الأكثر احتمالاً (المنوال):

وتعتمد هذه القاعدة على التوزيع الاحتمالي لحركة حالات الطبيعة فإذا رمزنا للاحتمالات المقابلة لتلك الحالات كما يلي:

$\theta: \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad ..... \quad \theta_j \quad ..... \quad \theta_n$

$P: \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad ..... \quad P_j \quad ..... \quad P_n$

حيث إن: $\sum P_j = 1$ وأن $O \le P_i \le 1$:

وبدراسة قيم الاحتمالات P_j وحساب أكبرها والذي نرمز له P_S:

$$\underset{j}{Max}\left[P_j\right] = P_S \qquad (5-14)$$

فعندها تكون الحالة الطبيعية θ_S هي الحالة الأكثر حدوثاً، ويمكن الاقتصار عليها عند الحساب، وبذلك تؤول المسألة إلى مسألة اتخاذ القرار في حالة التأكد حيث نقوم باختيار أكبر القيم من العمود θ_s فتكون مقابلة للقرار المناسب.

مثال (8):

وكتطبيق على ذلك نأخذ مثالنا السابق ولنفترض أن الاحتمالات المقابلة للحالات الطبيعية هي كما يلي:

$P_1=0.25$ $P_2=0.15$ $P_3=0.60$

وبوضع هذه الاحتمالات في أسفل (أو أعلى) الجدول السابق نحصل على:

جدول رقم (14-9): جدول الحالات والاحتمالات

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	100	200	300
a_2	-300	150	600
a_3	130	200	400
a_4	160	300	200
الاحتمالات P_j	0.25	0.15	0.6

ومن خلال هذا الجدول نلاحظ أن الحالة الأكثر احتمالاً (المنوال) هي الحالة Q_3، وبالاقتصار على هذه الحالة تؤول المسألة إلى مسألة حالة التأكد ويتحول الجدول السابق إلى عمود واحد كما يلي:

الجدول رقم (14-10): جدول الحالة الأكثر احتمالاً

الحالة θ_3	**البديل**
300	a_1
600	a_2
400	a_3
200	a_4

ومن خلال الجدول الأخير (14-10) نلاحظ أن أكبر مستوى للربح يمكن أن يتحقق من خلال البديل a_2 ويبلغ 600 ل.س، ويمكن استخدام هذه القاعدة مع قاعدة مستوى الطموح لإجراء المفاضلة بين البدائل عند الضرورة.

3- قاعدة أكبر القيم المتوقعة:

وتعتمد هذه القاعدة على حساب القيم المتوقعة للربح عند كل بديل a_i، ثم اختيار أكبر تلك القيم واعتبار البديل المقابل لها هو بديل القرار المناسب.

ويتم حساب القيمة المتوقعة لكل بديل من العلاقة الآتية:

$$E(a_i) = \sum_{j=1}^{n} P_j X_{ij} \qquad (6-14)$$

وبذلك يكون بديل القرار المناسب هو الذي يحقق العلاقة:

$$\underset{j}{Max}\left[E(a_i)\right] = E_k \qquad (7-14)$$

فيكون البديل a_k هو القرار المناسب.

مثال (9):

وكتطبيق على ذلك نأخذ المثال السابق ونحسب القيمة المتوقعة لكل سطر ونصفها في العمود الأخير فنحصل على:

جدول رقم (14-11): جدول القيم المتوقعة

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	θ_1	θ_2	θ_3	$E(a_i)$
a_1	100	200	300	(0.25).100+(0.15).200+(0.60).300=235
a_2	-300	150	600	(0.25)(-300)+(0.15).150+(0.60).600=307.5
a_3	130	200	400	(0.25)130+(0.15)200+(0.60)400=302.5
a_4	160	300	200	(0.25).160+(0.15).300+(0.60).200=205
P_j الاحتمالات	0.25	0.15	0.60	----------

وبمقارنة القيم المتوقعة المحسوبة في العمود الأخير نلاحظ أن أكبر قيمة لها هي 307.5 المقابلة للبديل a_2, وبذلك يكون البديل a_2 هو القرار المناسب حسب هذه القاعدة.

ملاحظة:

نلاحظ أن هذه القواعد لا تعطينا النتائج نفسها. لذلك فإن حلولها أو قراراتها ليست حلولاً مثالية, بل هي حلول مناسبة أو شرطية, ويمكن استخدام أكثر من قاعدة في إيجاد القرار المناسب.

IV- أسلوب التحليل (البايزي) لاتخاذ القرارات الإدارية:

قبل أن نستعرض هذا الأسلوب نقدم له بشرح موجز عن التوزيعات الاحتمالية المختلفة لمتحولين عشوائيين (x,θ) وهي:

1- التوزع المشترك لهما معاً ونرمز له بالرمز $p(x,\theta)$.

2- التوزيع المنفرد لكل منهما ونرمز لهما بـ $p(\theta)$، وبـ $p(x)$.

3- التوزيعات الشرطية لـX ونرمز لها بالرمز $p(x/\theta)$.

4- التوزيعات الشرطية لـ θ ونرمز لها بالرمز $p(\theta/x)$.

5- وحتى نستطيع تعريف وحساب هذه التوزيعات الاحتمالية نفترض أن دراسة ميدانية أعطتنا أن المتحول X يأخذ البدائل والقيم التالية:

$X = \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad ..... \quad x_m$ حيث إن m عدد تلك البدائل

وأن المتحول θ يأخذ الحالات أو القيم التالية: $\theta = \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad .. \quad \theta_n$

حيث إن n عدد تلك الحالات وإن التكرارات المطلقة لحدوث أي بديل x_i مع الحالة θ_i معطاة في جدول كالآتي:

جدول رقم (14-12)

حالات θ / بدائل **X**	θ_1	θ_2	θ_3	**....**	θ_n	$\sum$
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	....	n_{1n}	N_1
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2n}	N
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3n}	N_3
....	....	....	....	....	....	....
x_m	n_{m2}	n_{m2}	n_{m3}	....	n_{mn}	N_m
$\sum$	M_1	M_2	M_3	....	M_n	N

وانطلاقاً من هذا الجدول يمكننا أن نعرف التوزيعات الاحتمالية المختلفة للمتحولين (X,θ) كما يلي:

1- التوزيع الاحتمالي المشترك $P(X,\theta)$:

ويحسب من جراء تقسيم كل من التكرارات المطلقة n_{ij} على المجموع الكلي للتكرارات N فنحصل على الجدول الآتي:

جدول رقم (14-13): التوزيع الاحتمالي

حالات θ / بدائل X	θ_1	θ_2	θ_3	….	θ_n
X_1	$\frac{n_{11}}{N}$	$\frac{n_{12}}{N}$	$\frac{n_{13}}{N}$	….	$\frac{n_{1n}}{N}$
X_2	$\frac{n_{21}}{N}$	$\frac{n_{22}}{N}$	$\frac{n_{23}}{N}$	….	$\frac{n_{2n}}{N}$
X_3	$\frac{a_{31}}{N}$	$\frac{a_{32}}{N}$	$\frac{a_{33}}{N}$	….	$\frac{n_{3n}}{N}$
….	….	….	….	....	….
X_m	$\frac{a_{m1}}{N}$	$\frac{a_{m2}}{N}$	$\frac{a_{m3}}{N}$	….	$\frac{a_{mn}}{N}$

(9-14)

ومنه يمكننا الحصول على احتمال وقوع أي حدثين (X_i, θ_j) معاً من العلاقة:

$$P(x_i, \theta_j) = \frac{n_{ij}}{N} \qquad (10-14)$$

2- التوزيع الاحتمالي المنفرد للمتحول X (الهامشي لـ X):

ويحسب من جراء تقسيم المجاميع الهامشية في العمود الأخير على المجموع الكلي لها N, فنحصل على التوزيع الآتي:

$$X : x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots,\ x_m$$
$$P(x) : \frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, \frac{N_3}{N}, \ldots\ldots\ldots, \frac{N_m}{N} \qquad (11-14)$$

ومنه يمكننا حساب احتمال أن يأخذ X أي بديل من البدائل المذكورة وذلك من العلاقة:

$$P(X = x_i) = \frac{N_i}{N} \qquad (12-14)$$

ومن هذه العلاقة يمكننا أن نستنتج أن:

$$P(X = x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} n_{ij}}{N} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n_{ij}}{N} = \sum_{j=1}^{n} P(x_i, \theta_j) \qquad (13-14)$$

3- التوزيع المنفرد للمتحول θ (الهامشي لـ θ):

ويحسب من جراء تقسيم المجاميع الهامشية في السطر الأخير على المجموع الكلي لها N فنحصل على التوزيع الآتي:

$$\theta \quad : \theta_1 \ , \theta_2 \ , \theta_3 \ , \ldots\ldots , \theta_n$$

$$P(\theta) : \frac{M_1}{N}, \frac{M_2}{N}, \frac{M_3}{N}, \ldots\ldots, \frac{M_n}{N} \qquad (14-14)$$

ويمكن حساب احتمال أن يأخذ θ أي حالة من حالاته المذكورة من العلاقة:

$$P(\theta = \theta_j) = \frac{M_j}{N} \qquad (15-14)$$

ومنها يمكن أن نستنتج أن:

$$P(\theta = \theta_j) = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_{ij}}{N} = \sum \frac{n_{ij}}{N} = \sum_{i=1}^{m} P(x_i, \theta_j) \qquad (16-14)$$

ويمكن وضع التوزيعات السابقة (المشترك والمنفرد لـ x والمنفرد لـ θ) في جدول واحد كما يلي:

جدول رقم (14-14)

حالات θ / بدائل X	θ_1	θ_2	θ_3	....	θ_n	التوزيع المنفرد لـ x
x_1	$\frac{n_{11}}{N}$	$\frac{n_{12}}{N}$	$\frac{n_{13}}{N}$	....	$\frac{n_{1n}}{N}$	$\frac{N_1}{N}$
x_2	$\frac{n_{21}}{N}$	$\frac{n_{22}}{N}$	$\frac{n_{23}}{N}$	....	$\frac{n_{2n}}{N}$	$\frac{N_2}{N}$
x_3	$\frac{a_{31}}{N}$	$\frac{a_{32}}{N}$	$\frac{a_{33}}{N}$	....	$\frac{n_{3n}}{N}$	$\frac{N_3}{N}$
....	....	....	....	....	....	....
x_m	$\frac{a_{m1}}{N}$	$\frac{a_{m2}}{N}$	$\frac{a_{m3}}{N}$	....	$\frac{a_{mn}}{N}$	$\frac{N_m}{N}$
لـ التوزيع المنفرد θ	$\frac{M_1}{N}$	$\frac{M_2}{N}$	$\frac{M_3}{N}$	....	$\frac{M_n}{N}$	1

4- التوزيعات الاحتمالية الشرطية لـ X:

وهنا نلاحظ قبل كل شيء أنه سيكون لـ X توزيعاً شرطياً مقابل كل قيمة لـ θ مثل θ_j, لذلك فإن عدد التوزيعات الشرطية لـ X يساوي عدد الحالات التي تأخذها θ، أي يساوي n توزيعاً شرطياً, وتحسب هذه التوزيعات الشرطية من جدول التكرارات المطلقة عموداً عموداً, وذلك بتقسيم عناصر كل عمود على مجموعها الهامشي m_i فنجد أن:

X= :	x_1	x_2	x_3	x_4	....	x_m
$P(X/\theta_1)$:	$\frac{n_{11}}{M_1}$	$\frac{n_{21}}{M_1}$	$\frac{n_{31}}{M_1}$	$\frac{n_{41}}{M_1}$	....	$\frac{n_{m1}}{M_1}$
$P(X/\theta_2)$:	$\frac{n_{12}}{M_2}$	$\frac{n_{22}}{M_2}$	$\frac{n_{32}}{M_2}$	$\frac{n_{42}}{M_2}$	....	$\frac{n_{m2}}{M_2}$
$P(X/\theta_3)$:	$\frac{n_{13}}{M_3}$	$\frac{n_{23}}{M_3}$	$\frac{n_{33}}{M_3}$	$\frac{n_{43}}{M_3}$	....	$\frac{n_{m3}}{M_3}$
....	....	....	....	....	....	....
$P(X/\theta_n)$:	$\frac{n_{1n}}{M_n}$	$\frac{n_{2n}}{M_n}$	$\frac{n_{3n}}{M_n}$	$\frac{n_{4n}}{M_n}$	....	$\frac{n_{mn}}{M_n}$

(17-14)

ويمكننا حساب أي احتمال شرطي لـ X من العلاقة:

$$P(X = x_i / \theta_j) = \frac{n_{ij}}{M_j} \qquad (18-14)$$

ومع إن هذه التوزيعات الشرطية لـ X هي توزيعات منفصلة عن بعضها بعضاً، إلا أنه يمكننا وضعها في جدول موحد من أجل تأمين سهولة قراءتها والتعامل معها كما يلي:

جدول رقم (14-15) التوزيعات الشرطية لـ x حسب حالات θ

حالات θ / بدائل X	$P(x/\theta_1)$ ↓	$P(x/\theta_2)$ ↓	$P(x/\theta_3)$ ↓	....	$P(x/\theta_n)$ ↓
x_1	$\frac{n_{11}}{M_1}$	$\frac{n_{12}}{M_2}$	$\frac{n_{13}}{M_3}$	....	$\frac{n_{1n}}{M_n}$
x_2	$\frac{n_{21}}{M_1}$	$\frac{n_{22}}{M_2}$	$\frac{n_{23}}{M_3}$	....	$\frac{n_{2n}}{M_n}$
x_3	$\frac{n_{31}}{M_1}$	$\frac{n_{32}}{M_2}$	$\frac{n_{33}}{M_3}$	....	$\frac{n_{3n}}{M_n}$
....	....	....	....	....	....
x_m	$\frac{n_{m1}}{M_1}$	$\frac{n_{m2}}{M_2}$	$\frac{n_{m3}}{M_3}$	....	$\frac{n_{mn}}{M_n}$
المجموع	1	1	1	....	1

(19-14)

ولقد تم وضع تلك التوزيعات في أعمدة حتى تتناسب مع جدول التكرارات, ويلاحظ أن مجموع الاحتمالات في كل عمود يساوي الواحد.

5- التوزيعات الاحتمالية الشرطية لـ θ:

وهنا نلاحظ أنه سيكون لدينا عدد من التوزيعات الشرطية لـ θ مساوياً لعدد بدائل X أي سيكون لدينا m توزيعاً شرطياً لـ θ, ويتم حساب هذه التوزيعات الشرطية من جدول التكرارات المطلقة سطراً فسطراً وذلك بتقسيم عناصر كل سطر على مجموعها الهامشي N_i فنجد أن:

θ:	θ_1	θ_2	θ_3	....	θ_n
$P(\theta/x_1)$:	$\frac{n_{11}}{N_1}$	$\frac{n_{12}}{N_1}$	$\frac{n_{13}}{N_1}$	....	$\frac{n_{1n}}{N_1}$
$P(\theta/x_2)$:	$\frac{n_{21}}{N_2}$	$\frac{n_{22}}{N_2}$	$\frac{n_{23}}{N_2}$	....	$\frac{n_{2n}}{N_2}$
$P(\theta/x_3)$:	$\frac{n_{31}}{N_3}$	$\frac{n_{32}}{N_3}$	$\frac{n_{33}}{N_3}$	....	$\frac{n_{3n}}{N_n}$
.....	.....	.....	.....	....	.....
$P(\theta/x_m)$:	$\frac{n_{m1}}{N_m}$	$\frac{n_{m2}}{N_m}$	$\frac{n_{m3}}{N_m}$	....	$\frac{n_{mn}}{N_m}$

(20-14)

ويمكن حساب أي من هذه الاحتمالات الشرطية من العلاقة:

$$P(\theta = \theta_j / x_i) = \frac{n_{ij}}{N_i} \qquad (21-14)$$

ومع إن هذه التوزيعات الشرطية لـ θ هي توزيعات منفصلة عن بعضها بعضاً, إلا أنه يمكننا وضعها في جدول موحد من أجل تامين سهولة قراءتها والتعامل معها كما يلي:

جدول رقم (14-16): التوزيعات الشرطية لـ θ حسب بدائل X

حالات θ / توزيعات θ حسب بدائل X	θ_1	θ_2	θ_3	....	θ_n	المجموع
$P(\theta/x_1) \rightarrow$	$\frac{n_{11}}{N_1}$	$\frac{n_{12}}{N_1}$	$\frac{n_{13}}{N_1}$	....	$\frac{n_{1n}}{N_1}$	1
$P(\theta/x_2) \rightarrow$	$\frac{n_{21}}{N_2}$	$\frac{n_{22}}{N_2}$	$\frac{n_{23}}{N_2}$	....	$\frac{n_{2n}}{N_2}$	1
$P(\theta/x_3) \rightarrow$	$\frac{n_{31}}{N_3}$	$\frac{n_{32}}{N_3}$	$\frac{n_{33}}{N_3}$	....	$\frac{n_{3n}}{N_n}$	1
....	....	....	....	....	....	....
$P(\theta/x_m) \rightarrow$	$\frac{n_{m1}}{N_m}$	$\frac{n_{m2}}{N_m}$	$\frac{n_{mn}}{N_m}$	....	$\frac{n_{mn}}{N_m}$	1

ولقد تم وضع هذه التوزيعات في اسطر حتى تتناسب مع جدول التكرارات، ويلاحظ أن مجموع الاحتمالات في كل سطر يساوي الواحد, وتسمى هذه التوزيعات بالتوزيعات اللاحقة لـ θ.

6- العلاقة بين هذه التوزيعات:

توجد علاقة بين التوزيع المشترك والتوزيعات المنفردة والشرطية أهمها:

$$P(X,\theta)=P(X).P(\theta/X)= P(\theta).P(X/\theta) \qquad (22-14)$$

وتأخذ هذه العلاقة بدلالة الحالات والبدائل الشكل الآتي:

$$P(x_i,\theta_j)=P(x_i).P(\theta_j/x_i) \qquad (23-14)$$

ومنها نجد أنه يمكن البرهان على ذلك من خلال الاحتمالات السابقة عند كل بديل x_i وحالة θ_j حيث نجد أن:

$$P(X=x_i,\theta=\theta_j)=P(X=x_i)\cdot P(\theta_j/x_i)$$

وذلك لأن الطرف الأيسر يساوي

$$\frac{N}{N}\cdot\frac{n_{ij}}{N_i}=\frac{n_{ij}}{N}=P(x_i,\theta_i)$$

وكذلك نجد أن:

$$P(X=x_i,\theta=\theta_j)p(\theta_j).p(x_i/\theta_j)$$

وذلك لأن الطرف الأيسر يساوي:

$$\frac{M_j}{N}\cdot\frac{n_{ij}}{M_j}=\frac{n_{ij}}{N}$$

وكذلك يمكننا البرهان على أن:

$$P(x_i)=\sum_{j=1}^{n}P(x_i,\theta_j)=\sum_{j=1}^{n}P(\theta_j)\cdot P(x_i/\theta_j) \qquad (24-14)$$

$$P(\theta_j)=\sum_{\ell=1}^{m}P(x_i,\theta_j)=\sum_{i=1}^{m}P(x_i)\cdot P(\theta_j/x_i) \qquad (25-14)$$

وذلك لأن:

$$\sum_{j=1}^{n}P(x_i,\theta_j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{N_{ij}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}N_{ij}=\frac{1}{N}\cdot N_i=P(x_i)$$

وكذلك لأن:

$$\sum_{i=1}^{m}P(x_i,\theta_j)=\sum_{i=1}^{m}\frac{N_{ij}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}N_{ij}=\frac{1}{N}M_j=P(\theta_j)$$

كما يمكننا إيجاد التوزيعات الشرطية $P(X/\theta)$ و $P(\theta/X)$ من العلاقتين التاليتين:

$$P(x_i/\theta_j)=\frac{P(x_i,\theta_j)}{P(\theta_j)}=\frac{P(x_i)\cdot P(\theta_j/x_i)}{\sum_{i=1}^{m}P(x_i)P(\theta_j/x_i)} \qquad (26-14)$$

$$P(\theta_j/x_i)=\frac{P(x_i,\theta_j)}{P(x_i)}=\frac{P(\theta_j)\cdot P(x_i/\theta_j)}{\sum_{j=1}^{n}P(\theta_j)\cdot P(x_i/\theta_j)} \qquad (27-14)$$

وهذه العلاقة تعرف باسم قانون (بايز) والتوزيع $P(\theta/x_i)^{j=1}$ يسمى بالتوزيع اللاحق لـ θ.

مثال (10):

لنفترض أنه لدينا جدول التكرارات المطلقة لآراء (800) مواطناً حول تفضيلهم شراء (التفاح أو الموز أو البرتقال) خلال الفصول الأربعة للسنة الآتي:

حالات θ / بدائل x	الشتاء θ_1	الربيع θ_2	الصيف θ_3	الخريف θ_4	المجموع
تفاح x_1	70	60	80	100	310
موز x_2	40	50	70	60	220
برتقال x_3	90	80	60	40	270
المجموع	200	190	210	200	800

ومن هذا الجدول يمكننا حساب التوزيعات الاحتمالية المختلفة وهي:

إن التوزيع الاحتمالي المشترك لـ $P(x,\theta)$ يساوي عناصر الجدول الآتي:

$P(x,\theta)=$

x / θ	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
x_1	$\frac{70}{800}$	$\frac{60}{800}$	$\frac{80}{800}$	$\frac{100}{800}$
x_2	$\frac{40}{800}$	$\frac{50}{800}$	$\frac{70}{800}$	$\frac{60}{800}$
x_3	$\frac{90}{800}$	$\frac{80}{800}$	$\frac{60}{800}$	$\frac{40}{800}$

P(x,θ)=

x / θ	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
x_1	0.0875	0.075	0.10	0.125
x_2	0.05	0.0325	0.0875	0.075
x_3	0.1125	0.10	0.075	0.05

أما التوزيع المنفرد لـ X فيساوي:

X:	x_1	x_2	x_3
P(x):	$\frac{310}{800}$	$\frac{220}{800}$	$\frac{270}{800}$

أما التوزيع المنفرد لـ θ فيساوي:

θ:	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
P(θ):	$\frac{200}{800}$	$\frac{190}{800}$	$\frac{210}{800}$	$\frac{200}{800}$

أما التوزيعات الشرطية لـ x فنعرضها في أعمدة جدول موحد كالتالي:

التوزيعات الشرطية لـ x / بدائل x	$P(x/\theta_1)$ ↓	$P(x/\theta_2)$ ↓	$P(x/\theta_3)$ ↓	$P(x/\theta_4)$ ↓
x_1	$\frac{70}{200}$	$\frac{60}{190}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{100}{200}$
x_2	$\frac{40}{200}$	$\frac{50}{190}$	$\frac{70}{210}$	$\frac{60}{200}$
x_3	$\frac{90}{200}$	$\frac{80}{190}$	$\frac{60}{210}$	$\frac{40}{200}$
$\sum$	1	1	1	1

وكذلك نجد أن التوزيعات الشرطية لـ θ كما في أسطر الجدول الموحد التالي:

حالات θ / التوزيعات الشرطية لـ θ	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\sum$
$P(\theta/x_1)$	$\frac{70}{310}$	$\frac{60}{310}$	$\frac{80}{310}$	$\frac{100}{310}$	1
$P(\theta/x_2)$	$\frac{40}{220}$	$\frac{50}{220}$	$\frac{70}{220}$	$\frac{60}{220}$	1
$P(\theta/x_3)$	$\frac{90}{270}$	$\frac{80}{270}$	$\frac{60}{270}$	$\frac{40}{270}$	1

ولتوظيف هذه المقدمة عن التوزيعات الاحتمالية في عمليات اتخاذ القرارات فإننا نلاحظ أنه يمكننا حساب الاحتمالات المنفردة لـ X من خلال الاحتمالات المشتركة كما يلي:

$$P(x_1)=\sum_{j=1}^{4}P(x_1,\theta_j)=\frac{70}{800}+\frac{60}{800}+\frac{80}{800}+\frac{100}{800}=\frac{310}{800}$$

$$P(x_2)=\sum_{j=1}^{4}P(x_2,\theta_j)=\frac{40}{800}+\frac{50}{800}+\frac{70}{800}+\frac{60}{800}=\frac{220}{800}$$

$$P(x_3)=\sum_{j=1}^{4}P(x_3,\theta_j)=\frac{90}{800}+\frac{80}{800}+\frac{60}{800}+\frac{40}{800}=\frac{270}{800}$$

وكذلك يمكننا حساب التوزيعات الشرطية لـ θ (التوزيعات اللاحقة لـ θ) عند أي بديل من بدائل X فنجد مثلاً أن:

$$P(\theta_1/x_1)=\frac{P(x_1,\theta_1)}{P(x_1)}=\frac{70/800}{310/800}=\frac{70}{310}$$

$$P(\theta_2/x_1)=\frac{P(x_1,\theta_2)}{P(x_1)}=\frac{60/800}{310/800}=\frac{60}{310}$$

$$P(\theta_3/x_1)=\frac{P(x_1,\theta_3)}{P(x_1)}=\frac{80/800}{310/800}=\frac{80}{310}$$

$$P(\theta_4/x_1)=\frac{P(x_1,\theta_4)}{P(x_1)}=\frac{100/800}{310/800}=\frac{100}{310}$$

وهي نفس الاحتمالات التي حسبناها في السطر الأول من الجدول السابق.

قاعدة التحليل (البايزي):

لقد لاحظنا مما سبق أن احتمالات القيم المنطقية والشرطية لـθ_j حسبت من العلاقة:

$$P(\theta_j / x_i) = \frac{P(x_i \theta_j)}{P(x_i)} = \qquad (28-14)$$

وبتعويض $P(x_i \ , \ \theta_j)$ و $P(x_i)$ من العلاقتين (14−23) و (14−24) تأخذ العلاقة السابقة الشكل الآتي:

$$P(\theta_j / x_i) = \frac{P(\theta_j) \cdot P(x / \theta_j)}{\sum P(\theta_j) \cdot P(x / \theta_j)} \qquad (29-14)$$

ويسمى التوزيع الشرطي $P(\theta_j/x_i)$ بالتوزيع اللاحق لحالات الطبيعة θ، لأنه يعبر عن التوزيع الاحتمالي للحالات θ_j بعد أن يأخذ X القيمة x_i. وبناء على ذلك يمكننا توظيف ذلك عند حساب القيمة المتوقعة لكل من البدائل الممكنة x_i باستخدام ذلك التوزيع الاحتمالي اللاحق من العلاقة:

$$E(x_i) = \sum_{j=1}^{n} P(\theta_j / x_i) \cdot x_{ij} \qquad (30\text{-}14)$$

ثم نختار أصغر تلك القيم المتوقعة ونعتبر البديل المقابل لها هو القرار المناسب.

مثال (11):

لنفترض أن بائعاً للمثلجات أراد أن يحدد حجم مخزونة منها للأسبوع القادم وحسب ثلاثة مستويات هي: مخزون كبير، ومخزون متوسط، ومخزون منخفض, وذلك حسب حجم الطلب خلال الأسبوع القادم, وإذا كان حجم الطلب حسبما تبينه الدراسات السابقة خلال الأسبوع المفروض يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسطات 5 ,10 ,15 على الترتيب وبتباين موحد قدره 10، وذلك حسب الظروف الجوية خلال ذلك الأسبوع (سيئة, معتدلة, حارة)، كما نفترض أن X هو حجم الطلب العشوائي على المثلجات خلال أي أسبوع، وأن θ هو متوسط حجم الطلب (أي متوسط المتحول العشوائي X) وأن التوزيع الاحتمالي الأولي (السابق) للمتوسطات θ معطى على الشكل الآتي:

عندما $\theta = \theta_1$ فإن $P(\theta_1)=P(5)=0.2$

وعندما $\theta = \theta_2$ فإن $P(\theta_2)=P(10)=0.5$

وعندما $\theta = \theta_3$ فإن $P(\theta_3)=P(15)=0.3$

وإذا كانت مصفوفة الأرباح كما يلي:

حالات الطلب θ / البدائل الممكنة	$\theta_1=5$	$\theta_2=10$	$\theta_3=15$
x_1 – مخزون كبير	8	12	20
x_2– مخزون متوسط	10	14	14
x_3 – مخزون منخفض	12	12	12

والمطلوب مساعدة ذلك البائع على اتخاذ القرار المناسب, إذا علمت من النشرة الجوية أن الظروف الجوية ستكون معتدلة (أي أن حجم الطلب على المثلجات خلال الأسبوع القادم يقدر بـ X=10 وحدات).

الحل:

سنقوم بالإجابة على هذه المسألة بطريقتين من أجل الاستفادة والمقارنة.

1- حسب قاعدة أكبر القيم المتوقعة:

نأخذ جدول الأرباح ونضيف إليه التوزيع الاحتمالي الأولي ثم نقوم بحساب القيم المتوقعة لمختلف البدائل فنحصل على الجدول الآتي:

جدول رقم (14-17): جدول الأرباح

حالات الطلب / البدائل الممكنة	$\theta_1 = 5$	$\theta_2 = 10$	$\theta_3=15$	$E(x_i)$
x_1 مخزون كبير	8	12	20	(0.2)*8+(0.5)*12+(0.3)*20=13.6
x_2 محزون متوسط	10	14	14	(0.2)*10+(0.5)*14+(0.3)*14=13.2
x_3 مخزون متوسط	12	12	12	(0.2)*12+(0.5)*12+(0.3)*12=12
$P(\theta_i)$ الاحتمالات السابقة	0.2	0.5	0.3	Max [Ecai]=13.6

وبذلك نجد أن أكبر القيم المتوقعة هو 13.6، أي أن البديل a_1 الذي يقتضى أن يكون المخزون كبيراً هو القرار المناسب.

2- حسب التحليل (البايزي):

قبل كل شيء نلاحظ أن التوزيع الأولي لـ θ هو:

θ	θ_1	θ_2	θ_3
$P(\theta_j)=$	0.2	0.5	0.3

ولإيجاد القيم المتوقعة لمختلف البدائل حسب التوزيع اللاحق لـθ علينا أن نحسب قيم التوزيع $P(\theta_j/x)$ عندما X=10، لذلك نبدأ بتحديد التوزيع الشرطي لـX، وهو عبارة عن التوزيع الطبيعي الذي متوسطه θ_j وتباينه يساوي 10 أي أن:

$$P(x/\theta_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{10}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\theta_j}{\sqrt{10}}\right]^2}$$

وبناء على ذلك نجد أن التوزيع اللاحق لـ θ يساوي:

$$P(\theta_j/x)=\frac{P(\theta_j)\cdot P(x/\theta_j)}{\sum_{j=1}^{3}P(\theta_j)P(x/\theta_j)}$$

وبما أنه لدينا X=10 فإن قيم التوزيع الاحتمالي اللاحق تحسب حسب قيمة θ من العلاقات الآتية:

$$P(\theta_j/10)=\frac{P(\theta_j)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{10}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-\theta_j}{\sqrt{10}}\right]^2}}{\sum_{j=1}^{n}P(\theta_j)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{10}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-\theta_j}{\sqrt{10}}\right]^2}}$$

$$=\frac{P(\theta_j)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-\theta_j}{\sqrt{10}}\right]^2}}{\sum_{j=1}^{n}P(\theta_j)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-\theta_j}{\sqrt{10}}\right]^2}}$$

فعندما تكون $\theta = \theta_1 = 5$ فإن الاحتمال اللاحق لـ θ_1 يساوي:

$$P(\theta_1/10) = \frac{(0.2)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-5}{\sqrt{10}}\right]^2}}{(0.2)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-5}{\sqrt{10}}\right]^2} + (0.5)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-10}{\sqrt{10}}\right]^2} + (0.3)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-15}{\sqrt{10}}\right]^2}} = 0.089$$

وعندما تكون $\theta = \theta_2 = 10$ فإن:

$$P(\theta_2/10) = \frac{(0.5)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-10}{\sqrt{10}}\right]^2}}{(0.2)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-5}{\sqrt{10}}\right]^2} + (0.5)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-10}{\sqrt{10}}\right]^2} + (0.3)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-15}{\sqrt{10}}\right]^2}} = 0.777$$

وعندما تكون $\theta = \theta_3 = 15$ فإن:

$$P(\theta_3/10) = \frac{(0.3)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-15}{\sqrt{10}}\right]^2}}{(0.2)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-5}{\sqrt{10}}\right]^2} + (0.5)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-10}{\sqrt{10}}\right]^2} + (0.3)e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{10-15}{\sqrt{10}}\right]^2}} = 0.134$$

وبذلك نحصل على التوزيع اللاحق لحالات الطبيعة θ عندما $X=10$ كما يلي:

θ :	θ_1	θ_2	θ_3
$P(\theta/10)$:	0.089	0.777	0.134

وبوضع هذا التوزيع اللاحق في جدول الأرباح وحساب القيم المتوقعة للبدائل الممكنة ثم اختبار أكبر هذه القيم المطلقة, فنحصل على البديل ذي القرار المناسب, وذلك كما موضح في الجدول الآتي:

جدول رقم (14-18): جدول الأرباح والقيم المتوقعة

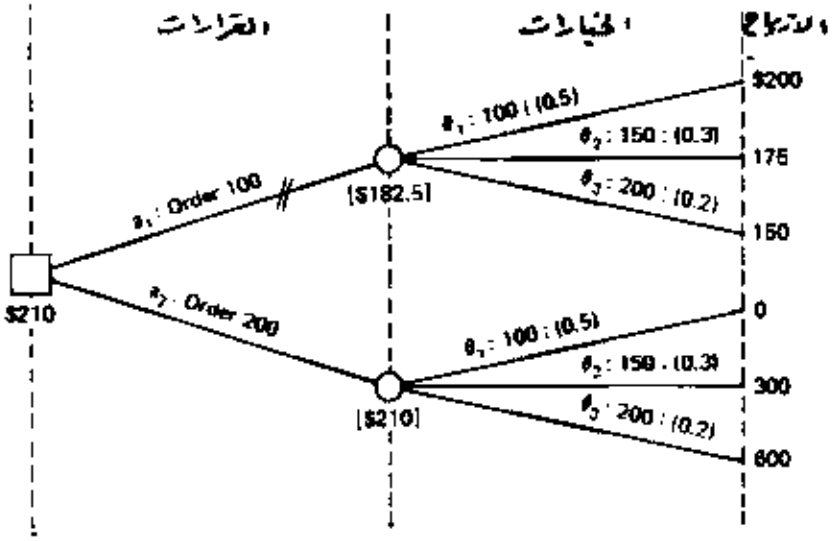
حالات الطلب / البدائل الممكنة	$\theta_1=5$	$\theta_2=10$	$\theta_3=15$	$E(a_i/10)$
x_1- مخزون كبير	8	12	20	(0.089)8+(0.777)12+(0.134)20=12.716
x_2- مخزون متوسط	10	14	14	(0.089)10+(0.777)14+(0.134)14=13.644
x_3- مخزون منخفض	12	12	12	(0.089)12+(0.777)12+(0.134)12=12
$p(\theta_j/10)$ الاحتمالات اللاحقة	0.089	0.777	0.134	Max[E(a_i/10)]=13.644

ومن خلال هذا الجدول نلاحظ أن أكبر القيم المتوقعة هي القيمة 13.644 التي تقابل البديل a_2 (مخزون متوسط). لذلك فإن قراراً بأن يكون المخزون من الحجم المتوسط

هـو القـرار المناسـب, وإن متوسـط الـربح الـذي سـيحققه البـائع عنـد ذلـك يسـاوي 13.644وحدة، وهنا نشير إلى أن أسلوب التحليل (البايزي) قد حول القرار المناسب من a_1 إلـى a_2 وذلـك لأنـه اسـتفاد مـن البيانـات الإضـافية التـي وردت عـن الأحـوال الجويـة وبالتالي عن حجم الطلب خلال الأسبوع القادم (X=10).

V- أسلوب شجرة القرارات:

يستخدم هذا الأسلوب عندما يمر القرار الإداري بعدة مراحل متتالية, ويعتمد على تشكيل شجرة للقرارات المتتالية والمتفرعة منذ بداية العمل حتى نهايته وتنطلق القرارات المتتالية من الأصل (الجذع) مشكّلة الفروع والأغصان والأفنان مرفقة بالاحتمالات المقابلة لكل حدث أو حالة منها. وكمثال على هذه الشجرة نأخذ الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (14-1)

ومـن الواضـح أن شـجرة القـرارات يمكـن أن تكـون ذات مرحلـة واحـدة أو ذات مرحلتين أو ذات عدة مراحل.

ولقد اصطلح في معظم المراجع على أن يرمز لبداية الشجرة بمربع صغير وللقرارات المتفرعة عنه بأسهم يكتب عليها اسم أو رمز القرار (وبجانبه الاحتمال المرافق)

ويرمز للمفاصل التي تتفرع عنها حالات الطبيعة بدوائر صغيرة O, وللحالات نفسها بأسهم يكتب عليها أيضاً اسم أو رمز البديل مع الاحتمال المرافق له وذلك كما موضح على الشكل السابق.

مثال (12) تطبيق لمرحلة واحدة:

يرغب أحد المستثمرين استثمار مبلغ 5 ملايين ل.س في مجالات الاستثمار المتاحة وهي:

1- شراء شهادات استثمار عادية.

2- شراء أسهم لإحدى الشركات الخدمية.

3- إقامة مشروع صناعي.

والمطلوب رسم شجرة القرارات لهذا الاستثمار وذلك حسب الحالات الممكنة التي يمكن أن يأخذها الوضع الاقتصادي وهي:

1- حدوث تراجع في الوضع الاقتصادي, ويقدر احتماله بـ 10%.

2- ثبات الوضع الاقتصادي, ويقدر احتماله بـ 60%.

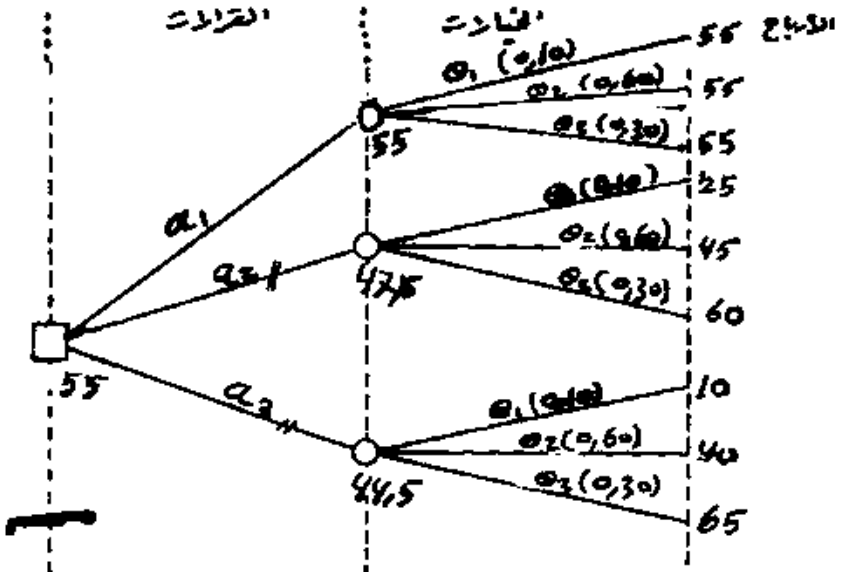
3- تحسن ملموس في الوضع الاقتصادي, ويقدر احتماله بـ 30%.

علماً بأن العوائد السنوية لهذه الاستثمارات حسب الأوضاع الاقتصادية معطية في الجدول الآتي:

جدول رقم (14-19): جدول العوائد (ألف ليرة سورية سنوياً)

الأوضاع الاقتصادية / البدائل	θ_1 تراجع الوضع	θ_2 ثبات الوضع	θ_3 تحسن الوضع
a_1 شراء شهادات	55	55	55
a_2 شراء أسهم	25	45	60
a_3 إقامة مشروع	10	40	65
الاحتمال	0.10	0.60	0.30

وبناء على ذلك يمكننا رسم شجرة القرارات مقرونة بالاحتمالات والعوائد على الشكل الآتي:



الشكل رقم (14–2): شجرة قرارات الاستثمار

ومن أجل البحث عن القرار المناسب وتحديد نوع الاستثمارات التي يجب أن يمارسها ذلك المستثمر نقوم بحساب القيمة المتوقعة عند كل بديل (أو دائرة) فنجد أن:

$$E(a_1) = \sum P_j \cdot a_{1j} = (0.10)\cdot 55 + (0.60)\cdot 55 + (0.30)\cdot 55 = 55\text{L.s}$$

$$E(a_2) = \sum P_j \cdot a_{2j} = (0.10)\cdot 25 + (0.60)\cdot 45 + (0.30)\cdot 60 = 47.5\text{L.s}$$

$$E(a_3) = \sum P_j \cdot a_{3j} = (0.10)\cdot 10 + (0.60)\cdot 40 + (0.30)\cdot 65 = 44.5\text{L.s}$$

وهكذا يتضح لنا أن أكبر قيمة لهذه القيم المتوقعة هي القيمة 55 والتي تقابل البديل الأول وذلك مهما كانت حالة الأوضاع الاقتصادية, لذلك فإننا نعتبر اختيار البديل الأول وهو شراء شهادات استثمار هو القرار المناسب.

ملاحظة:

لقد أشرنا إلى أن عملية اتخاذ القرارات يمكن أن تمر لمراحل متتالية عدة, لذلك فإننا سنضع إشارة مربع ڤ في بداية كل مرحلة تحتاج إلى اختيار قرار من البدائل المتوفرة (وذلك ليس فقط في بداية الشجرة بل في بداية أي مرحلة داخلية ضمن الشجرة)، أما العمليات الحسابية فتحتاج إلى توضيحات وتعليمات أخرى, ولكنها تبقى محافظة على

قاعدة (أكبر القيم المتوقعة) عند بداية كل مرحلة أو عند كل مربع. ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (13) تطبيق لقرارات على مرحلتين:

طلب أحد التجار من وحدة الدراسات الاقتصادية مساعدته في البحث عن القرار المناسب للتعامل مع المخزون المتوفر من الخيوط النسيجية في شركة الغزل والنسيج, على أن يتم تصريف ما سيشتريه منه خلال عامين متتالين. وبعد تحليل الموقف والظروف المستقبلية وتقدير الأرباح والخسائر المتوقعة توصلت وحدة الدراسات إلى ما يلي:

1- يوجد لدى التاجر ثلاثة بدائل هي:

1- أن يشتري كامل المخزون في العام الأول- البديل α_1.

2- أن يشتري 50% من المخزون في العام الأول- البديل α_2.

3- أن لا يشتري شيئاً من المخزون- البديل α_3.

2- إن الوضع الاقتصادي خلال كل سنة يمكن أن يأخذ إحدى الحالتين:

أ- حالة جيدة – θ_1.

ب- حالة سيئة – θ_2.

3- إذا اشترى التاجر 50% من المخزون فسيكون أمامه بعد انقضاء العام الأول بديلان آخران هما:

أ- أن يشتري باقي المخزون في العام الثاني- البديل α_{21}.

ب- أن لا يشتري شيئاً من باقي المخزون في العام الثاني- البديل α_{22}.

4- إن قيم الأرباح والخسائر والاحتمالات المقابلة لها حسب هذه البيانات قدرت كما في الجدول الآتي:

جدول رقم (14-20): جدول الحالات والبدائل والأرباح

الحالات / البدائل	حالات الوضع الاقتصادي		تقدير الأرباح والخسائر
	خلال السنة الأولى	خلال السنة الثانية	(ألف ليرة سورية)
a_1 شراء كامل المخزون	حالة جيدة(0.6)	حالة جيدة (0.7)	800
		حالة سيئة (0.3)	-500
	حالة سيئة(0.4)	حالة جيدة (0.4)	600
		حالة سيئة (0.6)	-700
a_2 شراء 50% من المخزون في السنة الأولى فقط	حالة جيدة (0.6)	حالة جيدة (0.7)	300
		حالة سيئة (0.3)	0
	حالة سيئة (0.4)	حالة جيدة (0.7)	100
		حالة سيئة (0.3)	-100
a_3 شراء 50% من المخزون في السنة الأولى. ثم شراء 50% من المخزون في السنة الثانية	حالة جيدة (0.6)	حالة جيدة (0.4)	600
		حالة سيئة (0.6)	-600
	حالة سيئة (0.4)	حالة جيدة (0.4)	500
		حالة سيئة (0.6)	-400
a_4 عدم شراء أي شيء من المخزون	.....	.....	50

والمطلوب:

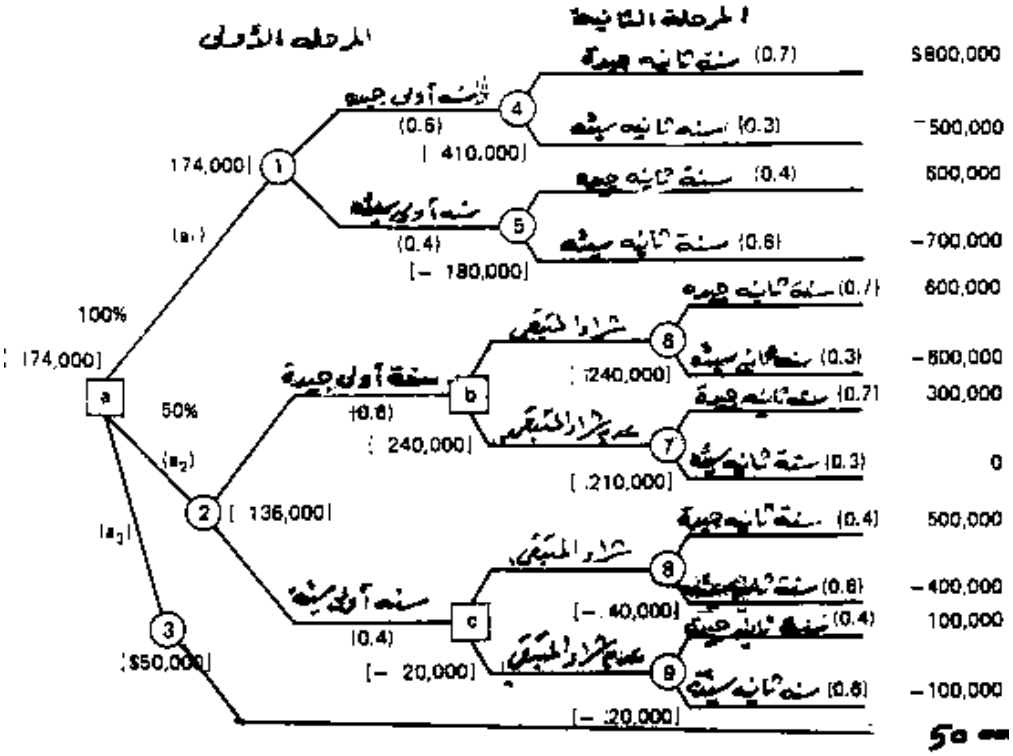
1- رسم شجرة القرارات التي تمثل هذه الحالة.

2- حساب القيم المتوقعة عند كل عقدة لاتخاذ القرار المناسب.

3- تحديد القرار المناسب الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن.

الحل:

بناءً على البيانات الواردة في المثال, نجد أن شجرة القرارات تأخذ الشكل الآتي:



الشكل رقم (14-3)

لقد تم رسم هذه الشجرة بحيث تعكس عملية اتخاذ القرارات حسب مرحلتين وخلال السنتين وفق الآتي:

1- إذا تم شراء كامل المخزون فإنه سيتعامل معه خلال السنتين ولا يحتاج إلى اتخاذ قرار جديد. لذلك كان الفرع x_2 لا يتضمن مربعاً جديداً.

2- إذا تم شراء 50% خلال السنة الأولى فإن التاجر سيكون في بداية السنة الثانية أمام خيارين (شراء 50% الباقية- عدم شراء شيء) لذلك وضعنا مربعين على الفرع x_2 في بداية السنة الثانية للدلالة على أنه هناك ضرورة لاتخاذ قرار في بداية تلك السنة وفي كلتا حالتي السنة الأولى الماضية.

طريقة الحساب التراجعية:

لحساب القيم المتوقعة عند كل عقدة نبدأ من الأعلى وبشكل تراجعي فنجد أن:

1- القيمة المتوقعة عند العقدة (4) تساوي:

$$E(4) = \sum P_i \cdot x_i = (0.7)(800) + (0.3)(-500) = 410$$ ألف ل.س

2- القيمة المتوقعة عند العقدة (5) تساوي:

$$E(5) = \sum P_i \cdot x_i = (0.4)(600) + (0.6)(-700) = -180$$ ألف ل.س

3- القيمة المتوقعة عند العقدة (1) تساوي القيمة المتوقعة للعقدتين (4) و (5) وتساوي:

$$E(1) = \sum q_j \cdot y_j = (0.6)(410) + (0.4)(-180) = 174$$ ألف ل.س

حيث أن $q_{i/1}$ هو الاحتمال الشرطي لحالتي الطبيعة عند البديل الأول وكان يمكن حساب القيمة المتوقعة عند العقدة (1) من خلال حساب مجموع جداءات الأرباح بالاحتمالات الشرطية والأولية الواقعة على مسارات الفروع الممتدة من النهاية إلى النقطة (1) تراجعياً, ولذلك نعد الجدول التالي:

(1) الاحتمالات الأولية خلال السنة الأولى P_i	(2) الاحتمالات الشرطية خلال السنة الثانية $q_{j/i}$	(3)=1*2 جداء الاحتمالات	(4) الأرباح والخسائر	(5) = 3*4 القيم المتوقعة
0.6	0.7	0.42	800	336
0.6	0.3	0.18	−500	−90
0.4	0.4	0.16	600	96
0.4	0.6	0.24	−700	−168
∑		1	.....	174ألف ل.س

كما يمكن حساب هذه القيمة المتوقعة عند العقدة (1) بطريقة أخرى هي:

$$E(1) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} P_i \cdot q_{j/i} \cdot x_{ij} \qquad (31-14)$$

حيث P_i احتمالات المرحلة الأولى و $q_{j/i}$ هي الاحتمالات الشرطية في المرحلة الثانية وx_{ij} هي الأرباح والخسائر المقدرة. وبتطبيق تلك العلاقة نجد أن:

E(1)=[(0.6)[0.7(800)+(0.3)(-500)]+(0.4)[(0.4)(600)+(0.6)(-700)]

E(1)= 174 ألف ل.س

ولحساب القيمة المتوقعة عند العقدة (6) نلاحظ أن:

E(6)=(0.7)(600)+(0.3).(-600)=240 ألف ل.س

ولحساب القيمة المتوقعة عند العقدة (7) نلاحظ أن:

E(7)=(0.7)(300)+(0.3).0=210 ألف ل.س

ومن العقدتين (6) و (7) نحسب القيمة المتوقعة عن الموقف B وذلك بأخذ أكبر هاتين القيمتين فنجد أن:

E(B)= Max[240,210]= 240 ألف ل.س

ولحساب القيمة المتوقعة عند العقدة (8) نلاحظ أن:

E(8)= (0.4)(500)+(0.6)(-400)= -40 ألف ل.س

ولحساب القيمة المتوقعة عند العقدة (9) نلاحظ أن:

E(9)= (0.4)100+(0.6)(-100)= -20 ألف ل.س

ومن العقدتين (8) و(9) نحسب القيمة المتوقعة عند الموقف C وذلك بأخذ أكبر هاتين القيمتين فنجد أن:

E(C)= Max[-40,-20]= -20 ألف ل.س

وأخيراً نجد أنه لحساب القيمة المتوقعة عند العقدة (2) نلاحظ أن:

E(2)= (0.6)(240)+(0.4)(-20)= 136 ألف ل.س

أما القيمة المتوقعة عند العقدة (3) فهي نفس قيمة الربح الواردة في الجدول وتساوي:

E(3)= 50 ألف ل.س

وختاماً نجد أن القيمة المتوقعة عند الموقف a تساوي أكبر القيم المتوقعة المتفرعة عنه في العقد (1) و(2) و(3) وتساوي:

E(a)= Max[174,136,50]= 174

وبذلك يكون القرار المناسب هو تبني البديل a_1 الذي يعني شراء كامل المخزون في السنة الأولى.

تطبيق الأسلوب (البايزي) على شجرة القرارات:

لقد لاحظنا من خلال الفقرة السابقة أن أسلوب (بايز) يستفيد من أية معلومة جديدة ويوظفها في عملية اتخاذ القرار. ويعتمد حساب القيمة المتوقعة للفروع على التوزيع الشرطي اللاحق لـθ وهو ما رمزنا له بـ$P(\theta/x_i)$ ولحساب القيمة المتوقعة لـθ عند العقد المختلفة نطبق العلاقة:

$$E(\theta_i) = \sum_{j=1}^{n} P(\theta_j / x_i) \cdot x_{ij} \qquad (32\text{-}14)$$

وسنطبق ذلك على المثال الآتي:

مثال (14):

لنفرض أن شركة للتنقيب عن النفط تريد أن تتخذ قراراً حول حفر بئرٍ في أحدى المناطق, وعليها أيضاً أن تقرر فيما إذا كان من المفيد إجراء اختبار زلزالي للمنطقة أم لا. وذلك ضمن المعطيات الآتية:

1- إن نتيجة الاختبار الزلزالي يمكن أن تأخذ أحد الحالات الآتية:
   - أ- عدم وجود بنية مناسبةNS نرمز لها بـ x_1.
   - ب- وجود بنية مفتوحة OS ونرمز لها بـ x_2.
   - ج- وجود بنية مغلقة CS ونرمز لها بـx_3.

2- إن نتيجة الحفر يمكن أن تكون تأخذ أحد الحالات الآتية:
   - أ- الحصول على بئر جاف ونرمز لها بالرمز θ_1.
   - ب- الحصول على بئر رطب ونرمز لها بالرمز θ_2.
   - ج- الحصول على بئر مشبع ونرمز لها بالرمز θ_3.

3- إن الاحتمالات الشرطية لنتائج الاختبار الزلزالي X مع نتائج الحفر مأخوذة من الدراسات السابقة هي كما في الجدول الآتي:

حالات الإختبار / نوع البئر θ	التوزيع الشرطي لـx	x_1	x_2	x_3	$\sum$
θ_1 جاف	$P(x/\theta_1)$	0.6	0.3	0.1	1
θ_2 رطب	$P(x/\theta_2)$	0.3	0.4	0.3	1
θ_3 شبع	$P(x/\theta_3)$	0.1	0.4	0.5	1

4- إن الاحتمالات الأولية لنتيجة الحفر θ تساوي كما يلي:

θ:	θ_1	θ_2	θ_3
$P(\theta_j)$:	0.5	0.3	0.2

5- إن تكلفة إجراء الاختبار الزلزالي تساوي 10000ل.س.

6- إن تكلفة إجراء الحفر تساوي 70000ل.س.

7- إن مقدار الربح الناتج عن البئر المشبع يساوي 270000 ل.س وعن البئر الرطب يساوي 120000ل.س, ولا يوجد أي ربح من البئر الجاف.

والمطلوب:

1- تقديم اقتراح للشركة حول إجراء الحفر أم لا.

2- تقديم اقتراح للشركة بشأن إجراء الاختبار الزلزالي أم لا.

3- رسم شجرة القرارات حسب المعطيات السابقة.

4- حساب القيم المتوقعة عند كل عقدة وذلك مع الاستفادة من نتيجة الاختبار.

5- تحديد القرار المناسب حول حفر البئر.

الحل:

1- لاتخاذ قرار حول إجراء الحفر أم لا. نقوم بإعداد جدول صافي الأرباح بعد طرح تكلفة الحفر (70000) ل.س من كل الحالات θ فنحصل على الجدول الآتي:

حالات θ / الأفعال	θ_1 جاف	θ_2 رطب	θ_3 مشبع	القيمة المتوقعة
إجراء الحفر a_1	−70000	50000	200000	$E(a_1)=20000$
عدم إجراء الحفر a_2	0	0	0	$E(a_2)=0$
الاحتمالات الأولية	0.5	0.3	0.2	1

نعتمد عند اتخاذ قرار أولي حول إجراء الحفر أم لا على القيمة المتوقعة لكل من البديلين a_1 و a_2 وبحساب هاتين القيمتين نجد أن:

$E(a1) = (0.5)(-70000) + (0.3)(50000) + (0.2)(200000) = 20000 L.S$

$E(a2) = (0.5).0 + (0.3).0 + (0.2).0 = 0$

أي إن عملية الحفر ستحقق ربحاً يقدر بـ 20000 ل.س على الأقل, وإن الشركة ستحاول أن تجعل هذا الربح أكبر ما يمكن. وذلك من خلال تقليل التكاليف والاستفادة من نتيجة الاختبار الزلزالي أو بسبب نوعية البئر المحفور، ولذلك فإننا سنقوم بدراسة الشجرة مع وجود البديلين a_1 و a_2.

ولتقديم اقتراح حول إجراء الاختبار الزلزالي أم لا, نعتمد على قاعدة (الفرق بين القيمتين المتوقعتين للأرباح في حالتي التأكد وعدم التأكد) والذي نحسبه من العلاقة:

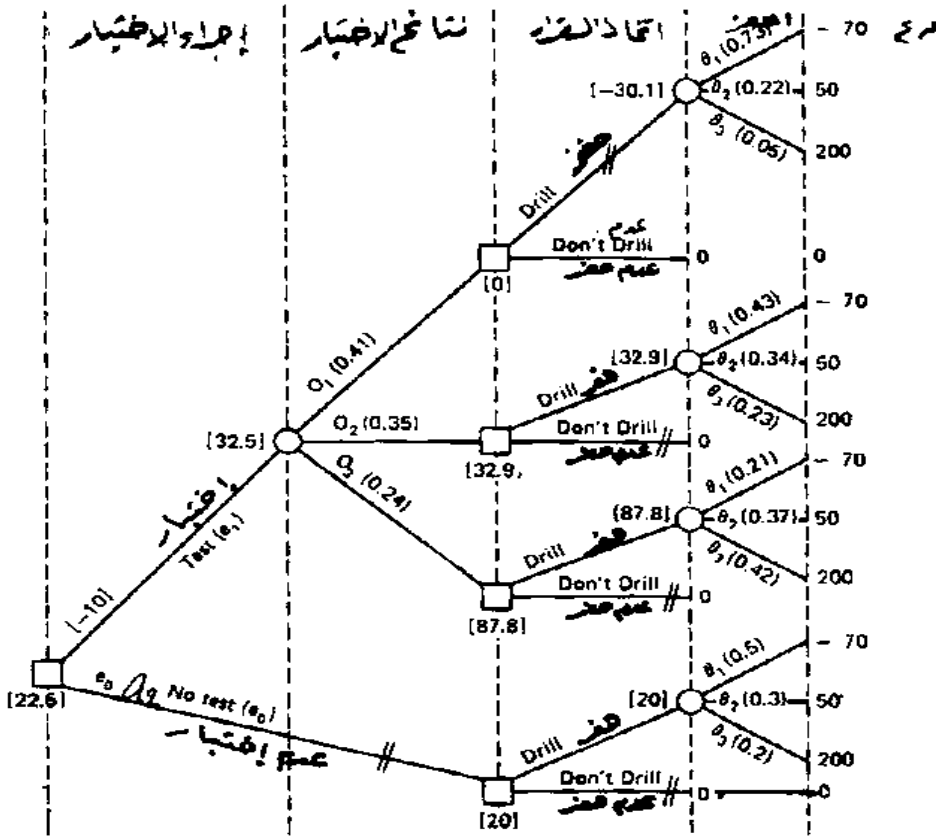
$$D = \sum P(\theta_j)\left[\max_i X_{ij}\right] - \max_i E(a_i) \qquad (32-14)$$

ومن الجدول السابق نجد أن:

$$D = (0.5).0 + (0.3)(50000) + (0.2)(200000) - 20000 = 35000 \text{ L.S}$$

وهذا يعني أن قيمة المعلومات التي يوفرها الاختبار الزلزالي تساوي 35000ل.س. وبما أن تكلفة ذلك الاختبار تساوي 20000 ل.س فقط, فهذا يعني أنه هناك جدوى حقيقية لإجراء الاختبار. ومع ذلك سندرس الشجرة مع وجود البديلين (إجراء الاختبار وعدم إجراء الاختبار).

2- لرسم شجرة القرارات وفق المعطيات السابقة نقوم بتنظيمها كما يلي:



الشكل رقم (14- 4)

3- لحساب القيم المتوقعة عند العقد المختلفة حسب أسلوب (بايز) نلاحظ أنه لدينا التوزيعات الاحتمالية الشرطية $P(x/\theta_5)$, بينما نحن بحاجة إلى التوزيعات الاحتمالية الشرطي $P(\theta/xi)$ التي تدخل في حساب القيم المتوقعة عند العقد المختلفة.

ومن أجل حساب الاحتمالات $P(\theta_j/x_i)$ نقوم أولاً بحساب الاحتمالات المشتركة $P(xi\ ,\ \theta j)$ وذلك من خلال العلاقة:

$$P(xi,\theta j)=P(\theta j).p(xi/\theta j)$$

وبما أن $P(\theta)$ و$P(x/\theta)$ يساويان مايلي:

θ	$P(\theta_j)$
θ_1	0,5
θ_2	0,3
θ_3	0,2
$\sum$	1

$P(x/\theta_j)$	x_1	x_2	x_3	$\sum$
$P(x/\theta_1)$	0,6	0,3	0,1	1
$P(x/\theta_2)$	0,3	0,4	0,3	1
$P(x/\theta_3)$	0,1	0,4	0,5	1

وبأخذ الجداءات المتقابلة لكل عنصر من $P(\theta_j)$ في سطر من $P(x/\theta_j)$ نحصل على الاحتمالات المشتركة المعروضة في الجدول الآتي:

$P(x_i,\theta_i)=$

X / θ	x_1	x_2	x_3	$P(\theta_j)$
θ_1	0.30	0.15	0.05	0.5
θ_2	0.09	0.12	0.09	0.3
θ_3	0.02	0.08	0.10	0.2
$P(x_i)$	0.41	0.35	0.24	1

ومن السطر الأخير في الجدول السابق نحصل التوزيع المنفرد لـ x وهو:

x:	x_1	x_2	X_3
$P(x_i)$:	0,41	0,35	0,24

وبذلك يمكننا حساب الاحتمالات الشرطية اللاحقة لـ θ من العلاقة:

$$P(\theta_j/x_i)=\frac{P(x_i,\theta_j)}{P(x_i)}$$

فمثلاً نجد أن:

$$P(\theta_1/x_1)=\frac{P(x_1,\theta_1)}{}=\frac{0.09}{}=0.22$$

$$P(\theta_2/x_1)=\frac{P(x_1)}{P(x_1,\theta_2)}=\frac{0.41}{0.30}=0.73$$

$$P(\theta_3/x_1)=\frac{P(x_1)}{P(x_1,\theta_3)}=\frac{0.41}{0.02}=0.05$$

وبمتابعة تلك الحسابات نحصل على التوزيعات الشرطية اللاحقة لـ θ حسب حالات X وهي المعروضة بالجدول التالي:

$P(\theta_j/x_i)=$	X / θ	x_1	x_2	x_3
	θ_1	0.73	0.43	0.21
	θ_2	0.22	0.34	0.37
	θ_3	0.05	0.23	0.42
$\Delta\sum$ المجموع		1	1	1

ولقد قمنا بوضع هذه الاحتمالات على شجرة القرارات من أجل تسهيل حسابات القيم المتوقعة. وبناء على ذلك نجد أن القيمة المتوقعة عند العقدة (2) تساوي:

$$E(x)=\sum P(\theta_j/x_1).v_j$$

$$E(2)=(0.73)(-70000)+(0.22)(50000)+(0.05)(200000)$$

$$E(2)=-30100$$

وأن القيمة المتوقعة عند العقدة (3) تساوي:

$$E(3)=(0.43)(-70000)+(0.34)(50000)+(0.23)(200000)=$$

$$E(3)=32900$$

وأن القيمة المتوقعة عند العقدة (4) تساوي:

$$E(4)=(0.21)(-70000)+(0.37)(50000)+(0.42)(200000)=$$

$$E(4)=87800$$

وأن القيمة المتوقعة عند العقدة (5) تساوي:

$$E(5)=(0.5)(-70000)+(0.3)(50000)+(0.2)(200000)=$$

$$E(5)=20000$$

ولحساب القيم المتوقعة عند المواقف [b] و[c] و[d] و[e] نجد أن:

E(b)=Max [-30100,0]=0

E(c)=Max [32900,0]=32900

E(d)=Max [87900,0]=87900

E(e)=Max [20000,0]=20000

وبذلك نجد أن القيمة المتوقعة عند العقدة (1) تساوي:

E(1)=(0.41).0+(0.36)(32900)+(0.42)(87900)=32500

وأخيراً نجد أن القيمة المتوقعة عند الموقف [a] تساوي بعد حذف تكلفة إجراء الاختبار (10000) من E(1) ما يلي:

E(a)=Max [(32500-10000),20000]=225000

4- وبالعودة إلى المسار الذي اتبعناه عن إجراء الحسابات التراجعية نلاحظ أن الفرع الذي يبدأ بإجراء الاختبار هو البديل المناسب. وبعده يمكن أن نتابع عملية الحفر إذا كان نوع البئر رطباً أو مشبعاً، وأن لا نتابع الحفر إذا كان البئر جافاً, ولقد أشرنا على الفروع غير المرغوبة بإشارة //.

تمرينات

1- لنفترض أنه لدينا جدول الأرباح للحالات والأفعال الآتية:

الحالات / الأفعال	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
a_1	−100	160	40	200	0
a_2	60	80	140	40	100
a_3	20	60	−60	20	80
a_4	−20	−100	−140	−40	400
$P(\theta_j)$	0.08	0.10	0.50	0.12	0.20

والمطلوب:

أ- حساب القيم المتوقعة لكل بديل وتحديد القرار المناسب.

ب- بفرض أن الاحتمالات غير موجودة كيف يمكن أن تحدد القرار المناسب مستخدماً القواعد المتبعة في ذلك.

2- لتكن لدينا مصفوفة الأرباح الآتية:

الحالة / البديل	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	250	280	280
a_2	260	270	220
a_3	290	230	200

والمطلوب:

تحديد البديل المناسب طبقاً للقواعد التالية: قاعدة لابلاس- قاعدة أكبر الصغار- قاعدة أكبر الكبار- قاعدة هورتيز علماً بأن $\alpha=0.65$.

ما هو البديل المناسب إذا كانت الاحتمالات المقابلة:

$P(\theta_1)=0.6 \qquad P(\theta_2)=0.15$

3- نحتاج إلى اتخاذ قرار لإقامة مشروع ما علماً بأن مصفوفة الأرباح حسب البدائل والحالات الممكنة كما في الجدول الآتية:

الحالة الطبيعية / البديل	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	−199	−100	220
a_2	130	−166	166
a_3	250	−60	−150
a_4	−100	−120	190
a_5	−166	−60	250
$P(\theta_j)$	0.30	0.45	0.25

والمطلوب:

أ- رسم شجرة القرارات لهذه القضية.

ب- اتخاذ قرار من البدائل الخمس المتوفرة طبقاً لاحتمال حدوث كل منها.

4- يريد صاحب أرض أن يحسم موقفه من العقد الموقع مع أحد المزارعين لاستثمار أرض زراعية علماً بأن لديه البديلات:

أ- أن يجدد العقد له ويستمر في استثمار الأرض الزراعية.

ب- أن يلغى العقد ويأخذ من المستثمر مبلغ 400 ل.س تعويض علماً بأنه إذا وافق على الاستمرار فإنه مضطر لدفع مبلغ 550ألف ل.س لحفر بئر للحصول على المياه وهنا تظهر أمامه الحالات الآتية:

– عدم حصوله على ماء وعندها يخسر كامل المبلغ.

– أما إذا حصل على ماء فإن أرباحه تعتمد على كون الماء حلواً أو مالحاً.

والجدول الآتي يبين احتمالات الحصول على الماء حسب نوعيته وكميته:

حالات الطبيعة	الاحتمال	مياه كثيرة 0.60	مياه قليلة 0.40
لا يوجد ماء	0.25	خسارة 55000	خسارة 550000
ماء مالح	0.25	1200000	800000
ماء حلو	0.20	1800000	1300000

والمطلوب:

رسم شجرة القرارات التي تمثل هذه الحالة.

البحث عن القرار السليم الذي يمكن أن يتخذه صاحب الأرض.

جدول رقم (14-6): مصفوفة الربح وقاعدة (هورويز)

حالات الطبيعة / البدائل والأفعال	θ_1	θ_2	θ_3	$Y_i = \text{Max}\, X_{ij}$	$Z_i = \text{Min}\, X_{ij}$	$H_i = 0.3Y_i + 0.7Z_i$
a_1	100	200	300	300	100	$H_i = 0.3*300 + 0.7*400 = 190$
a_2	300-	150	600	600	-300	$H_2 = 0.3*600 + 0.7*(-300) = -30$
a_3	130	200	400	400	130	$H_3 = 0.3*400 + 0.7*130 = 211$
a_4	160	300	200	300	160	$H_4 = 0.3*300 + 0.7*160 = 202$

الفصل الخامس عشر
المحاكاة Simulation

I- مقدمة وتعاريف:

لقد لاحظنا من خلال الفصول السابقة, أن العديد من فروع بحوث العمليات تعتمد على التوزيعات الاحتمالية, لأنها تتضمن متحولات عشوائية مثل: عدد الزبائن المتواجدين في النظام أو الصف, مدة الانتظار في النظام أو الصف, إمكانية حدوث حالة ما من حالات الطبيعة في اتخاذ القرارات, إمكانية إنهاء العمل في المشروع خلال مدة معينة وتغيرات الأحداث في المعارك العسكرية, تغيرات المؤشرات الاقتصادية المختلفة...الخ, وبما أن هذه المسائل وكثير غيرها تحتاج إلى إيجاد حلول مسبقة لها وإجراء تجريب لسير العمل فيها, فإننا نلجأ إلى طريقة عملية تسمى بالمحاكاة (المضاهاة), وتعرف بما يلي:

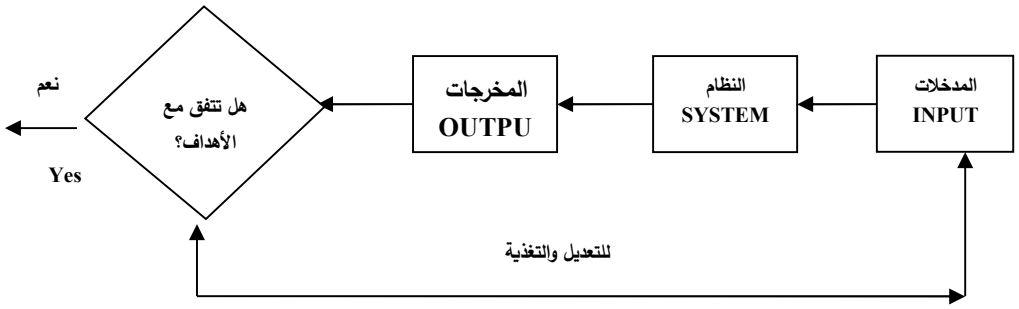
المحاكاة:

هي عملية بناء واختيار وتشغيل نماذج تحاكي ظواهر أو أنظمة معقدة باستخدام نماذج رياضية محددة, لذلك فإن المحاكاة تعتبر الفرع التجريبي لبحوث العمليات, ولقد أصبحت من أقوى الأساليب في معالجة المسائل الإدارية وخاصة بعد تطور الحواسيب وازدياد وتزايد سرعة المعالجة فيها وتوسع قدرات التخزين في ذواكرها.

وباختصار نقول إن المحاكاة أصبحت الأداة العصرية لحل الكثير من المسائل المعقدة, ويتطلب وضع نموذج لمحاكاة ظاهرة أو نظام ما أن يتم وضع فرضيات دقيقة لعمل النظام وصياغتها بوساطة تعابير رياضية أو منطقية تربط عناصر ومكونات النظام

بعضها ببعض, وتحديد الأهداف التي يرغب في تحقيقها وصياغتها على شكل مؤشرات كمية أو نوعية, ثم يتم السماح لنموذج المحاكاة بالعمل وفق هذه الفرضيات لفترة من الزمن, وبعدها يتم قياس المؤشرات المستخرجة ومقارنتها مع الأهداف المطلوبة, لإجراء التعديلات اللازمة إذا اقتضى الأمر.

ويمكن تمثيل الشكل العام لنموذج المحاكاة على الشكل الآتي:



الشكل رقم (15-1): نموذج المحاكاة

خطوات بناء وعمل نموذج المحاكاة:

ونلخصها بما يلي:

1- تحديد عناصر ومكونات النظام المراد محاكاته, وتحديد أهداف العمل فيه.

2- وضع فرضيات للنموذج وصياغتها بوساطة تعابير رياضية أو منطقية محددة.

3- تحديد العلاقات بين عناصر النظام والتعبير عنها رياضياً أو منطقياً.

4- تحديد المؤشرات المطلوب قياسها والمؤشرات المطلوب جمع البيانات عنها.

5- إعداد برنامج عمل النموذج بالحاسب أو استخدام إحدى لغات المحاكاة المعروفة حتى الآن مثل: Dynamo, Simula, Mad, Gpss..... وغيرها.

6- تشغيل برنامج المحاكاة لفترة قصيرة من الزمن لمعرفة مدى محاكاة النموذج للنظام الأساسي أو في حالة عدم تطابق النموذج مع النظام نعود إلى الخطوة (2), ونعيد النظر في كل ما فعلناه من جديد.

7- تشغيل نموذج المحاكاة لفترة زمنية طويلة للتأكد من صلاحية النموذج.

8- تحليل نتائج المحاكاة واستخلاص النتائج الممكنة.

المبدأ الذي تعتمد عليه المحاكاة:

تعتمد المحاكاة على توليد سلسلة طويلة من الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيع الاحتمالي المنتظم في المجال [1,0], ثم تحويل هذه الأرقام إلى متحولات عشوائية تخضع لقانون التوزيع الاحتمالي الذي يعمل به النظام المراد محاكاته, وبعدها قياس المؤشرات ومعرفة مدى مطابقتها مع الأهداف الموضوعة, وبذلك تكون قد تمت المحاكاة.

وهنا لا بد أن نميز بين نوعين من المتحولات العشوائية هما:

1- المتحولات العشوائية المنقطعة:

وهي تخضع لتوزيعات احتمالية منقطعة مثل التوزيع المنتظم أو التوزيع الثنائي أو توزيع بواسون أو التوزيع الهندسي أو التوزيع فوق الهندسي ..... الخ, وإن عملية محاكاة هذه المتحولات تسمى بالمحاكاة المنقطعة, وخير مثال عليها عدد الزبائن في الصف أو غيره.

2- المتحولات العشوائية المستمرة:

وهي تخضع لتوزيعات احتمالية مستمرة مثل: التوزيع المنتظم أو التوزيع الأسي أو التوزيع الطبيعي أو توزيع بيتا أو توزيع غاما أو توزيع كاي مربع أو توزيع ستودينت أو توزيع إيرلنغ أو توزيع فيشر ...الخ.

وبما أن التوزيع المنتظم يعتبر أهم التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في المحاكاة لذلك فإننا سنستعرض تعريفه وبعض خواصه للمتحولين المنقطع والمستمر.

أ- التوزيع المنتظم لمتحول عشوائي منقطع:

لنفترض أن x متحول عشوائي منقطع, وإن عدد الحالات أو القيم التي يمكن أن يأخذها يساوي n حالة مرتبة كما يلي: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$

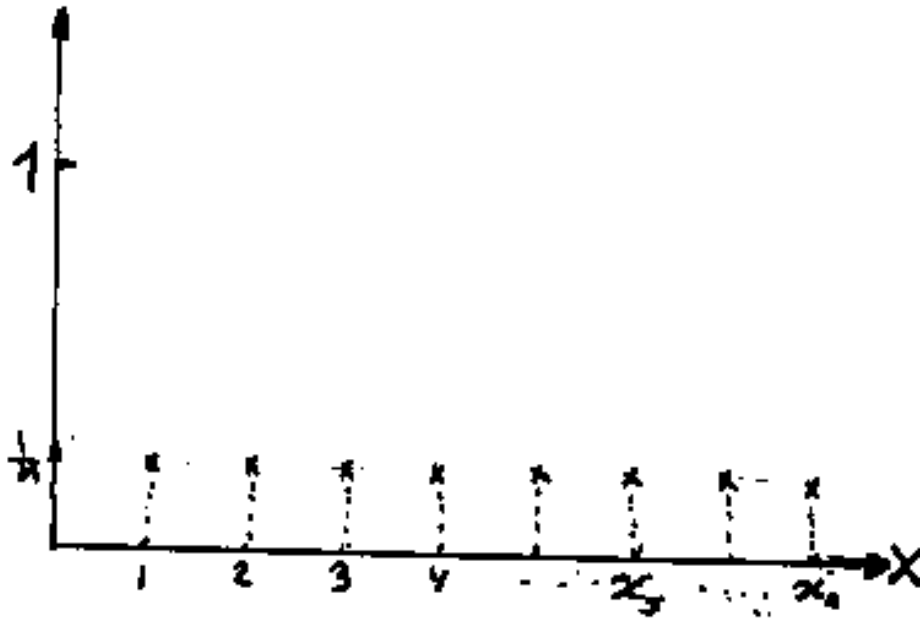
وإنـه يأخذ هذه الحـالات باحتمـالات متسـاوية, وبنـاء علـى ذلـك فـإن قـانون توزيعه الاحتمالي يعطى بالعلاقة:

$$P(x = x_i) = P_i = \frac{1}{n} \qquad \forall i \in n \qquad (1-15)$$

ويكتب أيضاً على شكل مفصل كما يلي:

$X:$	x_1	x_2	x_3	.....	x_n
$P_i:$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	.....	$\frac{1}{n}$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:

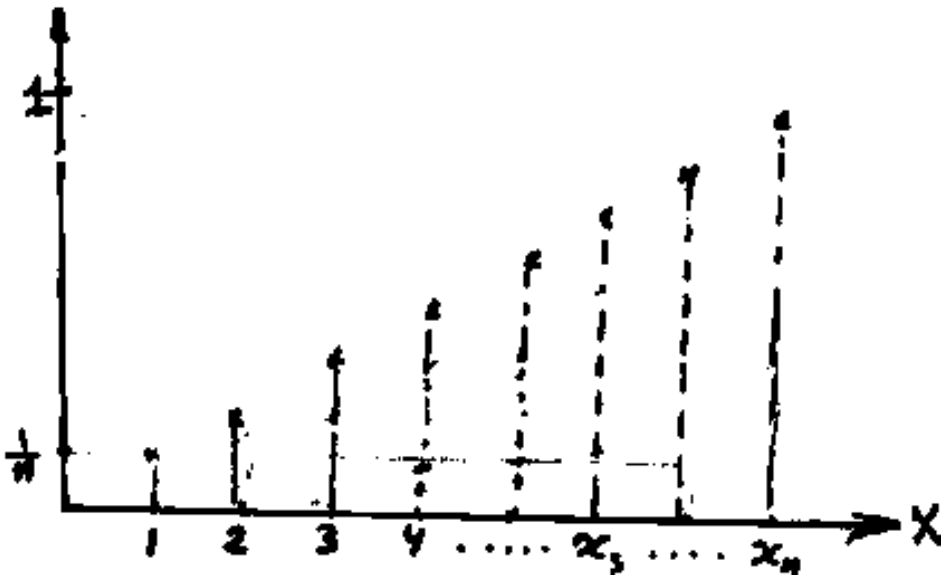


الشكل (15-2): التوزيع المنتظم المتقطع

وإن تابع التوزيع الاحتمالي التراكمي الذي يعبر عن الاحتمال $P(x<x_s)$ يساوي:

$$F(x_s) = P(x < x_s) = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{n} = \frac{s}{n} \qquad (2-15)$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (15-3): تابع التوزيع المنتظم

ومن خصائص هذا التوزيع أنه:

$$0 \le P_i \le 1$$
$$\sum P_i = 1$$

وإن توقعه الرياضي يساوي:

$$E(x) = \sum p_i x_i = \sum \frac{1}{n} x_i = \bar{x}$$

وإن تباينه يساوي:

$$var(x) = \sum P_i (x_i . \bar{x})^2 = \sum \frac{1}{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sigma^2$$

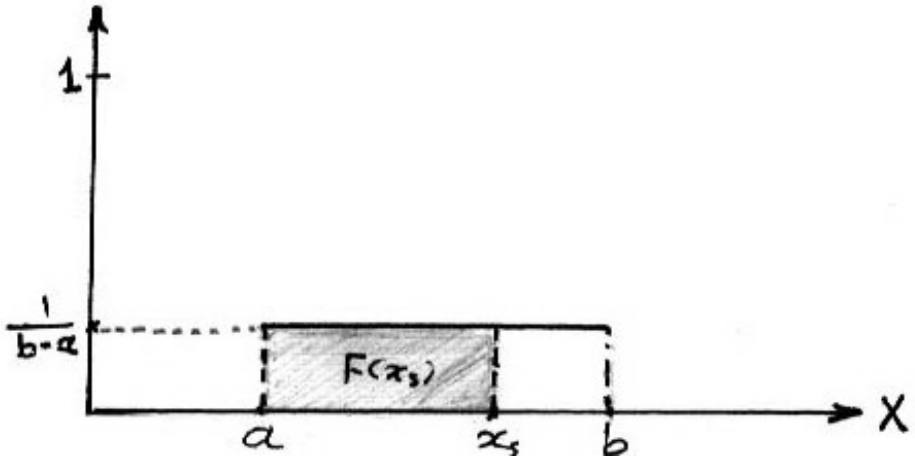
وإن أفضل مثال على هذا التوزيع هو توزيع نتيجة حجر النرد حيث نجد أن x يأخذ القيم:

x:	1	2	3	4	5	6
p_i:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ب- التوزيع المنتظم لمتحول عشوائي مستمر x في مجال [a,b] ويعرف بالعلاقة المستمرة الآتية:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad :\text{for}: a\le x\le b \tag{3-15}$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (15-4)

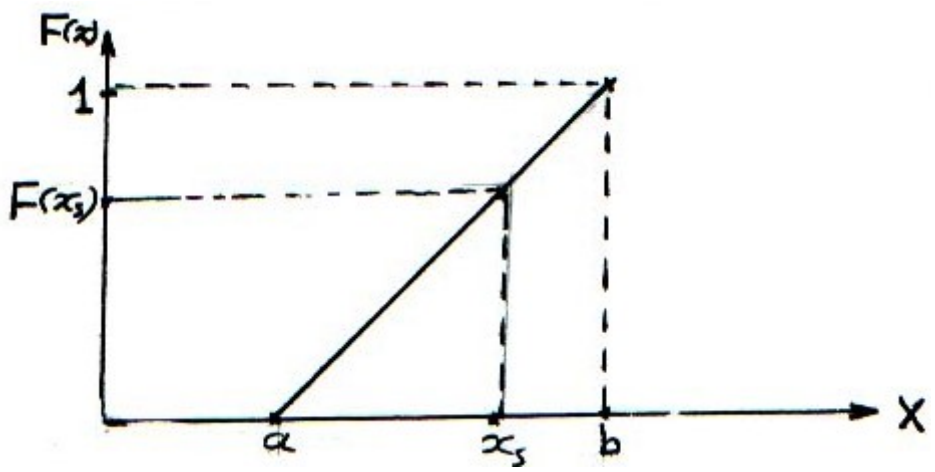
وإن تابع التوزيع التراكمي لهذه التوزيع F(x) يساوي:

$$F(x_s)=P(x<x_s)=\int_a^{x_s} f(x)dx=\int_a^{x_s}\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}[x]_a^{x_s}=\frac{x_s-a}{b-a}$$

$$F(x_s)=\frac{x_s-a}{b-a} \qquad :a\le x_s\le b \tag{4-15}$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (15-5)

ومن أهم خصائص هذا التوزيع هو أن:

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = 1$$

وإن توقعه الرياضي يساوي:

$$E(x) = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$E(x) = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b+a)}{2} \qquad (5-15)$$

ويمكن البرهان على أن تباينه يساوي:

$$var(x) = \int_a^b \left(x \cdot \bar{x}\right)^2 \cdot f(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad (6-15)$$

ولتوضيح كيفية استخدام هذين التوزيعين في عمليات المحاكاة نأخذ المثال الآتي:

مثال (1):

لنفترض أن شركة لتسويق المعكرونة تقوم بتزويد وكلائها في اللاذقية وجبلة وطرطوس بما يطلبونه من تلك المادة, فإذا علمت أنه بعد إجراء الدراسة على فترة طويلة تبين أن نسبة الطلب في هذه المدن استقرت على مايلي: 0.50 في اللاذقية,

0.20 في جبلة, 0.30 في طرطوس, من إجمالي التسويق الذي يقدر بـ 10 شحنات شهرياً أي بمعدل شحنة كل ثلاثة أيام, فكيف يمكن تأمين الكميات المطلوبة إلى هؤلاء الوكلاء؟.

الحل:

في البداية يمكن للقارئ أن يجيب على هذا السؤال بأن الشركة ستقوم بتأمين الكميات حسب طلبات الوكلاء وإرسالها فوراً إليهم حسب الحاجة, ولكن طريقة المحاكاة ستعتمد أسلوباً آخر وهو أن تقوم الشركة بتوليد أرقام عشوائية منتظمة ثم تحويلها إلى قانون التوزيع الاحتمالي للطلب على تلك المادة وبالآتي إرسال الشحنات حسب نتائج تلك المحاكاة.

ولتوليد أرقام عشوائية نأخذ أحد عجلات الرهان (اليانصيب) والمرقمة بالأرقام 0 إلى 9, وفي صباح كل ثلاثة أيام ندير العجلة ونسجل الرقم العشوائي الذي يظهر على الشاشة, وهو نتيجة متحول x خاضع للتوزيع المنتظم, وحتى نحول ذلك المتحول المنتظم إلى متحول يحاكي الطلب على المادة المذكورة نقوم بتحويله إلى متحول خاضع للتوزيع النسبي للطلب عند الوكلاء، والذي يساوي 0.5 ثم 0.2 ثم 0.3 على الترتيب, لذلك نقوم بوضع نموذج لمحاكاة ذلك التوزيع وتوجيه الشحنات إلى الوكلاء وفق الآتي:

النتيجة على عجلة الرهان	القرار اللازم إتخاذه	الاحتمال المقابل
إذا كان الرقم أقل من 5	فإننا نوجه الشحنة إلى اللاذقية	0.5
إذا كان الرقم مساوياً لـ 5 أو 6	فإننا نوجه الشحنة إلى جبلة	0.2
إذا كان الرقم مساوياً لـ 7 أو 8 أو 9	فإننا نوجه الشحنة إلى طرطوس	0.3

وبذلك نجد أن هذه اللعبة البسيطة تشكل محاكاة لعملية التسويق وتساعدنا على إتخاذ قرارات التسويق دون تحيز أو تقصير.

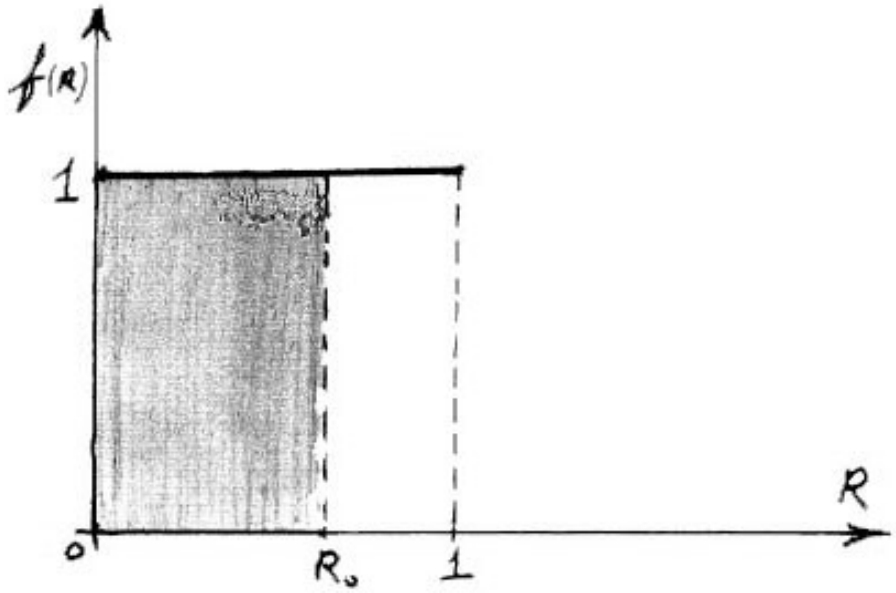
II- توليد الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيع المنتظم في المجال [1, 0] (حسب طريقة Monte-Carlo):

يمكن الحصول على سلسلة من الأرقام العشوائية الخاضعة لهذا التوزيع المنتظم من جداول الأرقام العشوائية الملحقة في هذا الكتاب أو غيره, ويتم اختيار تلك الأرقام عشوائياً وذلك بوضع رأس القلم على أي مكان من الصفحة المفتوحة وأخذ خمس مراتب لكل رقم ووضعها على يمين الفاصلة العشرية (أي بتقسيمها على 10000) ونشير إلى أن تلك الجداول مدروسة ومختبرة وهي خاضعة للتوزيع المنتظم في المجال [1, 0].

وإذا افترضنا أن R هو المتحول العشوائي المستمر والخاضع للتوزيع المنتظم المستمر المعرف على المجال [1, 0] والذي يعرف حسب العلاقة (15−3) السابقة بالعلاقة الآتية:

$$f(R)=1 \quad \text{حيث} \quad 0 \le R \le 1 \qquad (6a-15)$$

وهو يأخذ الشكل الآتي:

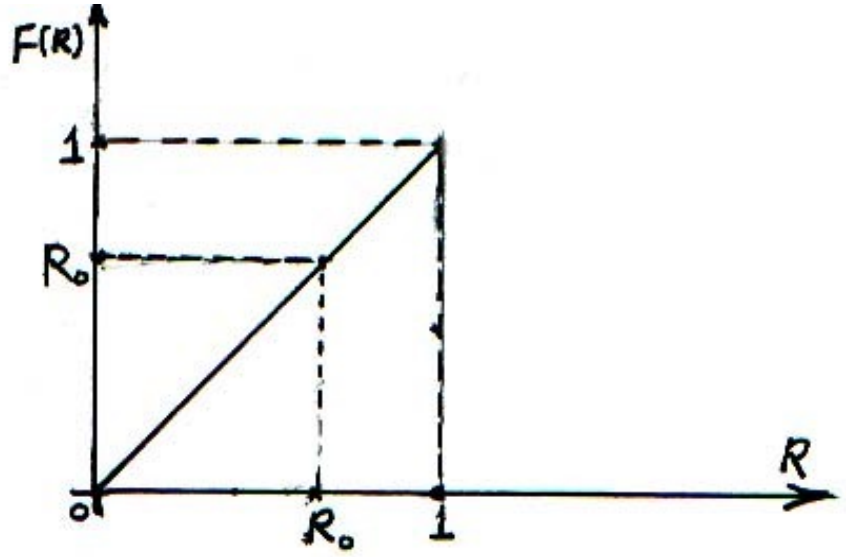


الشكل (15−6): التوزيع المنتظم

وإن تابع التوزيع التراكمي لهذا التوزيع والذي سنرمز له بـ F(R) يساوي:

$$P(R < R_0) = F(R_0) = \int_0^{R_0} f(R)dR = \int_0^{R_0} 1 \cdot dR = R_0 \qquad (6b-15)$$

وهو يأخذ الشكل الآتي:



الشكل (15-7): تابع التوزيع المنتظم

أي أن كل عدد عشوائي R_0 يقابل قيمة لتابع التوزيع تساوي R_0 أيضاً.

ولكن عملية اختيار الأرقام العشوائية المنتظمة من جداول الأرقام العشوائية تعتبر عملية بطيئة ومكلفة, وخاصة إذا كانت سلسلة الأرقام المطلوبة كبيرة جداً, لذلك يتم اللجوء إلى توليد أرقام شبه عشوائية باتباع طرائق اصطناعية وباستخدام علاقات رياضية خاصة تسمى بطرائق (مونتي كارلو) وأهمها العلاقات الآتية:

1- أسلوب متوسط التربيع (لـ فون نيمان):

ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار رقم عشوائي كسري R_0 ومؤلف من أربع مراتب (يسمى البذرة) ولا يحوي الصفر في أي من مراتبه, ثم نقوم بتربيع ذلك العدد R_0 ونختار الأرقام الأربعة الوسطى من الجزء الكسري ثم نضعها كسراً جديداً ونعتبرها الرقم العشوائي R_1، ولمتابعة العمل نقوم من جديد بتربيع R_1 ونختار الأرقام الأربعة

الوسطى من الجزء الكسري، ونضعها كسراً جديداً ونعتبرها الرقم العشوائي R_2 ....الخ.

ويمكننا كتابة العلاقة التي تعبر عن هذا الأسلوب كما يلي:

$$R_{i+1} = Mid\left[R_i^2\right] \quad i: 0,1,2,..... \qquad (7-15)$$

حيث ترمز Mid إلى المراتب الأربع الوسطى من R_i^2.

وكمثال على ذلك لنفرض أننا سحبنا من جداول الأرقام العشوائية العدد R_0 (البذرة) وكان يساوي $R_0=0.3756$ وبذلك نجد أن العدد العشوائي الأول R_1 يحسب كما يلي:

$$R_1 = Mid\left[R_0^2\right] = Mid(0.14107536) = 0.1075$$
$$R_2 = Mid\left[R_1^2\right] = Mid[0.01155625] = 0.1556$$

ورغم بساطة هذا الأسلوب إلا أن البحوث التجريبية أثبتت عدم صلاحيته للعمليات الطويلة لأنه متحيز نحو الأرقام الصغيرة مما يجعل الأرقام المولدة وتفقد صيغتها المنتظمة في النهاية.

2- أسلوب الجداء:

ويعتمد على ضرب كل رقم عشوائي R_i بعدد ثابت كيفي k ثم أخذ المراتب الأربع الوسطى من الجزء الكسري, ويعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$R_{i+1}=Mid\ [D(kR_i)] \qquad (8-15)$$

حيث D تعبر عن الجزء الكسري من العدد الناتج.

وكأمثلة على العلاقات المستخدمة في هذا الأسلوب نورد العلاقات الآتية:

$$R_{i+1} = Mid\left[D\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) R_i \right] \qquad (9-15)$$

$$R_{i+1} = Mid[(kR_i + \varepsilon)] \qquad (10-15)$$

حيث ε عدد إضافي لتصحيح عمليات التوليد ويتغير عند الحاجة آلياً.

$R_{i+1}=Mid\ [D(R_i*R_{i-1})]$ (11-15)

ويمكن للقارئ تجريبها وتوليد أرقام عشوائية من كل منها.

ملاحظة:

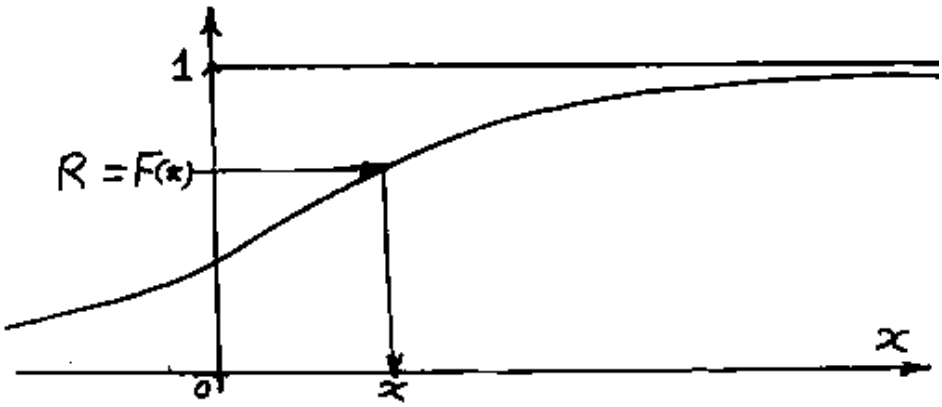
إن عملية توليد الأرقام شبه العشوائية لا تنتهي بالحصول على الأرقام نفسها بل يجب القيام باختبار عشوائيتها والتأكد من خضوعها للتوزيع المنتظم المعرف على المجال [0 ,1] وذلك باستخدام أحد الاختيارات المعروفة مثل اختبار x^2 أو اختبار K.S (كولمجوردوف- سميرنوف), أو CM (كرامر- مايس) أو اختبار التسلسلية والارتباط الذاتي أو اختبار الفجوة أو اختبار أكبر قيمة.

III- توليد الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيعات غير المنتظمة:

إن عملية توليد الأرقام شبه العشوائية الخاضعة لأي توزيع احتمالي غير منتظم، تعتمد على تحويل الأرقام العشوائية أو شبه العشوائية المنتظمة في المجال [0-1] إلى أرقام خاضعة للتوزيع المفروض, وهناك أساليب عدة لتحويل تلك الأرقام إلى التوزيعات الاحتمالية المختلفة أهمها:

1- أسلوب التحويل المعاكس لتابع التوزيع:

ويعتمد هذا الأسلوب على حساب تابع التوزيع الاحتمالي F(x) من قانون التوزيع f(x) ومقابلته مع متحول الأرقام العشوائية المنتظمة R، لأن كلاً منهما يتمتع بالخاصة نفسها ويحقق $0 \le F(x) \le 1$ وكذلك $0 \le R \le 1$ والشكل الآتي يوضح لنا ذلك:



الشكل رقم (15−8)

ولهذا فإنه إذا وضعنا بينها العلاقة كما يلي:

$$R=F(x) \qquad (12-15)$$

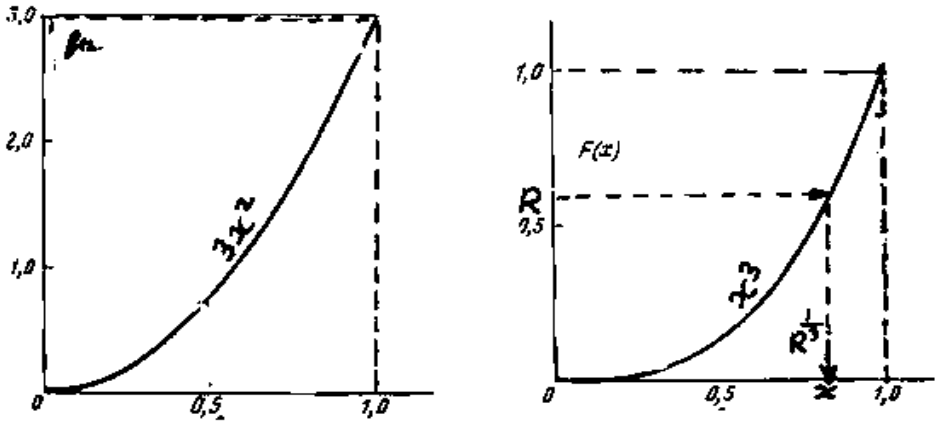
فإن قيم المتحول x الخاضع للتوزيع f(x) تعطى بالعلاقة المعاكسة:

$$X=F^{-1}(R) \qquad (13-15)$$

وكمثال على ذلك لنفترض أن x خاضع للتوزيع الاحتمالي الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (15−9): التوزيع الاحتمالي

نقوم بحساب تابع التوزيع له فنجد أن: $F(x) = \int_{t=0}^{x} 3x^2 dx = x^3$

وبوضع العلاقة كما يلي: $R=F(x)=x^3$

ومنها نستنتج مباشرة أن: $x=F^{-1}(R)=R^{1/3}$

أي أنه حتى نحصل أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع السابق $f(x)=3x^2$ في المجال [0,1]، نقوم بتوليد الأرقام العشوائية المنتظمة R، ثم نأخذ جذرها التكعيبي فنحصل على $x = R^{\frac{1}{3}}$ الخاضع للتوزيع $f(x) = 3\ x^3$ في المجال [0,1].

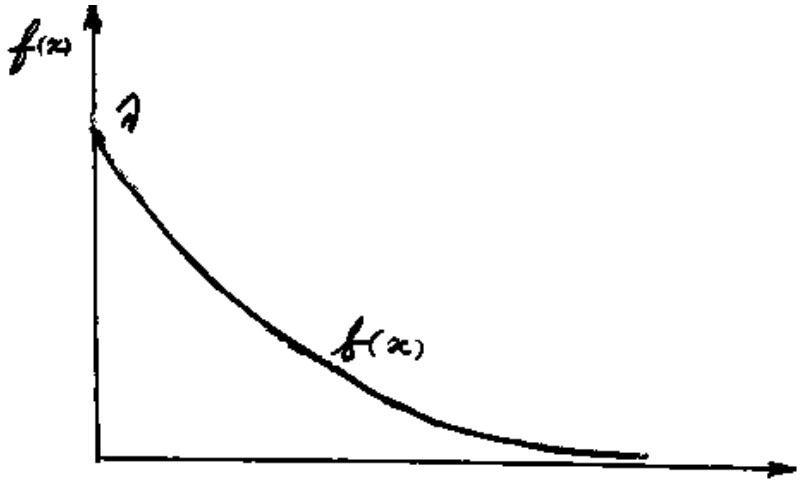
ولكن أسلوب التحويل المعاكس لا يفيدنا كثيراً عندما يكون التابع F(x) معقداً، حيث يصعب علينا حساب التابع المعاكس $F^{-1}(R)$، وبالتالي يصعب علينا حساب المتحول x بدلالة المتحول R, ولكننا سنستخدم هذا الأسلوب للحصول على المتحولات التي تخضع لبعض التوزيعات البسيطة الآتية:

أ- توليد الأرقام الخاضعة للتوزيع الأسي:

لقد رأينا هذا التوزيع مستخدم جداً في نظرية الصفوف, وإنه يعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (14-15)$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:

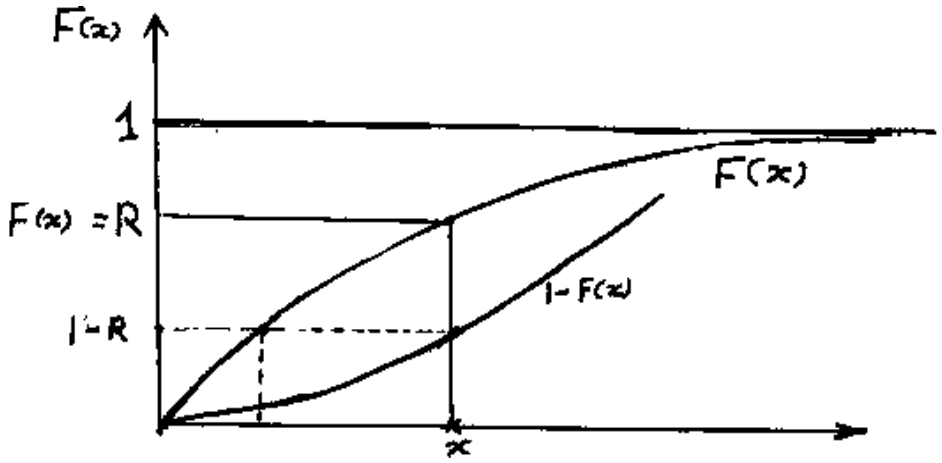


الشكل (15-10)

وإن تابع التوزيع له يساوي:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-\lambda e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (15-15)$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (15-11)

وحتى نجد التحويل المعاكس نضع المعادلة الآتية:

$$R = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$1 - R = e^{-\lambda x}$$

وهنا نلاحظ أن (1-R) هو أيضاً خاضع للتوزيع المنتظم (كمتحول متمم) لذلك فإنه يكفي أن نضع المعادلة السابقة كما يلي:

$$R = e^{-\lambda x}$$

ثم نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فنجد أن:

$$\ln R = -\lambda x$$

وهكذا نجد أن:

$$x = -\frac{\ln R}{\lambda} \qquad (16-15)$$

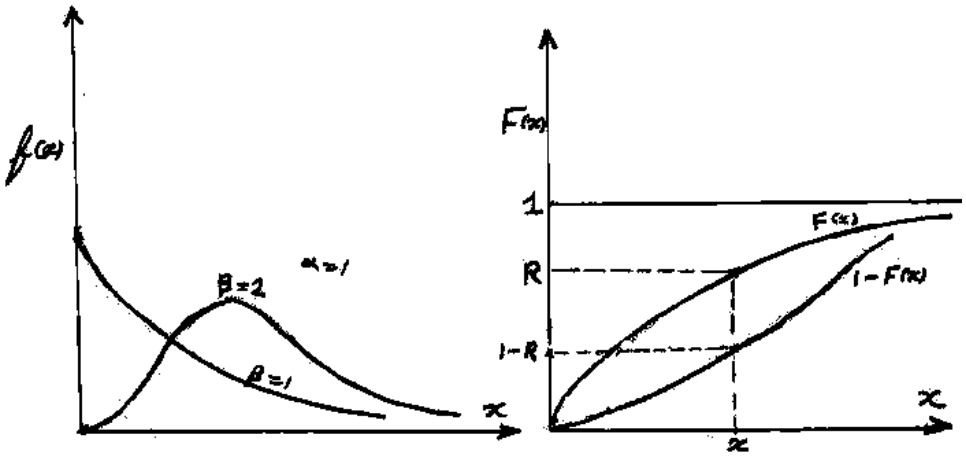
وهذا يعني أنه لتوليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الأسي ذي الوسيط λ، نقوم بتوليد الأرقام العشوائية المنتظمة R ثم نأخذ لوغاريتماها الطبيعية ونقسمها على λ ثم نضرب الناتج بـ (1−) فنحصل على x الخاضعة للتوزيع الأسي المذكور.

ب− توليد الأرقام العشوائية الخاضعة لتوزيع (وايبول Weibull):

إن توزيع (وايبول) يستخدم كثيراً في تحليل الموثوقية وهو يعطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{B-1} \cdot e^{-\alpha x^{\beta}} \quad : x \geq 0 \qquad (17-15)$$

وهو يرسم أحد الأشكال الآتية (حسب قيم α وβ)



الشكل (15−12)

وإن تابع التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع يساوي:

$$F(x) = \int_0^x \alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha x^{\beta}} dt = P(X < x)$$

ولإجراء التكامل نجري التحويل الآتي:

$$y = \alpha \cdot t^{\beta}$$

فيكون لدينا:

$$dy = \alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} dt$$

وإن حدود التكامل الجديدة تصبح 0 و αx^{β}.

وبالتعويض في التكامل السابق نجد أن:

$$F(x)=\int_{0}^{\alpha x^{\beta}} \alpha\cdot\beta\cdot t^{\beta-1}\cdot e^{-y}\cdot\frac{dy}{\alpha\cdot\beta\cdot t^{\beta-1}}=\int_{0}^{\alpha x^{\beta}} e^{-y}dy=1-e^{-\alpha x^{\beta}} \qquad (18-15)$$

وبوضع معادلة التحويل المعاكس الآتية:

$$R=F(x)=1-e^{-\alpha\cdot x^{\beta}}$$

$$1-R=e^{-\alpha\cdot x^{\beta}}$$

وبما أن المتحول المتمم (1-R) هو أيضاً يخضع للتوزيع المنتظم في المجال [1, 0] فإنه يكفي أن نضع المعادلة السابقة على الشكل الآتي:

$$R=e^{-\alpha\cdot x^{\beta}} \qquad (19-15)$$

وهكذا نجد أن x تحسب من العلاقة:

$$\ln R=-\alpha.x^{\beta}$$

$$x=\left[-\frac{\ln R}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\beta}}=F^{-1}(R) \qquad (20-15)$$

وهكذا نجد أنه لتوليد أرقام خاضعة لتوزيع (وايبول) نقوم بتوليد الأرقام المنتظمة R ثم نأخذ لوغاريتماتها الطبيعية ونقسمها على α ونضربها بـ (1−), وأخيراً نحسب الجذر من المرتبة β للناتج السابق.

ج- توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الهندسي:

إن التوزيع الهندسي هو توزيع منقطع ويعرف بالعلاقة الآتية:

$f(x)=p.q^{x}$ $\quad x:0,1,2,3,\ldots..$

$p=1-q$ $\quad$ حيث أن: $\qquad (21-15)$

وإن تابع التوزيع الاحتمالي له يحسب كما يلي:

$$F(x)=\sum_{k=0}^{x} pq^{k}=p\left[1+q+q^{2}+q^{3}+.....+q^{x}\right]$$

$$F(x) = p1 \cdot \frac{1-q^{x+1}}{1-q} = 1-q^{x+1} \qquad (22-15)$$

لأن $p = 1-q$

وبوضع العلاقة التحويلية كما يلي:

$R=F(x)=1-q^{x+1}$

$1-R=q^{x+1}$

وبما أن المتحول المتمم (1-R) هو أيضاً متحول منتظم في المجال [1, 0]، لذلك يكفي أن نضع:

$R=q^{x+1}$

فنجد أن:

$\ln R=(x+1)\ln q$

$$x+1 = \frac{\ln R}{\ln q}$$

$$x = \frac{\ln R}{\ln q} - 1$$

وبما أن x منقطع ويأخذ قيماً صحيحة من ....x:0,1,2,3 فإنه يكفي أن نحسب x من العلاقة:

$$x = \left[\frac{\ln R}{\ln q}\right] = \qquad (23-15)$$

حيث نرمز بالقوس المتوسط للجزء الصحيح من العدد الذي في داخله لأن x يأخذ قيماً صحيحة فقط.

د- توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع المنتظم في المجال [a,b]:

إن التوزيع المنتظم لـ X المسمر على المجال [a,b] يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (24-15)$$

وإن تابع توزيعه التراكمي كما رأينا سابقاً يساوي:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt = \frac{x-a}{b-a}$$

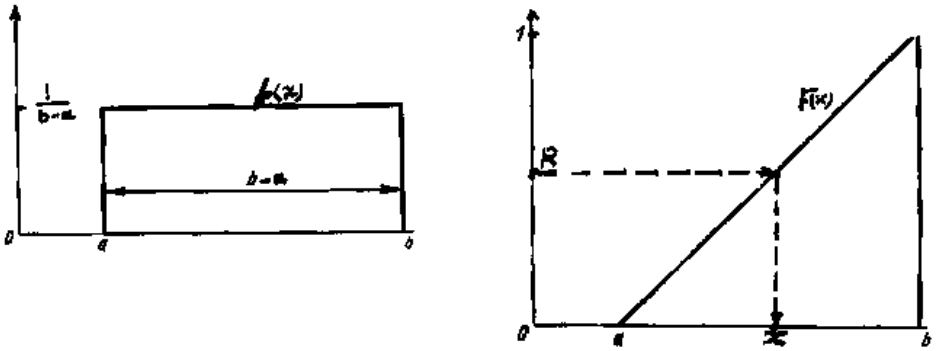
وبوضع معادلة التحويل كما يلي:

$$R = F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

وبذلك نجد أن x يحسب من العلاقة:

$$x=(b-a)R+a \qquad (25-15)$$

والشكل الآتي يوضحان ذلك:



الشكل (a12-15)

أي أنه لتوليد أرقام خاضعة للتوزيع المنتظم المعرف على المجال [a,b] نقوم بضرب الرقم العشوائي المنتظم R بطول المجال (b-a) ونضيف إليه العدد a, وبعبارة أخرى:

أي أنه للانتقال من التوزيع المنتظم في المجال [1, 0] إلى التوزيع المنتظم في المجال [a,b] نطبق العلاقة (15-25), فنضرب R بـ (b-a) ثم نجمع للناتج العدد a.

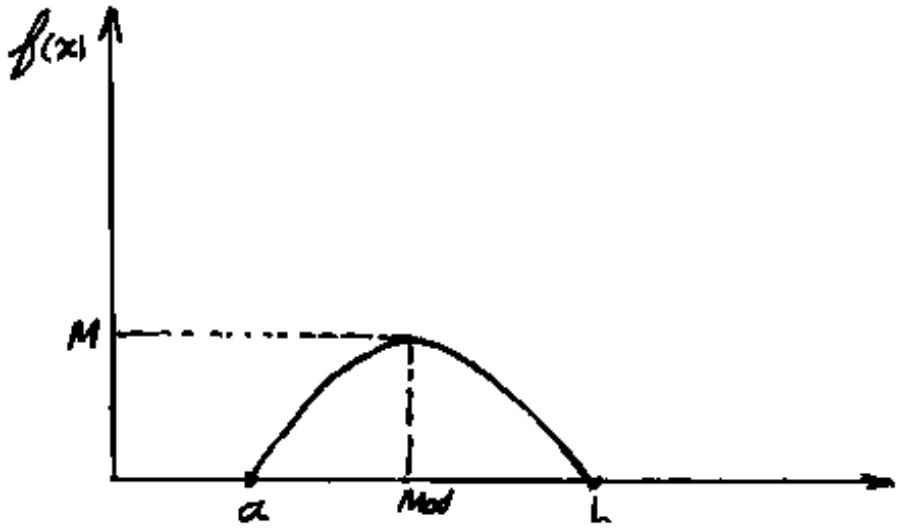
2- أسلوب الرفض والقبول:

يعتمد هذا الأسلوب على سحب أرقام عشوائية من التوزيع المنتظم في المجال [0,1] ثم تحويلها بشكل مناسب إلى متحولات عشوائية ملائمة للتوزيع الاحتمالي المفروض المراد محاكاته, وبعدها يتم اختبارها فيما إذا كانت مقبولة أم لا.

ولتوضيح ذلك نأخذ التوزيع الاحتمالي المعرف على المجال [a, b] والذي يعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & :a \le x \le b \\ 0 & \text{عداذلك} \end{cases} \qquad (26-15)$$

ولنفترض أنه يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (15-13)

ولنفترض أن أكبر قيمة لـ$f(x)$ في هذا المجال هي M (التي تقابل المنوال mod) فإننا نلاحظ أن $f(x)$ تحقق المتراجحة الآتية:

$$0 \le f(x) \le M \qquad : For \qquad a \le x \le b$$

أي أن:

$$0 \le \frac{f(x)}{M} \le 1 \qquad : For \quad a \le x \le b \qquad (27-15)$$

وهكذا يظهر لدينا أن التركيب $\left(\frac{f(x)}{M}\right)$ صالح لمقارنته مع الأرقام العشوائية المنتظمة R, لأن كل منهما واقع في المجال [0,1], ولأنه يحقق العلاقة:

$$P(R < \frac{f(x)}{M}) = \frac{f(x)}{M} \qquad (28-15)$$

وللاستفادة من هذه الخاصة نطبق الخوارزمية البسيطة الآتية:

أ- نقوم بتوليد رقمين عشوائيين منتظمين من المجال [0,1] ولنرمز لهما بـ R_1 و R_2.

ب- نأخذ أحد الرقمين ولـيكن R_1 ونشكل منه متحولاً مناسباً للتوزيع f(x) المعرف على المجال [a, b] وذلك بإجراء التحويل الآتي:

$$x = (b-a)R_1 + a$$

ج- نقوم باختبار فيما إذا كان R_2 يحقق المتراجحة:

$$R_2 \le \frac{f(x)}{M}$$

أي نختبر تحقيق المتراجحة:

$$R_2 \le \frac{f[(b-a)R_1 + a]}{M} \qquad (29-15)$$

د- إذا كان R_2 يحقق المتراجحة السابقة (15-29)، فإننا نقبل أن يكون المتحول x_1 خاضعاً للتوزيع المفروض f(x).

هـ- أما إذا كان R_2 لا يحقق المتراجحة السابقة فإننا نرفض الرقمين R_1 وR_2 ونعود إلى الخطوة (أ) لتوليد رقمين عشوائيين من جديد.

وهكذا نتابع العمل والمقارنة بقدر ما نريد أو بقدر ما تقتضيه شروط المحاكاة.

مثال (2):

لتوليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الاحتمالي السابق:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{عداذلك}\end{cases}$$

نلاحظ أن أكبر قيمة لـ f(x) تساوي: $M=3*1=3$

وبما أن $a=0$, وأن $b=1$

لذلك نقوم بما يلي:

أ- نولد رقمين عشوائيين منتظمين R_1 و R_2 من المجال [0,1].

ب- نشكل المتحول x المجال [a,b] من العلاقة:

$$x=(b-a)R_1+a=(1-0)R_1+0=R_1$$

ج- نقارن R_2 مع الكمية $\frac{f(x)}{M}$ والتي تساوي:

$$\frac{f(x)}{M}=\frac{f(R_1)}{M}=\frac{3R_1^2}{3}=R_1^2$$

د- فإذا كان $R_2\le R_1^2$ نقبل أن يكون $x=R_1$ خاضعاً للتوزيع $f(x)=3x^2$

هـ- أما إذا كان $R_2>R_1^2$، فإننا نرفض أن يكون $x=R_1$ خاضعاً للتوزيع الاحتمالي $f(x)=3x_1^2$ ونعود من جديد إلى الخطوة (أ) لسحب رقمين جديدين R_1 وR_2، وهكذا نكرر العمل بقدر ما نريد, أو بقدر ما تتطلبه عملية المحاكاة.

وسنقوم فيا يلي بتطبيق هذا الأسلوب لتوليد أرقام شبه عشوائية خاضعة لبعض التوزيعات الاحتمالية المشهورة.

أ- توليد أرقام عشوائية خاضعة لتوزيع (بيتا):

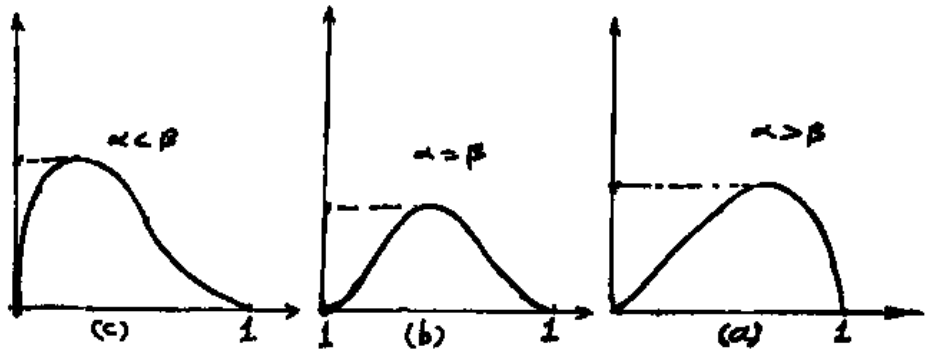
من المعلوم أن لتوزيع (بيتا) تطبيقات كثيرة في العمليات الإدارية وخاصة في تحليل المخططات الشبكية, وإن قانون توزيعه المعرف على المجال [0,1] يعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{عداذلك}\end{cases} \qquad (30-15)$$

حيث إن α وβ هما الوسيطان المستخدمان في تعريف التوزيع (بيتا), وأن $\alpha>0$, $\beta>0$ وإن الرمز $\Gamma(c)$ هو قيمة التكامل (غاما) المعرف بالعلاقة:

$$\Gamma(c) = \int_0^{\infty} x^{c-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \qquad (31-15)$$

وإن منحني التوزيع يأخذ أشكالاً متعددة حسب قيم α و β, ويمكن تصنيفها إلى ثلاثة أنواع: المنحني المتشائم(a) والمنحني المتناظر(b) والمنحني المتفائل(c), وذلك كما في الشكل الآتي:



الشكل رقم (15-14): أشكال توزيع بيتا

ولتوليد أرقام عشوائية خاضعة لهذا التوزيع نقوم قبل كل شيء بإيجاد أكبر قيمة له M وذلك من خلال حساب المشتق ووضعه مساوياً للصفر, فنجد أن:

$$f'(x) = c \cdot (\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} - c(\beta-1)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2} = 0$$

وباختصار الحدود المشتركة نحصل على أن:

$$(\alpha\text{-}1)(1\text{-}x) - (\beta\text{-}1)x = 0$$

وهكذا نجد أن:

$$x = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} = \text{mod} = \text{المنوال} \qquad (32-15)$$

وهي قيمة المتحول x التي تقابل أكبر قيمة للتابع M, ويمكن حساب قيمة المنوال mod والقيمة الكبرىM المقابلة له بعد معرفة قيمتي α وβ وتعويضهما في العلاقتين (15-32) و (15-30), وبعدها نقوم بتطبيق الخوارزمية الآتية:

- نقوم بتوليد رقمين عشوائيين منتظمين من المجال [0,1] مثل R_1 وR_2 ، وبما أن التوزيع معرف على المجال [0,1] فلا حاجة لتحويل R_1 إلى مجال آخر.
- نقارن قيمة R_2 مع $\frac{f(R_1)}{M}$ أي مع الكمية

$$\frac{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot R_1^{\alpha-1}(1-R_1)^{\beta-1}}{M}$$

- فإذا كانت $R_2 \le \frac{f(R_1)}{M}$ فإننا نعتبر الرقم العشوائي R_1 خاضعاً لتوزيع بيتا السابق.
- أما إذا كانت $R_2 > \frac{f(R_1)}{M}$ فإننا نرفض الرقمين R_1 وR_2 ونعود إلى الخطوة (1), ونعيد التجربة بقدر ما نريد أو بقدر ما تقتضيه شروط المحاكاة.

ملاحظة (1):

هناك خوارزمية أخرى لتوليد الأرقام الخاضعة للتوزيع بيتا تتلخص بما يلي:

أ- نقوم بتوليد رقمين عشوائيين منتظمين من المجال [0,1] مثل R_1 و R_2.

ب- نقوم بتحويل كل منها إلى رقمين S_1 و S_2 كما يلي:

$$S_1 = R_1^{\frac{1}{\alpha}} \qquad S_2 = R_2^{\frac{1}{\beta}}$$

ج- نأخذ مجموع الرقمين S_1+S_2 ونقارنه مع العدد 1.

د- إذا كان $S_1+S_2>1$ فإننا نرفض الرقمين S_1 , S_2 ونعود إلى الخطوة (أ) ونعيد التجربة من جديد.

هـ- إذا كان $S_1+S_2\le1$ فإن الرقم S المتشكل من العلاقة:

$$S = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \qquad (33-15)$$

يخضع إلى توزيع بيتا ذي الوسيطين α وβ.

ملاحظة (2):

وهناك خوارزمية ثالثة لمحاكاة التوزيع β وتتلخص بما يلي:

أ- نقوم بتوليد خمسة أرقام عشوائية منتظمة من المجال [0,1] ولتكن هي:

$R_5 , R_4 , R_3 , R_2 , R_1$

ب- نقوم بترتيب هذه الأرقام تصاعدياً, ولتكن كما يلي:

$$R_1<R_2<R_3<R_4<R_5 \qquad (34-15)$$

ج- ويبرهن على أن الرقم الأوسط R_3 يخضع لتوزيع بيتا المتناظر بوسيطين $\alpha = 3$ و$\beta = 3$ والرقم R_2 يخضع لتوزيع بيتا المتفائل بوسيطين $\alpha = 2$ و $\beta = 3$. والرقم R_4 يخضع لتوزيع بيتا المتشائم بوسيطين $\alpha = 3$ و$\beta = 2$.

حيث يتم حساب α وβ من العلاقة: α هو الرقم العشوائي R_α أما β فتحسب من العلاقة α -n حيث إن n هو عدد الأرقام المسحوبة لاستخدامها في الترتيب.

ملاحظة (3):

أما إذا كان التوزيع بيتا معرفاً على المجال [a, b] فإننا نقوم بإجراء تحويل الأرقام العشوائية المقبولةR_1 والخاضعة للتوزيع بيتا المعرف على المجال [0,1] بوساطة العلاقة:

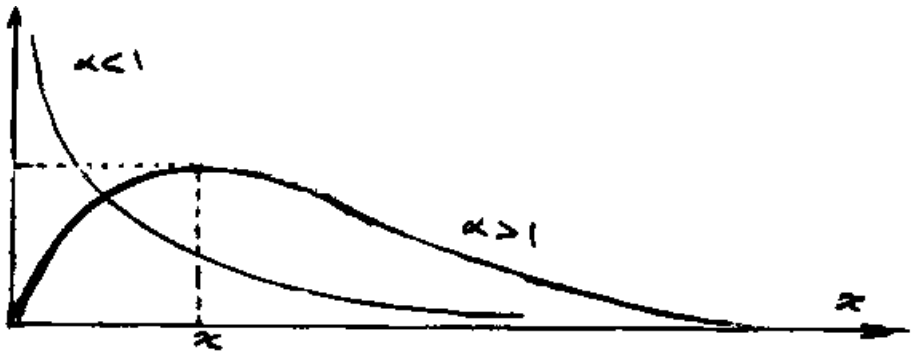
$$x=(b-a)R_1+a$$

فنحصل على أرقام خاضعة للتوزيع بيتا المعرف على المجال [a, b].

أ- توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع (غاما): يستخدم هذا التوزيع كثيراً في التطبيقات الهندسية, وهو يعرف بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{x}{\beta}} & x\geq 0 \quad \alpha>0,\beta>0\\ 0 & \text{عداذلك}\end{cases} \qquad (35-15)$$

وهو يرسم عدة منحنيات حسب قيم α وβ منه الشكل:



الشكل رقم (15-15)

وهنا نشر إلى أنه عندما تكون $\alpha=1$ فإن التوزيع يتحول إلى التوزيع الأسي الذي درسناه سابقاً:

$$f(x)=\beta e^{-\beta x}$$

وقبل أن نعالج توليد الأرقام نقوم بالبحث عن أكبر قيمة له M وذلك من خلال حساب المشتق ووضعه مساوياً للصفر فنجد أن:

$$f(x)=c\cdot(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2}\cdot e^{-\beta x}+c\cdot x^{\alpha-1}(-\beta e^{-\beta x})=0$$

وبإجراء الاختصارات الممكنة نحصل على أن:

$$(\alpha\text{-}1)\text{-}x.\ \beta=0 \qquad (36-15)$$

ومنها نجد أن:

$$x=\frac{\alpha-1}{\beta}=\text{mod}\ \text{المنوال}$$

وبتعويض هذه القيمة في f(x) نحصل على أكبر قيمة له M التي تقابل المنوال mod، ولتوليد الأرقام العشوائية الخاضعة لهذا التوزيع نقوم بما يلي:

- نقوم بتوليد رقمين عشوائيين منتظمين من المجال[0,1] مثل R_2,R_1.
- نقوم بتشكيل متحول جديد $x=\frac{1}{R_1}$ فيصبح مجال تحول x هو $[0,+\infty[$ وهو مطابق لمجال التوزيع f(x).
- نقوم بمقارنة R_2 مع $\frac{f(\frac{1}{R_1})}{M}$.
- فإذا كان $R_2 \le \frac{f(\frac{1}{R_1})}{M}$ نعتبر الرقم المتحول $x=\frac{1}{R_1}$ خاضعاً للتوزيع غاما.
- أما إذا كانت $R_2 > \frac{f(\frac{1}{R_1})}{M}$ نرفض العملية ونعود إلى الخطوة (1) لمعاودة التجربة من جديد.

3- الأسلوب المختلط (للتحويل المعاكس والرفض):

يعتمد هذا الأسلوب على استخدام الأسلوبين السابقين معاً (التحويل المعاكس والرفض) لتوليد الأرقام العشوائية الخاضعة لبعض التوزيعات الاحتمالية المعقدة, وذلك باستخدام التوزيع الشرطي للمتحول x.

لذلك نفترض أن f(x) هو قانون التوزيع الاحتمالي المراد محاكاته وأن g(x/y) هو التوزيع الشرطي لـx عند القيمةy. حيث y هو وسيط يدخل في تعريف التوزيع المنفرد f(x), فإذا كان y خاضعاً لتابع التوزيع التراكمي H(y). وكان التوزيع P(x, y) هو التوزيع المشترك لـ (x,y) فإن:

$$P(x,y)=h(y)g(x/y)$$

وبذلك نجد أن:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x/y)h(y)dy \qquad (37-15)$$

وإن تطبيق هذا الأسلوب قد يكون أسهل من استخدام الأسلوبين السابقين وسنقوم بالاستفادة منه في توليد أرقام خاضعة للتوزيعات الآتية:

أ- توليد أرقام عشوائية خاضعة لتوزيع بواسون:

إن لتوزيع بواسون تطبيقات كثيرة في الاقتصاد والإدارة (إدارة المخزون, نظرية الصفوف, مراقبة الجودة,.....), ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x : 0,1,2,.....\infty \qquad (38-15)$$

وهو يعطينا احتمال أن يكون عدد الحوادث خلال واحدة الزمن مساوياً لـ x حادثاً, ويلاحظ من خلال تعريفه أن استخدام أسلوب التحويل المعاكس لا يجدي نفعاً لاستخراج x, لذلك نلجأ إلى الأسلوب المختلط والاستعانة بتوزيع جديد هو التوزيع الأسي $h(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y}$ ونولد أرقاماً عشوائية متتالية خاضعة له ولتكن:

$y_1 , y_2 , y_3 .....y$

وذلك من خلال تطبيق التحويل المعاكس للتوزيع الأسي الآتي:

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln y_i$$

ثم نقوم بأخذ المجموع التراكمي لهذه الأرقام حتى تصبح المتراجحة الآتية محققة:

$$\sum_{i=1}^{x} y_i \le 1 \le \sum_{i=1}^{x+1} y_i \qquad (39-15)$$

وعندها نعتبر العدد x خاضعاً لتوزيع بواسون, علماً بأن x هنا هو عدد الأرقام العشوائية y_i الخاضع للتوزيع الأسي $h(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ التي إذا أخذنا مجموعها لم نتجاوز العدد 1, ولكن إذا أضفنا عدداً آخر y_{x+1} لأصبح ذلك المجموع أكبر من 1.

وهكذا يمكننا أن نصمم برنامجاً حاسوبياً لإجراء مثل هذه العمليات, أو نقوم بإجرائها عملياً على الآلات الحاسبة العادية.

ب- توليد أرقام عشوائية خاضعة لتوزيع (إيرلنغ):

من المعروف أن توزيع (إيرلنغ) هو حالة خاصة من توزيع (غاما) عندما يكون الوسيط α صحيحاً وموجباً. ولقد تم البرهان على أن هذا التوزيع ينشأ عن مجموع $k = \alpha$ متحولاً عشوائياً خاضعاً للتوزيع الأسي بتوقع رياضي موحد يساوي $\frac{1}{k}$.

إذن لتوليد أرقام عشوائية خاضعة لتوزيع (إيرلنغ) نقوم بتوليد k رقماً خاضعاً للتوزيع الأسي $h(y) = ke^{-ky}$ ثم نأخذ مجموع لوغاريتماتها x. وبذلك نحصل على العلاقة الآتية:

$$x = \sum_{i=1}^{k} y_i = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln R_i \qquad (40-15)$$

حيث R_i هي أرقام عشوائية منتظمة من المجال[0,1]. وللحصول على أرقام أخرى نكرر العملية بقدر ما نريد أو بقدر ما تقتضيه شروط المحاكاة.

ج- توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الثنائي:

إن التوزيع الثنائي يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad (41-15)$$

حيث أن x هو عدد مرات تحقق التجربة الثنائية خلال n تكراراً لها. وأن p احتمال تحقق الحادث المطلوب، وهو ثابت في كل التجارب، وإن q=1-p.

ولتوليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الثنائي نقوم بما يلي:

- نولد n رقماً عشوائياً خاضعاً للتوزيع المنتظم في المجال [0,1] ولتكن:

$R_1 \quad R_2 \quad R_3 \ldots\ldots R_n$

- نحسب عدد الأرقام التي هي أقل من الاحتمال p (أي عدد الأرقام التي تحقق $Ri \le p$) وليكن عددها x.
- نعتبر x المحدد سابقاً خاضعاً للتوزيع الثنائي السابق.

- نعود إلى الخطوة (1) ونكرر العمل بقدر ما نريد أو بقدر ما تقتضيه شروط المحاكاة.

4- أسلوب (بوكس- موليرBox-Muler) لتوليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الطبيعي العام:

ويعتمد هذا الأسلوب على معالجة التوزيع الطبيعي المشترك لمتحولين مستقلين Z_2, Z_1 خاضعين للتوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

نفترض أن:

$$f(Z_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z_1^2}{2}} \qquad f(Z_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z_2^2}{2}}$$

وبذلك نجد أن التوزيع الطبيعي المشترك لهما هو:

$$f(Z_1,Z_2)=f(Z_1)\cdot f(Z_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(Z_1^2+Z_2^2)} \qquad (42-15)$$

ثم نقوم بإجراء التحويلين الآتيين (من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية):

$$\begin{aligned} Z_1&= r\cos\theta \\ Z_2&= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (A)$$

وبتعويض هذا التحويل وملحقاته $(|J|=r)$ نحصل على التوزيع المشترك بدلالة المتحولات القطبية θ, r الآتي:

$$f(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2}\cdot r \qquad (43-15)$$

ومن هذا التوزيع المشترك يمكننا الحصول على التوزيعين المنفردين لـ θ ولـr من المتكاملين الآتيين حيث نجد أن:

$$f(\theta)=\int_0^{+\infty}f(r,\theta)dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\frac{1}{2\pi}\left[-e^{\frac{r^2}{2}}\right]_0^{-\infty}=\frac{1}{2\pi}$$

وبالآتي نحصل على أن: $f(\theta)=\frac{1}{2\pi}$ وهو التوزيع المنتظم في المجال $[0,2\pi]$.

وكذلك نجد أن:

$$f(r)=\int_0^{2\pi} f(r,\theta)d\theta=\frac{re^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta=re^{-\frac{r^2}{2}}$$

وهو (توزيع ريلي) المعرف على المجال $]0,+\infty[$. ولتحويل هذا التوزيع إلى التوزيع الأسي نجري التحويل الآتي: $u = r^2$ وبذلك نجد أن: $du = 2rdr$ أي أن $\frac{dr}{du}=\frac{1}{2R}$، وبتعويض ذلك في توزيع (ريلي) السابق نحصل على أن:

$$f(u)=re^{-\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{2r}=\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}} \qquad (44-15)$$

وهو التوزيع الأسي الذي وسيطه $\lambda=\frac{1}{2}$ وتوقعه $E(u)=\frac{1}{\lambda}=2$

ومما تقدم نلاحظ أنه يمكننا توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع المنتظم في المجال $[0,2\pi]$ من جراء تحويل الرقم العشوائي المنتظم R_1 بوساطة العلاقة الآتية:

$$\theta=(b-a)R_1+a=2\pi R_1 \qquad (45-15)$$

حيث R_1 هي أرقام عشوائية منتظمة من المجال $[0,1]$.

ولتوليد أرقام عشوائية u خاضعة للتوزيع الأسي نستفيد من طريقة التحويل المعاكس فنولد أرقاماً عشوائيةً R_2 ونحولها وفق العلاقة الآتية:

$$u=-2\ln R_2$$

حيث R_2 هي أرقام عشوائية منتظمة من المجال $[0,1]$، وهكذا نجد أن قيم u حيث $u = r^2$ الخاضعة للتوزيع الأسي تحاكى بالعلاقة:

$$r^2=-2\ln R_2$$
$$r=\left[-\ln R_2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (46-15)$$

وبالتعويض في العلاقتين التحويليتين (A) نحصل على العلاقتين اللتين تولدان الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري وهما:

$$Z_1 = [-\ln R_2]^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi \cdot R_1) \qquad (47-15)$$

$$Z_2 = [-\ln R_2]^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi \cdot R_1) \qquad (48-15)$$

وإن كلاً من هاتين العلاقتين تعطياننا أرقاماً شبه عشوائية وخاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري N(0,1).

ملاحظة:

إذا أردنا توليد أرقام خاضعة للتوزيع الطبيعي العام $N(\mu,\sigma^2)$ المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

نقوم بتحويل الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري بوساطة العلاقة:

$$x = \sigma.z + \mu$$

وتأخذ معادلة التوليد الأولى الشكل الآتي:

$$x = \sigma[-\ln R_2]^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi R_1) + \mu \qquad (49-15)$$

5- الأساليب التقريبية لتوليد الأرقام العشوائية:

يقتضي استخدام هذا الأسلوب أن نقوم بتقريب أحد الكميات الثلاثة الآتية:

أ- قانون التوزيع الاحتمالي للمتحول المراد محاكاته.

ب- تابع التوزيع التراكمي للتوزيع المراد محاكاته.

ج- علاقة التحويل المعاكس لتابع التوزيع التراكمي للتوزيع المراد محاكاته.

ولتطبيق هذه الأساليب نأخذ التوزيعات الآتية:

أ- المحاكاة التقريبية للتوزيع الطبيعي المعياري:

تعلم أن التوزيع الطبيعي المعياري للمتحول Z يعرف بالعلاقة:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} \qquad -\infty < Z < +\infty \qquad (50-15)$$

وإن أحد أهم التقريبات للكمية $e^{-\frac{Z^2}{2}}$ هو تقريب (كان) الذي يعطى بالعلاقة:

$$e^{-\frac{Z^2}{2}} = \frac{2e^{-KZ}}{\left[1+e^{-KZ}\right]^2} \qquad Z > 0 \qquad (51-15)$$

حيث أن $K = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$

نقوم الآن بالبحث عن تابع التوزيع التراكمي المعياري مستخدمين هذه العلاقة التقريبية كما يلي:

$$F(Z) = \int_0^Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2e^{-Kt}}{\left[1+e^{-Kt}\right]^2} dt = \left[\frac{2}{1+e^{-KZ}}\right] - 1 \qquad (52-15)$$

وبوضع هذه النتيجة مساوية للرقم العشوائي المنتظم نحصل على أن:

$$F(Z) = \left[\frac{2}{1+e^{-KZ}}\right] - 1 = R$$

وبإجراء الإصلاحات اللازمة نحصل على أن:

$$Z = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right) \qquad (53-15)$$

وعندما نريد توليد أرقام خاضعة للتوزيع الطبيعي العام $N(\mu,\sigma^2)$ نستخدم التحويل:

$$x = \sigma Z + \mu \qquad (54-15)$$

ب- توليد أرقام خاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري والطبيعي العام:

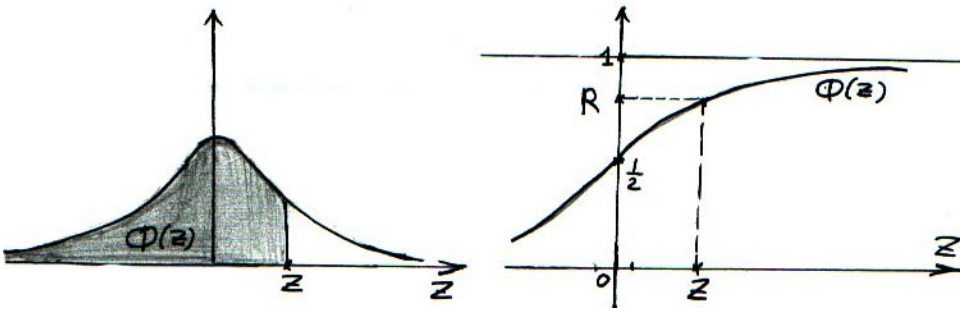
نعلم أن قانون التوزيع الطبيعي المعياري يعطى بالعلاقة:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} \qquad -\infty < Z < +\infty$$

وبما أن تابع التوزيع المعياري يساوي:

$$\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

ويرسم الشكل الآتي:



الشكل (15-16)

وبوضع معادلة التحويل المعاكس كما يلي:

$$\Phi(Z) = R$$

ومنها نجد أن:

$$Z = \phi^{-1}(R) \qquad (55-15)$$

ومنها يمكننا توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الطبيعي العام $N(\mu,\sigma^2)$ من العلاقة:

$$x = \sigma Z + \mu = \sigma \cdot \Phi^{-1}(R) + \mu$$

حيث أن $\phi^{-1}(R)$ هو التابع المعاكس لتابع التوزيع المعياري. ولكن نظراً لصعوبة التعامل مع هذا التابع نضطر إلى توليد أرقام عشوائية خاضعة لهذا التوزيع بطريقة تقريبية.

واعتماداً على نظرية النهاية المركزية من الاحتمالات والتي تنص على أن مجموع عدة متحولات مستقلة يخضع تقاربياً للتوزيع الطبيعي العام وبتوقع يساوي مجموع التوقعات وتباين يساوي مجموع التباينات.

لذلك نجد أنه إذا قمنا بتوليد n رقماً عشوائياً منتظماً من المجال [0,1]:

$$R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \ldots\ldots R_n$$

فإن مجموعها s يساوي:

$$s = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

وإن التوقع الرياضي لكل منها يساوي:

$$E(R_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

وإن تباين كل منها يساوي:

$$\sigma^2(R_i) = (\frac{b-a}{12}) = \frac{1}{12}$$

وإن التوقع الرياضي لمجموعها يساوي:

$$E(s) = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \qquad (56-15)$$

وإن التباين الكلي لمجموعها يساوي:

$$\sigma^2(s) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{12} = \frac{n}{12} \qquad (57-15)$$

وبذلك فإن التوزيع الطبيعي للمجموع s يأخذ الشكل الآتي:

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{n}{12}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)^2} \qquad (58-15)$$

وإن المتحول المعياري المقابل لهذا التوزيع هو:

$$Z = \frac{s-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \qquad (59-15)$$

وهكذا نحصل على أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري من الأرقام R_i. أي أنه يمكننا أن نولد أرقاماً عشوائية خاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري من العلاقة (59-15) السابقة بوساطة توليد n رقماً منتظماً من المجال [0,1]، ثم نأخذ مجموعها $\sum R_i$ ونطرح منه $\frac{n}{2}$ ونقسمها على $\sqrt{\frac{n}{12}}$.

وللحصول على أرقام أخرى نعيد العمليات من جديد ونولد n رقماً منتظماً ونحسب Z من العلاقة السابقة، ومن أجل الاختصار والتسهيل نكتفي بتوليد n=12 رقماً عشوائياً منتظماً من المجال [0,1] وبذلك تأخذ العلاقة السابقة الشكل الآتي:

$$Z = (\sum_{i=1}^{6} R_i - 3) = \qquad (59-15)$$

أما إذا أخذنا n=6 أرقام عشوائية منتظمة فإن العلاقة السابقة تأخذ:

$$Z = (\sum R_i - 3) \cdot \sqrt{2} \qquad (60-15)$$

ولتوليد أرقام خاضعة للتوزيع الطبيعي العام نستخدم العلاقة:

$$x = \sigma \cdot Z + \mu \qquad (61-15)$$

ونكرر التجربة والعمل بقدر ما نريد للحصول على الأرقام شبه العشوائية x الخاضعة للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$.

6- أساليب توليد الأرقام لبعض التوزيعات الخاصة:

أ- توليد أرقام خاضعة لتوزيع χ^2:

نعلم أن توزيع χ^2 يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \qquad x \geq 0 \qquad (62-15)$$

حيث إن υ هي درجة الحرية، ولنفترض أن υ عدد صحيح موجب.

لتوليد أرقام عشوائية خاضعة لهذا التوزيع يمكننا أن نستفيد من العلاقات التي تربطه مع التوزيعات الأخرى. وهنا نلاحظ أنه يمكن اعتبار أن التوزيع χ^2 هو حالة خاصة من توزيع (غاما) وذلك بوضع $\beta = 2$ و $\alpha = \frac{\nu}{2}$ وبذلك يكون ناتجاً عن مجموع ν متحولاً خاضعاً للتوزيع الأسي. وبناء على ذلك يمكننا الاستفادة من هذه العلاقة عند توليد الأرقام. وهنا نميز بين الحالتين الآتيتين:

- إذا كانت درجة الحرية υ تأخذ قيمة زوجية, فإن قيمة α في هذه الحالة تصبح صحيحة, والتوزيع (غاما) يتحول إلى توزيع (إيرلنغ) بمعلم $\theta =$ υ وعندها يمكننا توليد الأرقام الخاضعة له من العلاقة:

$$x = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha} \ln R_i \qquad (63-15)$$

- إذا كانت درجة الحرية υ تأخذ قيمة فردية: فإننا نضع $K = \frac{\nu - 1}{2}$ ونقوم بتوليد الأرقام من العلاقة:

$$x = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} \ln R_i + Z^2 \qquad (64-15)$$

- وهناك أسلوب آخر لتوليد الأرقام الخاضعة لـ χ^2 وذلك بالاعتماد على علاقته بالتوزيع الطبيعي المعياري حيث أن مجموع مربعات n متحولاً طبيعياً معيارياً يخضع للتوزيع χ^2 بـ n درجة حرية. لذلك نستخدم ببساطة العلاقة الآتية لتوليد الأرقام الخاضعة لـ χ^2 وهي:

$$x = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^{\,2} \qquad (65-15)$$

حيث Z_i مولدة وفق العلاقات السابقة وخاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري

ب- توليد أرقام عشوائية خاضعة لتوزيع ستودنت t:

نعلم أن توزيع ستودنت يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu \cdot k}\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \qquad (66-15)$$

حيث إن υ هو درجة الحرية ولنفترض أن تأخذ قيمة صحيحة موجبة. وإن هذا التوزيع ينشأ عن تركيب متحولين هما:

Z الخاضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

x الخاضع لتوزيع χ^2 ذي υ درجة حرية بوساطة العلاقة:

$$x = \frac{Z}{\sqrt{\frac{x}{\nu}}} \qquad (67-15)$$

ويتم تطبيق هذه العلاقة بتوليد $\upsilon+1$ رقماً عشوائياً خاضعاً للتوزيع الطبيعي المعياري:

$$Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \ldots\ldots Z_\upsilon \quad Z_{\upsilon+1}$$

ثم حساب المتحول x الخاضع لتوزيع ستودينت من العلاقة:

$$x = \frac{Z_1}{\left[\frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} Z_i^{\,2}}{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (68-15)$$

ج- توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع F (فيشر سنديكور):

إن التوزيع F يعطى بالعلاقة:

$$F_{\nu,\nu_2}(x) = \frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \cdot \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left[\nu_2+\nu_1 x\right]^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \qquad (69-15)$$

حيث إن υ_1 و υ_2 هما درجتا الحرية لهذا التوزيع ولنفترض أنهما تأخذان قيمتان صحيحتان موجبتان، وبما أن التوزيع F ينشأ عن تركيب متحولين x_1 , x_2 خاضعين للتوزيع χ^2 بدرجة حرية v_1 , v_2 بوساطة العلاقة:

$$x = \frac{x_1/\nu_1}{x_2/\nu_2}$$

وهكذا يمكننا أن نولد $\upsilon_1 + \upsilon_2$ رقماً عشوائياً خاضعاً للتوزيع الطبيعي المعياري:

$$Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \ldots\ldots Z_{\nu_1} \quad Z_{\nu_1+1} \quad Z_{\nu_2+2} \ldots\ldots Z_{\nu_1+\nu_2}$$

وبعدها نولد الأرقام الخاضعة للتوزيع F من العلاقة:

$$x = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu_1} Z_i^{\,2}}{\nu_1}}{\dfrac{\sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} Z_i^{\,2}}{\nu_2}} = \frac{\nu_2 \sum_{i=1}^{\nu_1} Z_i^{\,2}}{\nu_1 \sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} Z_i^{\,2}} \qquad (70\text{-}15)$$

فنحصل على قيم المتحول x الخاضع للتوزيع F بدرجتي حرية ν_1 , ν_2.

IV- اختبارات المطابقة والتوفيق:

إن توليد أرقام شبه عشوائية منتظمة يحتاج دائماً إلى اختبار العشوائية، وذلك للتأكد من توزيعه المنتظم في المجال [0,1]. وإن أهم الاختبارات المستخدمة من هذا المجال هي:

1- اختبار χ^2 للتكرارات:

ويعتمد على إجراء مقارنة ببين التكرارات الفعلية للأرقام المولدة أو التكرارات المتوقعة ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$C = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right] \qquad (71\text{-}15)$$

وهو مقدار يخضع لتوزيع $\chi^2(x)$ ذي (n-1) درجة حرية:

حيث أن n هو عدد الفئات أو النقاط المبوبة أو المترتبة.

وأن O_i هي التكرارات الفعلية للأرقام المولدة.

وأن N هو المجموع الكلي لعدد الأرقام المولدة.

وأن E_i هي التكرارات المتوقعة وتساوي هنا $E_i = \frac{N}{n}$.

وبعد حساب المقدار C نقارنه مع قيمة χ^2 الحرجة عند مستوى دلالة α ودرجة حرية (n-1)، فإذا كانت $C < \chi^2$ نقبل بعدم وجود فروقات جوهرية بين التكرارات الفعلية للأرقام المولدة والتكرارات المتوقعة, والعكس بالعكس.

مثال (2):

لنفترض أننا قمنا بتوليد N=100 رقماً عشوائياً منتظماً من المجال [0,1] وكانت تكراراتها موزعة على عشرة مجالات جزئية كما يلي:

المجال الجزئي	0-0.10	0.10-0.20	0.20-0.30	0.30-0.40	0.40-0.50	0.50-0.60	0.60-0.70	0.70-0.80	0.80-0.90	0.90-1
التكرارات الفعلية	10	11	11	11	8	11	10	13	10	5
التكرارات المنظمة النظرية $\frac{100}{10}=10$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

والمطلوب اختبار فيما إذا كانت هذه الأرقام موزعة توزيعاً منتظماً في المجال [0,1].

لإجراء ذلك الاختبار نحسب قيمة التكرارات المتوقعة فنجد أن:

$$E_i = \frac{N}{n} = \frac{100}{10} = 10$$

وهي القيم الموضوعة في الجدول السابق.

ثم نقوم بحساب قيمة مؤشر الاختبار C من العلاقة:

$$C = \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(5-10)^2}{10} = 4.2$$

ثم نبحث في جدول التوزيع $\chi^2(x)$ عن القيمة الحرجة χ^2 المقابلة لمستوى دلالة $\alpha = 0.05$ ولدرجة حرية $\nu = 10 - 1 = 9$ فنجد أنها تساوي: $\chi_{9\ 0.05} = 16.919$

وبإجراء المقارنة نجد أن: $C < \chi^2_{9\ 0.05}$

لذلك نقبل فرضية العدم ونعترف بعدم وجود فروقات جوهرية بين التكرارات الفعلية والتكرارات النظرية.

2- اختبار كولموجوردوف- سميرنوف:

وهو يعتمد على تابع التوزيع التراكمي الفعلي للأرقام المولدة والتي نفترض أن عدد N رقماً ويعرف عند أي رقم x_0 بالعلاقة:

$$S(x_0) = \frac{m}{n} \qquad (72-15)$$

حيث إنه هو عدد الأرقام المولدة والتي لا يتجاوز الرقم x_0, ولنفترض أن تابع التوزيع الاحتمالي النظري لـ x_0 هو $F(x_0)$، فإن مؤشر اختبار كولموجوردوف- سميرنوف يعرف بأنه الفرق D بين تابع التوزيع النظري $F(x_0)$ وتابع التوزيع الفعلي $s(x_0)$ في المجال [0,1] أي أن:

$$D = |F(x_0) - S(x_0)| \qquad (73-15)$$

وبعد حساب قيمة D نقارنها بالقيمة الحرجة لـ $D_{1-\alpha}$ المقابلة لمستوى دلالة α, فإذا كانت $D<D_{1-\alpha}$ نقبل بعدم وجود فروقات جوهرية بين التوزيعين الفعلي والنظري. والعكس بالعكس.

تمرينات

1- تعلم أن تيار الزبائن في نظرية صفوف الانتظار يخضع لتوزيع بواسون فإذا كان معدل الوصول $\lambda = 3$ أشخاص في الدقيقة, فالمطلوب:

أ- كتابة العلاقة الرياضية للتوزيع الاحتمالي لعدد القادمين إلى النظام.

ب- كتابة العلاقة الرياضية لتوليد الأرقام العشوائية الخاضعة لتوزيع بواسون بدلالة الأرقام العشوائية المنتظمة.

ج- استخدم الآلة الحاسبة العادية لاستخراج أرقام عشوائية منتظمة Ri بوساطة الزر Ran.

د- ولد من هذه الأرقام أرقاماً عشوائية خاضعة لتوزيع بواسون وضعها في جدول خاص وذلك باستخدام العلاقة السابقة.

هـ- تأكد من توقعها الرياضي يساوي λ تقريباً.

2- تعلم أن مدة الانتظار في الدور تخضع للتوزيع الأسي, فإذا كان معدل الخدمة $\mu = 4$ أشخاص في الدقيقة, فالمطلوب:

أ- كتابة العلاقة الرياضية للتوزيع الاحتمالي لمدة الانتظار.

ب- كتابة العلاقة الرياضية لتوليد الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيع الأسي.

ج- استخدام الآلة الحاسبة العادية لاستخراج أرقام عشوائية منتظمة.

د- توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع الأسي باستخدام العلاقة السابقة.

هـ- تأكد من أن التوقع الرياضي لهذه الأرقام يساوي μ .

3- تعلم أن مدة تنفيذ المشروع خاضعة للتوزيع بيتا, ولنفترض أن منه $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ وإن مجال تعريفه [3,5] شهراً والمطلوب:

أ- كتابة العلاقة الرياضية للتوزيع الاحتمالي لمدة تنفيذ المشروع.

ب- كتابة العلاقة الرياضية لتوليد الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيع بيتا.

ج- توليد أرقام عشوائية خاضعة للتوزيع بيتا في المجال [0,1] باستخدام أحد الخوارزميات ثم تحويلها إلى أرقام عشوائية من المجال [3,5].

د- حساب التوقع الرياضي لهذه الأرقام.

الجداول الإحصائية

جدول رقم (I): جدول قيم التوزيع الثنائي:

إنّ التوزيع الثنائي يعرف بالعلاقة:

$$P(X = x) = P_x = C_n^x P^x q^{n-x}$$

حيث إن: P هو احتمال تحقق الحادث المدروس في كل تجربة.

x هو عدد مرات التحقق عند إجراء n تجربة.

ولاستخراج قيم التوزيع الثنائي المقابلة لقيمة معينة n ولاحتمال محدد P؛ نبحث عن الجدول المناسب لقيمة n ثم عن العمود المناسب لقيمة P, وفيه نبحث عن الاحتمال المطلوب والمقابل لقيمة (أو لجميع قيم) x.

مثال:

عندما تكون $P = 0.3$, $n = 10$ فإننا نجد من الجدول الثاني والعمود الثالث أن:

$$P(X = 6) = P_6 = 0.0368$$

كما يمكننا أن نحصل على جميع قيم التوزيع الاحتمالي لهذه الحالة فنجد أنها تساوي:

X:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_x:	0,0282	0,1211	0,2335	0,2606	0,2001	0,1029	0,0368	0,0090	0,0014	0,0001	0,0000

وهنا نشير إلى أنه إذا كانت $P<0,5$ فإن قيمتها موجودة في السطر الأعلى وعندها نقرأ قيم X من العمود الأيسر.

أما إذا كانت $P>0,5$ فإن قيمها موجودة في السطر الأسفل وعندها نقرأ قيم X من العمود الأيمن ومن الأسفل إلى الأعلى. وعندما تكون قيمة n تختلف عن القيم الثلاثة 5 أو 10 أو 15 الموجودة في الجداول الثلاثة فإننا نضطر إلى حساب الاحتمالات المطلوبة بطريقة حسابية.

جدول رقم (II): قيم توزيع بواسون:

إن توزيع (بواسون) يعرف بالعلاقة:

$$P_m(X = x) = P_x = \frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

حيث أن: x هو عدد مرات تحقق الحادث المدروس وهو عدد طبيعي.

وأن: m (أوλ) هو ثابت التوزيع ويساوي التوقع الرياضي لـ X.

والجدول يتضمن نوعين من القيم هما:

1- قيم التوزيع الاحتمالي مقابل كل قيمة لـ X مثل P(X=x) وذلك من أجل m معلوماً.

2- قيم تابع التوزيع البواسوني F(x) الذي يساوي:

$$F(x) = P(X < x) = P_0 + P_1 + P_2 + ...P_{x-1}$$

ولاستخراج قيم توزيع (بواسون) المقابلة لقيمة معينةm ولقيمة محددة x نلاحظ أن قيم m معطية في السطر الأول أما قيمة X فمعطية في العمود الأول وإن قيمة التوزيع هي القيمة الواقعة على تقاطعها.

مثال:

عندما تكون m=2 فإن احتمال أن نحصل على 5 مرات تحقق يساوي:

$$P(X = 5) = P_5 = 0,0361$$

كما يمكن الحصول على جميع قيم التوزيع الاحتمالي لهذه الحالة من نفس العمود فنجد أن:

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_x:	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0.0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000

وباستخدام نفس العمود يمكننا أن نجد قيم تابع التوزيع F(x).

فمثلاً نجد أن: $F(4) = P(X < 4) = 0,8571$

جدول رقم **(III):** قيم تابع التوزيع الطبيعي المعياري:

إنّ تابع التوزيع الطبيعي المعياري يعرف بالعلاقة:

$$P(X < z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

حيث z هي قيمة من قيم المتحول X الخاضع للتوزيع المعياري N(0,1).

أما إذا كان X خاضعاً للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ويكون خاضعاً للتوزيع N(0,1).

ولاستخراج قيمة الاحتمال $\Phi(z)$ المقابلة لقيمة معينة z, نشير أولاً إلى أن قيم Z منتشرة على العمود الأول والسطر الأول؛ ففي العمود الأول قيم Z الصحيحة وذات المرتبة الواحدة بعد الفاصلة وفي السطر الأول قيم Z ذات المرتبة الثانية بعد الفاصلة, وفي نقطة إلتقائهما نحصل على الاحتمال المقابل للقيمة z المطلوبة.

مثال:

إذا كان X خاضعاً لـ N(0,1) فإننا نجد مباشرة أن:

$$P(X < 1{,}83) = \Phi(1{,}83) = 0{,}9664$$

كما يمكن استخدام الجدول نفسه للحصول على قيم Z المقابلة لاحتمال معلوم, فمثلاً نجد أن قيمة Z المقابلة للاحتمال 0,8944 تساوي:

$$Z_{0,8944} = \Phi^{-1}(0{,}8944) = 1{,}25$$

ومن الملاحظ أن الجدول لا يتضمن القيم السالبة لـ Z وذلك لأنه يمكننا أن نحسبها من العلاقة:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

مثال: ما هو احتمال أن يأخذ X الطبيعي المعياري قيمة أصغر من 2,18-؟

$$P(X < -2{,}18) = \Phi(-2{,}18) = 1 - \Phi(2{,}18) = 1 - 0{,}9854 = 0{,}0146$$

برامج حاسوبية
لبعض نماذج بحوث العمليات

هذه البرامج مقتبسة من مرجع:

Billy E. Gillett, 1993 Introduction to Operations Research
McCraw Hill, New Delhi, 12 Edition

مع العلم الرموز قد تختلف قليلاً عما في الكتاب

برنامج لطريقة السمبلكس

برنامج الطريقة الهنغارية لحل مسألة التخصيص والتعيين

برنامج صفوف الانتظار لعدة مراكز

برنامج إيجاد توزيع مدة الخدمة

برنامج مسائل التخطيط الشبكي

برنامج لاتخاذ القرارات حسب بايز لمعلومات مؤكدة وغير مؤكدة

برنامج محاكاة صف واحد ومركز واحد

المصطلحات

-A-

Action	عمل, فعل
Activity	نشاط, فاعلية
Algorithm	خوارزمية
Alternative	بديل أو خيار
Amortization	اهتلاك
Annual report	تقرير سنوي
Analysis	تحليل
Artificial Variables	متحولات اصطناعية
Assignment Problem	مشكلة التخصيص أو التعيين

-B-

Balance	ميزان
Basic Solutions	الحلول القاعدية
Bayesian analysis	التحليل البايزي

-C-

Capital	رأس مال
Capital formation	تكوين رأسمالي
Change	إحلال, إبدال
Coefficient	معامل
Column	عمود
Constant	عدد ثابت
Constraint	قيد أو شرط
Consumption	استهلاك
Convex	محدب

Cost	تكلفة
Cost function	تابع التكلفة
Criteria	معيار
Curve	منحني

-D-

Decision	قرار
Decision tree	شجرة القرارات
Demand	طلب
Dual	مرافق
Dummy	وهمي

-E-

Economics	علم الاقتصاد
Economy	اقتصاد
Elasticity	مرونة
Emulation	المحاكاة
Equation	معادلة
Equilibrium	توازن
Export	تصدير

-F-

Factor	عامل
Feasible Region	منطقة الحلول المقبولة
Final	نهائي
Final product	منتج نهائي
Firm	منشأة
Fixed	ثابت محدد
Function	تابع

-G-

Game Matrix	مصفوفة اللعبة
Goods	سلع
Graphical Solution	الحل البياني
Gross	إجمالي
Growth	نمو
Growth coefficient	معامل النمو

-I-

Independence	استقلالية
Input	مدخلات
Integer Programming	البرمجة الخطية
Implicit	ضمن
Implicit function	تابع ضمني
Import	استيراد
Intermediate goods	سلع وسيطة
Inventory	مخزون
Investment	استثمار
Iteration	معاودة

-L-

Labor	عمل (قوة عمل)
Level	مستوى
Limit	حد, نهاية
Linear	خطي
Linear function	تابع خطي
Linear programming	برمجة خطية

-M-

Marginal productivity	إنتاجية حدية

Matrix	مصفوفة
Maximization	تعظيم
Maximum	قيمة عظمى
Minimization	تصغير
Minimum	قيمة صغرى
Minor	مصغر (المصفوفة)
Model	نموذج
Multiplier	ضارب
Multiplier Lagrange	ضارب لاغرانج

-N-

Nil	صفري
Norm	معدل, معيار
Normal Distribution	التوزيع الطبيعي
Norm of matrix	معيار المصفوفة

-O-

Optimization	إمثال (جعلها مثالية)
Optimum	مثالي, أمثل
Optimal Solution	الحل المثالي
Order	مرتبة– صنف نوع
Output	مخرجات

-P-

Partial	جزئي
Path	مسار
Pivot Element	عنصر الارتكاز (المحوري)
Programming	برمجة
Plan	خطة
Planning	تخطيط

Price	سعر
Private	خاص
Product	منتج
Production	إنتاج
Production function	تابع إنتاجي
Productivity	إنتاجية
Profit	ربح
Programming	برمجة
Progress	تقدم, متوالية

-R-

Rank	مرتبة
Rank of matrix	مرتبة مصفوفة
Rate	معدل
Ray	شعاع
Resource	مورد
Row	سطر
Root	أصل– جذر

-Q-

Quantity	كمية
Queuing Theory	نظرية الصفوف

-S-

Saddle Point	نقطة سرجية
Sector	قطاع
Sensitivity Analysis	تحليل الحساسية
Square	مربع
Simplex Method	طريقة السمبلكس المبسطة
Static	سكوني ثابت

Static model	نموذج سكوني
Strategy	استراتيجية
Surface	سطح
Stochastic models	نماذج عشوائية
System	نظام

-T-

Technical	فني تقني
Technique	تقنية
Theorem	نظرية
Traffic intensity	القدرة المرورية
Total	إجمالي, كلي
Total derivative	مشتق كلي
Total differential	تفاضل كلي

-U-

Unacceptable solution	حل غير مقبول
Unit	واحدة (قياس)
Utilization factor	معامل الاستخدام

-V-

Value	قيمة
Value added	قيمة مضافة
Value of game	ثمن اللعبة
Variable	متحول
Vector	شعاع

-W-

Waiting line	صف الانتظار
Weighted	مرجح

-Z-

Zero- Sum game	لعبة ذات مجموع صفري

المراجع

المراجع العربية:

1- د. العلي. إبراهيم، 1988، الرياضيات الاقتصادية، جامعة تشرين.

2- د. قاسم. أحمد رفيق + د. ريحان. محمد كامل، 1982- الطرق الكمية في العلوم الاقتصادية والإدارية- الإمارات العربية.

3- د. الماغوط. خالد، 1986- البرمجة الخطية- جامعة حلب.

4- د. الصفدي. محمد سالم، البرمجة الخطية وبحوث العمليات- الكويت.

5- د. بقجة جي. صلاح الدين + د. الجراد. خلف، 1982- بحوث العمليات, جامعة دمشق.

6- د. رجب. عادل، 1982- بحوث العمليات- جامعة حلب.

7- د. قوته. محمد نور، د. مندورة. سعود محمود، 1420هـ- بحوث العمليات وتطبيقاتها في القرارات الإدارية، جدة- المملكة العربية السعودية.

8- د. مرعي. عبد الحي، 1988- المعلومات المحاسبية وبحوث العمليات في اتخاذ القرارات- الدار الجامعية- بيروت.

9- الحكيم. عبد رجب لطيف، المنصوري. عبد الجليل آدم، 1987- مدخل إلى بحوث العمليات- جامعة كاريونس- ليبيا.

المراجع الأجنبية:

1- HU T.C. Integer programming and network flows.

Addeson-Wesley publising Co.1970.

2- POLAK E. Computational Methods in Optimization

Academic Press, New York, London , 1971.

3- WAGNER H.M. Principlles of Operations Research.

Prentice- Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

4- KAUFAMANN A. HENRY- LABORDERE A. METHODS et modeles de la recherché operationnele. Tome 3, Dupod Paris Bruxelles- Montreal.

5- Ravindram, A. Phillips, Don T.Solberg James j., 1987 Operations Research (principles and practice), Sohn wiley & Sons- New York .

6- Billy E. Gllett 1993 Introduction To Operations Research- Taha Mc Graw- Hill. 12 edit New Ddelhi.

7- Joseph G. Ecker, Michael. Kup 1988 Introduction to Operations Research, John Willy & Sons New York.

8- Mustafi 1993 Operations Research (Methods and Practice) Wiley Estern Limited New Ddelhi 2.edit.

9- Kothari, C. R. 1992. An Introduction to Operations Research Vikas Publ. Hoase PVTLTD New Delhi.

فهرس

الموضوع	الصفحة
المقدمة	5
فصل تمهيدي: المتراجحات الخطية	9
1. المتراجحات الخطية المنفردة	9
2. جملة المتراجحات الخطية	15
3. المجموعة المحدبة	19
4. التوابع المعرفة على متراجحات خطية	24
5. تمرينات	27
الفصل الأول: المعادلات الخطية	29
1. المعادلات الخطية التي فيها m=n	30
2. المعادلات الخطية التي فيها m<n	37
3. طريقة جاردان- غوص لحل المعادلة الخطية m<n	42
4. الحلول القاعدية غير السالبة لجملة فيها m<n	47
5. طريقة السمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية فيها m<n	49
6. تمرينات	59
الفصل الثاني: أسس البرمجة الخطية	63
1. صياغة النماذج الرياضية الخطية	63
2. النماذج الخطية وأشكالها	70

الموضوع	الصفحة
3. الطريقة البيانية لإيجاد الحل المثالي	78
4. تمرينات	86
الفصل الثالث: طريقة السمبلكس وتعديلاتها	89
1. خوارزمية السمبلكس المباشرة	90
2. خوارزمية السمبلكس المعدلة	105
3. خوارزمية السمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية (أو طريقة الغرامات الكبرى M)	114
4. العقبات التي يمكن أن تعترض الحل	123
5. تمرينات	127
الفصل الرابع: النماذج المرافقة	131
1. كيفية تشكيل النموذج المرافق	131
2. خوارزمية السمبلكس لحل النماذج المرافقة Min	141
3. خوارزمية السمبلكس المزدوجة (للنموذجين الأصلي والمرافق)	144
4. نظريات مختلفة حول الترافق	164
5. تمرينات	175
الفصل الخامس: البرمجة الصحيحة (التامة)	177
1. تمهيد	177
2. طريقة التجريب لإيجاد الحلول المثالية الصحيحة	180
3. طريقة الاقتطاع (حسب غوموري)	190
4. خوارزمية طريقة الاقتطاع للنماذج الصحيحة	196
5. تمرينات	206

الموضوع	الصفحة

الفصل السادس: بعض النماذج الاقتصادية والإدارية	209
1. نموذج الربح الأعظمي في الشركة	209
2. نموذج الخطية المثالية للقطاع أو الاتحاد	215
3. نموذج الخطة المثالية للإنتاج بين القطاعات	222
4. نموذج توزيع التكوين الرأسمالي بين القطاعات	226
5. نموذج مسألة التعيين والطريقة الهنغارية لحله	227
6. نموذج تركيب الخلائط	233
7. نموذج الاستقلال الأمثل للأراضي الزراعية	234
8. مسائل	238
الفصل السابع: تحليل حساسية الحل المثالي	241
1. دراسة الحساسية حسابياً	242
- تحليل الحساسية عند تغير أحد معاملات تابع الهدف	245
- تحليل الحساسية عند تغير أحد الثوابت في الطرف الأيمن	250
- علاقات تغيرات الثوابت بأسعار الظل	259
- علاقة المصفوفة الارتكازية بدراسة الحساسية	262
2. دراسة الحساسية بواسطة المصفوفة الارتكازية	267
- دراسة الحساسية عند تغير أحد معاملات تابع الهدف	268
- دراسة الحساسية عند تغير أحد الثوابت في الطرف الأيمن	273
- دراسة الحساسية في حالة إضافة منتوج جديد	276
- دراسة الحساسية عند تغير الشروط التكنولوجية	277
- دراسة الحساسية عند تغير قيمة أحد المتحولات غير القاعدية	279
- دراسة الحساسية بواسطة الحاسوب	280
3. تمرينات	282

الموضوع	الصفحة
الفصل الثامن: نماذج النقل	285
1. نموذج توزيع وسائل النقل على الخطوط	285
2. نموذج نقل المواد بأقل تكلفة	292
3. الطريقة الخاصة لحل نماذج النقل بأقل تكلفة	299
4. نموذج نقل المواد بأقصر فترة زمنية	324
5. تمرينات	333
الفصل التاسع: مبادئ نظرية الألعاب الاستراتيجية	337
1. تمهيد	337
2. تعاريف المفاهيم المختلفة لنظرية الألعاب	339
3. النموذج الرياضي للعبة من $m \times n$	350
4. الحل البياني للعبة من المرتبة $2 \times n$	361
5. تمرينات ومسائل	365
الفصل العاشر: مبادئ التخطيط الشبكي	367
1. مقدمة وتعاريف	367
2. تحليل المخططات الشبكية بالنسبة للزمن	337
3. تحليل المخطط الشبكي من حيث التكلفة	391
4. تمرينات	404
الفصل الحادي عشر: سياقات بواسون وماركوف	407
1. سياقات بواسون	407
2. سياقات ماركوف	416
3. سياقات غاوص الطبيعية	426
4. تمرينات	429

الموضوع	الصفحة
الفصل الثاني عشر: صفوف الانتظار في الخدمات الجماهيرية	431
1. تعاريف ومصطلحات	431
2. نظام الخدمة بصف واحد ومركز واحد	440
3. نظام الخدمة بصف واحد وعدة مراكز	474
4. تمرينات	486
الفصل الثالث عشر: إدارة المخزون	489
1. مقدمة وتعاريف	489
2. النموذج السكوني بدون عجز لمادة واحدة	493
3. النموذج السكوني مع الاحتياطي لمادة واحدة	511
4. نموذج الأسعار المتغيرة (الخصومات) بدون عجز	514
5. نموذج التخزين المتعدد والحجم المحدود	518
6. تمرينات	524
الفصل الرابع عشر: نظرية القرارات الإدارية	527
1. مقدمة وتعاريف	527
2. التحليل الكمي لاتخاذ القرارات	530
3. اتخاذ القرارات في حالة المخاطرة	537
4. أسلوب التحليل (البايزي) لاتخاذ القرارات الإدارية	542
5. أسلوب شجرة القرارات	556
6. تمرينات	570
الفصل الخامس عشر: المحاكاة	573
1. مقدمة وتعاريف	573
2. توليد الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيع المنتظم المنقطع	581

الموضوع	الصفحة
3. توليد الأرقام العشوائية الخاضعة للتوزيعات غير المنتظمة	584
- أسلوب التحويل المعاكس	586
▪ توزيع الأرقام الخاضعة للتوزيع الأسي	586
▪ توليد الأرقام الخاضعة لتوزيع (وايبول)	588
▪ توليد الأرقام الخاضعة للتوزيع الهندسي	589
▪ توليد الأرقام الخاضعة للتوزيع المنتظم المستمر	590
- أسلوب الرفض والقبول	592
▪ توليد أرقام خاضعة لتوزيع (بيتا)	594
▪ توليد أرقام خاضعة لتوزيع (غاما)	597
- الأسلوب المختلط (للتحويل المعاكس والرفض)	599
▪ توليد أرقام خاضعة لتوزيع بواسون	600
▪ توليد أرقام خاضعة للتوزيع الثنائي	601
- أسلوب (بوكس- مولير) لتوليد أرقام خاضعة للتوزيع الطبيعي	602
- الأساليب التقريبية لتوليد الأرقام العشوائية	604
▪ المحاكاة التقريبية للتوزيع الطبيعي المعياري	604
▪ توليد أرقام خاضعة للتوزيع الطبيعي العام	605
- أساليب توليد الأرقام الخاضعة لبعض التوزيعات الخاصة	608
▪ توليد أرقام خاضعة لتوزيع كاي مربع χ^2	608
▪ توليد أرقام خاضعة لتوزيع ستودينت t	609
▪ توليد أرقام خاضعة لتوزيع فيشر F	610
4. اختبارات المطابقة والتوفيق	611
▪ اختبار χ^2 للتكرارات	611
▪ اختبار كولموجوروف- سميرنوف	613

الموضوع	الصفحة
5. تمرينات	614
الجداول الإحصائية	617
1. جدول التوزيع الثنائي	618
2. جدول توزيع بواسون	620
3. جدول التوزيع الطبيعي المعياري	626
4. جدول الأرقام العشوائية	628
برامج حاسوبية	629
1. برنامج لطريقة السمبلكس	630
2. برنامج اقتطاع غوموري	635
3. برنامج الطريقة الهنغارية لمسالة التعيين	640
4. برنامج لصفوف الانتظار	644
5. برنامج لصفوف الانتظار لعدة مراكز	646
6. برنامج إيجاد توزيع مدة الخدمة	648
7. برنامج مسائل التخطيط الشبكي	649
8. برنامج اتخاذ القرارات حسب بايز	653
9. برنامج محاكاة صف واحد ومركز واحد	657
المصطلحات العلمية	661
المراجع	667
الفهرس	673