الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة تشرين
كلية الاقتصاد



مقدمة إلى
نظرية الاحتمالات

الدكتور
إبراهيم محمد العلي
أستاذ في قسم الإحصاء والبرمجة

الدكتور
محمد عكروش
أستاذ مساعد في قسم الإحصاء
والبرمجة

السنة الثالثة
قسم الإحصاء والبرمجة

مديرية الكتب والمطبوعات

2006- 2007 م

الإحصاء التطبيقي

الفهرس

العنوان	الصفحة
المقدمة	**11**
الفصل التمهيدي: التحليل التوافقي	**13**
1 . المفهوم الأساسي للتحليل التوافقي.	15
2 . شروط تشكيل المجموعات.	16
3 . المتبادلات.	17
4 . المرتبات.	22
5 . المتوافقات.	28
6 . تجزئة مجموعة.	37
7 . ثنائي الحد.	40
8 . كثير الحدود.	43
9 . تطبيقات ثنائي الحد	44
10 . تمرينات.	50
الفصل الأول: احتمالات الحوادث.	**53**
1 . أنواع الحوادث.	55
2 . تعاريف الاحتمال.	58
3 . قواعد جمع الاحتمالات.	64
4 . قواعد ضرب الاحتمالات.	66
5 . قاعدة الاحتمال الكلي وقانون (بيز).	71
6 . تمرينات.	75

الفصل الثاني: المتحولات العشوائية وقوانين توزيعها. **77**
1 . تعاريف عامة. 79
2 . قوانين التوزيع الاحتمالية. 80
3 . خواص قانون التوزيع. 88
4 . تابع التوزيع. 91
5 . خواص تابع التوزيع. 98
6 . التوقع الرياضي. 104
7 . الوسيط. 107
8 . المنوال. 107
9 . مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري). 108
10 . تمرينات. 111
الفصل الثالث: بعض قوانين التوزيع الاحتمالية **113**
1 . قانون التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتحول منقطع. 115
2 . قانون التوزيع الثنائي للمتحول المنقطع 117
3 . قانون توزيع بواسون للمتحول المنقطع x. 130
4 . قانون التوزيع المنتظم العام (المتحولات مستمرة). 141
5 . التوزيع الطبيعي العام. 145
6 . قانون التوزيع الطبيعي المعياري. 152
7 . قانون توزيع χ^2 (كاي مربع). 155
8 . قانون (توزيع ستودينت) أو T. 159
9 . قانون التوزيع F (توزيع فيشر . سينديكور). 162
10 . قانون التوزيع الاحتمالي الإحصائي. 167

11 . تمرينات. 170

الفصل الرابع: العينات وقضايا التقدير. 175
1 . تمهيد. 175
2 . أنواع العينات. 177
3 . التقدير النقطي لمؤشرات المجتمع. 184
4 . مجالات الثقة (للمتوسط والإجمالي والنسبة والفروقات). 198
5 . تقدير حجم العينة (للمتوسط والإجمالي والنسبة). 214
6 . تمرينات. 220
الفصل الخامس: اختبار الفرضيات البسيطة بواسطة Z و t. 223
1 . تمهيد. 225
2 . أنواع الفرضيات الإحصائية. 227
3 . عناصر الاختيار. 228
4 . اختبارات حول متوسط المجتمع. 235
5 . اختبارات حول إجمالي المجتمع. 239
6 . اختبارات حول النسبة في المجتمع. 241
7 . اختبارات حول الفرق بين مجتمعين طبيعيين. 243
8 . اختبارات حول الفرق بين نسبتين في مجتمعين طبيعيين. 247
9 . اختبار حول القياسات الشاذة لحذفها. 251
10 . تمرينات. 254
الفصل السادس: اختبار كاي مربع χ^2 وتطبيقاته. 257
1 . مقدمة. 259
2 . اختبار مطابقة التكرارات بواسطة χ^2 . 261

3 . اختبار مطابقة النسب بواسطة χ^2 . 263
4 . اختبار مطابقة توزيع تجريبي مع توزيع نظري. 267
5 . اختبار استقلالية متحولين. 281
6 . شروط تطبيق المؤشر χ^2 . 284
7 . حالة خاصة اختبار χ^2 عندما يكون لدينا جدول 2×2. 289
8 . معامل التوافق C. 292
9 . معامل التوافق T^2 . 292
10 . اختبار تباين مجتمع طبيعي بواسطة χ^2 . 293
11 . اختبار تناظر الجداول المربعة بواسطة χ^2 . 296
12 . تمرينات. 299
الفصل السابع: الاختبارات اللامعلمية من عينة واحدة. **301**
1 . مقدمة. 303
2 . الاختبارات اللامعلمية المعرفة على المتحولات الأسمية. 308
3 . الاختبارات المعرفة على المتحولات الرتبية والمجالية. 327
4 . اختبارات الارتباط بين متحولين رتيبيين (x,y) . 339
5 . اختبارات الارتباط بين متحول اسمي ومتحول رتبي. 347
6 . تمرينات. 351
الفصل الثامن: مراقبة جودة الإنتاج. **355**
1 . مقدمة. 357
2 . أهمية الرقابة على جودة الإنتاج. 358
3 . الرقابة الإحصائية على جودة الإنتاج. 359

4 . الأساليب الإحصائية في مراقبة الجودة. 360
5 . حالات أخرى من مراقبة الجودة. 394
6 . تمرينات. 404

الفصل التاسع: تحليل التباين باتجاه واحد. 409
1 . مقدمة. 411
2 . تصميم تجربة على تحليل التباين باتجاه واحد. 412
3 . المقارنات المتعددة للمتوسطات. 432
4 . شروط تطبيق تحليل التباين 442
5 . علاقة تطبيق التباين باختبار ستودينت وبمعامل الارتباط 444
5 . تمرينات. 445
الفصل العاشر: تحليل التباين باتجاهين. 449
1 . مقدمة. 451
2 . تصميم تجربة تحليل التباين باتجاهين. 451
3 . تمرينات. 474
الفصل الحادي عشر: الانحدار الخطي البسيط والارتباط. 477
1 . مقدمة. 477
2 . تحليل الانحدار البسيط: 478
. طريقة المربعات الصغرى. 483
. تحليل تباينات خط الانحدار. 490
. اختبار معنوية المعاملات. 497
3 . حساب معامل التحديد. 501
4 . معامل الارتباط الخطي. 511
5 . اختبار دلالة معامل الارتباط ρ . 517
6 . حالات خاصة لمعامل الارتباط. 518

7 . تمرينات. 522

الفصل الثاني عشر: الانحدار الخطي المتعدد **525**

1 . مقدمة. 527

2 . إيجاد معادلة الانحدار الخطي المتعدد باستخدام المعادلات الطبيعية 527

3 . الاختبارات الإحصائية المتعلقة بالانحدار الخطي المتعدد 541

4 . إيجاد معادلة الانحدار الخطي المتعدد باستخدام المصفوفات 550

5 . تمرينات. 555

قائمة المراجع العربية والأجنبية. **557**

دليل بالمصطلحات العلمية. **563**

ملاحق الجداول الإحصائية. **571**

- الثنائي.
- بواسون.
- الطبيعي المعياري.
- توزيع ستودينت.
- توزيع χ^2 .
- توزيع F.
- التوزيعات اللامعلمية.

المقدمة

تدخل نظرية الاحتمالات في صميم مختلف الأنشطة الاقتصادية والاجتماعية والعسكرية، وتلازم تغيرات جميع الظواهر الطبيعية. وتعتبر هذه النظرية ضرورية لجميع الباحثين ومثيرة لاهتمام معظم المثقفين في جميع أنحاء العالم، لأنها تعالج المسائل التي يكتنفها الغموض والعشوائية.

وإننا عندما قمنا بتأليف هذا الكتاب لطلاب السنة الثالثة في كلية الاقتصاد بجامعة تشرين. حرصنا على أن نجعل منه كتاباً عاماً يرجع إليه الباحثون المختصون ويستفيد منه القراء غير المختصين، لذلك ضمناه عدداً من الفصول والمباحث تشمل معظم قضايا نظرية الاحتمالات، وأرفقنا هذه المباحث بأمثلة تطبيقية كثيرة لتوضيح بعض الجوانب النظرية أو لشرح كيفية استخدامها في الأبحاث والتطبيقات العملية. وجاء كتابنا هذا مؤلفاً من إحدى عشر فصلاً.

فجعلنا الفصل الأول لشرح مسائل التحليل التركيبي للمتبادلات والتراتيب والمتوافقات ومايتعلق بها.

أما الفصل الثاني فخصصناه لمبادئ الاحتمالات وطرائق حسابها والعلاقات الأولية بينها.

وفي الفصل الثالث تناولنا المتحولات العشوائية المنقطعة وأهم خواصها. واستعرضنا في الفصل الرابع أهم قوانين التوزيع الاحتمالية المنقطعة، وفي الفصل الخامس انتقلنا إلى استعراض المتحولات العشوائية المستمرة، وأهم خواص وقوانين توزيعها. وفيه تعرضنا إلى مسألة تغيير المتحولات وحساب قوانين التوزيع لها، أما الفصل السادس فخصصناه لقوانين التوزيع الاحتمالية المستمرة، ويبلغ عددها عشرين توزيعاً.

وفي الفصل السابع استعرضنا التوزيعات الاحتمالية لجملة متحولات عشوائية منقطعة، أما في الفصل الثامن فدرسنا التوزيعات الاحتمالية لجملة متحولات مستمرة،

وخصصنا الفصل التاسع للتوابع المميز ولمسألة القصور، وفي الفصل العاشر استعرضنا أهم النظريات الأساسية والحدية في نظرية الاحتمالات.

أما في الفصل الخامس عشر فتعرضنا إلى المحاكاة بتوليد الأرقام شبه العشوائية، واستخرجنا أهم العلاقات المستخدمة في ذلك.

ومع أن التأليف المشترك هو مسؤولية مشتركة إلا أننا ولتحديد مساهمة كل منا في هذا الكتاب نشير إلى أن الفصول الأول والثاني والثالث والرابع والخامس والسادس والسابع كانت من تأليف الدكتور محمد عكروش (باستثناء بعض الفقرات منها)، أما الفصول الثامن والتاسع والعاشر والحادي عشر فهي من تأليف الأستاذ الدكتور ابراهيم محمد العلي (إضافة إلى بعض الفقرات من الفصول الأولى).

وإننا إذ نقدم هذا الكتاب لطلابنا الأعزاء ولزملائنا الكرام نأمل أن نكون قد وفقنا في تأليف موضوعاته، وعرض قضاياه وشرح مسائله. وإننا لاندعي فيه الكمال أو الشمولية، ونعتذر عن كل خطأ لم نلحظه أو سهو لم ندركه أو إسهاب لم نقصده أو اختصار لم نفسره. ونتعشم من القراء الكرام موافاتنا بملاحظاتهم حول كل ذلك لنأخذه بعين الاعتبار عند التدريس أو عند إعادة الطباعة.

اللاذقية في 2006/7/25

والله من وراء القصد **المؤلفان**

الفصل الأول

طرائق التراكيب وتطبيقاتها

إن نظرية الاحتمالات تعتمد على المجموعات الممكنة التي يمكن تشكيلها من مجموعة معينة. فإذا كان عدد عناصر تلك المجموعة قليلاً فإن تشكيل المجموعات الممكنة وكيفية إيجاد عناصرها يمكن أن يتم بطريقة العد المباشر، أما عندما يكون عدد العناصر كبيراً، فإننا بحاجة إلى إيجاد طرائق رياضية تساعدنا على إيجاد عدد التشكيلات الممكنة من عناصر في المجموعة المعينة، أو تساعدنا على تحديد عدد النواتج الممكنة لتجربة معينة، دون الاعتماد على طريقة العد المباشر، وأن ذلك يتم من خلال القواعد الآتية:

1-1: القاعدة الأساسية للعدّ (قاعدة الضرب وقاعدة الجمع):

1-1-1: قاعدة الضرب:

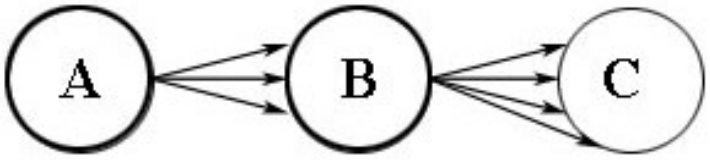
إذا كانت لدينا تجربة ما تتم على ثلاث مراحل، وكان من الممكن إجراء هذه التجربة في المرحلة الأولى بـ n طريقة مختلفة، وفي المرحلة الثانية يتم إجراء التجربة بـ m طريقة، وفي المرحلة الثالثة يتم إجراء التجربة بـ k طريقة مختلفة، فإن عدد الطرق التي يمكن إجراء هذه التجارب بها معاً هو:

$$n \cdot m \cdot k \text{ طريقة} \qquad (1-1)$$

مثال (1-1):

إذا كانت لدينا ثلاث مدن A, B, C وتوجد ثلاث طرق تصل من المدينة A إلى المدينة B، وتوجد أربع طرق تصل المدينة B إلى المدينة C.

فإذا غادر شخصٌ ما المدينة A قاصداً المدينة C ومارّاً بالمدينة B، فكم عدد الطرق التي يمكن بوساطتها لهذا الشخص أن يصل إلى المدينة C؟



الحل:

إن عدد الطرائق التي يصل بها الشخص من A إلى B هو ثلاث طرائق: $n=3$. وعدد الطرائق التي يصل بها الشخص من B إلى C هو أربع طرائق: $m=4$. فإن عدد الطرائق التي يمكن أن يصل بها الشخص من A إلى C مروراً بالمدينة B يساوي: $n\cdot m=3.4=12$ طريقة

مثال (1−2):

دخل شخص إلى مخزن وأراد شراء علبة محارم. وتوجد في المخزن ثلاثة أنواع من المحارم، مؤلفة من أربعة أوزان وخمسة قياسات. والمطلوب، ما هو عدد الخيارات المتاحة لاختيار علبة المحارم؟

الحل:

إن عدد طرائق اختيار النوع يساوي: $n=3$.

وعدد طرائق اختيار الوزن يساوي: $m=4$.

وعدد طرائق اختيار القياس يساوي: $k=5$.

ومنه، فإن عدد الطرائق المتاحة لاختيار علبة المحارم يساوي:

$n\cdot m\cdot k=3.4\cdot 5=60$ طريقة

تعميم:

يمكن تعميم العلاقة (1−1) على r مرحلة؛ أي إذا كان عدد طرائق الاختيار في المرحلة الأولى n_1 طريقة، وفي المرحلة الثانية n_2 طريقة، وفي المرحلة الثالثة n_3 طريقة ... وفي المرحلة الأخيرة n_r طريقة، فإن عدد طرائق الاختيار المختلفة الكلية تساوي:

$$n_1\cdot n_2\cdot n_3.....\cdot n_r \qquad (2-1)$$

مثال (1-3):

قرر شاب ارتداء ملابسه والذهاب إلى حفلة، فتح خزانته فوجد فيها قميصين وثلاثة سراويل، وأربع ربطات عنق، وخمسة أزواج من الجوارب. فبكم طريقة يمكن لهذا الشاب اختيار ملابسه؟

الحل:

نلاحظ وجود طريقتين لاختيار القميص $n_1 = 2$

وتوجد ثلاث طرائق لاختيار السروال $n_2 = 3$

وتوجد أربع طرائق لاختيار ربطة العنق $n_3 = 4$

وتوجد خمس طرائق لاختيار الجوارب $n_4 = 5$

وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الملابس تساوي:

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ طريقة

1-1-2: قاعدة الجمع:

إذا كانت لدينا عملية ما تتم بطريقة واحدة من n طريقة، وكانت لدينا عملية أخرى تتم بطريقة واحدة من m طريقة وكانت العمليتان متنافيتين، فإن عدد طرائق إتمام عملية واحدة منهما يساوي $n + m$ طريقة.

مثال (1-4):

بكم طريقة يمكن اختيار طالباً واحداً ليكون ممثلاً عن الطلبة في مجلس الكلية بحيث يكون إما من السنة الأولى أو الثانية؟ إذا علمت أن عدد طلاب السنة الأولى 300 طالباً، وعدد طلاب السنة الثانية 200 طالباً.

الحل:

إن عدد طرائق اختيار طالب واحد من السنة الأولى يساوي: $n = 300$ طريقة. إن عدد طرائق اختيار طالب واحد من السنة الثانية يساوي: $m = 200$ طريقة.

وبالتالي فإن عدد طرائق اختيار ذلك الممثل يساوي:

$n + m = 300 + 200 = 500$ طريقة

تعميم:

يمكن تعميم قاعدة الجمع على r تجربة من التجارب المتنافية:

أي إذا كان عدد طرائق الاختيار في التجربة الأولى يساوي n_1 طريقة، وعدد طرائق الاختيار في التجربة الثانية يساوي n_2 طريقة..... وعدد طرائق الاختيار في التجربة الأخيرة يساوي n_r طريقة، وكانت هذه التجارب متنافية، فإن عدد الطرائق الكلية لاختيار واحدة منها:

$$n_1 + n_2 + n_3 ..... + n_r \qquad (3-1)$$

1-2: التباديل Permutations:

لنفرض أنه لدينا الحروف الثلاثة الآتية: a, b, c ونريد ترتيب هذه الحروف في ثلاثة أمكنة دون تكرار أي حرف منها.

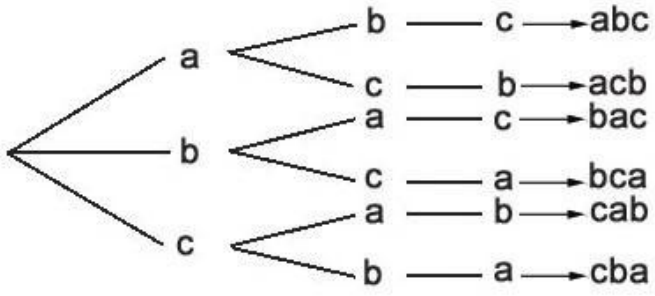
نلاحظ أنه وفق قاعدة الضرب يكون عدد الطرائق لاختيار الحرف الأول مساوياً لـ 3 طرق، وبالتالي سوف يبقى مكانين فقط لاختيار الحرف الثاني، بعد أن أخذنا الحرف الأول، ومنه فإن عدد طرائق اختيار الحرف الثاني يساوي طريقتين، وسوف يكون اختيار الحرف الثالث بطريقة واحدة فقط، إذن يمكن أن يتم ذلك كما يلي:

abc acb bac bca cab cba

ونلاحظ أن عدد طرائق الاختيار وفق قاعدة الضرب يساوي:

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ طرائق

ويمكن توضيح ذلك بالمخطط الآتي:



نظرية (1-1):

إذا كان لدينا n عنصراً من الأشياء المختلفة وأردنا أخذها كلها في كل مرة، فإن عدد تباديل هذه الأشياء (n عنصراً) هو $n!$ ويرمز له بـ P_n ، ويكون لدينا:

$$P_n = n! \qquad (4-1)$$

ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

نلاحظ أن عدد طرائق اختيار العنصر الأول هو n.

وأن عدد طرائق اختيار العنصر الثاني هو $n-1$.

وأن عدد طرائق اختيار العنصر الثالث هو $n-2$.

.....

وأن عدد طرائق اختيار العنصر ذي الترتيب k هو $n-k+1$.

وأن عدد طرائق اختيار العنصر الأخير يساوي 1 فقط.

وبتطبيق قاعدة الضرب نجد أن عدد طرق الاختيار الكلية، والذي سنرمز له لـ P_n تساوي:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-k+1).....2.1 \qquad (5-1)$$

مثال (1-5):

بكم طريقة يمكن تكليف خمسة أشخاص بإشغال خمسة مقاعد؟

الحل: نطبق العلاقة: $P_n = n!$

ومنه: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ طريقة

مثال (1-6):

بكم طريقة يمكن وضع الكتب الآتية: (رياضيات، لغة إنكليزية، إحصاء، تحليل كلي، محاسبة، قانون) على رف واحد في المكتبة؟

الحل: نلاحظ أن عدد الكتب المتوفرة هي ستة، وبالتالي فإن عدد طرائق الترتيب يساوي:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ طريقة}$$

وممّا سبق يمكن أن نعرّف التباديل بأنها عدد الأشكال الممكنة لوضع عدّة أشياء أو عناصر مختلفة في مكانٍ ما بحيث يتم أخذها كلها في كل مرة مع مراعاة الاختلاف في الترتيب خلال كل مرة.

نظرية (1-2):

إذا كانت لدينا مجموعة مؤلفة n عنصراً فيها n_1 مكرراً من النوع الأول، و n_2 مكرراً من النوع الثاني .... و n_r مكرراً من النوع r، بحيث يكون:

$$n = n_1 + n_2 + ...n_r$$

فإن عدد تباديل عناصر هذه المجموعة يعطى بالعلاقة:

$$P_n^{n_1,n_2,.....n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!.....n_r!} \qquad (6-1)$$

مثال (1-7):

بكم طريقة يمكن وضع عشرة كتب منها 5 بلغة عربية و3 بلغة فرنسية و2 بلغة إنكليزية على رفٍ في مكتبة يتسع لعشرة كتب، بحيث أن يكون ترتيب كل نوع من الكتب مع بعضها بعض؟

الحل:

نلاحظ أنه يوجد 5 كتب بالعربية متماثلة $n_1 = 5$.

ويوجد 3 كتب بالفرنسية متماثلة $n_2 = 3$.

ويوجد كتابان باللغة الإنكليزية متماثلة $n_3 = 2$.

وبالتالي فإننا بتطبيق العلاقة (1-6)، نجد:

$$P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}$$

$$P_{10}^{5,3,2} = 2520 \text{ طريقة}$$

مثال (1-8):

ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها من كلمة سلسبيل مأخوذة كلها مرةً واحدة دون النظر إلى المعنى.

الحل:

نلاحظ أن كلمة (سلسبيل) تتألف من الأحرف (س، ل، س، ب، ي، ل)

ونلاحظ أن حرف س يتكرر مرتين $n_1 = 2$.

ويتكرر حرف ل مرتين $n_2 = 2$.

وعدد حرف الباء $n_3 = 1$.

وعدد حرف الياء $n_4 = 1$.

وبما أن عدد أحرف الكلمة $n = 6$، فإننا نقوم بتطبيق العلاقة (1−6)، فنجد أن عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من هذه الكلمة يساوي:

$$P_6^{2\cdot 2\cdot} = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180 \text{ طريقة}$$

1−3: التراتيب Arrangements :

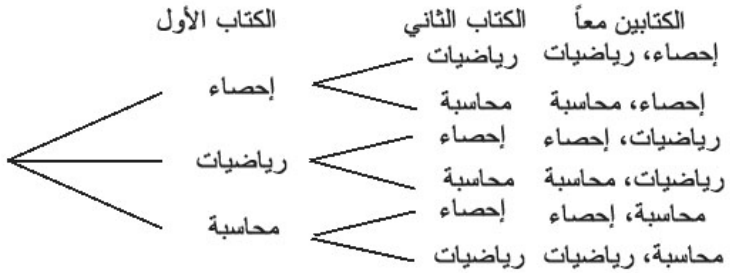
إن التراتيب هي المجموعات التي يمكن تشكيلها بحجم r عنصراً من مجموعة مؤلفة من n عنصراً وذلك بأخذ r عنصراً في كل مرة (حيث $r \le n$). أي أن عدد الترتيبات التي يمكن تشكيلها من هذه المجموعة المؤلفة من الـ n من الأشياء (العناصر) بحيث يحتوي كل ترتيب منها على r من هذه الأشياء (العناصر)، وهي تختلف عن بعضها باختلاف العناصر فيها أو باختلاف ترتيبها ضمن التشكيل أو بكلاهما معاً. لتوضيح هذا التعريف يمكن أن نعرض المثال الآتي:

إذا كانت لدينا ثلاثة كتب (إحصاء، رياضيات، محاسبة) ونريد أن نرتبها في مكانين مختلفين في محفظة السفر، فما عدد الطرائق التي يمكن أن تتم فيها هذه العملية؟

نلاحظ أننا نستطيع إشغال المكان الأول بأحد الكتب الثلاثة، وبالتالي تكون لدينا ثلاث طرائق لإشغال المكان الأول، وبعد ذلك، يبقى لدينا كتابان لإشغال المكان الثاني. إذن يمكن إشغال هذا المكان بطريقتين. وحسب قاعدة الضرب فإن عدد الطرائق الممكنة لترتيب ثلاثة كتبٍ في مكانين يساوي:

طرائق $3 \cdot 2 = 6$

ويمكن توضيح هذه الترتيبات المختلفة بالشكل البياني التالي:



أي أن عدد طرائق هذا الترتيب يساوي 6 طرائق تختلف عن بعضها باختلاف العناصر فيها، أو باختلاف الترتيب ضمن التشكيل.

1-3-1: التراتيب دون إعادة:

نظرية (1-3) :

إن عدد التراتيب لـn عنصراً مأخوذة r في كل مرة وبدون إعادة يساوي A_n^r ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-r+1) \qquad (7-1)$$

وللبرهان على ذلك نلاحظ أنه يمكن اختيار العنصر الأول بـ n طريقة.

ويمكن اختيار العنصر الثاني بـ $n-1$ طريقة.

ويمكن اختيار العنصر الثالث بـ $n-2$ طريقة.

.....

ويمكن اختيار العنصر r بـ $n-r+1$ طريقة.

وحسب قاعدة الضرب نجد أن:

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-r+1) \qquad (8-1)$$

ولاستخدام علاقة أخرى نضرب الطرف الأيمن للعلاقة (1-8) بـ $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$، فنجد:

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-r+1)\cdot\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ومنه يكون لدينا:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (9-1)$$

حالة خاصة:

. عندما $r=n$، فإن التجربة تتحول إلى تشكيل تباديل لهذه العناصر، ويكون لدينا:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \qquad (10-1)$$

أي أن: $A_n^n = n! = n(n-1)(n-2)....3,2,1 = P_n$

وتسمى A_n^n عدد الترتيبات الممكنة لجميع هذه الأشياء مأخوذة n عنصراً من n عنصراً، وهو هنا يعبر عن عدد التباديل P_n.

مثال (1-9):

بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من أصل 5 طلاب لتوزيعهم على 3 مناصب.

الحل: لدينا $n=5$, $r=3$ ، ومن العلاقة (1-10) نجد أن:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2!} = 60 \text{ طريقة}$$

مثال (1-10):

بكم طريقة يمكن ترتيب ثلاثة كتب في مكانين على رف مكتبة؟

الحل: نلاحظ أنه لدينا $n=3$, $r=2$، وبتطبيق العلاقة (1-7) نجد أن:

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-r+1)$$

$$A_3^2 = 3\cdot2 = 6 \text{ طريقة}$$

أو باستخدام العلاقة (1-9)؛ نجد أيضاً أن:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ طريقة}$$

مثال (1–11):

بكم طريقة يمكن لـ 10 موظفين شغل أربع وظائف شاغرة؟

الحل: من العلاقة (1–8) نجد أن:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \text{ طريقة}$$

أو من العلاقة (1–9)؛ نجد أن:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 5040 \text{ طريقة}$$

1–3–2: التراتيب مع الإعادة:

إذا كان لدينا صندوق فيه n كرة، ونريد أن نسحب r كرة (حيث $r \le n$)، فحسب حالة السحب مع الإعادة، يجب أن تعاد الكرة المسحوبة إلى الصندوق قبل عملية سحب الكرة التالية، وبالتالي فإن:

. عدد الطرائق التي يتم بها سحب الكرة الأولى يساوي n طريقة مختلفة.

ـ وعدد الطرائق التي يتم بها سحب الكرة الثانية يساوي n طريقة مختلفة، لأن الكرة الأولى أعيدت للصندوق قبل إجراء عملية السحب الثانية، حيث أصبح عدد الكرات الكليّ n كرة.

. وعدد الطرائق التي يتم بها سحب الكرة الثالثة يساوي n طريقة مختلفة....وهكذا.

. وعدد الطرائق التي يتم بها سحب الكرة r يساوي n طريقة مختلفة؛ حيث $r \le n$.

فحسب قاعدة الضرب نجد أن عدد الطرائق الممكنة يساوي:

$$B_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \ldots\ldots \cdot n}_{(r \text{ مرة})} = n^r \qquad (11-1)$$

مثال (1-12):

يحوي صندوق ثلاث كرات مرقمة: 1، 2، 3. ونريد أن نسحب عينات مكوّنة من كرتين واحدة بعد الأخرى، مع العلم أن الكرة المسحوبة تعاد إلى الصندوق بعد كل عملية سحب.

والمطلوب: حساب عدد العينات التي يمكن تشكيلها، ثم تحديد عناصر فضاء العينة؟

الحل: باعتبار أن الكرة المسحوبة تعاد إلى الصندوق قبل إجراء عملية السحب الآتي فإن السحب هو مع الإعادة، وبما أنَّ: $n=3 \quad , \quad r=2$، فمن خلال تطبيق العلاقة (1-11) نحصل على عدد العينات الممكنة التشكيل؛ أي:

$B_3^2 = 3^2 = 9$ عينات

نلاحظ أن عناصر فضاء العينة تشكل مجموعة كلية Ω وتساوي:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{Bmatrix}$$

مثال (1-13):

ما هو عدد الأرقام المؤلفة من ثلاثة مراتب والتي يمكن تشكيلها من الأرقام (0، 1، 2، 3، 4)، إذا سُمح بتكرار الأرقام.

الحل:

نلاحظ أن الرقم مكوّن من ثلاث مراتب: آحاد، عشرات، مئات. وبالتالي فإن:

. عدد الطرائق لملء مرتبة المئات تساوي (4 طرائق)، وذلك بعد استبعاد الصفر لأنه لا يكون له معنى إذا كان على اليسار.

ـ وعدد الطرائق لملء مرتبة العشرات تساوي (5 طرائق)، وهي جميع الأرقام دون استثناء.

. وعدد الطرائق لملء مرتبة الآحاد تساوي (5 طرائق)، وهي كذلك جميع الأرقام.

وبالتالي فإن عدد الطرائق لتشكيل هذه الأرقام الثلاثية تساوي:

$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ طريقة

أما إذا أخذنا الصفر بعين الاعتبار عند ملء خانة المئات، فإن عدد الطرائق يساوي:

$B_5^3 = 5^3 = 125$ طريقة

1-4: التوافيق Combinations:

تعرّف التوافيق بأنها عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار r عنصراً مختلفاً من مجموعة مؤلفة من n عنصراً بغضّ النظر عن الترتيب، ونرمز له بالرمز C_n^r. فإذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من n عنصراً من الأشياء المختلفة ونريد تشكيل مجموعات تحتوي كلٌّ منها على r من هذه العناصر $(r \le n)$ فإن عدد المجموعات الممكن تشكيلها مأخوذة r عنصراً من هذه المجموعة هو عدد التوافيق لـ n عنصراً مأخوذ منها r و r عنصراً، وتعطى بالعلاقة:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (12-1)$$

ويمكن برهان العلاقة (1-12) بالشكل التالي: إن كل توفيقة تحتوي على r من العناصر، وبالتالي يمكن تبديل هذه العناصر بعدد $P_r = r!$ طريقة، أو متبادلة، وبالتالي فإن عدد التراتيب الممكنة في جميع التوافيق يساوي إلى C_n^r مضروباً بـ $r!$؛ أي:

$$A_n^r = C_n^r \cdot r! \qquad (13-1)$$

أو بشكلٍ آخر فإن عدد التوافيق لـ n من العناصر مأخوذة r، فـ r عنصراً في كل مرة (حيث $r < n$) يساوي عدد التراتيب A_n^r مقسوماً على $r!$، فنحصل على العلاقة:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} \qquad (14-1)$$

وبما أن:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نعوّض بالعلاقة (1−14)، فنجد أن:

$$C_n^r = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

ومنه نجد أن عدد التوافيق يعطى بالعلاقة الآتية:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (15-1)$$

مثال (1−14):

أوجد قيمة كلاً ممّا يلي: C_{10}^4 و C_{20}^5.

الحل: بتطبيق العلاقة (1−15)، نجد:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = \frac{5040}{24} = 210 \text{ طريقة}$$

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{5!(20-5)!} = \frac{30!}{5! \cdot 15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15!}$$

$$. C_{20}^5 = \frac{1860480}{120} = 15504 \text{ طريقة}$$

مثال (1−15):

أوجد عدد طرائق اختيار ثلاث كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات ودون أهمية لترتيب الكرات.

الحل: بما أن الاختيار لا يعطي أهمية للترتيب (أي أن المجموعات لاتختلف باحتلاف الترتيب ضمنها) إذن فهذه المجموعات هي توافيق 3 ف 3 من 10.

وبتطبق العلاقة (1−15) نجد أن:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!}=120$$ طريقة

- **استنتاج بعض العلاقات الخاصة بالتوافيق:**

خاصة (1): إن:

$$C_n^r=C_n^{n-r} \qquad (16-1)$$

للبرهان: نأخذ مفكوك الطرف الأيمن فنجد أن:

$$C_n^{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot\left[n-(n-r)\right]!}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot[r]!}$$

ومنه: $$C_n^{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}=C_n^r$$

وتستخدم هذه العلاقة لتسهيل العمليات الحسابية في حسابات التوافيق ولكن لا تستخدم إلا إذا كانت r أكبر من نصف n.

مثال (1–16): أوجد قيمة C_{40}^{37}.

الحل: بتطبيق العلاقة: $C_n^r=C_n^{n-r}$ نجد أن: $C_{40}^{37}=C_{40}^{3}$

ومنه: $$C_{40}^{37}=C_{40}^{3}=\frac{40!}{3!\cdot 37!}=\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1}=9880$$

مثال (1–17):

إذا كانت $C_n^{10}=C_n^{15}$ والمطلوب إيجاد قيمة n.

الحل: نلاحظ أن $r=10$, $n-r=15$ وبالتالي فإن:

$$n-10=15\Rightarrow n=10+15=25$$

وذلك اعتماداً على العلاقة السابقة.

خاصة (2): قاعدة التوافيق المقيدة أو المشروطة:

- إذا كان لدينا n عنصراً من العناصر وأردنا اختيار r عنصراً منها، مع أن هناك عنصراً محدداً بالذات يجب استبعاده فإن عدد طرق الاختيار يساوي: C_{n-i}^{r}

حيث i عدد العناصر الواجب استبعادها و $n-i>r$، وهذا يعني أننا طرحنا الشيء المستبعد من n فقط، ولم يستبعد من r لأننا نعتبر أن الاختيار يتم لـ r من العناصر المتبقية $n\text{-}i$ عنصراً وليس من n.

مثال (1-18):

يتكون مجلس إدارة جمعية من سبعة أشخاص هم (أحمد، بشرى، جميل، داني، هيثم، وليد، زهراء)، ويراد انتخاب رئيس ونائب للرئيس وسكرتير وأمين للصندوق منهم لتكوين اللجنة التنفيذية، مع العلم أن النظام الداخلي ينص على أنه لايشغل أحد مناصب اللجنة التنفيذية، من كان يشغل إحداها في الدورة السابقة، ونتيجة للمصادفة اتضح أن جميل كان نائباً للرئيس وهيثم كان أميناً للصندوق في الدورة السابقة، والمطلوب إيجاد عدد طرائق اختيار اللجنة:

الحل:

نلاحظ أن عدد أعضاء مجلس الإدارة يساوي: $n=7$.

عدد أعضاء اللجنة التنفيذية للمجلس يساوي: $r=4$.

وباعتبار أن جميل وهيثم كانا عضوين في اللجنة السابقة فيجب استبعادهما من الاختيار عند تكوين اللجنة، وبالتالي فإن عدد طرائق اختيار اللجنة يساوي:

$$C_{7-2}^{4}=C_{5}^{4}=\frac{5!}{4!\cdot 1!}=\frac{5\cdot 4!}{4!\cdot 1}=\frac{5}{1}=5 \text{ طريقة}$$

ملاحظة: إذا أردنا أن نختار r عنصراً من العناصر من n من العناصر بحيث يشترط أن يكون عنصر محدد بالذات يجب أن يختار في جميع الأحوال، فإن عدد طرق الاختيار يساوي: C_{n-i}^{r-i} ، وهذا يعني أننا طرحنا العنصر الذي يجب أن يتم اختياره حتماً من كل من n وr، وبالتالي نختار العدد الباقي $r-i$ من $n-i$ من العناصر فقط.

مثال (1-19):

يتكون مجلس إدارة جمعية من 13 عضواً، فبكم طريقة يمكن اختيار لجنة تنفيذية من هذا المجلس، بحيث تتكون اللجنة من 6 أشخاص، مع العلم أن رئيس المجلس وسكرتير المجلس دائماً في اللجنة.

الحل:

عدد أعضاء المجلس $n=13$.

عدد أعضاء اللجنة التنفيذية $r=6$.

وباعتبار أن رئيس المجلس وسكرتير المجلس دائماً في اللجنة فإنهم يجب أن يستبعدوا من الاختيار، وبالتالي فإن:

$$C_{n-2}^{r-2}=C_{13-2}^{6-2}=C_{11}^{4}$$

$$C_{11}^{4}=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!}=330 \text{ طريقة}$$

خاصة (3): التباديل بتكرارات وأشياء متشابهة:

إذا كانت A مجموعة مؤلفة من n عنصراً، وتتألف من k مجموعة جزئية، وكانت كل مجموعة تحوي العناصر نفسها، وكانت أعداد هذه العناصر في المجموعات هي $n_1,n_2,...,n_k$ ، حيث: $n_1+n_2+..+n_r=n$ فإن عدد التباديل الممكنة داخل الأشياء كلها يعطى بالعلاقة:

$$P_n^{n_1,n_2,...,n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ....\cdot n_k!} \qquad (17-1)$$

البرهان:

إن عدد طرائق اختيار n_1 من n عنصراً يساوي C_n^{n1}، ويكون باقي العناصر $n-n_1$ عنصراً.

وعدد طرائق اختيار n_2 من $n-n_1$ عنصراً يساوي C_{n-n1}^{n2}، وتبقى $n-n_1-n_2$ عنصر..... وهكذا.

وأن عـدد طرائـق اختيـار n_i عنصـراً مـن $(n-n_1-n_2-....n_{i-1})$ عنصـراً، يساوي $C^{n_i}_{n-n_1-n_2-....n_{i-1}}$.

وأن عـدد طرائـق اختيـار n_k مـن $(n-n_1-n_2-....n_{k-1})$ عنصـراً، يسـاوي $C^{n_k}_{n-n_1-n_2-....n_{k-1}}$.

وبالتالي فإن عدد هذه الطرائق المختلفة يساوي:

$$C^{n1}_{n}\cdot C^{n2}_{n-n_1}\cdot C^{n3}_{n-n_1-n_2}\cdot....\cdot C^{nk}_{n-n_1-n_2-....n_{i-1}}\cdot....\cdot C^{nr}_{n-n_1-n_2-....n_{k-1}}$$

وباستخدام مفكوك المقادير السابقة نجد أن:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\left[(n-n_1)-n_2\right]!}.....\frac{(n-n_1-n_2.....n_{i-1})!}{n_i!\left[n-n_1-n_2.....n_{i-1}-n_i\right]!}.....$$

$$.....\frac{(n-n_1-n_2-...-n_i-....n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-...-n_{k-1}-n_k)!}$$

وبإجراء الاختصارات اللازمة حيث أن البسط في كل كسر (عدا الكسر الأول) يختصر مع الحد الثاني في المقام الموجود في الكسر السابق له.

ومع ملاحظة أن: $n-n_1-n_2-...n_i-...n_k=0!=1$

وبالتالي نحصل على العلاقة التالية المطلوبة:

$$P_n^{n_1,n_2,...,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!..n_i!...n_k!}$$

وهو عدد التباديل المختلفة.

مثال (1-20):

بكم طريقة يمكن تشكيل حروف كلمة probability التي تعني الاحتمالات.

الحل:

نلاحظ أن الحرف b مكرر مرتين. ويشكل مجموعة جزئية فيها $n_1=2$.

والحرف i مكرر مرتين أي $n_2=2$، أما بقية الأحرف فمكررة مرة واحدة فقط. وأن عدد الحروف يساوي $n=11$ حرفاً.

وبالتالي فإن عدد التباديل للكلمة السابقة يساوي:

$$P_{11}^{2,2,1,1,1,1}\frac{11!}{2!\cdot 2!}=9979200 \qquad \text{متبادلة}$$

مثال (1−21):

موقف للسيارات يتسع لإيقاف عشر سيارات في صف واحد، بكم طريقة يمكن تصفيف 5 سيارات مازدا و3 سيارات كيا و2 سيارة مرسيدس.

الحل: إن عدد الطرائق الممكنة يساوي:

$$\frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!}=2520 \text{ طريقة}$$

خاصة (4): برهن على أن:

$$C_{n+1}^{r}=C_{n}^{r-1}+C_{n}^{r} \qquad (18-1)$$

لبرهان هذه العلاقة نكتب الطرف الأيمن كمايلي:

$$C_{n}^{r-1}+C_{n}^{r}=\frac{n!}{(r-1)![n-r+1]!}+\frac{n!}{r![n-r]!}$$

وبتوحيد المقامات نجد أن:

$$=\frac{r\cdot n!+(n-r+1)\cdot n!}{r!(n-r+1)!}$$

وبإجراء الإصلاحات نجد أن:

$$C_{n}^{r-1}+C_{n}^{r}=\frac{n!(r+n-r+1)}{r!(n-r+1)!}=\frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}=C_{n+1}^{r}$$

وهو المطلوب.

خاصة (5):

إن عدد طرائق اختيار مفردة أو أكثر من مفردات عددها n عنصراً يساوي:

$$C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+C_{n}^{3}+\ldots+C_{n}^{n}=2^{n}-1 \qquad (19-1)$$

مثال (1-22):

بكم طريقة يمكن اختيار شخص أو أكثر من بين خمسة أشخاص لتشكيل لجنة تحقيق في حادث مرور.

الحل: بتطبيق العلاقة السابقة (1-19) نجد أن:

$$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 =$$

$$5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31 \text{ طريقة}$$

أو تساوي:

$$2^n - 1 = 2^5 - 1 = 31 \text{ طريقة}$$

خاصة (6): بعض القواعد الأخرى:

لدينا:

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad C_n^n = 1 \qquad C_n^0 = 1 \qquad (20-1)$$

- إذا كان: $C_n^a = C_n^b$ فإن:

$$a = b$$

أو: $(21-1)$

$$a + b = n$$

- إن التوافيق تحقق العلاقة الآتية:

$$\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r} \qquad (22-1)$$

البرهـــان: بـالتعويض عـن كـل حـد بمـا يقابلـه فـي الطـرف الأيسـر مـن العلاقـة (1-22) نجد أن:

$$\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!}$$

وبإجراء بعض الإصلاحات نجد أن:

$$\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}{r(r-1)!\cdot(n-r)!}$$

وبإجراء الاختصارات المطلوبة نجد أن:

$$\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

وهو المطلوب.

مثال (1-23):

إذا كانت: $C_{17}^{r+5} = C_{17}^{2r+3}$

والمطلوب إيجاد قيمة r.

الحل:

لدينا من العلاقتين (1-21) مايلي:

إن: $r+5 = 2r+3 \Rightarrow r = 2$

أو: $r+5+2r+3 = 17 \Rightarrow 3r = 9 \Rightarrow r = 3$

وبالتعويض عن كل $r = 3, r = 2$، نجد أن: $r = 2$ مرفوضة، وبالتالي: فإن $r = 3$ هي القيمة المقبولة.

مثال (1-24):

أوجد ناتج مايلي: $C_{20}^{10} \div C_{20}^{9}$

الحل:

بتطبيق العلاقة (1-22) نجد أن:

$$\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{20-10+1}{10} = \frac{11}{10}$$

مثال (1-25):

إذا كانت: $C_n^{10} = C_n^{15}$ أوجد قيمة n.

الحل:

باعتبار أن $a \neq b \left(b = 15, a = 10\right)$ فإن العلاقة (1-21)، تعطينا أن:

$$a + b = n$$

$$10 + 15 = 25 = n$$

1-5: نظرية ذي الحدين:

يطلق على كل مقدار من الشكل $(a+b),(x+1),(3x+2y)$ ... مصطلح مجموع حدين.

بينما يطلق على المقادير $(a-b),(x-1),(3x-2y)$ مصطلح الفرق بين حدين. وبشكل عام يطلق على المقدار الجبري $(a\pm b)^n$ مصطلح ذي الحدين أو ثنائي الحدين أو ثنائية نيوتن.

وتهدف نظرية ذي الحدين إلى إيجاد مفكوك رياضي للمقدار الجبري $(a\pm b)^n$. ولقد تم الوصول إلى مفكوك مقدار ذي حدين مرفوعاً للقوة الثانية قبل الميلاد، في حين تم الوصول لمفكوك مقدار ذي حدين مرفوعاً للقوة الرابعة أو الخامسة أو السادسة في القرن الثاني عشر بعد الميلاد.

وفي القرن السابع عشر توصل باسكال لمفكوك مقدار ذي حدين مرفوعاً للقوة n عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً، وفي نفس الوقت تقريباً توصل نيوتن إلى برهان جديد لمفكوك مقدار ذي الحدين ومرفوع للقوة n عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً أو كسرياً.

1-5-1: مفكوك مقدار ذي حدين بأس صحيح موجب:

إذا كان a , b عددين حقيقيين، فإن استخدام المبادئ العامة في الجبر تعطينا أن مفكوك ذي الحدين المؤلف من هذين العددين سيكون كما في الجدول الآتي:

	مفكوك ذي الحدين	قيم n
عدد الحدود في المفكوك = 1	$(a+b)^0=1$	$n=0$
عدد الحدود في المفكوك = 2	$(a+b)^1=a+b$	$n=1$
عدد الحدود في المفكوك = 3	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$n=2$
عدد الحدود في المفكوك = 4	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$n=3$

$n=4$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3$	**عدد الحدود في المفكوك = 5**
$n=5$	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	**عدد الحدود في المفكوك = 6**
	.....	.....
	$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + ... + nab^{n-1} + b^n =$	**عدد الحدود في المفكوك** $n+1$

وبالتدقيق في العلاقات السابقة يمكن ملاحظة الخواص التالية لمفكوك ذي الحدين:

. إن عدد الحدود في المفكوك النوني يساوي $n+1$ حداً.

ـ عند إيجاد المفكوك فإن أس الحد الأول يساوي n ، ومن ثم يتناقص حداً بعد حد بمقدار الواحد الصحيح حتى ينعدم. أما أس الحد الثاني يبدأ بأس صفر ومن ثم يتزايد حداً بعد حد بمقدار الواحد الصحيح حتى الحد الأخير ويكون مرفوعاً للأس n.

ـ إن مجموع أسّي العددين a , b في كل حد يساوي الأس الأصلي n أي: $a+b=n$.

. إن معامل كل حد هو C_n^r، حيث r هو أس أحد الحدين a أو b، وإن $C_n^a = C_n^b$

وبالتالي يمكن كتابة مفكوك ذي الحدين بدلالة التوافيق كما يلي:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n \cdot b^0 + C_n^1 a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 + C_n^3 a^{n-3} \cdot b^3 + ... + C_n^{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n a^0 \cdot b^n$$

ويمكن إعادة كتابتها وصياغتها على الشكل الآتي:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^r b^{n-r} \qquad (23-1)$$

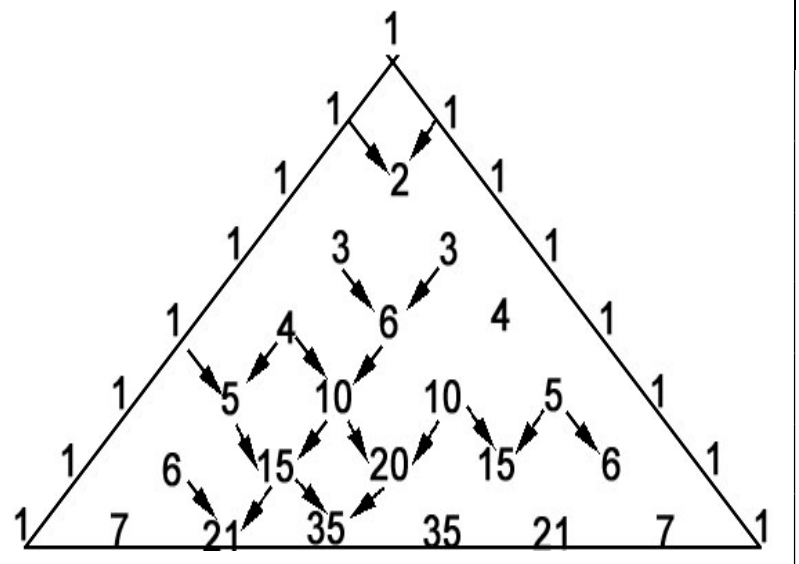
ـ إن معاملات حدود المفكوك المتناظرة متساوية أو بمعنى آخر، إن معاملات الحدود التي تبعد عن بداية المفكوك ونهاية المفكوك بمقدار ثابت تكون متساوية.

. إن مجموع معاملات الحدود في المفكوك يساوي 2^n .

للبرهان نأخذ مفكوك الحدين $(1+1)^n$ فنجد أن:

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r 1^r \cdot 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$$

. يمكن ترتيب أمثال قوى المقدار $(a+b)$ المتتالية في جدول مثلي من الأعداد يدعى مثلث باسكال وذلك كما يلي:

رقم n	شكل رتبة ذي الحدين	أمثال المفكوك
0	$(a+b)^0$	
1	$(a+b)^1$	
2	$(a+b)^2$	
3	$(a+b)^3$	
4	$(a+b)^4$	
5	$(a+b)^5$	
6	$(a+b)^6$	
7	$(a+b)^7$	
...	.....	

نلاحظ أن الأعداد في مثلث باسكال تتميز بما يلي:

1 . إن العدد الأول والعدد الأخير في كل سطر يساوي الواحد. وهذا يعني أن كلاً من أمثال a في الحد الأول، وأمثال b في الحد الأخير تساوي الواحد.

2 . إن كل عدد من الأعداد الأخرى الموجودة ضمن المثلث ناتج عن مجموع العددين الذين يقعان فوقه مباشرة من اليمين إلى اليسار، كما هو موضح على الشكل السابق:

وبالتالي يمكن استخدام أعداد مثلث باسكال لإيجاد معاملات الحدود في المفكوك $(a+b)^n$ من مختلف المراتب.

مثال (1–26):

أوجد مفكوك $(x+y)^6$.

الحل:

من العلاقة (1–23) نجد أن:

$$(x+y)^6 = C_6^0 x^6 y^0 + C_6^1 x^5 y^1 + C_6^2 x^4 y^2 + C_6^3 x^3 y^3 + C_6^4 x^2 y^4 + C_6^5 x^1 y^5 + C_6^6 x^0 y^6$$
$$= x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6x^1 y^5 + y^6$$

أو باستخدام مثلث باسكال نحصل على أمثال تلك الحدود مباشرة من السطر المقابل للمتطابقة $(a+b)^6$.

ـ من خلال ما تقدم يمكن إيجاد مفكوك أي حدين مرفوعين لأس صحيح موجب بالعلاقة التالية:

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + C_n^r x^{n-r} y^r + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-(n-1)} y^{n-1} + C_n^n x^0 y^n \qquad (24-1)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج:

. إن المعاملات التالية متساوية:

$$C_n^0 = C_n^n$$
$$C_n^1 = C_n^{n-1}$$
$$C_n^2 = C_n^{n-2}$$

ويمكن أن نكتب العلاقة (1−24) بالشكل التالي:

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r} y^r$$

ـ إن الحد العام في مفكوك ذي الحدين $(x+y)^n$ هو الحد: $C_n^r x^{n-r} y^r$ وترتيبه $(r+1)$ لذلك نرمز له بـ H_{r+1}.

وبالتالي يعطى الحد العام بالعلاقة:

$$H_{r+1} = C_n^r x^{n-r} y^r \qquad (25-1)$$

ويمكن استخدام الحد العام في مفكوك ذي الحدين $(x+y)^n$، في الحصول على أي حد في المفكوك مباشرة.

مثال (1−27):

أوجد الحد السادس في المقدار $(3x+5y)^6$.

الحل:

نلاحظ أن: $r+1=6 \Leftarrow r=5$، نعوض في العلاقة (1−25) فنجد:

$$H_6 = C_6^5 (3x)^{6-5} (5y)^5 = \frac{6!}{5!\cdot 1!} 3x(5y)^5$$
$$H_6 = 6 \cdot 3x \cdot 3125 \cdot y^5 = 56250x \cdot y^5$$

ملاحظة:

إن مفكوك ذي الحدين يمكن أن يستخدم لإيجاد قيم بعض الأعداد مرفوعة لقوى مختلفة، كما يستخدم لإيجاد جملة وحدة نقدية بفائدة مركبة ولفترة زمنية محددة.

مثال (1−28):

أوجد قيمة $(101)^4$ باستخدام نظرية ذي الحدين.

الحل:

نكتب العدد $(101)^4$ على الشكل الآتي:

$$(101)^4 = (1+100)^4$$
$$= C_4^0(1)^4(100)^0 + C_4^1(1)^3(100)^1 + C_4^2(1)^2(100)^2 +$$
$$+ C_4^3(1)^1(100)^3 + C_4^4(1)^0(100)^4$$
$$= 1 + 4\cdot 100 + 6\cdot(100)^2 + 4\cdot(100)^3 + (100)^4 = 104060401$$

مثال (1−29):

أوجد قيمة المقدار $(1.05)^6$ باستخدام نظرية ذي الحدين.

الحل:

نكتب العدد $(1.05)^6$ على الشكل الآتي:

$$(1.05)^6 = (1+0.05)^6$$
$$= C_6^0(1)^6(0,05)^0 + C_6^1(1)^5(0,05)^1 + C_6^2(1)^4(0,05)^2 +$$
$$C_6^3(1)^3(0,05)^3 + C_6^4(1)^2(0,05)^4 + C_6^5(1)^1(0,05)^5 + C_6^6(1)^0(0,05)^6$$
$$= 1 + 6\cdot 0,05 + 15\cdot 0,0025 + 20\cdot 0,000125 + 15\cdot 0,00000625$$
$$+ 6\cdot 0,0000003125 + 0,000000015625 = 1,340095641$$

مثال (1−30):

احسب مقدار الفائدة المستحقة عن قرض مقداره /15000/ ليرة سورية لمدة عشر سنوات بفائدة مركبة 5% باستخدام مفكوك ذي الحدين.

الحل:

نرمز بـ C لمبلغ القرض، وبـ i لمعدل الفائدة السنوي، وn للفترة الزمنية، وبما أن حصيلة المبلغ C في نهاية المدة الزمنية يعطى بالعلاقة:

$$C_t = C(1+i)^n$$

أمّا مقدار الفائدة I فتعطى بالعلاقة: $I = C_n - C$ أي أن:

$$I = C\left[(1+i)^n - 1\right]$$

نلاحظ أن: $(1+i)^n$ هو مقدار ذو حدين، ويمكن إيجاد حدود مفكوكه كمايلي:

$$(1+0,05)^{10} = 1 + C_{10}^{1}(1)^9(0,05)^1 + C_{10}^{2}(1)^8(0,05)^2 +$$
$$+ C_{10}^{3}(1)^7(0,05)^3 + C_{10}^{4}(1)^6(0,05)^4 + C_{10}^{5}(1)^5(0,05)^5$$

وبالتالي فإن:

$$(1+0,05)^{10} = 1 + 10\cdot 0,05 + 45\cdot 0,0025 + 120\cdot 0,000125$$
$$+ 210\cdot 0,00000625 + 252\cdot 0,0000003125$$
$$= 1 + 0,5 + 0,1125 + 0,015 + 0,0013125 + 0,00007875$$
$$(1+0,05)^{10} = 1,62889125$$

وبالتالي فإن مقدار الفائدة يساوي:

$$I_{10} = 15000\left[(1+0,05)^{10} - 1\right]$$
$$= 24433,36875 - 15000 = 9433,37\ S.P.$$

1-5-2: مفكوك ذي الحدّين بأسٍ سالب أو كسري (موجب أو سالب):

مما تقدم يتبيّن لنا أن عدد حدود مفكوك ذي الحدين المرفوع لأسٍ صحيح موجب يكون محدوداً؛ أي أن المفكوك منتهٍ. أما إذا كان المقدار من الشكل $(1+x)^{-n}$، حيث $(-n)$ عدد صحيح سالب أو أسّ كسري (موجب أو سالب)، فإننا نجد أن مفكوك ذي الحدين يكون غير منتهٍ؛ أي يكون عدد الحدود لا نهائياً في هذا المفكوك، وذلك عندما يكون $|x| < 1$ أو $|x| \geq 1$، وبالتالي يمكن كتابة مفكوك المقدار $(1+x)^{-n}$ بالشكل التالي:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{(-n)}{1!}(x)^1 + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}(x)^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}(x)^3$$
$$+ \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{4!}(x)^4 + ...\infty \quad (26-1)$$

مثال (1−31):

أوجد مفكوك المقدار: $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

الحل:

نكتب هذا المقدار كمايلي:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}$$

$$(1+x)^{-2}=1+\frac{(-2)}{1!}x^1+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(x)^2+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}(x)^3$$
$$+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)(-2-3)}{4!}(x)^4+.....$$

$$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4+.....+\infty$$

أماعندما تكون $n=\dfrac{1}{2}$ فإن مفكوك المقدار $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ حسب العلاقة (1−26)، يساوي:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}x}{1!}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x)^3$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}(x)^4+.....\infty \qquad (27-1)$$

مثال (1−32):

باستخدام نظرية ذي الحدين، أوجد قيمة كلٍ ممّا يلي:

أ . $\sqrt{1,05}$ ب . $\sqrt[3]{1,09}$.

الحل:

أ . نفرض أن: $x=0,05$

$$\sqrt{1,05}=(1+0,05)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}x^{1}}{1!}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x)^{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x)^{3}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}(x)^{4}+.....\infty$$

نعوّض في العلاقة الأخيرة: $x=0,05$.

$$(1+0.05)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(0,05)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(0,05)^{2}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(0,05)^{3}+.....\infty$$

وبالإصلاح نجد أن:

$$(1+0,05)^{\frac{1}{2}}=1+0,025-0,00125+0,000281+.....\infty\approx 1,024695$$

ب . نفرض أن $x=0,09$

$$\sqrt[3]{1,09}=(1+0,09)^{\frac{1}{3}}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{\frac{1}{3}x^{1}}{1!}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(x)^{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}(x)^{3}$$
$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(x)^{4}+.....\infty$$

والآن نعوّض كل $x=0,09$، فنجد.

$$(1+0,09)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}(0,09)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(0,09)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}(0,09)^3 + ...\infty$$

وبالإصلاح نجد أن:

$$(1+0,09)^{\frac{1}{3}} = 1+0,03-0,009+0,00027+.... = 1,029145$$

- **الحد العام لذي الحدين إذا كان الأس غير صحيح موجب:**

نرمز للحد العام لذي الحدين إذا كان الأس غير صحيح موجب بـ H_{r+1}، وهو يعطى بالعلاقة:

$$H_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r \qquad (28-1)$$

مثال (1-33):

أوجد قيمة الحد الخامس في مفكوك $\sqrt{1,04}$.

الحل:

نكتب المقدار $\sqrt{1,04}$ بالشكل: $(1+0,04)^{\frac{1}{2}}$، ثم نطبق العلاقة (1-28)، بحيث أن $r=4$:

$$H_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r$$

$$H_{4+1} = H_5 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^4$$

$$H_5 = -0,0390625\cdot(0,04)^4 = -0,0000001$$

- **مفكوك ذي الحدين إذا كان الأس سالباً:**

يعطى هذا المفكوك بالعلاقة التالية (وتبرَهم بالقياس على العلاقة (1-26):

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{n-1} x^r \qquad (29-1)$$

مثال (1-34):

أوجد مفكوك المقدار $(1-x)^{-1}$.

الحل:

بتطبيق العلاقة (1-29)، نجد أن:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

1-6: نظرية كثير الحدود:

لقد تعرضنا في الفقرات السابقة لمفكوك تركيب ذي الحدين من الشكل $(a+b)^n$، ولكن إذا كان هذا التركيب يتضمن أكثر من حدين؛ أي من الشكل $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r)^n$، فإننا نصف هذا التركيب بأنه كثير الحدود، ولإيجاد مفكوك كثير الحدود، نعرض النظرية التالية:

نظرية (1-4):

إذا كانت $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r$ أعداداً حقيقية، وكانت $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n$ أعداداً صحيحة موجبة، فإن:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r)^n =$$

$$\sum P_n^{n_1, n_2, n_3, ..., n_r} \cdot a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot ..... \cdot a_r^{n_r} \qquad (30-1)$$

حيث أن: $n_1 + n_2 + n_3 + ...n_r + = n$

وأن:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot .... \cdot n_r!}$$

ويدعى هذا المقدار بمعامل الحد العام لكثير الحدود، كما يدعى المقدار $a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot ..... \cdot a_r^{n_r}$ بالحد العام.

وتُقبل هذه النظرية دون برهان.

مثال (1-35):

إذا كانت a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 أعداداً تشكل تركيب كثير حدود، حيث $n = 15$، والمطلوب: إيجاد معامل مفكوك هذا التركيب ومن ثم إيجاد الحد الموافق لـ: $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5$ على الترتيب.

الحل:

باعتبار أن: $n = 15$، إذاً التركيب من الشكل:

$$\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5\right)^{15}$$

وأن الحد الموافق للقيم: $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5$

يحسب بالعلاقة:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot n_4!\cdot n_5!} =$$

$$P_{15}^{1,2,3,4,5} = \frac{15!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!}$$

والحد المطلوب هو:

$$P_{15}^{1,2,3,4,5}\cdot a_1^1\cdot a_2^2\cdot a_3^3\cdot a_4^4\cdot a_5^5$$

1-7: الأشجار البيانية:

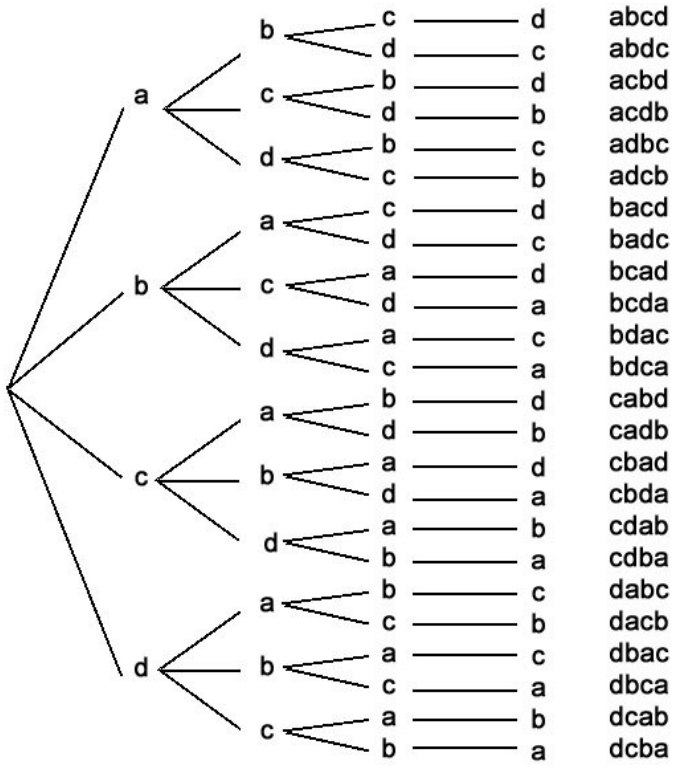
الشجرة البيانية هي طريقة يمكن بوساطتها تمثيل كل المشاهدات أو النتائج التي يمكن الحصول عليها عند إجراء تجربة ما، على شكل فروع الشجرة، ومن خلال هذه الفروع يمكن التعرف على عدد تباديل مجموعة ما، وكذلك يمكن التعرّف من خلالها على مجموعة التباديل المرتبة $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ عند إيجاد الجداء الديكارتي لعدّة مجموعات $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ..... \times A_n$.

مثال (1-36):

أوجد الشجرة البيانية لتباديل المجموعة: $\{a,b,c,d\}$.

الحل:

يمكن تمثيل مجموعة تباديل العناصر $\{a,b,c,d\}$ بالشجرة التالية:



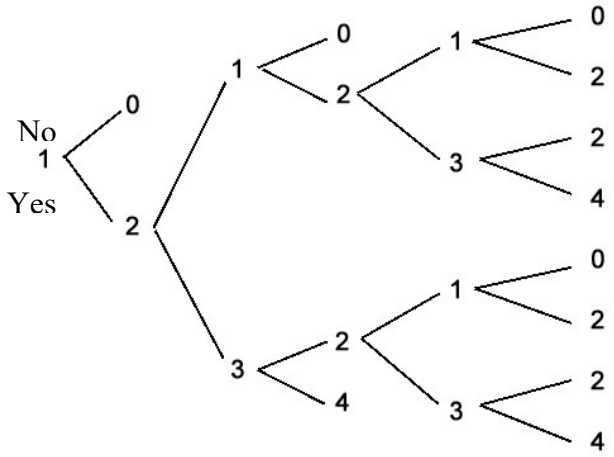
وبالتالي حصلنا على 24 متبادلة كل منها مؤلف من أربعة عناصر.

مثال (1-37):

رجل يطلق النار على هدف /5/ طلقات، بهدف المراهنة، فإذا أصاب الهدف فإنه يربح ليرة سورية واحدة، وإذا لم يُصب الهدف فإنه يخسر ليرة واحدة، فإذا علمت أن الرجل يملك ليرة واحدة، وسوف يتوقف عن إطلاق النار قبل نهاية المرات الخمس إذا خسر كل ما معه، أو كسب ثلاث ليرات أخرة.

والمطلوب: إيجاد عدد الطرائق التي يمكن أن تُجرى بها هذه المراهنة.

الحل:



تمثل الشجرة المرسومة عدد الطرائق التي يمكن أن تجري بها المراهنة وكل عدد في الشكل البياني يدل على عدد الليرات التي يملكها الرجل عند هذه النقطة.

نلاحظ إن المراهنة يمكن أن تحدث بإحدى عشرة طريقة مختلفة، وأن الرجل يتوقف عن المراهنة قبل نهاية المرات الخمس في ثلاث حالات فقط، وذلك عندما يخسر الليرة التي معه في المرة الأولى، وثانياً عندما يخسر مرتين متتاليتين بعد أن ربح ليرة في المرة الأولى، وكذلك يتوقف عن المراهنة بعد أن يربح ثلاث مرات متتالية، ويصبح لديه أربع ليرات.

مثال (1-38):

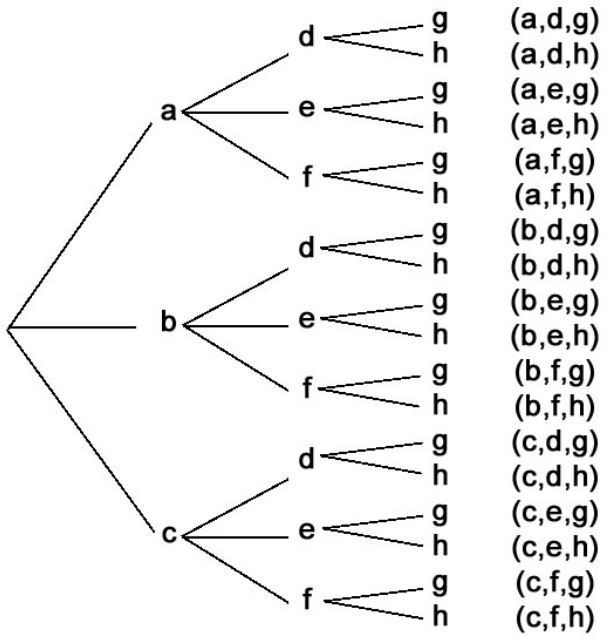
إذا كانت لدينا المجموعات التالية:

$$A=\{a,b,c\} \qquad B=\{d,e,f\} \qquad C=\{g,h\}$$

والمطلوب إيجاد الجداء: $A\times B\times C$.

الحل:

يمكن تمثيل هذه المجموعات على الشجرة البيانية الآتية:



وبالتالي حصلنا على جميع الثلاثيات، بحيث كانت المركبة الأولى من A والمركبة الثانية من B والمركبة الثالثة من C.

تمرينات

1 . بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص على أربعة مقاعد في صف واحد؟

2 . بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة أشخاص حول طاولة مستديرة؟

3 . احسب كلاً ممّا يلي:

$$10!\,,\ \frac{10!}{9!},\ P_{10}^{10}\ ,\ C_7^2\ ,\ C_{10}^5\ ,\ P_6^{2,1,2,1}$$

4 . بكم طريقة يمكن ركن عشر سيارات منها 4 مرسيدس، و3 كيا و3 مازدا في موقف يتسع لعشر سيارات بحيث أن يتم ركن السيارات التي من النوع نفسه مع بعضها البعض؟

5 . لنفرض أنه لدينا الأرقام التالية: 5، 4، 3، 2، 1، وبفرض عدم السماح بالتكرار، المطلوب:

أ . كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة مراتب؟

ب . كم عدداً يمكن تكوينه من خمسة مراتب؟

6 . يوجد بين المدينتين A وB أربعة طرق، وبين المدينتين C وB ثلاثة طرق، والمطلوب: بكم طريقة يمكن للشخص الذي قام من A أن يصل إلى C مروراً بالمدينة B؟

7 . في كليةٍ ما، هناك عشرة طلابٍ عرب، منهم: 5 يمنيون، 3 ليبيون، و2 أردنيون. أريد تشكيل وفدٍ من أربعة طلابٍ لحضور مؤتمر، والمطلوب:

أ . ما عدد الطرائق الممكنة لاختيار الوفد؟

ب . ما عدد الطرائق الممكنة إذا كان الوفد يضم اثنين من اليمنيين؟

جـ . ما عدد الطرائق الممكنة للاختيار إذا كان الوفد يضم اثنين على الأكثر من اليمنيين.

8 . أثبت أن: $\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$.

9 . صندوق فيه 10 كرات. بكم طريقة يمكن اختيار عينة مكونة من ثلاث كرات وفق الحالتين التاليتين:

أ . مع الإعادة.

ب . بدون الإعادة.

10 . أوجد الشجرة البيانية لتباديل المجموعات التالية:

$$\{a,b,c,d\} \quad , \quad \{a,b,c\} \quad , \quad \{a,b,c,d,e\}$$

11 . رجل يطلق النار على هدف /5/ مرات. فإذا أصاب الهدف فإنه يربح ليرة سورية واحدة، وإذا لم يُصب الهدف فإنه يخسر ليرة واحدة، فإذا علمت أن الرجل يملك ليرتين فقط، ويتوقف عن إطلاق النار عندما يصبح معه خمس ليرات أو يخسر كل ما معه.

والمطلوب: تشكيل الشجرة البيانية لهذه العمليات والإصابات.

12 . إذا كانت لدينا المجموعات التالية:

$$A=\{a,b,c,d\} \qquad B=\{b,c,d\}$$
$$C=\{c,d,e\} \qquad E=\{d,e\}$$

والمطلوب إيجاد الجداء الديكارتي لـ:

$$A\times B \qquad A\times B\times C$$
$$A\times C\times E \qquad A\times B\times E$$

13 . إذا كان: $C_{26}^{3r+4}=C_{26}^{3r+2}$ ، المطلوب إيجاد قيمة r.

14 . أوجد قيمة n في المقادير الآتية:

$$C_n^{n-2}=45 \quad , \quad C_n^2=66$$

15 . أثبت صحة العلاقتين الآتية:

$$C_n^{r-1}=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r-2}$$
$$C_{n-1}^{r-1}=C_n^r-C_{n-1}^r$$

16 . إذا كانت: $C_n^{10}=C_n^{15}$ ، المطلوب إيجاد قيمة n.

17 . يتكوّن مجلس إدارة إحدى المؤسسات التجارية من ثلاثة عشر عضواً، فبكم طريقة يمكن تشكيل لجنة تنفيذية من هذا المجلس بحيث يتكوّن من 6 أشخاص؟ مع العلم أن اللجنة التنفيذية تشتمل على رئيس المجلس وسكرتير المجلس.

18 . أوجد معامل x^4 في مفكوك:

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^8$$

19 . أوجد الحد الخامس في مفكوك كلٍ من:

$$(2x+8y)^8 \quad , \quad (4x-y)^{10}$$

20 . باستخدام نظرية ذات الحدين، أوجد قيم ما يلي:

$$(1+0,08)^5 \quad , \quad (1+0,25)^4 \quad , \quad (1+0,04)^6$$

21 . أوجد باستخدام نظرية ذات الحدين حصيلة مبلغ قدره /30000/ ل.س. بفائدة سنوية مركبة 0.06، ولمدة عشر سنوات.

22 . أوجد الحدود الأربعة الأولى في مفكوك كل من:

أ . $(1-x)^{\frac{3}{4}}$ ب . $(1+x)^{\frac{3}{4}}$ جـ . $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

الفصل الثاني

مبادئ الاحتمالات Probability Principles

2-1: التجربة العشوائية Arbitrary Experiment:

يمكن تعريف التجربة العشوائية بأنها: كل تجربة يمكن معرفة نتائجها الممكنة بشكل مسبق ولكن لايمكن التنبؤ بإحدى هذه النتائج قبل إجراء التجربة بشكل مؤكد، والأمثلة على ذلك كثيرة، منها:

. عندما نرمي حجر نردٍ أرضاً فإننا نعلم وبشكل مسبق أن العدد الذي يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد يكون أحد الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5، 6 ولكننا لا نعلم أي رقمٍ من هذه الأرقام سوف يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد وبشكلٍ مؤكد قبل إجراء التجربة، وبالتالي هي تجربة عشوائية.

ـ عند إلقاء قطعة نقدية أرضاً فإننا نعلم وبشكلٍ مسبق وقبل استقرارها أرضاً بأنه ستظهر على الوجه العلوي صورة أو كتابة، ولكننا لا نعلم بشكل مؤكد أن الصورة ستظهر أو أن الكتابة سوف تظهر، وبالتالي هي عبارة عن تجربة عشوائية.

. عند اختيار أحد الكؤوس من منتجات خط معين، فإننا نعلم قبل فحصه أنه سيكون إما سليماً أو معيباً، ولكن لا نعلم مسبقاً وبشكل مؤكد إن كان سليماً أو معيباً، وبالتالي هي عبارة عن تجربة عشوائية.

2-2: فضاء التجربة (العينة):

يمكن تعريف فضاء التجربة بأنه مجموعة النتائج أو المشاهدات النهائية الممكنة ظهورها لأية تجربة عشوائية، ونرمز لفضاء التجربة بـ Ω، وبالتالي فإن:

. فضاء التجربة (فضاء العينة) عند رمي حجر نرد مرةً واحد هو:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

. فضاء التجربة عند إلقاء قطعة نقدية مرةً واحد هو: $\Omega =$ {كتابة، صورة}

. فضاء التجربة عند فحص أحد الكؤوس هو: $\Omega =$ {معيب، سليم}

مثال (2-1):

نرمي حجري نرد منتظم مرةً واحدة. والمطلوب إيجاد فضاء التجربة Ω.

الحل: نلاحظ أن التجربة هي رمي حجري النرد وأن:

. فضاء التجربة لحجر النرد الأول يساوي: $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$

. وفضاء التجربة لحجر النرد الثاني يساوي: $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$

وبالتالي فإن فضاء التجربة للقطعتين Ω هو جميع الثنائيات (i,j)، حيث:

$i = 1,2,3,4,5,6$ ، $j = 1,2,3,4,5,6$

ويمكن التعبير عن ذلك بالشكل: $\Omega = \{(i,j), i,j = 1,2,3,4,5,6\}$

أي:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),.....,(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),.....,(2,6)$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),.....,(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),.....,(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),.....,(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),.....,(6,6)\}$$

أو باستخدام الجداء الديكارتي للمجموعات:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$
$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \otimes \{1,2,3,4,5,6\}$$

وبالتالي نحصل على الثنائيات السابقة حيث الحد الأيسر من الثنائية (i,j) ينتمي إلى Ω_1، والحد الأيمن من الثنائية (i,j) ينتمي إلى Ω_2.

مثال (2-2):

نرمي قطعتي نقود مرة واحدة، والمطلوب: إيجاد فضاء التجربة Ω.

الحل:

نلاحظ أن التجربة هي رمي قطعتي النقود، وأن:

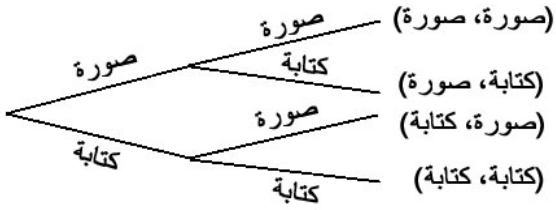
فضاء التجربة للقطعة الأولى هو: [كتابة، صورة]= Ω_1.

فضاء التجربة للقطعة الثانية هو: [كتابة، صورة]= Ω_2.

وبالتالي فإن فضاء التجربة للقطعتين Ω هو $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

{ (كتابة، كتابة)، (صورة، كتابة)، (كتابة، صورة)، (صورة ، صورة) }= Ω.

أو باستخدام الشجرة البيانية:



فضاء التجربة للقطعتين: نتائج رمي القطعة النقدية الأولى — نتائج رمي القطعة الثانية

أي أن فضاء التجربة هو جميع الحالات الناتجة عن الشجرة البيانية.

ملاحظة:

قد يكون فضاء التجربة منته، وعلى سبيل المثال، فضاء إمكانات تجربة إلقاء حجر النرد هو.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

وقد يكون فضاء التجربة غير منته وقابلٍ للعد. وعلى سبيل المثال، إلقاء قطعة نقد عدداً كبيراً من المرات حتى تظهر الكتابة لأول مرة، وبالتالي فإن قطعة النقد سوف تلقى عدداً لانهائيٍ من المرات حتى تظهر الكتابة لأول مرة وربما لاتظهر أبداً، وبالتالي نعبر عن فضاء التجربة بالشكل:

$$\Omega = \{1,2,3,4,.....\}$$

وقد يكون فضاء التجربة غير منته وغير قابلٍ للعد، ومثال على ذلك، قياس عدد البكتيريا في إحدى قطع الجبنة، وبالتالي يكون فضاء التجربة لقياس عدد البكتيريا بالشكل:

$$\Omega = \{X: \text{عدد حقيقي يعبر عن عدد البكتيريا}\} \qquad (1-2)$$

3-2: الحادث Event:

هو أي مجموعة جزئية A من فضاء التجربة Ω، أو هو أي مجموعة جزئية من نواتج التجربة العشوائية. ونعبر عن ذلك بـ $A \subset \Omega$.

وعلى سبيل المثال، إن فضاء تجربة إلقاء حجر نرد هو $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$، وإن $\{1\},\{2\},.....\{6\}$ هي عبارة عن مجموعات جزئية من Ω ، وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية هي عبارة عن حادث. فإذا رمزنا بـ $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ لحوادث ظهور الأرقام $\{1,2,3,4,5,6\}$ على الترتيب على الوجه العلوي لحجر النرد، وكان اهتمامنا هو الحصول على الرقم (1)، فإن: $A_1 = \{1\}$ هو عبارة عن مجموعة جزئية من Ω أي أن $A_1 \subset \Omega$ ، أما إذا كان اهتمامنا هو الحصول على الرقم (5) فإن $A_5 = \{5\}$ هو عبارة عن مجموعة جزئية من Ω أي أن $A_5 \subset \Omega$ وهكذا بالنسبة لبقية الحوادث. أما إذا كان اهتمامنا هو الحصول على رقم زوجي، أي كان $A = \{2,4,6\}$ ، فإن A : هو عبارة عن مجموعة جزئية من Ω ، وبالتالي فإن A هو حادث، ونكتب $A \subset \Omega$.

وكذلك عند رمي قطعة نقدية مرة واحدة فإننا نحصل إما على صورة أو كتابة، وبالتالي فإن فضاء إمكانات التجربة هي {كتابة، صورة}= Ω، وإن ظهور أحد الوجهين هو عبارة عن حادث ويشكل مجموعة جزئية من Ω.

. إذا كانت لدينا تجربة عشوائية ما، وكانت Ω فضاء هذه التجربة، فإن كل عنصر من عناصر الفضاء Ω يدعى بحادثة أولية (بسيطة)، فإذا كانت:

$\Omega = \{A_1, A_2, ...A_i, ...A_n\}$ فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، وكانت A_i عناصر ذلك الفضاء، فإن كل عنصر منها A_i يعتبر حادثاً أولياً، لأنه يشكل مجموعة جزئية من Ω ، أي: $A_i \subset \Omega$.

$$A_i \subset \Omega \qquad (2-2)$$

فإذا كان فضاء التجربة Ω لتجربة تحليل الدم لشخص ما هو:

$$\Omega = \{A, B, AB, O\} \qquad (3-2)$$

فإن : $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $AB \subset \Omega$, $O \subset \Omega$، وهي عبارة عن مجموعات جزئية من Ω. وبالتالي فإن كل عنصر من فضاء التجربة هو حادث أولي (بسيط).

. إن فضاء التجربة Ω يعتبر مجموعة جزئية من نفسه، أي: $\Omega \subset \Omega$، وبالتالي فإن Ω كلها هي عبارة عن حادثة، فعند إجراء التجربة يكون الناتج منتمياً إلى Ω حتماً. أي Ω حادث واقع لامحالة، ولذلك يدعى بالحادث الأكيد.

ـ إن المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئية من Ω أي $\Phi \subset \Omega$، وبالتالي فإن Φ هي عبارة عن حادثة. وعند إجراء التجربة يكون الناتج غير منتمي للمجموعة الخالية Φ، وبالتالي فإن Φ حادث مستحيل. فعند إجراء تجربة تحليل الدم لشخص ما فإن النتيجة تكون إحدى الزمر الدموية A, B, AB, O ، والتي تشكل Ω، وبالتالي فإن الحادث أكيد، وكذلك فإن النتيجة لاتكون من غير هذه الزمر الدموية، أي لاتنتمي إلى Φ، وبالتالي فإن Φ حادث مستحيل.

ويوجد أنواع أخرى للحوادث يمكن أن نستعرض منها:

2-3-1: الحوادث المتنافية Contradicting Events:

إذا كان A و B حادثين من فضاء العينة Ω لتجربة ما، فإننا نقول إن الحادثين A و B متنافيان إذا كان $A \cap B = \Phi$ ، أو بمعنى آخر نقول عن الحادثين A, B أنهما متنافيان إذا استحال وقوعهما معاً. فمثلاً، عند قذف قطعة نقدية، فإن حادث ظهور الصورة ينفي حادث ظهور الكتابة في نفس التجربة.

2-3-2: الحوادث الشاملة Full Events:

إذا كانت $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ مجموعة من الحوادث من فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية ما، وكانت هذه الحوادث تحقق العلاقة الآتية:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_n = \Omega \qquad (4-2)$$

فإننا نقول إن هذه الحوادث شاملة، أي أن نتيجة التجربة، لابد وأن تكون أحد هذه الحوادث. وخير مثال على ذلك تجربة إلقاء حجر نرد وأن الحوادث البسيطة، $A_1, A_2, ...A_6$ الممثلة لظهور الأرقام $1, 2, 3, ...6$ تعتبر حوادث شاملة.

2-3-3: الحوادث المتكافئة(المتساوية الفرصة) Complementary Events:

إذا كانت لدينا تجربة عشوائية ما وكانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ تعبر عن جميع نتائج التجربة، فإننا نقول إن هذه الحوادث متكافئة إذا كان لكل منها الإمكانية نفسها في الظهور.

وخير مثال على ذلك، إن حادث ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقدية أرضاً، له الإمكانية نفسها لحادث ظهور الكتابة، وكذلك إن اختيار كرة واحدة من صندوق يحوي عدداً من الكرات المرقمة من واحد حتى الرقم 10.

2-3-4: الحوادث المستقلة Independent Events:

إذا كان لدينا حادثان A , B متعلقان بتجربتين مختلفتين، وكان تحقق الحادث A لايؤثر على احتمال تحقق الحادث B أو عدم تحققه، فإننا نقول إن الحادثين A وB حادثان مستقلان. فمثلاً، عند إلقاء حجري نرد وظهور الرقم (واحد) على أحدهما لايؤثر على احتمال ظهور أو عدم ظهور الرقم (واحد) على الحجر الآخر. وبالتالي هما حادثان مستقلان.

2-3-5: متمم حادث :

إذا كان A حادثاً ويشكل مجموعة جزئية من Ω أي: $A \subset \Omega$ وكان $\overline{A}$ متمم A ومنه فإن $\overline{A} \subset \Omega$، وبالتالي فإن $\overline{A}$ يدعى بالحادث المتمم أو متمم الحادث A. وهما يحققان العلاقة الآتية:

حيث:

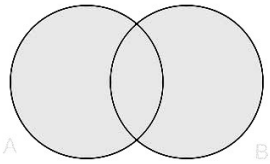
$$\overline{A} \cup A = \Omega \qquad (5-2)$$

وعلى سبيل المثال، إذا كان A حادثاً يمثل ظهور رقم أكبر من 4 عند إجراء تجربة حجر النرد. فإن الحادث المتمم له $\overline{A}$، ويمثل ظهور رقم أصغر أو يساوي 4.

2-3-6: اجتماع حادثين:

إن اجتماع حادثين A , B متعلقان بتجربة عشوائية ما. هو حادث آخر نرمز له بـ $(A \cup B)$، ويتكون من عناصر فضاء التجربة Ω الموجودة في A أو في B أو في

A و B معاً. أي أن الحادث $A \cup B$ يتحقق إذا تحقق أحدهما على الأقل. ويمكن توضيح ذلك بالشكل البياني التالي:



الشكل رقم (2–1)

وبالتالي فإن $A \cup B$ هو الجزء المظلل في الدائرتين.

مثال (2–3):

عند إجراء تجربة سحب ورقة من أوراق اللعب نفرض أن:

A = {ظهور بنت}

B = {ظهور ورقة البستون}

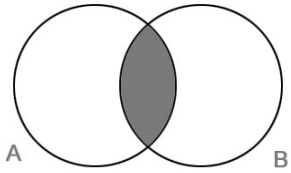
وبالتالي فإن:

$A \cup B$ = { ظهور ورقة البستون، ظهور بنت البستون، ظهور بنت}

أي أن الحادث $(A \cup B)$ سيتحقق إذا كانت الورقة المسحوبة تكون (بنت البستوني(أو أي بنت أو أي ورقة (بستوني).

2–3–7: تقاطع حادثين:

إن تقاطع حادثين A و Bمتعلقان بتجربة عشوائية ما، هو حادث آخر نرمز له بـ $(A \cap B)$، ويتكون من عناصر فضاء التجربة Ω الموجودة في A, B معاً. أي أن الحادث $A \cap B$ يتحقق إذا تحقق الحادثان A , B معاً. ويمكن توضيح ذلك بالشكل البياني التالي:



الشكل رقم (3-2)

وبالتالي فإن $A \cap B$ هو الجزء المظلل في الدائرتين.

مثال (2-4):

لنأخذ نفس المثال (2-3) فإننا نجد أن: {ظهور بنت البستوني} = $A \cap B$

أي أن $(A \cap B)$ يتحقق إذا كانت الورقة المسحوبة هي ورقة بنت البستوني حصراً.

ملاحظات:

. إن الحادث المستحيل Φ يتنافى مع أي حادث آخر في أي تجربة.

ـ إذا كان A حادثاً يتعلق بتجربة ما وكان $\overline{A}$ حادثاً متمماً لـ A، فإن $\overline{A}$ وA يكونان حادثين متنافيين، وبالتالي فإن:

$$A \cap \overline{A} = \Phi \qquad (6-2)$$

ـ إذا كان Ω فضاءً لتجربة عشوائية ما وكان A وB حادثين، حيث $B \subset \Omega$ و $A \subset \Omega$، فإن $A \cap B$ و $A \cup B$ حادثان آخران، ويحققان العلاقتين الآتيتين:

$$A \cup B \subset \Omega$$

$$A \cap B \subset \Omega \qquad (7-2)$$

أي أن تحقق أي من الحادثين مرتبط بالتجربة العشوائية نفسها.

. وكذلك نجد أن

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{\Omega} = \Phi \qquad (8-2)$$

$$\overline{\Phi} = \Omega$$

مثال (2-5):

نرمي حجر نرد مرتين متتاليتين، ونرمز بـ x لنتائج الرمية الأولى، وبـ y لنتائج الرمية الثانية. والمطلوب: إيجاد الحوادث التالية:

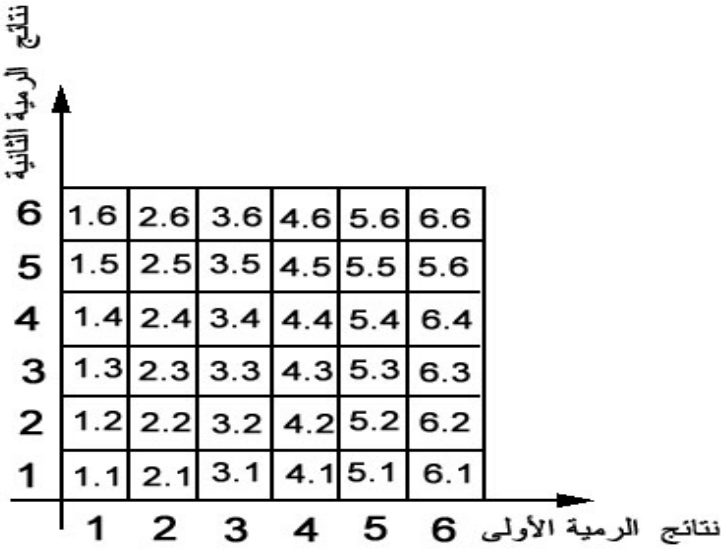
$$A=\{(x,y):x+y<4\}$$
$$B=\{(x,y):x=y\}$$
$$C=\{(x,y):x=5\}$$
$$D=\{(x,y):x+y=1\}$$
$$E=\{(x,y):x+y>8\}$$

الحل:

إن فضاء التجربة Ω يكتب بالشكل:

$$\Omega=\{(1,1)(1,2)(1,3)....(1,6)(2,1)(2,2)....(2,6)(3,1)(3,2)....$$
$$...(3,6)(4,1)....(5,6)(6,1).....(6,6)\}$$

ويمكن تمثيل نتائج الرمية الأولى، ونتائج الرمية الثانية على محورين إحداثيين، وبالتالي نحصل على فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر النرد مرتين متتاليتين كما يلي:



إذاً تتحقق الحوادث كما يلي:

$$A=\{(1,1)(1,2)(2,1)\}$$
$$B=\{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)\}$$
$$C=\{(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)\}$$
$$D=\{(\quad)\}=\Phi$$
$$E=\{(3,6)(4,5)(4,6)(5,5)(5,6)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\}$$

مثال (2–6):

نلقي قطعة نقود أربع مرات. نرمز لظهور الصورة بـ H ولظهور الكتابة بـ T، والمطلوب:

1 . إيجاد فضاء التجربة لإلقاء قطعة النقود أربع مرات.

2 . إيجاد حالات الحوادث التالية.

. A ظهور الصورة في الرمية الأولى.

. B ظهور صورة واحدة على الأقل خلال هذه التجارب.

. C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.

. $(A\cap\overline{B}),\overline{(A\cap B)},(\overline{A}\cup\overline{B}),(A\cup C),(A\cap B)$

. D حادث ظهور صورتين على التوالي.

. E حادث ظهور النتائج نفسها في الرميات الأربع (إما صورة أو كتابة)

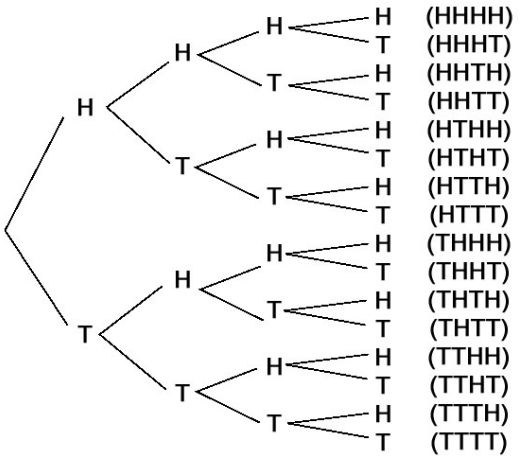
. $(D\cap E)$

الحل:

1 . إن فضاء التجربة يكتب كمايلي:

$$\Omega=\{HHHH,HHHT,HHTH,HTHH,THHH,HHTT,HTHT,THHT,$$
$$THTH,TTHH,HTTH,HTTT,THTT,TTHT,TTTH,TTTT\}$$

ويمكن إيجاد فضاء التجربة باستخدام الشجرة البيانية الآتية:



وبذلك نجد أن الحوادث المطلوبة وهي:

$$A=\left\{\begin{pmatrix} HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, \\ HTHH, HTHT, HTTH, HTTT \end{pmatrix}\right\} \qquad .2$$

$B=\{$ فضاء التجربة Ω ما عدا $(TTTT)\}$

$$C=\{(THHH),(THHT),(THTH),(THTT)\}$$

$$A\cap B=\{(HHHH),(HHHT),(HHTH),(HHTT),$$
$$(HTHH),(HTHT),(HTTH),(HTTT)\}=A$$

$$A\cup C=\{(HHHH),(HHHT),(HHTH),(HHTT),$$
$$(HTHH),(HTHT),(HTTH),(HTTT),$$
$$(THHH),(THHT),(THTH),(THTT)\}$$

$$\overline{A}=\{(THHH),(THHT),(THTH),(THTT),$$
$$(TTHH),(TTHT),(TTTH),(TTTT)\}$$

$$\overline{B}=\{(TTTT)\}$$

$$(\overline{A}\cup\overline{B})=\{\overline{A}\}$$

$$(\overline{A\cap B})=\{\Omega-(A\cap B)\}$$

$$(A\cap\overline{B})=\{\Phi\}$$

$$D=\begin{Bmatrix}(HHHH),(HHHT),(HHTH),(HHTT)\\(HTHH),(THHH),(THHT),(TTHH)\end{Bmatrix}$$

$$E=\{(HHHH),(TTTT)\}$$

$$D\cap E=\{(HHHH)\}$$

2-4: تعريف الاحتمال Probability:

عندما نلقي حجر نرد أرضاً فإننا نحصل على نتيجة معينة من عدة نتائج، أي سيظهر أحد الأرقام (1) و(2) و(3) و(4) و(5) و(6) على الوجه العلوي لحجر النرد، كما إنها تتميّز بأنها متكافئة لأن أي رقم من هذه الأرقام له الإمكانية نفسها في الظهور، ولكن لا نعلم بالتأكيد أي من هذه الأرقام سوف يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد قبل إجراء التجربة، إذاً تجربة إلقاء حجر النرد هي تجربة عشوائية.

وتشكل نواتج التجربة فضاء التجربة Ω حيث $\Omega=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$ على الترتيب، وأن الحادث هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω. فإذا كان اهتمامنا هو الحصول على الحادث A_1 الذي يمثل الرقم (1)، فعند إجراء التجربة، فإننا قد نحصل على الرقم (1) وقد لانحصل، وهذا يعني أن الحادث A_1 قد يتحقق وقد لا يتحقق، وهكذا بالنسبة لبقية الحوادث قد تتحقق وقد لا تتحقق. وبالتالي يمكن القول إن لكل حادث إمكانية تحقق، وإمكانية عدم تحقق. ويتم التعبير عن هذه الإمكانية بعدد حقيقي يدعى الاحتمال. ومما تقدم نستخلص أن الاحتمال: هو عدد حقيقي يعبر عن إمكانية تحقق الحادث المدروس. ومما سبق يمكن عرض عدة تعاريف للاحتمال أهمها:

2-4-1: التعريف التقليدي (الكلاسيكي) للاحتمال Classical definition of Probability:

عندما نلقي حجر نرد أرضاً فإننا نحصل على أحد الحوادث A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6، والممثلة للأعداد 1,2,3,4,5,6 على الرتيب، وهي تشكل فضاء التجربة Ω. وإن لكل رقم منها الإمكانية نفسها في الظهور، أي أن هذه

الحوادث متكافئة أو متساوية الفرصة في الوقوع وأن احتمال ظهور أي رقم من الأرقام يساوي $\frac{1}{6}$. وإذا أخذنا تجربة أخرى مثل سحب ورقة من ورق لعب يحتوي 52 ورقة، ولنحسب احتمال أن تكون هذه الورقة بنتاً. نلاحظ أن عدد البنات في ورق اللعب أربعة، وبالتالي فإن احتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنتاً يساوي $\frac{4}{52}$. أما إذا أردنا أن نحسب احتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنت البستوني، فإننا نلاحظ أن عدد بنات البستوني هي واحدة فقط، وإذا رمزنا بـ A لحادث كون الورقة المسحوبة بنت البستوني، وبالتالي فإن $P(A)=\frac{1}{52}$. وممّا تقدم نجد أن البسط يعبّر عن عدد الحالات الملائمة لتحقق الحادث A (وهي الحالات التي تؤدي إلى تحقق حادث معيّن). وأن المقام هو عبارة عن عدد حوادث فضاء التجربة العشوائية، أو عدد مجموعة نواتج التجربة؛ أي عدد الحالات الممكنة للتجربة. وبناءً على ذلك نجد أن قيمة الاحتمال تحسب من العلاقة:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لتحقق الحادث } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \qquad (9-2)$$

وبشكل عام، إذا كانت E تجربة عشوائية ما، وكانت Ω فضاء هذه التجربة، وتضم جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية وكان عددها N وكانت متساوية الفرصة في الوقوع، وكان A حادثاً مرتبطاً بهذه التجربة عدد عناصره M فإن النسبة $\frac{M}{N}$ تعتبر مقياساً معقولاً لإمكانية وقوع الحادث A ونكتب ذلك كمايلي:

$$P(A)=\frac{M}{N} \qquad (10-2)$$

حيث: M: عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث A.

N : عدد الحالات الممكنة (الكلية Ω).

- **خواص الاحتمال التقليدي:**

1 . إن $P(A) \geq 0$ وذلك لأنه حسب تعريف الاحتمال في العلاقة (2−10) نجد أن:

$$m \geq 0 \ , n > 0 \Rightarrow P(A) = \frac{m}{n} \geq 0 \qquad (11-2)$$

2 . وعندما يكون $P(A) = 0$ فإن تحقق الحادث A يكون مستحيلاً.

2 . وعندما يكون $P(\Omega) = 1$ وذلك يحدث عندما:

$$m = n \Rightarrow P(A) = \frac{m = n}{n} = 1 \qquad (12-2)$$

وبالتالي فإن تحقق الحادث A يكون مؤكداً.

3 . ينتج عن الخاصة (1) و(2) أن:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad (13-2)$$

4 . إذا كان $\overline{A}$ الحادث المتمم للحادث A، فإن: $\overline{A} + A = \Omega$ ، وبالتالي فإن:

$$P(\overline{A} \cup A) = P(\overline{A}) + P(A) = 1$$

ومنه:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (14-2)$$

مثال (2−7):

نرمي حجر نرد مرةً واحدة، والمطلوب:

1 . إيجاد فضاء التجربة لإلقاء حجر النرد.

2 . حساب احتمال حصولنا على:

أ . الرقم (1) ب . رقم زوجي جـ . رقم فردي د . رقم أكبر من4.

الحل:

1 إن فضاء التجربة لإلقاء حجر النرد يساوي:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

2 − أ − نرمز بـ A لحادث حصولنا على الرقم (1) فيكون $P(A) = \frac{1}{6}$.

ب − نرمز بـ B لحادث حصولنا على رقم زوجي فيكون لدينا:

$$B=\{2,4,6\}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{6}$$

جـ . نرمز بـ C لحادث حصولنا على رقم فردي، فيكون لدينا:

$$C=\{1,3,5\}\Rightarrow P(C)=\frac{3}{6}$$

أو: $$P(C)=1-P(B)=1-\frac{3}{6}=\frac{3}{6}$$

د . نرمز بـ D لحادث حصولنا على رقم أكبر من 4، فيكون لدينا:

$$D=\{5,6\}\Rightarrow P(D)=\frac{2}{6}$$

- **عيوب التعريف الكلاسيكي للاحتمال:**

1 . يقتصر تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال على التجارب العشوائية ذات الفضاء المنتهي، ويصعب تطبيقه على التجارب ذات الفضاء غير المنتهي، فمثلاً ما هو احتمال أن نحصل على عدد أكبر من 500 عندما نقوم بسحب عدد من مجموعة الأعداد الطبيعية، نلاحظ أن فضاء التجربة غير منتهٍ، وبالتالي يصعب حساب الاحتمال المطلوب.

2 . يشترط تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال أن تكون حوادث الفضاء متكافئة أي أن تتوفر الإمكانية المتساوية في الظهور لجميع الحوادث المتعلقة بالتجربة العشوائية ويصعب تطبيقه على التجارب العشوائية التي تكون أحداثها ذات فرص غير متساوية الوقوع، فمثلاً رمي حجر نرد غير منتظم لايتناسب مع هذا التعريف.

2-4-2: التعريف التجريبي للاحتمال (الإحصائي) Experimental Definition of Probability:

لنفرض أننا ألقينا قطعة نقود منتظمة n مرة. وكانت m عدد مرات ظهور الصورة، فإن نسبة ظهور الصورة خلال n تجربة يساوي $\frac{m}{n}$. وتختلف هذه النسبة عن المقدار $\frac{1}{2}$، ولكنها احتمال ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقدية منتظمة. لنكرر هذه

التجربة عدداً كبيراً من المرات (أي n كبيرة جداً)، عندئذٍ فإن عدد مرات ظهور الصورة يقترب من عدد مرات ظهور الكتابة، وبالتالي فإن: $\frac{m}{n} \approx \frac{1}{2}$. وبذلك يمكن القول إنه إذا كانت لدينا تجربة عشوائية ما وكان فضاء إمكاناتها Ω، وكان A حادثاً مرتبطاً بهذه التجربة، وقد تحقق m مرةً خلال إجراء n تجربة. فإنه عندئذٍ نسمي المقدار $\frac{m}{n}$ بالتردد النسبي لوقوع الحادث A. وبالتالي يمكن تعريف احتمال وقوع الحادث A إحصائياً بأنه نهاية التردد النسبي للحادث A وذلك عندما نكرر التجربة عدداً لا متناهٍ من المرات وتحت الشروط نفسها. ويمكن صياغة هذا التعريف بالعلاقة التالية:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \qquad (15-2)$$

حيث: m : تردد الحادث A.

n : عدد مرات تكرار التجربة العشوائية.

وممّا تقدم يمكن القول إنه إذا كانت لدينا تجربة عشوائية ما، وكان A حادثاً مرتبطاً بهذه التجربة، فإن احتمال وقوع الحادث A يساوي $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$ عندما نكرر التجربة عدداً كبيراً من المرات، ويدعى المقدار $\frac{m}{n}$ التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي.

- **خواص الاحتمال التجريبي:**

من التعريف السابق نجد أن:

$$0 \le m \le n \qquad (16-2)$$

ومنه نجد أن:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \le 1$$

وبالتالي يمكن استخلاص الخواص التالية:

1 . نجد أن: $0 \le P(A) \le 1$

2 . عندما تكون: $m = n$ فإن الحدث A يكون حادثاً مؤكداً، وبالتالي:

$$P(A) = P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1 \qquad (17-2)$$

3 . عندما تكون $m=0$ فإن الحدث A لا يمكن أن يتحقق إطلاقاً ويكون مستحيلاً، وبالتالي:

$$P(\Phi)=P(A)=\frac{0}{n}=0$$

4 . إذا كان A وB حادثين متنافيين، أي يحققان $A\cap B=\Phi$ وإذا كان m_1 هو تردد الحادث A و m_2 هو تردد الحادث B، عند إجراء التجربة n مرة، فإن احتمال اجتماعهما $(A\cup B)$ يساوي مجموع احتماليهما لأن:

$$P(A\cup B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \qquad (18-2)$$

حيث $P(A)$ احتمال تحقق الحادث A، و $P(B)$ احتمال تحقق الحادث B.

وإذا كانت $A_1, A_2, A_3 .....A_n$ متوالية من الحوادث المتنافية مثنى مثنى أي إنها تحقق العلاقة:

$$(A_i\cap A_j)=\Phi \qquad (19-2)$$

حيث: $i\neq j$ و $i,j=1,2.....n$

وبالتالي فإنه يكون لدينا:

$$P(A_1\cup A_2\cup.....\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)....P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \qquad (20-2)$$

وإذا كانت A_i حيث $i=1,2,3,.....n$ تشكل مجموعة كلية Ω فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1$$

5 . إن الخواص السابقة للاحتمال تفيدنا في الحصول على النتائج التالية:

$$P(\Phi)=0 \qquad (21-2)$$

وذلك لأن Ω و Φ حادثتين متنافيتين تحققان ما يلي:

$$\Omega\cap\Phi=\Phi$$

$$\Omega\cup\Phi=\Omega \qquad (22-2)$$

ومنه فإن:

$$P(\Omega \cup \Phi) = P(\Omega)$$

$$P(\Omega) + P(\Phi) = P(\Omega) \qquad (23-2)$$

$$P(\Phi) = P(\Omega) - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

$$P(\Phi) = 0 \qquad (24-2)$$

6 . إن الحادثين A و $\overline{A}$ حادثان متنافيان ويشكلان مجموعة كلية Ω؛ أي:

$$A \cap \overline{A} = \Phi$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad (25-2)$$

- **العلاقة بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي:**

لقد أشرنا سابقاً إلى أن الاحتمال (التقليدي) لتحقق حادث A يتعلق بتجربة معينة يمكن حسابه بشكل مسبق بالاعتماد على أسس رياضية، أما الاحتمال الإحصائي (التجريبي) فلا يمكن حسابه إلا بعد إجراء التجربة. ولدراسة العلاقة بينهما نأخذ الأمثلة الآتية:

مثال (2-8):

ألقينا قطعة نقود متجانسة 1000 مرة، فحصلنا على 460 صورة، وبالتالي فإن احتمال تحقق الحادث A الذي يمثل ظهور الصورة يساوي:

$$P(A) = \frac{460}{1000} = 0,46$$

وهي قيمة الاحتمال الإحصائي (التجريبي) ولكنها تختلف عن قيمة الاحتمال التقليدي والتي تساوي 0.5.

مثال (2-9):

لنلقي القطعة النقدية 10000 مرة، وضمن الشروط السابقة نفسها. ولنفرض أننا حصلنا على 4900 صورة، وبالتالي فإن احتمال تحقق الحادث A والذي يمثل الصورة يساوي:

$$P(A)=\frac{4900}{10000}=0,49$$

وهي قيمة الاحتمال التجريبي، ولكنها تقترب كثيراً من الاحتمال التقليدي (النظري) والذي يساوي 0.5. نستنتج من خلال المثالين السابقين أن الاحتمال التجريبي يقترب من الاحتمال التقليدي عندما نكرر التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات؛ أي:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} \qquad (26-2)$$

- **عيوب التعريف التجريبي للاحتمال:**

1 . إن الاحتمال التجريبي يعطي قيمةً تقريبية، ولا يمكننا أن نؤكد أننا سوف نحصل على النسبة نفسها إذا تم تكرار التجربة عدداً كبيراً من المرات.

2 . قد تكون النسبة $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}$ غير موجودة أو غير محددة، مثل احتمال سقوط المطر عند ظهور الغيوم.

3 . قد توجد بعض التجارب التي لا يمكن تكرارها عدداً كبيراً من المرات وتحت شروط التجربة نفسها.

مثال (2-10):

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر نظرية الاحتمالات $P=0,6$ ، فما هو احتمال رسوبه؟

الحل: نرمز بـ A لحادث نجاح الطالب، فيكون $\overline{A}$ هو حادث رسوبه، وبالتالي فإن: $P(A)=0,6$ ولحساب احتمال الرسوب $P(\overline{A})$ ، ونقوم بتطبيق العلاقة:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$
$$0,6+P(\overline{A})=1\Rightarrow$$
$$P(\overline{A})=1-0,6=0,4$$

2-4-3: تعريف كولموغوروف للاحتمال (التعريف الرياضي):

إذا كانت لدينا تجربة ما، وكان فضاء إمكاناتها Ω ، فإننا نعرّف الاحتمال بأنه التطبيق: $P: f\to[0,1]$ والذي يحقق الشروط التالية:

1 . أن يكون $P(\Omega)=1$ $(27-2)$

2 . من أجل حادث A ينتمي إلى f، فإن:

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (28-2)$$

3 . من أجل كل مجموعة منتهية ومتنافية من الحوادث $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ تنتمي إلى f $(A_i \in f)$.

فإن احتمال اجتماعها يساوي مجموع احتمالاتها:

$$p\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) \qquad (29-2)$$

4 . ومن أجل كل متتالية متناقصة A_n ، من الحوادث المتعلقة بتلك التجربة، وتنتهي إلى Φ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \qquad (30-2)$$

مثال (2-11):

يوجد في مكتبة 1000 كتاب، منها 200 كتاب باللغة الإنكليزية، و300 كتاب بالغة العربية، و250 باللغة الإسبانية، و150 كتاباً باللغة الفرنسية والباقي باللغة الألمانية. نسحب كتاباً بشكل عشوائي، والمطلوب:

1 . احسب احتمال أن يكون الكتاب المسحوب باللغة الألمانية أو الفرنسية.

2 . احسب احتمال أن يكون الكتاب المسحوب باللغة الإنكليزية أو العربية.

3 . احسب احتمال أن يكون الكتاب المسحوب باللغة الإسبانية أو الفرنسية أو الألمانية.

4 . احسب احتمال أن يكون الكتاب المسحوب باللغة الإنكليزية أو العربية أو الإسبانية.

الحل:

نرمز بـ A لحادث كون الكتاب المسحوب باللغة الألمانية، فيكون:

$$P(A) = \frac{100}{1000} = 0{,}1$$

نرمز بـ B لحادث كون الكتاب المسحوب باللغة الإنكليزية، فيكون:

$$P(B)=\frac{200}{1000}=0,2$$

نرمز بـ C لحادث كون الكتاب المسحوب باللغة العربية ، فيكون:

$$P(C)=\frac{300}{1000}=0,3$$

نرمز بـ D لحادث كون الكتاب المسحوب باللغة الفرنسية، فيكون:

$$P(D)=\frac{150}{1000}=0,15$$

نرمز بـ E لحادث كون الكتاب المسحوب باللغة الإسبانية، فيكون:

$$P(E)=\frac{250}{1000}=0,25$$

1. $P(A\cup D)=P(A)+P(D)$

$$P(A\cup D)=\frac{100}{1000}+\frac{150}{1000}=\frac{250}{1000}=0,25$$

2. $P(B\cup C)=P(B)+P(C)$

$$P(B\cup C)=\frac{200}{1000}+\frac{300}{1000}=\frac{500}{1000}=0,5$$

3. $P(E\cup D\cup A)=P(E)+P(D)+P(A)$

$$P(E\cup D\cup A)=\frac{250}{1000}+\frac{150}{1000}+\frac{100}{1000}=\frac{500}{1000}=0,5$$

أو باستخدام العلاقة (2−25) نجد أن:

$$P(E\cup D\cup A)=1-P(B\cup C)$$

$$P(E\cup D\cup A)=1-0,5=0,5$$

وهو الجواب نفسه الذي حصلنا عليه.

4. $P(B\cup C\cup E)=1-P(A\cup D)$

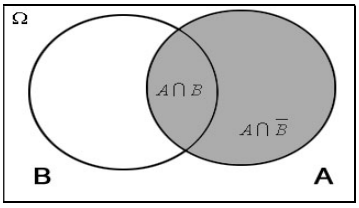
$$P(B\cup C\cup E)=1-0,25=0,75$$

نظرية (2-1):

إذا كان A وB حادثين يتعلقان بتجربة معينة، وكان فضاء إمكاناتها Ω، فإن احتمال تحقق الحادث A وعدم تحقق الحادث B يساوي احتمال تحقق الحادث A مطروحاً منه احتمال تحقق الحادثين A وB معاً أي أن:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-(A\cap B)$$

البرهان: يمكن أن نوضح الحوادث A وB و Ω على الشكل البياني التالي:



الشكل البياني رقم (2-3): $A\cap B,\left(A\cap\overline{B}\right)$

نلاحظ أن الحادثين $\left(A\cap\overline{B}\right),(A\cap B)$ حادثين متنافيان كما هو موضح في الشكل البياني رقم (3) وهما يحققان العلاقتين:

$$\left[(A\cap B)\cap\left(A\cap\overline{B}\right)\right]=\Phi \qquad (31-2)$$

وبالتالي فإن:

$$\left[(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]=A$$

$$P\left[(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]=P(A) \qquad (32-2)$$

وبالاعتماد على العلاقة (2-18) لاجتماع حوادث متنافية نجد أن العلاقة (2-32) تكتب بالشكل:

$$P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)$$

ومنه نجد أن:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B) \qquad (33-2)$$

وهو المطلوب.

مثال (2-12):

إذا كان احتمال نجاح سالم في الانتخابات يساوي 0.7، وكان احتمال نجاح سالم وسامي في الانتخابات يساوي 0.5، والمطلوب حساب احتمال نجاح سالم ورسوب سامي.

الحل: نرمز بـ A لحادث نجاح سالم، فيكون: $P(A)=0.7$.

ونرمز بـ B لحادث نجاح سامي، فيكون: $P(B)=\ ?$ ، ولكن $P(A\cap B)=0.5$.

ولنرمز بـ $\overline{B}$ لحادث رسوب سامي، فيكون لدينا: $P\left(A\cap\overline{B}\right)=\ ?$

نطبق العلاقة (2−33) فنجد أن:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)$$

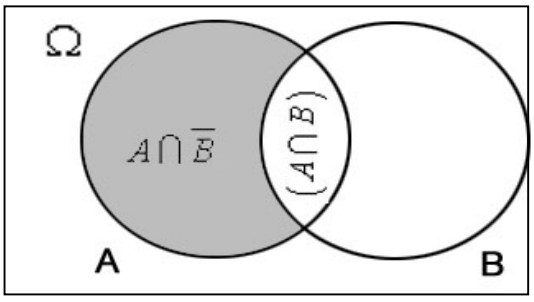
$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=0.7-0.5=0.2$$

نظرية (2−2):

إذا كان A وB حادثين متقاطعين (غير متنافيين)، فإن حدوث أحدهما على الأقل يساوي إلى احتمال حدوث A مضافاً إليه احتمال حدوث B، ومطروحاً من الناتج احتمال حدوث B, A معاً، أي:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

البرهان: يمكن أن نوضح الحادثين B, A بالشكل البياني التالي:



شكل رقم (2−4): يمثل الحوادث $A\cap\overline{B},\ B, A$

نلاحظ أن $A\cap\overline{B},\ B$ حادثان متنافيان أي أنهما يحققان العلاقة:

$$\left(A\cap\overline{B}\right)\cap B=\Phi \qquad (34-2)$$

وبالتالي فإن: $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup B=(A\cup B)$

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(B\right)=P(A\cup B) \qquad (35-2)$$

نأخذ $P\left(A\cap\overline{B}\right)$ من العلاقة (2−33) ونعوضه في (2−35) فنجد:

$$P(A)-P(A\cap B)+P\left(B\right)=P(A\cup B)$$

ومنه نجد أن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P\left(B\right)-P(A\cap B) \qquad (36-2)$$

حالة خاصة:

عندما يكون الحادثان $A,\ B$ متنافيين فإن $A\cap B=\Phi$ ، وإن الاحتمال: $P(A\cap B)=P(\Phi)=0$ ، وبذلك تأخذ العلاقة السابقة الشكل الآتي:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

مثال (2−13):

إذا كان احتمال نجاح سالم في الانتخابات يساوي 0.7 ، واحتمال نجاح سامي يساوي 0.715 ، وأن احتمال نجاح سالم وسامي يساوي 0.5.

والمطلوب: حساب احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

الحل:

نرمز بـ A لحادث نجاح سالم في الانتخابات، فيكون: $P(A)=0.7$.

نرمز بـ B لحادث نجاح سامي في الانتخابات، فيكون: $P(B)=0.715$.

وأن احتمال نجاح سالم وسامي يساوي: $P(A\cap B)=0.5$.

نطبق العلاقة (2−36) فنجد:

$$P(A\cup B)=P(A)+P\left(B\right)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=0.7+0.715-0.5=0.915$$

وأن احتمال عدم نجاح أي منهما، ونرمز له بـ $P\overline{(A\cup B)}$ ، ويساوي:

$$P\overline{(A\cup B)}=1-P(A\cup B)=1-0.915=0.085$$

مثال (2−14):

لنعد إلى المثال (2–5) الذي يبحث في نتائج رمي حجر النرد مرتين، ولنفترض أن A هو الحادث الذي يكون فيه رقم الرمية الأولى زوجياً، كما نفترض أن B هو الحادث الذي يكون فيه رقم الرمية الثانية زوجياً، والمطلوب حساب احتمال أن يكون أحد الرقمين على الأقل زوجياً.

الحل:

إن المطلوب هو حساب احتمال تحقق الحادث $(A \cup B)$ وهو يساوي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ومن فضاء التجربة نجد أن:

$$P(A) = \frac{18}{36} \qquad P(B) = \frac{18}{36} \qquad P(A \cap B) = \frac{9}{36}$$

وبذلك نجد أن:

$$P(A \cap B) = \frac{18}{36} + \frac{18}{36} - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$$

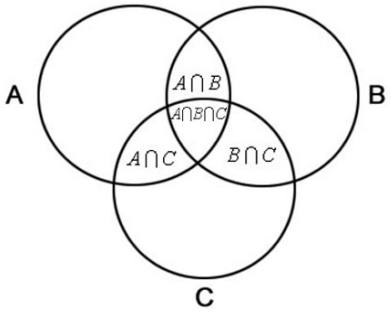
نظرية (2–3):

إذا كان $A\ ,\ B\ ,\ C$ ثلاثة حوادث غير متنافية، فإن احتمال تحقق حادث واحد على الأقل يساوي احتمال اجتماعهم، أي:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \qquad (37-2)$$

البرهان:

يمكن تمثيل الحوادث $A\ ,\ B\ ,\ C$ وتقاطعاتها بالشكل البياني التالي:



الشكل البياني رقم (2–5)

وتسهيلاً للبرهان نضع $B \cup C = D$ ، فيكون لدينا من العلاقة (2–36) مايلي:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$
$$= P(A) + P(B \cup C) - P\left[A \cap (B \cup C)\right]$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) -$$
$$- P\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right]$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$$
$$- P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \qquad (38-2)$$

وهو المطلوب.

مثال (2–15):

أحمد وسعيد وفائز ثلاثة أصدقاء، فإذا علمت أن: احتمال بقاء أحمد على قيد الحياة لمدة سنة، هو $\frac{3}{4}$، واحتمال بقاء سعيد على قيد الحياة لمدة سنة، هو $\frac{2}{5}$، واحتمال بقاء أحمد وفائز على قيد الحياة لمدة سنة يساوي $\frac{12}{20}$، واحتمال بقاء سعيد وفائز على قيد الحياة لمدة سنة، هو $\frac{8}{25}$. واحتمال بقاء أحدهم على قيد الحياة لمدة سنة، هو $\frac{97}{100}$. واحتمال بقاء الثلاثة على قيد الحياة لمدة سنة، هو $\frac{24}{100}$، والمطلوب: ماهو احتمال بقاء فائز على قيد الحياة لمدة سنة أخرى.

الحل:

نرمز بـ A لحادث بقاء أحمد على قيد الحياة لمدة سنة.

ونرمز بـ B لحادث بقاء سعيد على قيد الحياة لمدة سنة.

ونرمز بـ C لحادث بقاء فائز على قيد الحياة لمدة سنة.

وبالتالي فإن:

$$P(A)=\frac{3}{4}\ ,\quad P(B)=\frac{2}{5}\ ,\quad P(C)=?$$

$$P(A\cap C)=\frac{12}{20}\qquad P(B\cap C)=\frac{8}{25}$$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$$ (لأن A و B مستقلان)

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{24}{100}\qquad P(A\cup B\cup C)=\frac{97}{100}$$

وبتطبيق العلاقة (2-38) نجد:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$\frac{97}{100}=\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+P(C)-\frac{6}{20}-\frac{12}{20}-\frac{8}{25}+\frac{24}{100}$$

$$P(C)=\frac{97}{100}-\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{6}{20}+\frac{12}{20}+\frac{8}{25}-\frac{24}{100}=0.8$$

نظرية (2-4):

يمكن تعميم النظرية (2-3) على n حادث. أي إذا كانت: $A_1, A_2, A_3.....A_n$ حوادث غير متنافية فإن احتمال تحقق أحدهم على الأقل يكتب بالشكل:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...P(A_n)$$
$$-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-....P(A_{n-1}\cap An)$$
$$+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4)+...$$
$$+P(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)$$
$$.....$$
$$(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap A_3.....\cap A_n)\qquad (2-39)$$

أو:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \sum_{i<j<k<L}^{n} (A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_L) + ...$$

$$....(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ..... \cap A_n) \qquad (40-2)$$

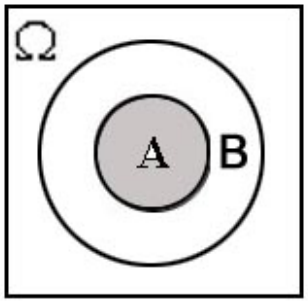
نظرية (2-5):

إذا كان A , B, حادثين، وكان الحادث A مجموعة جزئية من الحادث B أي $A \subset B$ ، فإن احتمال تحقق الحادث A أقل أو يساوي احتمال تحقق الحادث B أي:

$$P(A) \le P(B) \qquad (41-2)$$

البرهان:

يمكن تمثيل الحادثين A, B بالشكل البياني التالي:



الشكل رقم (2-6)

يمكن التعبير عن الحادث B بالعلاقة:

$$B = A \cup (\overline{A} \cap B) \qquad (42-2)$$

وبما أن:

$$A \cap (\overline{A} \cap B) = \Phi$$

فإن احتمال تحقق الحادث B يساوي:

$$P(B) = P\left[A \cup (\overline{A} \cap B)\right]$$

$$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

ومنه:

$$P(B) - P(A) = P(\overline{A} \cap B) \qquad (43-2)$$

وبما أن: $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$

إذاً فإن: $P(B) - P(A) \geq 0$

وبالتالي فإن:

$$P(B) \geq P(A) \qquad (44-2)$$

2-5: الاحتمال الشرطي Conditional Probability:

لقد عرفنّا سابقاً احتمال تحقق الحادث A، والذي يتعلق بتجربة ما، بأنه نسبة عدد الحالات الملائمة لتحقق الحادث A إلى فضاء العينة Ω، ولكن الأمر قد يتطلب منا أحياناً حساب احتمال تحقق الحادث A بعد أن نكون قد علمنا بوقوع الحادث B، أو بمعنى آخر، إذا كان لدينا حادثان مرتبطان باختبار معين فإننا لانستطيع حساب احتمال تحقق الحادث A إلا بعد معرفة بأن الحادث B قد وقع أو لم يقع.

ولفهم ذلك نأخذ صندوقاً فيه 50 كرة، منها 10 كرات بيضاء، و40 كرة حمراء. نسحب كرتين من هذا الصندوق وبدون إعادة (على التوالي)، والمطلوب: ماهو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً حمراء إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً بيضاء.

نلاحظ أن احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء هو $\frac{10}{50}$.

ولنفترض أن هذا الحادث قد تحقق وسحبنا كرة بيضاء في المرة الأولى. وبذلك نجد أن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً حمراء هو $\frac{40}{49}$، أما إذا كان المطلوب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً هي بيضاء، فإن احتمال أن تكون بيضاء بعد أن كانت في السحبة الأولى بيضاء يساوي $\frac{9}{49}$. ومنه نستنتج أن احتمال تحقق حادث كون الكرة المسحوبة ثانياً حمراء أو بيضاء (في كلتا الحالتين) قد تأثر بنتيجة تحقق حادث سحب كرة بيضاء أولاً.

لذلك سنعالج هذه القضية كمايلي:

أولاً: ضرب الاحتمالات لحوادث غير مستقلة:

نقول عن حادثين A و B أنهما غير مستقلين إذا كان تحقق الحادث A يؤثر على احتمال نتيجة تحقق B، فمثلاً إذا كان لدينا صندوق يحوي 10 كرات منها 4 كرات بيضاء و6 كرات حمراء نسحب كرتين على التوالي (بدون إعادة) فعند سحب الكرة الأولى ولنفرض أنها بيضاء وعند عدم إعادتها إلى الصندوق نلاحظ أن عدد الكرات الكلي قد تغير وعدد الكرات البيضاء قد تغير، وبالتالي فإن سحب الكرة الثانية سوف يتأثر نتيجة سحب الكرة الأولى.

نظرية (2-6):

إذا كان $A,\ B$ حادثين غير مستقلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي إلى جداء احتمال الأول في الاحتمال الشرطي للثاني أي:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (45-2)$$

لنبرهن هذه النظرية من خلال المثال التالي:

رجل وزوجته يخرجان لرياضة المشي، ولنراقب خروجهما لـ n يوماً.

فإذا رمزنا بـ A لحادث خروج الزوج لرياضة المشي، و $\overline{A}$ لحادث عدم خروج الزوج.

ونرمز بـ B لحادث خروج الزوجة لرياضة المشي، و $\overline{B}$ لحادث عدم خروج الزوجة.

ونتيجة المراقبة وجدنا أن:

$A\cap B$ عدد مرات خروج الزوج والزوجة معاً هو ℓ_1 مرة خلال n يوماً.

$A\cap \overline{B}$ عدد مرات خروج الزوج وعدم خروج الزوجة هو ℓ_2 مرة خلال n يوماً.

$\overline{A}\cap B$ عدد مرات عدم خروج الزوج وخروج الزوجة هو ℓ_3 مرة خلال n يوماً.

$\overline{A}\cap \overline{B}$ عدد مرات عدم خروج الزوج والزوجة معاً هو ℓ_4 مرة خلال n يوماً.

وبالتالي فإن:

احتمال خروج الزوج لرياضة المشي خلال n يوماً هو: $P(A)=\frac{\ell_1+\ell_2}{n}$

احتمال خروج الزوجة لرياضة المشي خلال n يوماً هو: $P(B)=\frac{\ell_1+\ell_3}{n}$

احتمال خروج الزوج والزوجة معاً لرياضة المشي خلال n يوماً هو:

$$P(A\cap B)=\frac{\ell_1}{n}$$

احتمال عدم خروج الزوج والزوجة لرياضة المشي خلال n يوماً هو:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{\ell_4}{n}$$

ولنعبر عن احتمال خروج الزوجة لرياضة المشي بعد أن يكون الزوج قد خرج لرياضة المشي بالرمز : $P(B/A)$

فنجد أنه يساوي:

$$P(B/A)=\frac{\ell_1}{\ell_1+\ell_2} \qquad (46-2)$$

ولنعبر عن احتمال خروج الزوج لرياضة المشي بعد أن تكون الزوجة قد خرجت لرياضة المشي بالرمز : $P(A/B)$

فنجد أنه يساوي:

$$P(A/B)=\frac{\ell_1}{\ell_1+\ell_3} \qquad (47-2)$$

ومن جهة أخرى نجد أن: $P(A\cap B)=\frac{\ell_1}{n}$

$$\ell_1=n\cdot P(A\cap B)$$

وبالتعويض في (2–46) نجد أن:

$$P(B/A)=\frac{n\cdot P(A\cap B)}{\ell_1+\ell_2}$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{\frac{\ell_1+\ell_2}{n}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad (48-2)$$

وهكذا نجد أن:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A) \qquad (49-2)$$

وبطريقة مشابهة نجد أيضاً أن:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (50-2)$$

ومن تساوي العلاقتين (2−49) و(2−50) نجد أن:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)=\frac{\ell_1}{n} \quad (51-2)$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أن:

$$P(A\cap B)=\frac{\ell_1}{n}=\frac{\text{عدد العناصر في } (A\cap B)}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

وهو المطلوب.

نتيجة (1):

عندما نكون أمام حالة يطلب فيها حساب احتمال تحقق الحادث A بشرط وقوع الحادث B، فإن ذلك يعني إيجاد احتمال تحقق الحادث A منسوباً لفضاء جديدٍ مكوّنٍ من عناصر الحادث B، حيث $B\subset\Omega$، ويسمى هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي.

ومما تقدم يمكن صياغة التعريف التالي:

إذا كان الحادثان $A,\ B$ من فضاء العينة Ω، فإن احتمال تحقق الحادث A ، إذا علمنا بوقوع الحادث B يدعى بالاحتمال الشرطي للحادث A، ويرمز له بـ $P(A/B)$. ويعطى بالعلاقة:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (52-2)$$

حيث: $P(B)\neq 0$

وذلك لأنه في الأساس لدينا:

$$P(A/B)=\frac{\dfrac{\text{عدد العناصر في } (A\cap B)}{\text{عدد العناصر في } \Omega}}{\dfrac{\text{عدد العناصر في } (B)}{\text{عدد العناصر في } \Omega}}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\text{عدد العناصر في } (A\cap B)}{\text{عدد العناصر في } (B)} \quad (53-2)$$

ومن العلاقة (2−51) نجد:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (54-2)$$

وكذلك نجد أن:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\text{عدد العناصر في } (A\cap B)}{\text{عدد العناصر في } (B)} \quad (55-2)$$

ومنه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A) \qquad (56-2)$$

نتيجة (2):

يمكن تعميم العلاقة (2−51) على أكثر من حادثين، فإذا كانت $A_1, A_2, A_3 ..... A_n$ حوادث غير مستقلة فإن احتمال تقاطعها يساوي:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap ....\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)$$
$$\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot P(A_4/A_1\cap A_2\cap A_3)$$
$$.....P(A_n/A_1\cap A_2\cap A_3....\cap A_{n-1}) \quad (56-2)'$$

نتيجة (3):

إذا كان A_1, A_2 حادثين متنافيين فإن اجتماعهما بعد أن يكون الحادث B قد وقع يعطى بالعلاقة:

$$P\left[(A_1\cup A_2)/B\right]=P(A_1/B)+P(A_2/B) \qquad (57-2)$$

مثال (2-16):

لنفترض أن تم إحصاء عدد طلاب السنة الثالثة والسنة الرابعة، وفق اختصاصي الإدارة والمحاسبة فكانت أعدادهم كما في الجدول التالي:

السنة / الاختصاص	سنة ثالثة B	سنة رابعة	$\sum$
إدارة A	250	150	350
محاسبة	200	300	550
Σ	450	450	900

ونريد أن نختار طالباً بشكل عشوائي والمطلوب:

1 . ماهو احتمال أن يكون الطالب المختار من السنة الثالثة وتخصصه إدارة.

2 . إذا علمت أن الطالب المختار من السنة الثالثة، فما هو احتمال أن يكون تخصصه إدارة.

الحل:

1 . نرمز بـ A لحادث كون الطالب المختار ذي اختصاص إدارة.

ونرمز بـ B لحادث كون الطالب المختار من السنة الثالثة.

من خلال الجدول نجد أن احتمال A يساوي: $P(A)=\frac{350}{900}$

وأن احتمال B يساوي: $P(B)=\frac{450}{900}$

وإن احتمال أن يكون من السنة الثالثة وتخصصه إدارة (معاً) يساوي:

$$P(A\cap B)=\frac{250}{900}$$

2 . ولحساب الاحتمال الثاني نطبق العلاقة (2-53) فنجد أن:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{250}{900}}{\frac{450}{900}}=\frac{250}{450}=0.56$$

أو بطريقة أخرى حيث نجد من العلاقة (2-53) أيضاً أن:

$$P(A/B)=\frac{\text{عدد العناصر في } (A\cap B)}{\text{عدد عناصر } B}=\frac{250}{450}\approx 0.56$$

مثال (2-17):

صندوق فيه 20 علبة كونسروة منها 5 علب فاسدة. اخترنا وبشكل عشوائي أربع علب على التوالي (وبدون إعادة). والمطلوب: ماهو احتمال أن تكون العلب الأربعة فاسدة.

الحل:

نرمز بـ A, B, C, D إلى حوادث سحب العلب الفاسدة على التوالي.

وبالتالي فإن:

احتمال أن تكون العلبة الأولى فاسدة: $P(A)=\frac{5}{20}$

احتمال أن تكون العلبة الثانية فاسدة: $P(B/A)=\frac{4}{19}$

وكذلك: $P(C/A\cap B)=\frac{3}{18}$

$$P(D/A\cap B\cap C)=\frac{2}{17}$$

وبالتالي فإن احتمال أن تكون العلب الأربع فاسدة يساوي:

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)\cdot P(D/A\cap B\cap C)$$

$$=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}=\frac{120}{116280}=0.001$$

مثال (2-18):

عائلة لديها أربعة أطفال، ولنأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

. A حادث كون الأطفال الأربعة إناثاً.

. B حادث كون أحد الأطفال على الأقل أنثى.

. C حادث كون الطفل الأكبر أنثى.

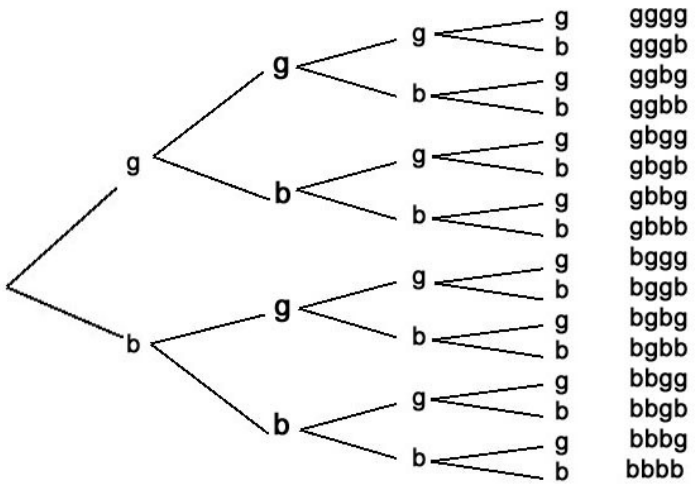
والمطلوب حساب الاحتمالات التالية:

$P(C), P(B), P(A),$

$P(A/B), P(B/A), P(A/C)$

الحل:

يمكن إيجاد فضاء العينة Ω باستخدام الشجرة البيانية الآتية:



حيث: g تعني الأنثى، b تعني الذكر.

وبالتالي يصبح فضاء العينة Ω للتجربة العشوائية كما يلي:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \text{gggg, gggb, ggbg, ggbb, gbgg, gbgb, gbbg, gbbb} \\ \text{bggg, bggb, bgbg, bgbb, bbgg, bbgb, bbbg, bbbb} \end{matrix} \right\}$$

ومنه فإن: $A = \{gggg\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{16}$

$B = \{$ جميع عناصر Ω ما عدا $bbbb\} \Rightarrow P(B) = \frac{15}{16}$

$C = \{gggg, gggb, ggbg, ggbb, gbgg, gbgb, gbbg, gbbb\}$

$P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

وكذلك نجد أن: $(A \cap B) = \{gggg\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{16}$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}}=\frac{1}{15}$$

أو بطريقة أخرى:

$$P(A/B)=\frac{\text{عدد عناصر } (A\cap B)}{\text{عدد عناصر } B}=\frac{1}{15}$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}}=1$$

أو بطريقة أخرى:

$$P(B/A)=\frac{\text{عدد عناصر } (A\cap B)}{\text{عدد عناصر } A}=1$$

وهذا صحيح ومنطقي لأنه إذا علمنا أن الأطفال الأربعة إناثاً، فإنه من المؤكد أن تكون إحداهن أنثى.

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

أو بطريقة أخرى:

$$P(A/C)=\frac{\text{عدد عناصر } (A\cap C)}{\text{عدد عناصر } C}=\frac{1}{8}$$

وهو المطلوب.

ثانياً : ضرب الاحتمالات لحوادث مستقلة:

نقول عن حادثين A وB أنهما مستقلان إذا كان تحقق الحادث A لا يؤثر على احتمال تحقق الحادث الآخر B، والعكس صحيح؛ أو بمعنى آخر، نقول عن الحادثين A وB أنهما مستقلان إذا كان احتمال تحقق الحادث A لا يتغير إن وقع الحادث B أم

لم يقع، وبالتالي فإن الاحتمال الشرطي يساوي الاحتمال غير الشرطي (الاحتمال الرياضي)؛ أي نكتب:

$$P(A/B)=P(A) \qquad (58-2)$$

وأن احتمال تحقق الحادث A بعد أن نكون قد علمنا بتحقق الحادث B يساوي:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

وبتعويض العلاقة الأخيرة في (2-58)، نجد أن:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (59-2)$$

وبناءً على ما تقدم نصل إلى التعريف التالي:

تعريف الاستقلال: إذا كان A وB حادثين مستقلين، فإن: $P(A/B)=P(A)$

وبالتالي فإن احتمال تقاطع الحادثين A وB يساوي جداء احتماليهما، أي أن:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (60-2)$$

نظرية (2-7):

1- إذا كان الحادث A مستقلاً عن الحادث B فإن الحادث B مستقل عن الحادث A.

البرهان:

عندما يكون A مستقلاً عن B، فإن: $P(A/B)=P(A)$

نعوض في العلاقة (2-51)، فنجد:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$$
$$=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A)$$

وبتقسيم طرفي العلاقة الأخيرة على $P(A)$ نجد أن:

$$P(B/A)=P(B) \qquad (61-2)$$

وهذا يعني أن B مستقل عن A، وهو المطلوب.

نتيجة:

إذا كان الحادثان A وB مستقلين فإن الحادثين $\overline{A}$ وB مستقلان، وإن الحادثان A و $\overline{B}$ مستقلان، كذلك فإن $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلان.

البرهان: حتى نبرهن على متطلبات هذه النتيجة يكفي أن نبرهن على أن:

$$P\left(B/\overline{A}\right)=P(B)$$

$$P\left(A/\overline{B}\right)=P(B)$$

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)$$

1 . حتى نبرهن على أن $\overline{A}$ وB مستقلان، نلاحظ أن:

$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B/\overline{A}\right) \qquad (62-2)$$

ومن جهة أخرى نجد أن:

$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left[(\Omega-A)\cap B\right]=P\left[(\Omega\cap B)-(A\cap B)\right]$$

$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(B)-P(A\cap B)$$

$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(B)-P(A)\cdot P\left(B/A\right) \qquad (63-2)$$

وبما أن A وB مستقلان فرضاً فإن: $P\left(B/A\right)=P(B)$.

ومن العلاقتين (2−62) و(2−63)، نحصل على:

$$P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B/\overline{A}\right)=P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

$$P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B/\overline{A}\right)=P(B)\left[1-P(A)\right]=P(B)\cdot P\left(\overline{A}\right)$$

وبالاختصار على $P\left(\overline{A}\right)$ نحصل على أن:

وهو المطلوب الأول:

$$P\left(B/\overline{A}\right)=P(B) \qquad (64-2)$$

2 . حتى نبرهن على أن $\overline{B},A$ مستقلان، نتبع نفس الأسلوب فنجد أن:

$$P\left(\overline{B}\cap A\right)=P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(A/\overline{B}\right) \qquad (65-2)$$

ومن جهة أخرى نجد أن:

$$P\left(\overline{B}\cap A\right)=P\left[(\Omega-B)\cap A\right]=P\left[(\Omega\cap A)-(B\cap A)\right]$$

$$P\left(\overline{B}\cap A\right)=P(A)-P(B\cap A)=$$

$$P(B\cap A)=P(A)-P(B)\cdot P(A/B) \qquad (66-2)$$

وبما أن A وB مستقلان فإن:

$$P(A/B)=P(A)$$

ومن العلاقتين (2−65) و(2−66) نجد فإن:

$$P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(A/\overline{B}\right)=P(A)-P(B)\cdot P(A)$$

$$P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(A/\overline{B}\right)=P(A)[1-P(B)]=P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)$$

وبالاختصار على $P\left(\overline{B}\right)$ نحصل على أن:

$$P\left(A/\overline{B}\right)=P(A) \qquad (67-2)$$

وهو المطلوب الثاني.

3 . للبرهان على أن $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلان، نلاحظ أن:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)$$

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) \qquad (68-2)$$

وذلك لأن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

وبما أن A وB مستقلان، وحسب العلاقة (2−60) نجد:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (69-2)$$

عندئذٍ تصبح العلاقة (2−68) على الشكل التالي:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)$$

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\left[1-P(A)\right]-P(B)\left[1-P(A)\right]$$

وبإخراج $\left[1-P(A)\right]$ عامل مشترك نجد:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\left[1-P(A)\right]\left[1-P(B)\right] \qquad (70-2)$$

وبما أن:

$$1-P(A)=P(\overline{A})$$
$$1-P(B)=P(\overline{B})$$

عندئذٍ تصبح العلاقة (2−70) على الشكل التالي:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) \qquad (71-2)$$

وهذا يعني أن الحادثين $\overline{A}$ و $\overline{B}$ حادثان مستقلان.

مثال (2−19):

إذا كان احتمال نجاح سعيد في امتحان مقرر الإحصاء يساوي $\frac{1}{4}$ واحتمال نجاح حسان في امتحان مقرر الإحصاء أيضاً هو $\frac{2}{5}$، أما احتمال نجاحهما معاً في الامتحان نفسه هو $\frac{1}{10}$، والمطلوب: أثبت أن نجاح سعيد مستقل عن نجاح حسان.

الحل:

نرمز بـ A لحادث نجاح سعيد، فيكون: $P(A)=\frac{1}{4}$

نرمز بـ B لحادث نجاح حسان، فيكون: $P(B)=\frac{2}{5}$

ومنه: $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

ولبرهان الاستقلال نتأكد من تحقق العلاقة:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

وبما أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ وأن: $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

وبإجراء المطابقة بين الطرفين نجد أن:

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}$$

أي أن العلاقة محققة، وبالتالي فإن الحادثين A وB حادثان مستقلان.

مثال (2−20):

بالعودة للمثال (2–19)، وافتراض أن احتمال نجاح سعيد في مقرر الإحصاء يساوي $\frac{2}{3}$ ، وباستخدام البيانات المتبقية نفسها، هل سيبقى نجاح سعيد مستقل عن نجاح حسان؟ وإذا كان الحادثين A وB غير مستقلين، فاحسب $P(B/A)$.

الحل: لدينا:

$$P(A)=\frac{2}{3} \quad , \quad P(B)=\frac{2}{5} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

للبرهان على الاستقلال نستخدم العلاقة:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

وبما أن:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

وبإجراء المطابقة نجد أن:

$$\frac{1}{10}\neq\frac{4}{15}$$

أي أن العلاقة غير محققة، وبالتالي فإن الحادثين A وB غير مستقلين. ولحساب $P(B/A)$ نطبق العلاقة التالية:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{20}$$

مثال (2–21):

لدينا صندوقان، يحوي الأول 10 علب كونسروة، منها 4 علب فاسدة، ويحوي الصندوق الثاني 6 علب كونسروة، منها 3 فاسدة. نختار وبشكل عشوائي علبةً واحدة من كل صندوق، والمطلوب حساب احتمال:

1 . كون العلبتين صالحتين (غير فاسدتين).

2 . كون العلبتين فاسدتين.

3 . كون إحدى العلبتين صالحة والأخرى فاسدة.

4 . إذا كانت إحدى العلبتين فاسدة، والأخرى صالحة، فما هو احتمال أن تكون العلبة الفاسدة من الصندوق الأول، وما هو احتمال أن تكون العلبة الفاسدة من الصندوق الثاني.

الحل:

1 . نرمز بـ A لحادث كون العلبة المسحوبة من الصندوق الأول صالحة، فيكون:

$$P(A)=\frac{6}{10}$$

نرمز بـ $\overline{A}$ لحادث كون العلبة المسحوبة من الصندوق الأول فاسدة، فيكون:

$$P(\overline{A})=\frac{4}{10}$$

نرمز بـ B لحادث كون العلبة المسحوبة من الصندوق الثاني صالحة، فيكون:

$$P(B)=\frac{3}{6}$$

نرمز بـ $\overline{B}$ لحادث كون العلبة المسحوبة من الصندوق الثاني فاسدة، فيكون:

$$P(\overline{B})=\frac{3}{6}$$

نلاحظ أن A وB حادثان مستقلان، وبالتالي فإن احتمال حصولنا على علبتين صالحتين يساوي:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{10}$$

2 . أما احتمال حصولنا على علبتين فاسدتين:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

3 . نرمز بـ C لحادث كون إحدى العلبتين صالحة والأخرى فاسدة، وبذلك نكون أمام حالتين:

. إما أن يكون لدينا : $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

. أو أن يكون لدينا : $\left(A\cap\overline{B}\right)$

وبالتالي فإن: $C=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$

$$P(C)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)$$

وبما أن $\overline{A}$ وB مستقلان، وكذلك $\overline{B},A$ مستقلان، فإننا نجد أن:

$$P(C)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P(B)+P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)$$

$$P(C)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{6}+\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{60}+\frac{18}{60}=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

4 . نرمز بـ D لحادث كون العلبة الفاسدة من الصندوق الأول. ونرمز بـ C لحادث كون إحدى العلبتين صالحة والأخرى فاسدة، وبالتالي فإن:

$$P(D/C)=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}=\frac{P(D)\cdot P(C/D)}{P(C)}=\frac{P(D)\cdot P(B)}{P(C)}$$

$$P(D/C)=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{12}{30}$$

لأن $P(C/D)$ يعني احتمال ان تكون العلبة الثانية صالحة ومسحوبة من الصندوق الثاني أي تساوي: $P(B)$.

نرمز بـ E لحادث كون العلبة فاسدة من الصندوق الثاني. ونرمز بـ C لحادث كون إحدى العلبتين صالحة والأخرى فاسدة، وبالتالي فإن:

$$P(E/C)=\frac{P(E\cap C)}{P(C)}=\frac{P(E)\cdot P(C/E)}{P(C)}=\frac{P(E)\cdot P(A)}{P(C)}$$

$$P(E/C)=\frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{18}{30}$$

لأن $P(C/E)$ يعني احتمال ان تكون العلبة الثانية صالحة ومسحوبة من الصندوق الأول، أي تساوي: $P(A)$.

- **تعميم:**

يمكن تعميم العلاقة (2−60) على أكثر من حادثين مستقلين. فإذا كانت: $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ حوادث مستقلة عن بعضها البعض، فإن:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .....A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ....P(A_n) \quad (72-2)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (73-2)$$

مثال (2−22):

قطار مؤلف من خمس عربات، فإذا علمت أنه يوجد:

. في العربة الأولى 50 رجلاً و20 امرأة.

. في العربة الثانية 35 رجلاً و35 امرأة.

. في العربة الثالثة 30 رجلاً و35 امرأة.

. في العربة الرابعة 40 رجلاً و15 امرأة.

. في العربة الخامسة 25 رجلاً و40 امرأة.

ونريد أن نسحب وبشكل عشوائي شخصاً واحداً من كل عربة، فالمطلوب احتمال أن يكون:

1 . الأشخاص الخمسة رجالاً.

2 . الأشخاص الخمسة نساءً.

الحل:

نرمز بـ E, D, C, B, A إلى حوادث سحب الأشخاص من العربات الخمس على الترتيب وأن يكونوا رجالاً.

نرمز بـ $\overline{E}, \overline{D}, \overline{C}, \overline{B}, \overline{A}$ إلى حوادث سحب الأشخاص من العربات الخمس على الترتيب وأن يكونوا نساءً.

1 . نلاحظ أن الحوادث E, D, C, B, A هي حوادث مستقلة، لذلك نطبق العلاقة (2−73)، فنجد:

$$P(A\cap B\cap C\cap D\cap E)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(D)\cdot P(E)$$

$$P(A\cap B\cap C\cap D\cap E)=\frac{50}{70}\cdot\frac{35}{70}\cdot\frac{30}{65}\cdot\frac{40}{55}\cdot\frac{25}{85}$$

$$P(A\cap B\cap C\cap D\cap E)=0,046$$

2 . باعتبار أن الحوادث E, D, C, B, A هي حوادث مستقلة، فإن $\overline{\mathrm{E}},\overline{\mathrm{D}},\overline{\mathrm{C}},\overline{\mathrm{B}},\overline{\mathrm{A}}$ هي حوادث مستقلة أيضاً { انظر النتيجة من النظرية (2−7)}. وبالتالي فإن:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cap\overline{E})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})\cdot P(\overline{D})\cdot P(\overline{E})$$

$$=\frac{20}{70}\cdot\frac{35}{70}\cdot\frac{35}{65}\cdot\frac{15}{55}\cdot\frac{40}{65}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cap\overline{E})=0,0129$$

نظرية (2−8):

إذا كان لدينا حادثان A وB وكان: $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ ، وبالتالي:

فإذا كان A وB حادثين مستقلين فإن A وB حادثان غير متنافيين.

وإذا كان A وB حادثين متنافيين فإن A وB حادثان غير مستقلين.

البرهان:

إذا كان A وB حادثين مستقلين، فإن:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\neq 0 \qquad (74-2)$$

وبالتالي فإن A وB حادثين غير متنافيين.

وإذا كان A وB حادثين متنافيين، فإنه:

$$(A\cap B)=\Phi$$

$$P(A\cap B)=0$$

وبالفرض لدينا: $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ ومنه فإن:

$$P(A)\cdot P(B)\neq 0 \qquad (75-2)$$

$$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

وبالتالي فإن A وB حادثين غير مستقلين.

2-6: نظرية الحوادث الشاملة (قانون الاحتمال الكلي) Theorem of Total Probability:

إذا كانت لدينا $B_1, B_2, B_3, ...B_n$ جملة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى، ومتعلقة بتجربة معينة وكان: $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ..... \cup B_n$، فإننا نقول أن الحوادث: $B_1, B_2, B_3, ...B_n$ تشكل تجزئة للحادث S.

وكذلك نقول إن الحوادث $B_1, B_2, B_3, ...B_n$ هي جملة شاملة من الحوادث إذا كانت تشكل تجزيء للمجموعة الكلية Ω، أي إذا كانت تحقق الشرطين:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ..... \cup B_n = \Omega \qquad (76-2)$$

وكذلك كانت: $B_i \cap B_j = \Phi$ حيث $i \neq j$ (أي متنافية).

نظرية (2-9):

إذا كانت $B_1, B_2, B_3, ...B_n$ هي جملة شاملة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى وتشكل فضاء احتمالي Ω. وكان A حادثاً آخر من هذا الفضاء لايتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث الجزئية التالية: $B_1, B_2, B_3, ...B_n$؛ أي أن الحادث A لا يمكن أن يقع إلا بعد وقوع أحد الحوادث الجزئية B_i. وبالتالي فإن احتمال تحقق الحادث A يعطى بالعلاقة:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i) \qquad (77-2)$$

البرهان:

باعتبار أن $B_1, B_2, B_3, ...B_n$ هي حوادث متنافية، وتشكل مجموعة كلية Ω، وأن: A حادث لا يمكن أن يقع إلا بعد وقوع أحد الحوادث الجزئية المتنافية.

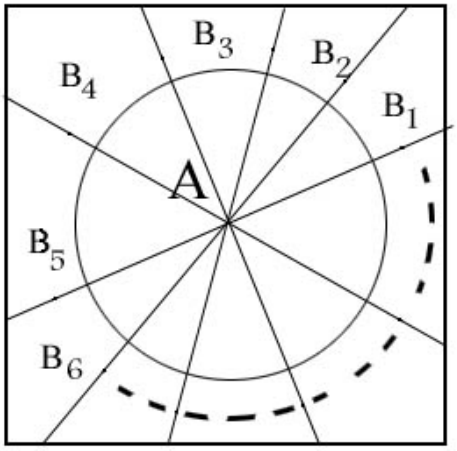
أي أن A يمكن أن يقع مع B_1: $B_1 \cap A$

أو مع B_2: $B_2 \cap A$

أو مع B_3: $B_3 \cap A$

.....	.....
أو مع B_i :	$B_i \cap A$
.....	.....
أو مع B_n :	$B_n \cap A$

ويمكن توضيح ذلك بالشكل البياني:



الشكل رقم (2-7)

يمكن التعبير عن تحقق الحادث A بالعلاقة التالية:

$$A = A \cap \Omega \qquad (78-2)$$

أو:

$$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ..... \cup B_n)$$

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

وبما أن الحوادث $(A \cap B_i)$ حوادث متنافية فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \qquad (79-2)$$

وبحسب العلاقة (2-51) فإن احتمال تقاطع حادثين غير مستقلين يساوي:

$$P(A \cap B_i) = P(A) \cdot P(B_i / A) = P(B_i) \cdot P(A / B_i)$$

وبالتالي فإن:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i) \qquad (80-2)$$

وتدعى هذه العلاقة بعلاقة الاحتمال الكلي، وتعالج مسألة احتمال تحقق حادث A ، الذي لايتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث الجزئية المتنافية والمتكاملة: $B_1, B_2, ...B_n$.

مثال (2-23):

لدينا ثلاثة موظفين يقومون بنسخ الرسائل على الآلة الكاتبة، فإذا كان الموظف الأول ينسخ 50% من الرسائل، وكانت 70% من رسائله بدون أخطاء. وينسخ الموظف الثاني 30% من الرسائل، وكانت 60% من رسائله بدون أخطاء. وينسخ الموظف الثالث 20% من الرسائل، وكانت 50% من رسائله بدون أخطاء. سحبت رسالة بشكل عشوائي، والمطلوب: حساب احتمال أن تكون الرسالة المسحوبة بدون أخطاء.

الحل:

لنرمز بـA لحادث كون الرسالة بدون أخطاء.

ونرمز بـ B_1 لحادث كون الرسالة من نسخ الموظف الأول، فيكون:

$$P(B_1)=0.5 \ , \ P(A/B_1)=0.7$$

ونرمز بـ B_2 لحادث كون الرسالة من نسخ الموظف الثاني، فيكون:

$$P(B_2)=0.3 \ , \ P(A/B_2)=0.6$$

ونرمز بـ B_3 لحادث كون الرسالة من نسخ الموظف الثالث، فيكون:

$$P(B_3)=0.2 \ , \ P(A/B_3)=0.5$$

وبتطبيق علاقة الاحتمال الكلي:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

$$P(A)=P(B_i)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)$$

$$=0.5\cdot 0.7+0.3\cdot 0.6+0.2\cdot 0.5$$

$$P(A)=0.63$$

مثال (2-24):

إذا كان لدينا ثلاثة خطوط للإنتاج $D,\ C,\ B$، ونتيجة للدراسات الأولية حصلنا على المعلومات التالية:

الخط الإنتاجي	عدد الوحدات المنتجة	عدد الوحدات المعيبة
B	300	30
C	400	50
D	100	10
Σ	800	60

وإذا اخترنا خطاً إنتاجاً بشكل عشوائي، ثم سحبنا وحدة منتجة فيه، والمطلوب: حساب احتمال أن تكون صالحة.

الحل:

نرمز بـ A لحادث كون الوحدة المنتجة صالحة.

ونرمز بـ B_1 لحادث اختيار خط الإنتاج B: $P(B_1)=\frac{1}{3}\ ,\ P(A/B_1)=\frac{9}{10}$

ونرمز بـ B_2 لحادث اختيار خط الإنتاج C: $P(B_2)=\frac{1}{3}\ ,\ P(A/B_2)=\frac{7}{8}$

ونرمز بـ B_3 لحادث اختيار خط الإنتاج D: $P(B_3)=\frac{1}{3}\ ,\ P(A/B_3)=\frac{9}{10}$

وبتطبيق علاقة الاحتمال الكلي.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}\approx 0.89$$

2-7: نظرية (بييز Bayes):

إذا كانت $B_1, B_2 .... B_n$ جملة من الحوادث الشاملة والمتنافية والمرتبطة بتجربة معينة، وتشكل تجزئ للمجموعة الكلية Ω. وكان A حادثاً يمكن أن يتحقق فقط مع أحد هذه الحوادث المتنافية $B_1, B_2 .... B_n$، فإن احتمال أن يكون الحادث B_i قد رافق تحقق الحادث A يعطى بالعلاقة:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)} \qquad (81-2)$$

أو:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)} \qquad (82-2)$$

البرهان:

بحسب علاقة الاحتمال الشرطي (ضرب الاحتمالات لحوادث غير مستقلة) نجد:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

ومنه نجد أن:

$$P(B_i) \cdot P(A / B_i) = P(A) \cdot P(B_i / A) \qquad (83-2)$$

وبتقسيم طرفي العلاقة (2-83) على $P(A)$ نجد:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)} \qquad (84-2)$$

أو:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)} \qquad (85-2)$$

وهو المطلوب إثباته.

مثال (2-56):

بالعودة للمثال (2-23) لنفرض أن الرسالة المسحوبة، كانت بدون أخطاء، فالمطلوب: حساب احتمال أن تكون الرسالة المسحوبة من رسائل الموظف الأول، ثم الثاني، ثم الثالث.

الحل:

يجب أن نحسب الاحتمالات التالية:

$$P(B_1/A), P(B_2/A), P(B_3/A)$$

ولإيجاد ذلك نطبق علاقة بييز فنجد:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i)}$$

ومنه:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.63} = 0.555$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0.3\cdot 0.6}{0.63} = 0.286$$

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3)\cdot P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{0.2\cdot 0.5}{0.63} = 0.159$$

ملاحظة:

يجب أن يكون مجموع احتمالات تحقق الحوادث الجزئية مساوياً الواحد، أي يجب أن يكون:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) = 1 \qquad (86-2)$$

وكذلك يجب أن يكون مجموع الاحتمالات الشرطية المرافقة لتحقق الحادث A مساوياً الواحد، أي يجب أن يكون أيضاً:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = 1$$

$$P(B_1 / A) + P(B_2 / A) + P(B_3 / A) + ... + P(B_n / A) = 1 \qquad (87-2)$$

وبتطبيق ذلك على المثال رقم (2−26) نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1$$

وكذلك: $$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = 0.555 + 0.286 + 0.159 = 1$$

مثال (2−26):

بالعودة للمثال رقم (2−24) ولنفرض أن الوحدة المنتجة المسحوبة كانت صالحة، والمطلوب حساب احتمال أن تكون من الخط الإنتاجي الأول، ثم الثاني، ثم الثالث.

الحل:

نطبق علاقة بييز فنجد:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)}$$

$$P(B_1 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}}{0.89} = 0.337$$

$$P(B_2 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8}}{0.89} = 0.327$$

$$P(B_3 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}}{0.89} = 0.336$$

وللتأكد من ذلك نلاحظ أن:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = 0.337 + 0.327 + 0.336 = 1$$

مثال (2-27):

ليكن لدينا ثلاثة صناديق حيث يوجد:

في الصندوق الأول a كرة بيضاء و b كرة سوداء.

في الصندوق الثاني c كرة بيضاء و d كرة سوداء.

في الصندوق الثالث k كرة بيضاء فقط.

نختار صندوقاً من هذه الصناديق وبشكل عشوائي، ونختار منه كرة واحدة بشكل عشوائي. والمطلوب:

1 . حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

2 . لنفرض أنه قد تبين أن الكرة كانت بيضاء، احسب احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الأول، ثم الثاني، ثم الثالث.

الحل:

لنرمز بـ A لحادث كون الكرة المسحوبة بيضاء.

ونرمز بـ B_1 لحادث اختيار الصندوق الأول، فيكون:

$$P(B_1)=\frac{1}{3},\ P(A/B_1)=\frac{a}{a+b}$$

ونرمز بـ B_2 لحادث اختيار الصندوق الثاني، فيكون:

$$P(B_2)=\frac{1}{3},\ P(A/B_2)=\frac{c}{c+d}$$

ونرمز بـ B_3 لحادث اختيار الصندوق الثالث، فيكون:

$$P(B_3)=\frac{1}{3},\ P(A/B_3)=\frac{k}{k}=1$$

ولحساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء نطبق علاقة الاحتمال الكلي فنجد:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{c+d}+\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{k}=\frac{a}{3(a+b)}+\frac{c}{3(c+d)}+\frac{1}{3}$$

2 . لحساب أن تكون الكرة البيضاء مسحوبة من أحد الصناديق، تطبق العلاقة:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}$$

$$P(B_1/A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{a+b}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{c+d}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}$$

وكذلك نجد أن:

$$P(B_2/A)=\frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}$$

$$P(B_3/A)=\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}$$

وللتأكد من النتائج نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

$$\sum_{i=1}^{n}P(B_i/A)=\frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}+\frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}+\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}=1$$

مثال (2-28):

يحتوي مخزن على أربعة أنواع من علب الكونسروة B_1,B_2,B_3,B_4 ، فإذا علمت أن عدد علب كل نوع وعدد الوحدات الفاسدة موضحة في الجدول الآتي:

النوع	العدد	الفاسد
B_1	50	5
B_2	40	7

B_3	70	8
B_4	60	10

وبطريقة عشوائية تم اختيار علبة، فكانت فاسدة، والمطلوب حساب احتمال أن تكون هذه العلبة المسحوبة من النوع الأول.

الحل: نفرض أن A حادث كون العلبة فاسدة.

ولنرمز بـ B_i لحادث سحب النوع حيث $i=1,2,3,4$.

فيكون $P(B_1/A)$ احتمال كون العلبة الفاسدة من النوع الأول مساوياً لـ:

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)}$$

وبالتعويض نجد:

$$P(B_1/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{50}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{50}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{40}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{70}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{60}}=0.18$$

مثال (2-29):

إذا كانت لدينا عدة أصناف من الصناديق التالية:

. ثلاثة صناديق يحوي كل منها أربع كرات سوداء.

. صندوقان يحوي كل منهما كرة واحدة بيضاء وثلاث كرات سوداء.

. صندوق واحد يحوي كرتين باللون الأبيض وكرتين باللون الأسود.

. صندوقان يحوي كل منهما ثلاث كرات بيضاء وكرة سوداء.

. ثلاثة صناديق يحوي كل منها أربع كرات بيضاء.

نختار صندوقاً من هذه الصناديق بطريقة عشوائية، ثم نسحب منه كرة بطريقة عشوائية أيضاً فتكون بيضاء. نعيدها إلى الصندوق ثم نخلط الكرات ونسحب كرة أخرى والمطلوب: حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً سوداء.

الحل:

نلاحظ أن عدد الصناديق من مختلف الأصناف يساوي 11 صندوقاً، ولإيجاد المطلوب:

نرمز بـ A لحادث سحب كرة بيضاء.

نرمز بـ B_1 لحادث سحب صندوق من الصنف الأول، فيكون $P(B_1)=\frac{3}{11}$، وبالتالي فإن $P(A/B_1)=\frac{0}{4}$

نرمز بـ B_2 لحادث سحب صندوق من الصنف الثاني، فيكون $P(B_2)=\frac{2}{11}$، وبالتالي فإن $P(A/B_2)=\frac{1}{4}$

نرمز بـ B_3 لحادث سحب صندوق من الصنف الثالث، فيكون $P(B_3)=\frac{1}{11}$، وبالتالي فإن $P(A/B_3)=\frac{2}{4}$

نرمز بـ B_4 لحادث سحب صندوق من الصنف الرابع، فيكون $P(B_4)=\frac{2}{11}$، وبالتالي فإن $P(A/B_4)=\frac{3}{4}$

نرمز بـ B_5 لحادث سحب صندوق من الصنف الخامس، فيكون $P(B_5)=\frac{3}{11}$، وبالتالي فإن $P(A/B_5)=\frac{4}{4}$

ولحساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء، نطبق قانون الاحتمال الكلي فنجد:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)+$$
$$+P(B_4)\cdot P(A/B_4)+P(B_5)\cdot P(A/B_5)$$

و$P(A)=\frac{3}{11}\cdot 0+\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{11}\cdot 1$

$$P(A)=\frac{22}{44}=\frac{1}{2}$$

هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة أولاً بيضاء.

لحساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء، بعد أن كانت نتيجة السحب الأول كرة بيضاء.

نرمز بـ A_1 لحادث سحب كرة بيضاء في المرة الأولى ونرمز بـ C_2 لحادث سحب كرة سوداء في المرة الثانية.

ونطبق العلاقة الآتية:

$$P(C_2/A_1)=\frac{P(C_2/A_1)}{P(A_1)}$$

لحساب احتمال أن تكون نتيجة السحبين المتتاليين كرة بيضاء وكرة سوداء، ونطبق العلاقة:

$$P(C_2\cap A_1)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(C_2\cap A_1/B_i)$$
$$=P(B_1)\cdot P(C_2\cap A_1/B_1)+P(B_2)\cdot P(C_2\cap A_1/B_2)+$$
$$P(B_3)\cdot P(C_2\cap A_1/B_3)+P(B_4)\cdot P(C_2\cap A_1/B_4)+$$
$$P(B_5)\cdot P(C_2\cap A_1/B_5)$$
$$=\frac{3}{11}\cdot 0+\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{11}\cdot 0$$

$$P(C_2\cap A)=\frac{1}{11}$$

والآن نحسب احتمال أن تكون الكرة الثانية سوداء بعد أن كانت في المرة الأولى بيضاء، ومن أجل حساب ذلك نطبق العلاقة الآتية:

$$P(C_2 / A_1) = \frac{P(C_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$$

$$P(C_2 / A_1) = \frac{\frac{1}{11}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{11}$$

وهو المطلوب.

مثال (2−30):

صدر إيعاز لسلاح الجو بقصف هدف عسكري معادٍ. وبناءً على هذا الإيعاز حلقت أربع طائرات وعلى متن كلٍ منها صاروخاً فإذا علمت أن احتمال إصابة الهدف من الطائرات أو الصواريخ الأربعة كانت كمايلي: *0.9, 0.7, 0.5, 0.3*، وأن احتمال تدمير الهدف نتيجة لإصابته بصاروخ واحد هو 0.3 ولإصابته بصاروخين 0.6، ولإصابته بثلاث صواريخ 0.8، ولإصابته بأربع صواريخ 1، والمطلوب:

1 . ماهو احتمال تدمير الهدف نتيجة قصف الهدف بالصواريخ الأربعة التي قد تصيب الهدف أو لاتصيبه.

2 . إذا علمت أن الهدف قد دمر، ماهو احتمال أن يكون قد دُمر بصاروخ واحد فقط.

الحل:

لنرمز بـ A لحادث تدمير الهدف.

ونرمز بـ B_1 لحادث عدم إصابة الهدف بأية صاروخ فيكون: $P(A/B_1) = 0$

ونرمز بـ B_2 لحادث إصابة الهدف بصاروخ واحد فيكون: $P(A/B_2) = 0.3$

ونرمز بـ B_3 لحادث إصابة الهدف بصاروخين فقط فيكون: $P(A/B_3) = 0.6$

ونرمز بـ B_4 لحادث إصابة الهدف بثلاثة صواريخ فقط فيكون: $P(A/B_4) = 0.8$

ونرمز بـ B_5 لحادث إصابة الهدف بأربع صواريخ فيكون: $P(A/B_5) = 1$

وباعتبار أن الحادث A لايتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث B_1, B_2, B_3, B_4 ، وأن الحوادث B_1, B_2, B_3, B_4 حوادث مركبة.

نرمز بـ C_1 لحادث إصابة الهدف بالصاروخ الأول: $P(C_1)=0.3$.

ثم نرمز بـ C_2 لحادث إصابة الهدف بالصاروخ الثاني: $P(C_2)=0.5$.

ثم نرمز بـ C_3 لحادث إصابة الهدف بالصاروخ الثالث: $P(C_3)=0.7$.

ونرمز بـ C_4 لحادث إصابة الهدف بالصاروخ الرابع: $P(C_4)=0.9$.

إن احتمال تحقق الحادث B_1 يساوي:

$$B_1=\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4}$$

ومنه:
$$P(B_1)=P(\overline{C_1})\cdot P(\overline{C_2})\cdot P(\overline{C_3})\cdot P(\overline{C_4})$$

$$P(B_1)=0.7\cdot 0.5\cdot 0.3\cdot 0.1=0.0105$$

إن احتمال تحقق الحادث B_2 يساوي:

$$B_2=(C_1\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4})\cup(\overline{C_1}\cap C_2\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4})$$
$$\cup(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap C_3\cap\overline{C_4})\cup(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap C_4)$$

ومنه:

$$B_2=P(C_1\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4})+P(\overline{C_1}\cap C_2\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4})$$
$$+P(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap C_3\cap\overline{C_4})+P(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap C_4)$$

$$P(B_2)=0.3\cdot 0.5\cdot 0.3\cdot 0.1+0.7\cdot 0.5\cdot 0.3\cdot 0.1$$
$$+0.7\cdot 0.5\cdot 0.7\cdot 0.1+0.7\cdot 0.5\cdot 0.3\cdot 0.9$$

$$P(B_2)=0.134$$

واحتمال تحقق الحادث B_3 يساوي:

$$B_3=(C_1\cap C_2\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4})\cup(C_1\cap\overline{C_2}\cap C_3\cap\overline{C_4})\cup(\overline{C_1}\cap C_2\cap C_3\cap\overline{C_4})$$
$$\cup(\overline{C_1}\cap C_2\cap\overline{C_3}\cap C_4)\cup(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap C_3\cap C_4)\cup(C_1\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap C_4)$$

ومنه:

$$P(B_3) = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + \\ + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.9$$

$$P(B_3) = 0.395$$

واحتمال تحقق الحادث B_4 يساوي:

$$B_4 = \left(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \overline{C_4}\right) \cup \left(C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3} \cap C_4\right) \\ \cup \left(C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3 \cap C_4\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4\right)$$

$$P(B_4) = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.9 \\ + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.9$$

$$P(B_4) = 0.366$$

احتمال تحقق الحادث B_5 يساوي: $B_5 = \left(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4\right)$

$$P(B_5) = P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) \cdot P(C_4) = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.9$$

$$P(B_5) = 0.0945$$

وبالتالي فإن احتمال تدمير الهدف يساوي:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

$$P(A) = 0.0105 \cdot 0 + 0.134 \cdot 0.3 + 0.395 \cdot 0.6 + 0.366 \cdot 0.8 + 0.0945 \cdot 1$$

$$P(A) = 0.6645$$

2 . نطبق علاقة بييز لحساب احتمال تدمير الهدف بصاروخ واحد، فنجد أن:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A/B_2)}{\sum P(B_i) \cdot P(A/B_i)} = \frac{0.134 \cdot 0.3}{0.6645} = 0.0605$$

2-8: شجرة الاحتمالات:

تستخدم شجرة الاحتمال في تمثيل مشاهدات أو نتائج التجارب الإحصائية ذات المراحل المتعددة من خلال فروع شجرة بيانية، بحيث يتم تمثيل نتائج التجربة الأولى على الفروع الرئيسية للشجرة، ويتم تمثيل التجربة الثانية على الفروع الثانوية للشجرة. فإذا أردنا حساب احتمال تحقق الحادث A تقوم بأخذ نتائج ضرب فروع الشجرة التي تمثل نتائج تحقق الحادث A.

مثال (2-31):

صندوق فيه 9 كرات حمر و8 كرات صفر و10 كرات بيضاء، نسحب كرتين على التوالي، وبدون إعادة، والمطلوب:

1 . حساب احتمال أن تكون الكرتان حمراوين.

2 . حساب احتمال أن تكون الكرتان صفراوين.

3 . حساب احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين.

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة ذات مرحلتين، المرحلة الأولى يتم فيها سحب الكرة الأولى، التي قد تكون حمراء، أو بيضاء، أو صفراء. والمرحلة الثانية يتم فيها سحب الكرة الثانية التي قد تكون . أيضاً . حمراء أو بيضاء أو صفراء.

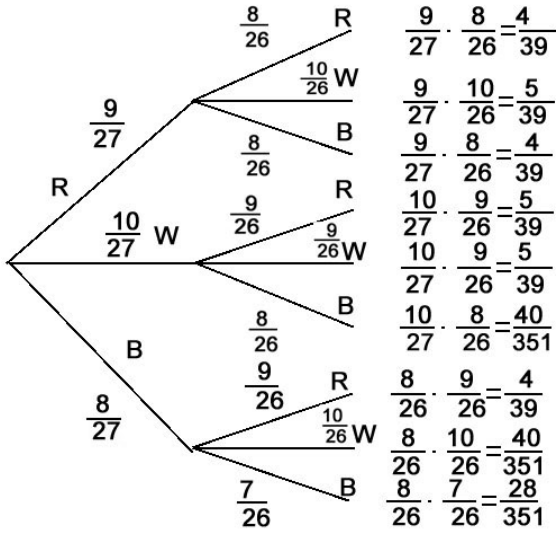
وسوف نقوم بحل هذه التمرين باستخدام أسلوب شجرة الاحتمال كمايلي:

نرمز بـ R إلى الكرات الحمراء.

وبـ W إلى الكرات البيضاء.

و بـ B إلى الكرات الصفراء.

فتكون فروع الشجرة كما يلي الشكل التالي:



وبالتالي فإن النتائج تعطينا احتمالات حصولنا على كرتين من لون واحد أحمر R أو أبيض W أو أصفر B وهي تساوي:

1. $P(R)=\frac{9}{27}\cdot\frac{8}{26}=\frac{4}{39}$

2. $P(B)=\frac{8}{26}\cdot\frac{7}{26}=\frac{28}{351}$

3. $P(W)=\frac{10}{27}\cdot\frac{9}{26}=\frac{5}{39}$

ويمكن أن نحسب احتمالات حصولنا على كرتين من لونين مختلفين كمايلي:

1 . احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء، ونرمز له لحادثه C يساوي:

$$P(R\cap W)=P(C)=\frac{9}{27}\cdot\frac{10}{26}=\frac{5}{39}$$

2 . احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية صفراء ، ونرمز له لحادثه E يساوي:

$$P(W\cap B)=P(E)=\frac{10}{27}\cdot\frac{8}{26}=\frac{40}{351}$$

3 . احتمال أن تكون الكرة الأولى صفراء والثانية حمراء ، ونرمز له لحادثه D يساوي:

$$P(B\cap R)=P(D)=\frac{8}{27}\cdot\frac{9}{26}=\frac{4}{39}$$

وبنفس الأسلوب يمكن حساب الاحتمالات المتبقية، وهي المبينة على فروع شجرة الاحتمالات.

4 . عندما نكون أمام الاحتمالات الشرطية وخاصة قانون بييز فإننا نقوم بحساب احتمال تحقق الحادث A بعد علمنا بتحقق الحادث B من العلاقة التالية:

$$P(A/B)=\frac{\text{الفرع المطلوب}}{\text{مجموع حاصل ضرب الفروع المختلفة}} \qquad (88-2)$$

مثال (2-32):

لدينا صندوقان $A,\ B$ يحوي الصندوق A تسع كرات، منها أربع كرات بيضاء وخمس كرات حمر، ويحوي الصندوق B على 17 كرة منها 8 كرات بيض و9 كرات حمر. اخترنا صندوق بشكل عشوائي، ثم اختيرت منه كرة، والمطلوب:

1 . حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

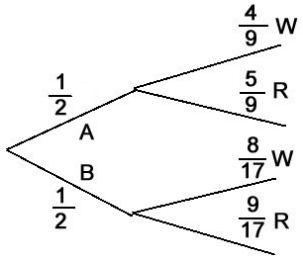
2 . حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

3 . لنفرض أن الكرة المسحوبة كانت بيضاء، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق A، ثم ما احتمال أن تكون من الصندوق B.

الحل:

نرمز بـ W إلى حادث سحب كرة بيضاء، وبـ R إلى حادث سحب كرة حمراء.

وباستخدام أسلوب شجرة الاحتمال نجد:



1 . احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء يساوي:

$$P(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{17}=\frac{70}{153}=0.4575$$

2 . احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء يساوي:

$$P(R)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{17}=\frac{83}{153}=0.5425$$

3 . احتمال أن تكون الكرة البيضاء من الصندوق A يساوي:

$$P(A/W)=\frac{\text{الفرع المطلوب}}{\text{مجموع حاصل ضرب الفروع المختلفة}}$$

أي:

$$P(A/W)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{17}}=0.4857$$

احتمال أن تكون الكرة البيضاء من الصندوق B يساوي:

$$P(B/W)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{17}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{17}}=0.5143$$

وهو المطلوب.

تمرينات

1 . لدينا صندوق يحوي 20 كرة، منها 8 كرات ذات لون أحمر و3 كرات ذات لون أصفر، و9 كرات ذات لون أرزق. نسحب ثلاث كرات معاً، والمطلوب: حساب احتمال:

. كون الكرات المسحوبة حمراء اللون.

. أن يكون من بين الكرات المسحوبة كرة واحدة صفراء على الأقل.

. كون الكرات الثلاث من ألوان مختلفة.

2 . نرمي بالهواء وفي وقت واحد ثلاث أحجار نرد ونهتم دوماً بالحصول على ثلاث مرات الرقم 6 برمية واحدة لأحجار النرد الثلاث، والمطلوب:

ـ ماهو احتمال أن نحصل ثلاث مرات على الرقم 6 برمية واحدة لأحجار النرد الثلاثة؟

ـ ماهو احتمال ألا نحصل ثلاث مرات على الرقم 6 برمية واحدة لأحجار النرد الثلاثة؟

ـ ماهو احتمال ألا نحصل ثلاث مرات على الرقم 6 دفعة واحدة بـ n رمية متتالية لأحجار النرد الثلاثة؟

ـ ماهو احتمال أن نحصل على الأقل لمرة واحدة ثلاث مرات على الرقم 6 دفعة واحدة بـ n رمية متتالية لأحجار النرد الثلاثة؟

3 . إذا كان A و B حادثان مستقلين متعلقين باختبار مفروض، فبرهن أن:

. A و $\overline{B}$ حادثان مستقلان.

. $\overline{A}$ و B حادثان مستقلان.

. $\overline{A}$ و $\overline{B}$ حادثان مستقلان.

4 . يراد تشكيل لجنة مكونة من خمسة أشخاص في صفٍ يحتوي على عشر طلاب وخمس طالبات، فإذا كان اختيار اللجنة يتم بشكل عشوائي، فالمطلوب حساب احتمالات الحوادث الآتية:

. كون اللجنة مكونة من خمسة طلاب فقط (دون الطالبات).

. كون اللجنة مكونة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

. كون اللجنة تضم طالبة واحدة على الأقل.

. كون اللجنة تضم طالبتين على الأقل.

5 . نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية في الهواء، ما هو احتمال أن نحصل على الشعار مرةً واحدة على الأقل في التجارب الثلاث.

6 . انتظم ثلاثون طالباً في صفٍ واحدٍ بطريقة عشوائية. فإذا كان اسم كل طالب يختلف عن الآخر فاحسب احتمال وقوف عادل إلى جانب موفق.

7 . مجموعة من الطلاب عددهم N طالباً. يُكتب اسم كل طالب منهم على قصاصة من الورق، نسحب بطريقة عشوائية n قصاصة مع الإعادة (أي مع إعادة القصاصة التي سحبت في كل مرة إلى الصندوق قبل إجراء السحب التالي). والمطلوب حساب احتمال أن أيّاً من الأسماء المسحوبة لم يرد ذكره أكثر من مرة واحدة.

8 . لدينا خمس طلاب وعشر طالبات. توزعوا بطريقة عشوائية على خمس فئات، تحتوي كل فئة منها ثلاثة أشخاص، والمطلوب حساب احتمال:

. أن تحوي كل فئة طالباً واحداً فقط.

. أن تحوي كل فئة طالباً على الأقل.

9 . يوزع في بلد ثلاثة أنواع من الصحف، نرمز لها بـ A وB وC. لوحظ أنه يوجد 20% من سكان البلد يقرأون الصحيفة A، و16% يقرأون الصحيفة B، و14% يقرأون الصحيفة C. و8% يقرأون كل من A وB، و5% يقرأون كل من A وC، و4% يقرأون كل من B وC، و2% يقرأون كل من الصحف الثلاث. لنفرض أننا اخترنا بطريقة عشوائية شخصاً ما من البلد، فالمطلوب حساب احتمال:

. أن لا يقرأ أي من الصحف المذكورة.

. أن يقرأ صحيفة واحدة فقط من الصحف المذكورة.

ـ إذا كان الشخص المنتقى يقرأ صحيفة على الأقل، فاحسب احتمال أن يقرأ على الأقل كلاً من A وB.

10 . لنفرض أننا أطلقنا طلقتين على هدف واحد، وكان احتمال إصابة الهدف لكل منها هو: $P_1 = 0,6, P_2 = 0,5$ على الترتيب، والمطلوب:

. إيجاد احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة فقط.

. إيجاد احتمال إصابة الهدف بطلقتين فقط.

. إيجاد احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل.

. إيجاد احتمال عدم إصابة الهدف بأية طلقة.

11 . سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من بين عشر أوراق مرقمة من واحد إلى عشرة، والمطلوب حساب احتمال أن يكون مجموع الرقمين على الورقتين فردياً في الحالتين التاليتين:

. إذا سحبت الورقتان معاً.

. إذا سحبت الورقتان واحدة بعد الأخرى وبدون إعادة.

12 . فريق كرة القدم يربح 50% من مبارياته، ويخسر 30% منها، ويتعادل في 20% من مبارياته. فإذا لعب هذا الفريق ثلاث مباريات. والمطلوب:

. حساب احتمال أن يربح الفريق مرتين على الأقل وعدم هزيمته؟

. حساب احتمال أن يربح الفريق مباراة ويخسر مباراة، ويتعادل في مباراة؟

13 . ثلاثة صناديق يحوي الأول ثلاث كرات حمراء وخمساً بيضاء، ويحوي الثاني كرتين حمراوين وواحدة بيضاء، ويحوي الثالث كرتين حمراوين وثلاثاً بيضاء. سحبنا كرةً بشكل عشوائي، والمطلوب:

. حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

ـ لنفرض أن الكرة المسحوبة حمراء، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

14 . تم توزيع مجموعة كاملة من أوراق اللعب عددها 52 ورقة بالتساوي بين أربعة أشخاص أ، ب، جـ ، د، والمطلوب حساب احتمال أن يكون في أوراق اللاعب د:

. ولد واحد فقط.

. ولدان فقط.

. ثلاثة أولاد.

. أربعة أولاد.

. ألا يكون أي ولد.

15 . نرمي قطعة نقود مرتين متتاليتين. نرمز بـ A لحادث ظهور الصورة في الرمية الأولى، ونرمز بـ B لحادث ظهور الصورة في الرمية الثانية، والمطلوب هل الحادثان A وB مستقلان؟

16 . ما هو احتمال أن يجلس أربعة طلاب وأربع طالبات على مقعد يتسع لثمانية طلاب، بحيث يجلس الطلاب والطالبات بالتناوب. وما هو الاحتمال إذا شغل المقعد الأول طالب.

17 . صف مؤلف من طلاب وطالبات سوف يخضعون لفحص مقابلة بعد أن يتم سحب الأسماء بصورة عشوائية الواحد تلو الآخر. فما هو احتمال أن يكون الشخص الأول طالب والثاني طالبة. وهكذا بالتناوب، وذلك إذا كان الصف يضم:

. أربعة ذكور وثلاث إناث.

. ثلاثة ذكور وثلاث إناث.

18 . فريق كرة قدم يلعب 50% من ألعابه على أرض ملعبه، و50% على أرض ملعب الخصم. فإذا علمنا أن احتمال الربح في مباراة يلعبها على أرضة هو 60% وأن ربحه في مباراة يلعبها على أرض الخصم هو 40%، والمطلوب حساب احتمال الربح في مباراة اختيرت بشكل عشوائي.

19 . لدينا صندوقان:

الصندوق A ويحوي خمس كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء.

الصندوق B ويحوي خمس كرة حمراء وكرتين بيضاوين.

نرمي نرداً، إذا كان الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي لهذا النرد هو 3 أو 6 نقوم بسحب كرة من B ونضعها في A، ومن ثم نقوم بسحب كرة من A، أما إذا

كان الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للنرد هو 1، 2، 4، 5في هذه الحالة نقوم بسحب كرة من A ونضعها في B ومن ثم نقوم بسحب كرة من B، والمطلوب حساب احتمال:

1 . كون الكرتين حمراء اللون.

2 . كون الكرتين بيضاء اللون.

20 . يطلق رامٍ على هدف. فإذا علمت أن احتمال إصابته الهدف هو 0.4، فما هو عدد الطلقات اللازم إطلاقها لكي يكون احتمال إصابته الهدف على الأقل 90%.

21 . رجل وامرأته، عمر كلٍ منهما x وy على الترتيب، واحتمال وفاة كل منهما خلال عام هو P_x و P_y. فإذا علمت أنه في نهاية العام قد توفى أحدهما، فالمطلوب حساب احتمال أن يكون المتوفى هو الرجل.

22 . صندوق فيه 3 كرات بيضاء و2 كرة سوداء، نسحب كرتين على التوالي وبدون إعادة الكرة المسحوبة في المرة الأولى إلى الصندوق، والمطلوب حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء، واحتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء، واحتمال أن يكون الكرتين أسود.

الفصل الثالث

المتحولات العشوائية المنقطعة وخواصها *Random Variables*

تمهيد:

يختلف مفهوم المتحول العشوائي كثيراً عن المتحول العادي، وقبل الدخول في تعريفه نعطي بعض الأمثلة عن المتحولات العشوائية:

. عدد الطلاب الذين يحضرون محاضرات الاقتصاد خلال الفصل.

. عدد رواد أحد المطاعم في اليوم، وخلال شهر.

. مدة عمل المصباح في المنزل.

. درجة حرارة مياه البحر خلال شهر أو أكثر.

. عدد السيارات التي تمر على الطريق خلال ساعة.

. عدد أفراد الأسرة في مجتمع معين.

ومما تقدم نلاحظ أنه يمكننا تعريف المتحول العشوائي بما يلي:

المتحول العشوائي هو المتحول الذي يأخذ قيمه الممكنة بصورة غير معروفة مسبقاً، وبتكرارات معينة، وهو يمكن أن يكون منقطعاً أو مستمراً، أي أن المتحول العشوائي عندما يأخذ قيمة معينة فإنه يمكن أن يعود ويأخذ تلك القيمة في أية لحظة أخرى. وهو بذلك يختلف عن المتحول العادي الذي عندما يأخذ قيمة معينة ينتقل إلى القيمة التي تليها (كالزمن التقويمي).

ونستنتج من الأمثلة السابقة أن المتحولات العشوائية تصنف إلى نوعين أساسيين:

المتحولات العشوائية المنقطعة: وهي التي تأخذ قيماً منقطعة كعدد الطلاب وعدد الرواد وعدد أفراد الأسرة.

المتحولات العشوائية المستمرة: وهي التي تأخذ قيمها في مجال معين.

وسنخصص هذا الفصل لدراسة المتحولات العشوائية المنقطعة وتعريفها وخواصها ومميزاتها

3-1: تعريف المتحول العشوائي المنقطع:

لقد تعرضنا في الفصل السابق لدراسة التجربة العشوائية وجميع النتائج الممكنة لها، والتي سميت بفضاء التجربة، ويرمز لها بـ Ω. ومع أن عملية رمي حجر النرد أرضاً تسمى تجربة عشوائية، جميع النتائج الممكنة لها هي $\{1,2,3,4,5,6\}$، وتشكل Ω، ولكن لا يمكن معرفة أي من هذه النتائج سوف يظهر بشكلٍ مؤكد، لذلك يمكن النظر إلى نتيجة الرمية على أنها متحول عشوائي يأخذ قيماً عددية مرتبطة بنقاط فضاء التجربة Ω وتسمى بالقيم الممكنة لذلك المتحول العشوائي. ونصادف في حياتنا الكثير من التجارب العشوائية التي تكون نتائجها كميات عددية وقابلة للعد، كما في تجربة إلقاء حجر النرد، ولكن هناك تجارب عشوائية تكون نتائجها غير عددية، مثل تجربة سحب ورقة ما من مجموعة أوراق اللعب.

ويمكن تعريف المتحول العشوائي X بأنه منقطع إذا كان X يأخذ قيمه الممكنة بشكل منقطع، أو بعبارة أخرى، إذا كانت قيمه الممكنة قابلة للعد. فعندما نقوم بتجربة إلقاء حجر النرد، فإن فضاء إمكانات التجربة هو $\{1,2,3,4,5,6\}$، وأنه سوف تظهر على الوجه العلوي لحجر النرد إحدى القيم الستة فقط، وهي قيم منفصلة وقابلة للعد. وكذلك عند رمي قطعة نقدية فإن إمكانات التجربة هي {شعار، كتابة}، وبالتالي سوف يظهر على الوجه العلوي إما شعار أو كتابة، وهي ليست نتائج عددية، بل نتائج وصفية، ولكن يمكننا أن نعبر عن كل نتيجة بعدد وحيد، فمثلاً يمكن أن نعبر عن النتيجة {شعار} بالعدد (1)، وعن النتيجة {كتابة} بالعدد (0). وبشكل عام، مهما كانت طبيعة التجربة العشوائية، فإنه يمكن ربط كل نتيجة من نتائجها بعدد وحيد، وبالتالي يمكن تعريف تطبيقٍ على X ينقل كل نتيجة من نتائج التجربة إلى عدد حقيقي أي:

$$X:\Omega\to R \qquad (1-3)$$

وبالتالي فإننا نسمي كل تابع لـ X منطلقه Ω (فضاء إمكانات التجربة)، ومستقره R ، بقانون توزيع المتحول العشوائي المنقطع. فمثلاً عند تجربة رمي حجر النرد يمكن تعريف التطبيق الآتي: $X:\{1,2,3,4,5,6\}\to R$

أو عند رمي قطعة النقود، يمكن تعريف التطبيق الآتي:

X : {شعار، كتابة}، $\rightarrow R$

وأخيراً يرمز للمتحول العشوائي بأحرف كبيرة مثل X, Y, Z, ξ ...إلخ، ويرمز لقيم المتحول العشوائي X بأحرف صغيرة مثل: $x_1, x_2, x_3 ...$، ولقيم المتحول Y بـ $y_1, y_2, y_3 ...$ وهكذا...

3-2: قانون التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي المنقطع Discrete Probability Distribution:

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً ويأخذ قيمه الممكنة والقابلة للعد الآتية:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n$$

ولنفرض أن P_1 هو احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X القيمة x_1، وأن P_2 هو احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X القيمة x_2 ....

وأن P_n هو احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X القيمة x_n.

وبما أن المتحول العشوائي X يأخذ إحدى القيم $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ وليس غيرها في أي تجربة، فإننا يمكن أن نعرف قانون التوزيع الاحتمالي لـX المنقطع، ونرمز له بـ $f(x)$ بأنه العلاقة التي تربط بين القيم الممكنة لـ X والاحتمالات المقابلة لها، ونعبر عن ذلك بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & X = x_i \ , \ i = 1, 2, 3, ..., n \\ 0 & \text{عندما } X \neq x_i \end{cases} \qquad (2-3)$$

ويسمى $f(x)$ أيضاً بتابع الكثافة الاحتمالية لـ X.

ويمكن التعبير عن قانون التوزيع الاحتمالي للمتحول X المنقطع بجدول يتضمن جميع القيم الممكنة لـ X والاحتمالات المقابلة لها كما يلي:

X	x_1	x_2.....	....xi....	.....	x_n
$f(x_i) = P_i$	$f(x_i) = P_1$	$f(x_2) = P_2$	$f(x_i) = P_i ...$	.....	$f(x_n) = P_n$

ويدعى هذا الجدول بجدول التوزيع الاحتمالي لـ X المنقطع. ويمكن حساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم X كما يلي:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = P_i$$

مثال (3-1):

نرمي حجري نرد أرضاً، ونفترض أن X متحول عشوائي يرمز إلى العدد الأكبر الذي يظهر على الوجه العلوي لحجري النرد، والمطلوب إيجاد قانون توزيع X.

الحل:

إن فضاء إمكانات التجربة لكل نرد تساوي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

وباعتبار أن X يرمز إلى العدد الأكبر، فإنه سوف يأخذ إحدى القيم $\{1,2,3,4,5,6\}$ حتماً، ولنقم بإيجاد الاحتمال المقابل لكل قيمة من القيم الممكنة لـ X أي:

$$X = 1 \Rightarrow f(1) = P(x = 1) = P\left[\{1,1\}\right] = \frac{1}{36}$$

$$X = 2 \Rightarrow f(2) = P(x = 2) = P\left[\{(1,2),(2,2),(2,1)\}\right] = \frac{3}{36}$$

$$X = 3 \Rightarrow f(3) = P(x = 3)$$

$$= P\left[\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\}\right] = \frac{5}{36}$$

$$X = 4 \Rightarrow f(4) = P(x = 4)$$

$$= P\left[\begin{Bmatrix}(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),\\(4,1),(4,2),(4,3)\end{Bmatrix}\right] = \frac{7}{36}$$

$$X=5\Rightarrow f(5)=P(x=5)=$$
$$=P\left[\begin{Bmatrix}(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),\\(5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1)\end{Bmatrix}\right]=\frac{9}{36}$$
$$X=6\Rightarrow f(6)=P(x=6)=$$
$$=P\left[\begin{Bmatrix}(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),\\(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\end{Bmatrix}\right]=\frac{11}{36}$$

ثم نرتب القيم الممكنة لـ X والاحتمالات المقابلة لها في جدول فنحصل على التوزيع الاحتمالي التالي لـ X:

X	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)=P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

مثال (3–2):

نلقي قطعة نقدية مرتين، ولنفرض أن X متحول عشوائي يعبّر عن عدد الصور التي تظهر على الوجه العلوي للقطعة النقدية. والمطلوب إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي لـ X.

الحل: إن القيم التي يمكن أن يأخذها X هي: $X:0,1,2$

وذلك لأن X يعبر عن عدد الصور التي تظهر، وبالتالي إما أن لاتظهر أية صورة، أو تظهر صورة واحدة أو صورتان. لنرمز بـ H للصورة، وبـ T للرقم:

فنجد أن فضاء التجربة يتألف من: $\Omega=\{TT,TH,HT,HH\}$

ثم نقوم بحساب الاحتمالات المقابلة فنجد أن:

$$X=0\Rightarrow f(0)=P(x=0)=P\left[\{T,T\}\right]=\frac{1}{4}$$
$$X=1\Rightarrow f(1)=P(x=1)=P\left[\{(T,H),(H,T)\}\right]=\frac{1}{2}$$
$$X=2\Rightarrow f(2)=P(x=2)=P\left[\{(H,H)\}\right]=\frac{1}{4}$$

ثم نرتب القيم الممكنة لـ X والاحتمالات المقابلة لها في جدول فنحصل على التوزيع الاحتمالي التالي لـ X:

X	0	1	2
$f(x_i)=P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

مثال (3-3):

لنفرض أن شخصاً أطلق ثلاث طلقات على هدف، فإذا علمت أن X هو المتحول العشوائي الذي يعبّر عن عدد الإصابات. والمطلوب إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي لـ X، إذا علمت أن احتمال الإصابة لكل طلقة يساوي 0.6.

الحل:

إن فضاء إمكانات التجربة هو: $\Omega=\{0,1,2,3\}$

أي أن X يأخذ القيم 0 أو 1 أو 2 أو 3. لنرمز بـ A لحادث الإصابة، و $\overline{A}$ لحادث عدم الإصابة فنجد أن:

$$X=0\Rightarrow f(0)=P(x=0)=P\left[\{\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A}\}\right]=$$
$$P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})=0,064$$

ثم

$$X=1\Rightarrow f(1)=P(x=1)=P\left[\{(A\cap\overline{A}\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap A\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap\overline{A}\cap A)\}\right]=$$
$$P(A)\cdot P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})+P(\overline{A})\cdot P(A)\cdot P(\overline{A})+P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(A)=0,288$$
$$X=2\Rightarrow f(2)=P(x=2)=P\left[\{(A\cap A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap A\cap A)\}\right]=$$
$$P(A)\cdot P(A)\cdot P(\overline{A})+P(A)\cdot P(\overline{A})\cdot P(A)+P(\overline{A})\cdot P(A)\cdot P(A)=0,432$$
$$X=3\Rightarrow f(3)=P(x=3)=P\left[\{(A\cap A\cap A)\}\right]=$$
$$P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)=0,216$$

نرتب القيم الممكنة لـ X والاحتمالات المقابلة لها في جدول التوزيع فنحصل على الاحتمالي التالي لـ X:

X	0	1	2	3
$f(x_i)=P(X=x_i)$	0.064	0.288	0.432	0.216

3-2-1: خواص قانون التوزيع الاحتمالي لـ X المنقطع:

بما أن المتحول العشوائي X يأخذ دائماً إحدى القيم: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ في كل تجربة وباحتمالات مقابلة لها $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ على الترتيب، فإن المتحول X يتميز بالخاصيتين التاليتين:

1 . جميع قيم قانون التوزيع الاحتمالي $f(x_i)$ تكون غير سالبة؛ أي أن:

$$f(x_i) \geq 0 \qquad (3-3)$$

2 . إن مجموع الاحتمالات المقابلة لجميع قيم المتحول X تساوي الواحد الصحيح؛ أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) = 1 \qquad (4-3)$$

لأن:

$$P(\Omega) = 1$$

مثال (3-4):

أثبت أن خاصيتي قانون التوزيع الاحتمالي في الأمثلة (1)، (2)، (3) محققة.

الحل:

في المثال (3-1)، نجد أن:

$$f(1) = P(x=1) = \frac{1}{36} > 0 \qquad f(4) = P(x=4) = \frac{7}{36} > 0$$

$$f(2) = P(x=2) = \frac{2}{36} > 0 \qquad f(5) = P(x=5) = \frac{9}{36} > 0$$

$$f(3) = P(x=3) = \frac{5}{36} > 0 \qquad f(6) = P(x=6) = \frac{11}{36} > 0$$

وبالتالي فإن الخاصية الأولى محققة.

وكذلك فإن:

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) = \sum_{i=1}^{6} P(X = x_i) =$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

وبالتالي فإن الخاصية الثانية محققة.

في المثال (3−2):

نجد:

$$f(0)=P(x=0)=\frac{1}{4}>0$$
$$f(1)=P(x=1)=\frac{1}{2}>0$$
$$f(2)=P(x=2)=\frac{1}{4}>0$$

ونستنتج أن الخاصية الأولى محققة.

وكذلك فإن:

$$\sum f(x_i)=\sum P(X=x_i)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

وبالتالي فإن الخاصية الثانية محققة.

في المثال (3−3)، نجد أن:

$$f(0)=P(x=0)=0,064>0$$
$$f(1)=P(x=1)=0,288>0$$
$$f(2)=P(x=2)=0,432>0$$
$$f(3)=P(x=3)=0,216>0$$

وبالتالي فإن الخاصية الأولى محققة.

وكذلك فإن:

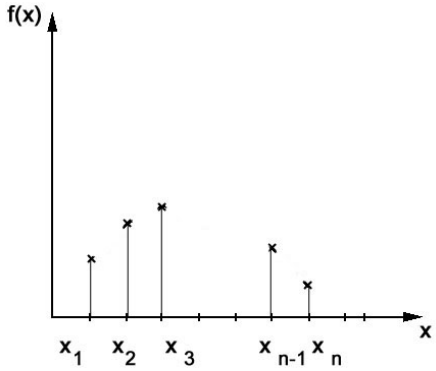
$$\sum f(x_i)=\sum P(X=x_i)=0,064+0,288+0,432+0,216=1$$

وبالتالي فإن الخاصية الثانية محققة.

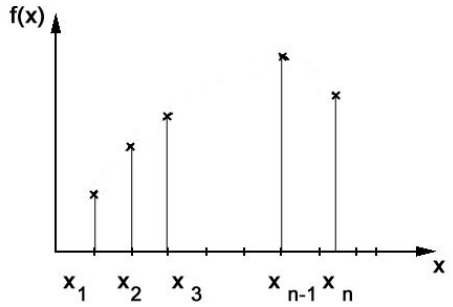
3−2−2: الشكل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X المنقطع:

يمكن الحصول على الشكل البياني الممثل لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X المنقطع من خلال تمثيل الثنائيات $\left(x_i, f\left(x_i\right)\right)$ على محورين إحداثيين، حيث فواصلها عبارة عن القيم الممكنة لـ X وتراتيبها الاحتمالات المقابلة لقيم X، ومن ثم

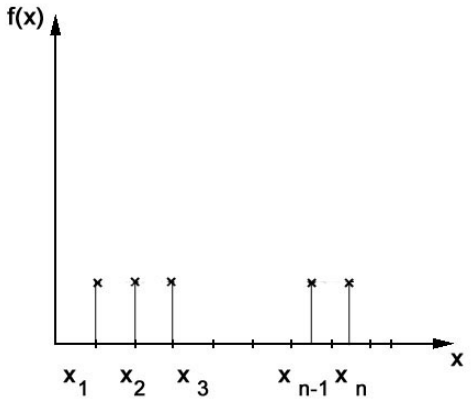
نصل بين النقاط المتتالية بقطع مستقيمة فنحصل على الشكل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X المنقطع. وتختلف الأشكال البيانية عن بعضها البعض بحسب الاحتمالات المقابلة لقيم X كما في الأشكال الآتية:



الشكل رقم (3–1)



الشكل رقم (3–2)

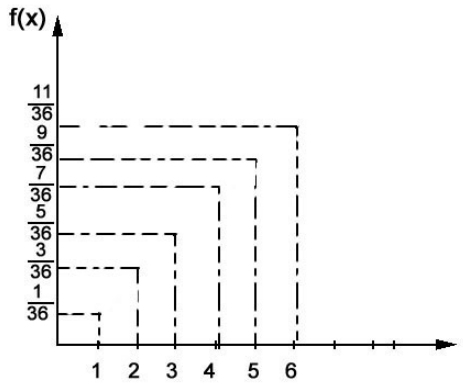


الشكل رقم (3)

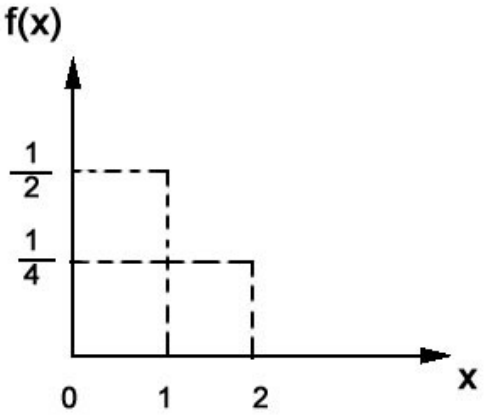
ويمكن الحصول على أشكال بيانية أخرى ممثلة لقوانين التوزيع الاحتمالية، وذلك بإقامة أعمدة من النقطة x_i طول كل منها $f(x_i)$ على الترتيب.

مثال (3–5):

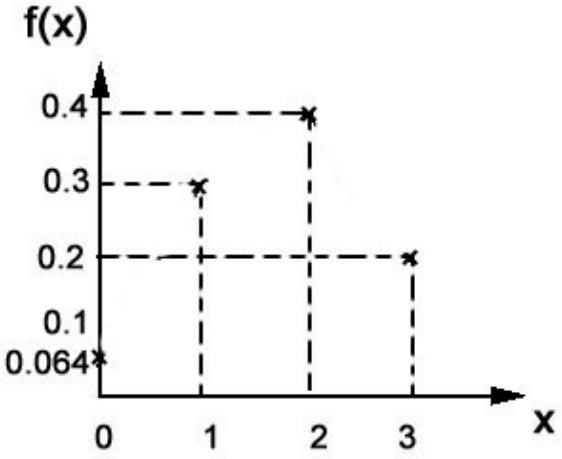
ارسم الأشكال البيانية الممثلة لقوانين التوزيع الاحتمالية لـ X في الأمثلة (1) و(2) و(3):



الشكل البياني الممثل لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X في المثال (3–1)



الشكل البياني الممثل لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X في المثال (3–2)



الشكل البياني الممثل لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X في المثال (3–3).

3-3: تابع التوزيع الاحتمالي لمتحول X منقطع:

إذا كـان X متحـولاً عشـوائياً منقطعـاً ، ويأخـذ القـيم: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ باحتمالات مقابلة $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$ على الترتيب، فإننا نسمي التابع:

$$F(X) = P(x \le x_s) \qquad (5-3)$$

بتابع التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X المنقطع، والذي يعبر عن احتمال أن يأخذ المتحول X قيمة أصغر أو تساوي x_s، ونعّبر عن ذلك بالعلاقة:

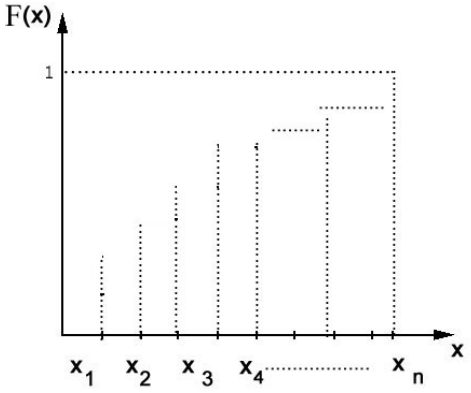
$$F(X) = \sum_{x \le x_s} f(x_s) = \sum_{x \le x_s} P(x \le x_s) \qquad (6-3)$$

كما يدعى هذا التابع أيضاً بتابع التوزيع التراكمي.

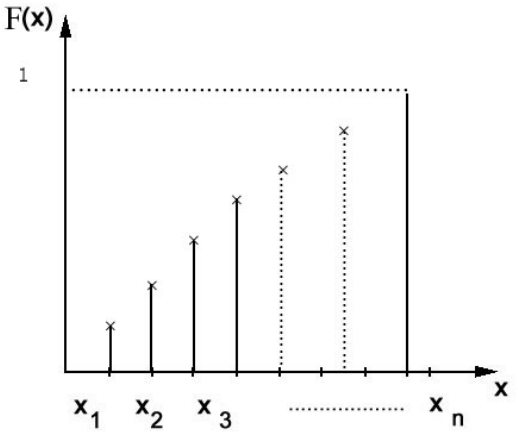
ويمكن التعبير عن تابع التوزيع التراكمي لـ X المنقطع حسب (العلاقة 3-6) من خلال الجدول الآتي:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	....	x_n
$f(x)$	P_1	P_1+P_2	$P_1+P_2+P_3$	$P_1+P_2+P_3+P_4$	...	$P_1+P_2+....+P_n=1$

ويمكن التعبير عن $F(X)$ بيانياً بأحد الشكلين الآتيين:



الشكل رقم (3-4)



الشكل رقم (3-5)

ومن العلاقة (3-6) يمكن حساب قيم الاحتمالات التجميعية الأخرى الآتية:

. احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة أصغر من x_s:

$$F\left(x_{s-1}\right)=P\left(X<x_s\right)=\sum_{i=1}^{x_{s-1}}P_i \qquad (7-3)$$

. أما احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي x_s فهي:

$$F\left(x_s\right)=P\left(X\le x_s\right)=\sum_{i=1}^{s}P_i \qquad (8-3)$$

. احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة أكبر من x_s يساوي:

$$F\left(x_s\right)=P\left(X>x_s\right)=\sum_{i=s+1}^{n}P_i \qquad (9-3)$$

$$P\left(X>x_s\right)=1-P\left(X\le x_s\right)=1-F\left(x_s\right)$$

. أما احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة أكبر أو تساوي x_s فهو:

$$P\left(X\ge x_s\right)=\sum_{i=s}^{n}P_i=1-P\left(X<x_s\right)=1-\sum_{i=1}^{s-1}P_i \qquad (10-3)$$

$$P\left(X\ge x_s\right)=1-F\left(x_{s-1}\right)$$

ـ احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة محصورة بين x_s و x_t حيث $x_s<x_t$ يساوي:

$$P(x_s < X < x_t) = \sum_{i=s+1}^{t-1} P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{t-1} P_i - \sum_{i=1}^{s} P_i = F(x_t - 1) - F(x_s) \qquad (11-3)$$

. أما احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة ما تحقق المتراجحات التالية يساوي:

$$P(x_s \le X \le x_t) = \sum_{i=s}^{t} P_i = F(x_t) - F(x_{s-1})$$

$$P(x_s \le X < x_t) = \sum_{i=s}^{t-1} P_i = F(x_{t-1}) - F(x_{s-1})$$

$$P(x_s < X \le x_t) = \sum_{i=s+1}^{t} P_i = F(x_t) - F(x_s) \qquad (12-3)$$

مثال (3–6):

بالاعتماد على بيانات المثال رقم (3–1) أوجد تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X ومثّله بيانياً، ومن ثم أوجد الاحتمالات الآتية:

$$P(X<4), P(X \le 4), P(X>3), P(X \ge 3),$$
$$P(2<X<5), P(2 \le X \le 5), P(2 \le X < 5), P(2 < X \le 5)$$

الحل:

إن جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X يظهر كما في السطرين الأولين من الجدول:

X	1	2	3	4	5	6
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
$F(X) = P(X \le x_s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36}{36}$

ولإيجاد تابع التوزيع للمتحول X نطبق العلاقة (3–6)، ونضع النتائج في السطر الأخير من الجدول السابق، ومن ثم نقوم بحساب الاحتمالات الأخرى الآتية:

$$P(X<4) = \sum_{i=1}^{3} P_i = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}$$

$$P(X<4)=F(3)=\frac{9}{36}$$ أو:

$$P(X\le 4)=\sum_{i=1}^{4}P_i=\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{7}{36}=\frac{16}{36}$$

$$P(X\le 4)=F(4)=\frac{16}{36}$$ أو:

$$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\sum_{i=1}^{3}P_i=1-\left[\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}\right]=\frac{27}{36}$$

$$P(X>3)=1-F(3)=1-\frac{9}{36}=\frac{27}{36}$$ أو:

$$P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-\sum_{i=1}^{2}P_i=1-\left[\frac{1}{36}+\frac{3}{36}\right]=\frac{32}{36}$$

$$P(X\ge 3)=1-F(2)=1-\frac{4}{36}=\frac{32}{36}$$ أو:

$$P(2<X<5)=\sum_{i=3}^{4}P_i=\frac{5}{36}+\frac{7}{36}=\frac{12}{36}$$

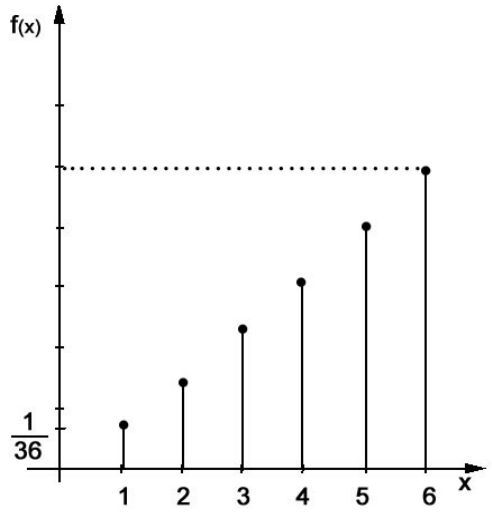
$$P(2<X<5)=F(4)-F(2)=\frac{16}{36}-\frac{4}{36}=\frac{12}{36}$$ أو:

$$P(2\le X\le 5)=F(5)-F(1)=\frac{25}{36}-\frac{1}{36}=\frac{24}{36}$$

$$P(2\le X<5)=F(4)-F(1)=\frac{16}{36}-\frac{1}{36}=\frac{15}{36}$$

$$P(2<X\le 5)=F(5)-F(2)=\frac{25}{36}-\frac{4}{36}=\frac{21}{36}$$

ويمكن تمثيل تابع التوزيع الاحتمالي بالشكل البياني الآتي:



الشكل (3-6): الشكل البياني لتابع التوزيع $F(X)$

3-4: خواص تابع التوزيع الاحتمالي لمتحول X المنقطع:

. إن قيمة تابع التوزيع عند $(-\infty)$ تساوي الصفر؛ أي:

$$F(-\infty)=0 \qquad (13-3)$$

وذلك لأن: $F(-\infty)=P(X<-\infty)=P(\Phi)=0$

لأن $F(-\infty)$ يمثل احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمه أصغر من أي عدد حقيقي معطى، وهذا مستحيل؛ أي أنه يمثل احتمال حدوث حادث مستحيل، وبالتالي:

$$P(\Phi)=0$$

. إن قيمة تابع التوزيع عند $(+\infty)$ تساوي الواحد الصحيح؛ أي أنه:

$$F(+\infty)=1 \qquad (14-3)$$

وذلك لأن: $F(+\infty)=P(X<+\infty)=P(\Omega)=1$

لأن $F(+\infty)$ يمثل احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X أية قيمة محدودة؛ أي أنه يمثل احتمال حدوث حادث مؤكد؛ أي: $P(\Omega)=1$

. إن تابع التوزيع $F(X)$ يحقق العلاقة:

$$0\le F(X)\le 1\Rightarrow 0\le P(X<x_s)\le 1 \qquad (15-3)$$

. إن تابع التوزيع هو تابع غير متناقص؛ أي إذا كان a وb أي عددين حقيقيين وكان، $a<b$ فإن:

$$F(a)\le F(b) \qquad (16-3)$$

أي إذا كان $a<b\Rightarrow$

$$P(X\le a)\le P(X\le b)\Rightarrow F(a)\le F(b) \qquad (17-3)$$

وبالتالي فإن:

$$F(b)-F(a)\ge 0 \qquad (18-3)$$

ـ إن تابع التوزيع $F(X)\ge 0$ موجب دائماً، لأنه ناتج عن تراكم الاحتمالات $f(x_i)$.

مثال (3-7):

نرمي حجري نرد أرضاً، ونفرض أن X متحول عشوائي يعبر عن مجموع العددين للنردين بعد استقرارهما، أي أن X يعرّف بالعلاقة:

$$X(i,j)=i+j$$

حيث: $i,j=1,2,3,4,5,6$

والمطلوب: . إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي لـ X المنقطع ثم دراسة خواصه.

. رسم الشكل البياني لـ $f(x_i)$.

. إيجاد تابع التوزيع $f(x_i)$، ورسم شكله البياني.

. حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(x\le 4),P(x<4),P(3\le x\le 5)$$

$$P(3<x<5),P(x\ge 8),$$

الحل:

1 . إن فضاء إمكانات التجربة التي يمكن أن يأخذها المتحول العشوائي X هي:

$$X=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

فإذا كان: $A=\{x=8\}$ فإن A يساوي: $A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),\}$

وبالتالي فإننا نستطيع إيجاد جميع الثنائيات Ω التي فاصلتها نتائج النرد الأول وترتيبها نتائج النرد الثاني، ومنه نجد أن عناصر Ω تساوي 36 ثنائية؛ أي: $N(\Omega)=36$ وهي:

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),.....,(2,6)\\(3,1),.....(3,6)\\(4,1),(4,2),.....,(4,6)\\(5,1),.....,(5,6)\\(6,1),(6,2),.....,(6,6)\end{Bmatrix}$$

وبالتالي نستطيع إيجاد P_i، حيث: $f(x_i)=P(X=x_i)$ وذلك بالاعتماد على التعريف الكلاسيكي (التقليدي) للاحتمال؛ أي:

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لتحقق الحادث } A}{N(\Omega)}$$

ومنه فإن: $P(X=8)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{5}{36}$

وبالأسلوب نفسه نستطيع حساب الاحتمالات الأخرى المتبقية كما يلي:

$$f(2)=P(X=2)=P\left[\{(1,1)\}\right]=\frac{1}{36}$$

$$f(3)=P(X=3)=P\left[\{(1,2)(2,1)\}\right]=\frac{2}{36}$$

$$f(4)=P(X=4)=P\left[\{(2,2)(1,3),(3,1)\}\right]=\frac{3}{36}$$

$$f(5)=P(X=5)=P\left[\{(1,4)(2,3),(3,2),(4,1)\}\right]=\frac{4}{36}$$

$$f(6)=P(X=6)=P\left[\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\right]=\frac{5}{36}$$

$$f(7)=P(X=7)=P\left[\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\right]=\frac{6}{36}$$

.....

.....

$$f(11)=P(X=11)=P\left[\{(5,6),(6,5)\}\right]=\frac{2}{36}$$

$$f(12)=P(X=12)=P\left[\{(6,6)\}\right]=\frac{1}{36}$$

ويمكن ترتيب النتائج في الجدول اللاحق فنحصل على جدول التوزيع الاحتمالي الآتي لـ X المنقطع:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)=P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

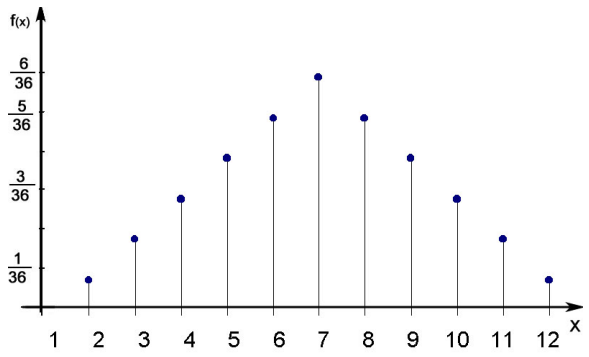
نلاحظ أن $f(x_i)>0$. أما بالنسبة للخاصة الثانية، فنجد أن:

$$\sum_{i=1}^{11} f(x_i)=\sum_{i=1}^{11} P(X=x_i)=1$$

أي:

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+.....+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+....\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{36}{36}=1$$

2 . الشكل البياني لـ $f(x)$:

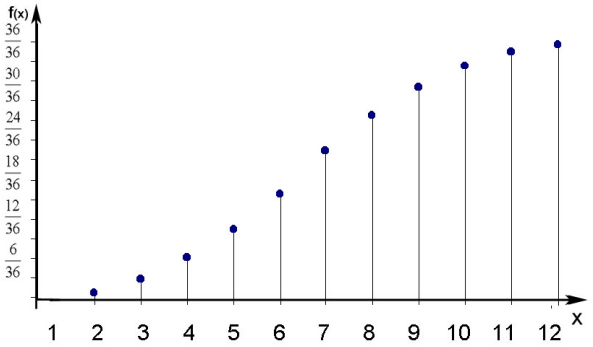


الشكل (3-7)

3 . أما بالنسبة لتابع التوزيع $F(X)$ فيحسب بالعلاقة:

$$F(X)=\sum_{x\le x_s} f(x_s)$$

ولقد تم وضع النتائج في الجدول السابق (السطر الرابع) وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (3-8)

4 . أما الاحتمالات فتساوي:

$$P(X\le 4)=F(4)=\frac{6}{36}$$

$$P(X<4)=F(4-1)=F(3)=\frac{3}{36}$$

$$P(X\ge 8)=1-P(X<8)=1-F(7)=1-\frac{21}{36}=\frac{15}{36}$$

$$P(3\le X\le 5)=F(5)-F(2)=\frac{10}{36}-\frac{1}{36}=\frac{9}{36}$$

$$P(3<X<5)=F(4)-F(3)=\frac{6}{36}-\frac{3}{36}=\frac{3}{36}$$

3-5: القيم المميّزة للمتحول العشوائي المنقطع:

عندما نكون أمام توزيع احتمالي لمتحول X، فلا بد من دراسة بعض المقاييس العددية التي تميزه عن غيره من المتحولات العشوائية الأخرى، وبالإضافة إلى ذلك فإنه من خلال هذه المقاييس نحصل على وصف ملامح التوزيع الذي أمامنا. ومن أهم المقاييس المستخدمة للتمييز بين توزيع احتمالي وآخر من التوزيعات الاحتمالية، هي: المقاييس المركزية، مقاييس التشتت، مقاييس التناظر، وسنأتي على شرح هذه المقاييس على التوالي.

3-5-1: مقاييس القيم المركزية:

وتبيّن هذه المقاييس فيما إذا كان لقيم المتحول العشوائي نقطة متوسطة (قيمة مركزية) تميل جميع قيم المتحول إلى التجمع حولها، ومن هذه المقاييس:

3-5-1-1: التوقع الرياضي:

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ معلوم، فإننا نعرّف التوقع الرياضي للمتحول X ونرمز له بـ $E(x)$ أو بـ μ_x، بأنه مجموع جداءات قيم المتحول العشوائي X بالاحتمالات المقابلة لها؛ أي أن:

$$\mu_x = E(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + ... + x_n \cdot f(x_n)$$

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot x_i$$

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i \qquad (19-3)$$

خواص التوقع الرياضي:

إن التوقع الرياضي $E(X)$ للمتحول العشوائي X يتميز بالخواص الآتية:

1 . إن التوقع الرياضي لمتحول عشوائي ثابت c يساوي الثابت c نفسه؛ أي:

$$E(c) = c$$

$$E(c) = c \cdot 1 = c \qquad (20-3)$$

2 . إن التوقع الرياضي لـ $c \cdot X$ يساوي: $c \cdot E(X)$؛ أي:

$$E(cX) = c \cdot E(X) \qquad (21-3)$$

نعلم أن:

$$E(X)=\sum_i f(x_i)\cdot x_i$$

$$E(c\cdot X)=\sum_i f(x_i)\cdot(cx_i)=c\sum_i f(x_i)\cdot x_i$$

$$E(c\cdot X)=c\cdot E(X)$$

3 . إن التوقع الرياضي لـ $X+C$ يساوي: $E(X)+C$ أي:

$$E(X+c)=E(X)+c \qquad (22-3)$$

حسب تعريف التوقع الرياضي نكتب:

$$E(X+c)=\sum_i f(x_i)\cdot(x_i+c)$$

$$E(X+c)=\sum_i f(x_i)\cdot(x_i)+c\cdot\sum_i f(x_i)$$

$$E(X+c)=E(X)+c\cdot 1$$

$$E(X+c)=E(X)+c$$

4 . التوقع الرياضي لتابع خطي $aX+c$ يساوي:

$$E(aX+c)=\sum_i(ax_i+c)\cdot f(x_i)$$

$$E(aX+c)=\sum_i ax_i\cdot f(x_i)+c\cdot\sum_i f(x_i)$$

$$E(aX+c)=a\sum_i x_i\cdot f(x_i)+c\cdot 1$$

$$E(aX+c)=aE(X)+c \qquad (23-3)$$

5 . التوقع الرياضي $E(X)$ للتوقع الرياضي $E(X)$ يساوي التوقع الرياضي نفسه؛ أي:

$$E\big[E(X)\big]=E(X) \qquad (24-3)$$

لأن $E(X)$ هو عدد ثابت مثل c.

6 . التوقع الرياضي لمجموع متغيرين عشوائيين X,Y يساوي إلى مجموع التوقعين الرياضيين لكلٍ منهما، أي:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \qquad (25-3)$$

7 . التوقع الرياضي لجداء متحولين عشوائيين Y, X مستقلين يساوي التوقع الرياضي للأول مضروباً بالتوقع الرياضي للثاني؛ أي:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \qquad (26-3)$$

أما إذا كان X و Y غير مستقلين، فإن:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) + \operatorname{cov}(X,Y) \qquad (27-3)$$

ويدعى الجزء $\operatorname{cov}(X,Y)$ بالتباين المشترك، وسندرسه لاحقاً.

مثال (3–8):

بالعودة إلى الأمثلة (1)، (2)، (3)، و(7)، المطلوب: إيجاد التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X.

الحل:

بالنسبة للمثال رقم (1)، نجد أن التوقع الرياضي $E(X)$ يساوي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36}$$

$$E(X) = 4,47$$

بالنسبة للمثال رقم (2)، نجد أن التوقع الرياضي $E(X)$ يساوي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + .2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$E(X) = 1$$

بالنسبة للمثال رقم (3)، نجد أن التوقع الرياضي $E(X)$ يساوي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$$

$$E(X)=0\cdot 0,064+1\cdot 0,288+2\cdot 0,432+3\cdot 0,216=1,8$$

بالنسبة للمثال رقم (7)، نجد أن التوقع الرياضي $E(X)$ يساوي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$$

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+.....+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}$$

$$E(X)=7$$

3-5-1-2: الوسيط:

هو المقياس الآخر من مقاييس التمركز ويرمز له بـ Me، ويدعى القيمة النصفية للمتحول X ويعرّف الوسيط بأنه القيمة من قيم X التي يتساوى عندها مجموع الاحتمالات التي قبلها مع مجموع الاحتمالات التي بعدها، أو بمعنى آخر، إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، قانون توزيعه الاحتمالي $f(X)$ معلوم، فإن الوسيط Me هو إحدى قيم المتحول X التي تتحقق عندها العلاقة الآتية:

$$P(X<Me)=P(X>Me) \qquad (28-3)$$

مثال (3-9):

بالعودة للمثال رقم (7)، أوجد وسيط المتحول X.

الحل:

إن جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X يعطى بالشكل الآتي:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)=P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

وبالتالي نجد أن القيمة التي يكون مجموع الاحتمالات التي قبلها يساوي إلى مجموع الاحتمالات التي بعدها هي $X=7$، وبالتالي فإن الوسيط $Me=7$؛ أي نكتب:

$$Me=X=7$$

وهي تحقق العلاقة:

$$P(X > Me) = P(X < Me)$$

$$\frac{15}{36} \quad = \quad \frac{15}{36}$$

مثال (3−10):

بالعودة للمثال رقم (2)، أوجد وسيط المتحول X.

الحل:

إن جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X يعطى بالشكل الآتي:

x_i	0	1	2
$f(x_i)=P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

نلاحظ أنه عندما $X=1$ ، تتحقق العلاقة الآتية:

$$P(X>Me)=P(X<Me)$$

$$\frac{1}{4} \quad = \quad \frac{1}{4}$$

ملاحظة:

في بعض التوزيعات المنقطعة قد نجد أن العلاقة:

$$P(X<Me)=P(X>Me)$$

تعطي مجالاً يقع ضمنه الوسيط Me وليس نقطة معينة، عندئذ لحساب الوسيط نأخذ مركز المجال ونعتبره الوسيط.

مثال (3-11):

نرمي حجر نرد، ونفرض أن X متحول عشوائي يعبّر عن العدد الذي سيظهر على الوجه العلوي لحجر النرد، والمطلوب:

إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي للمتحول X ثم أوجد وسيط المتحول X.

الحل:

نلاحظ أن جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X يعطى بالشكل الآتي:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)=P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

نلاحظ أن الوسيط محصور ضمن المجال $]3,4[$ ، وبالتالي فإن الوسيط هو ضمن المجال المذكور؛ أي:

$$Me = \frac{3+4}{2} = 3,5$$

3-5-1-3: المنوال:

هو مقياس آخر من مقاييس التمركز ويرمز له بـ Mo ويعرف بأنه القيمة الأكثر تكراراً في التوزيعات التكرارية، أما في التوزيعات الاحتمالية فيعرف المنوال بأنه القيمة المقابلة لأكبر احتمال ممكن من بين جميع قيم المتحول العشوائي X المنقطع، أو بمعنى آخر، إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، قانون توزيعه الاحتمالي معلوم، فإن المنوال Mo هو إحدى قيم المتحول العشوائي X التي تحقق العلاقة الآتية:

$$Mo = x_i : Max\left(P_1, P_2, ...P_i, ...P_n\right) = P_i \qquad (29-3)$$

مثال (3-12):

بالاستفادة من بيانات جدول التوزيع الاحتمالي $f(x)$ للمتحول العشوائي X في المثالين (2) و(7)، أوجد منوال المتحول X.

الحل:

بالنسبة للمثال رقم (2)، نلاحظ أنه عندما $x = 1$ فإن $f(x) = \frac{1}{2}$ وهو أكبر احتمال يقابل القيمة $x = 1$، وبالتالي فإن:

$$Mo = x = 1$$

بالنسبة للمثال رقم (7)، نلاحظ أنه عندما $x = 7$ فإن $f(x) = \frac{6}{36}$ وهو أكبر احتمال يقابل القيمة $x = 7$، وبالتالي فإن:

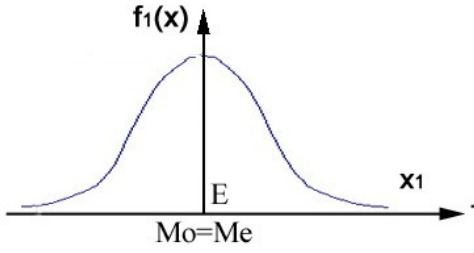
$$Mo = x = 7$$

ملاحظة:

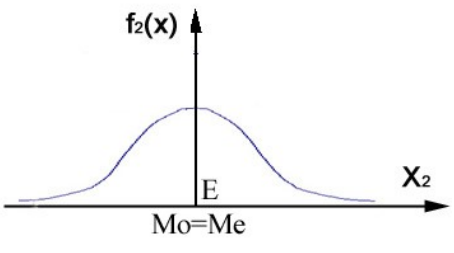
قد نصادف بعض التوزيعات الاحتمالية التي يتساوى فيها التوقع الرياضي والوسيط والمنوال؛ أي: $E(x) = Me = Mo$ وعندئذٍ تكون التوزيعات متناظرة.

3-6: مقاييس التشتت:

تبيّن هذه المقاييس كيف تتوزّع نقاط التوزيع حول قيمته المركزية، فعندما نصادف توزيعين احتماليين تتركز نقاط كل منهما حول نقطة معينة مثل $x = 0$ كما في الشكلين الآتيين:



الشكل رقم (15)



الشكل رقم (16)

نلاحظ أن توقع ووسيط ومنوال هذين التوزيعين متساوي، أي $E(x) = Me = Mo$ وهذا لا يعني أن التوزيعين متشابهان، وذلك لأن انتشار نقاط كلٍ منهما لتوزع حول النقطة المركزية بشكل مختلف. ومن أشهر المقاييس التي تقيس لنا تشتت نقاط التوزيع عن النقطة المركزية هو . التباين ثم الانحراف المعياري، والعزوم.

3-6-1: التباين:

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ وتوقعه الرياضي $E(x)$، فإن تباين المتحول X ويرمز له بـ $\sigma^2(x)$، أو $D^2(x)$ أو $\mathrm{var}(x)$. يعرّف بشكلٍ عام بالعلاقة الآتية:

$$\sigma^2(x) = E\left[x - E(x)\right]^2 \qquad (30-3)$$

وتكتب العلاقة (3-30) بالشكل الآتي:

$$\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left[x_i - E(x)\right]^2$$

أو:

$$\sigma^2(x)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[x_i-E(x)\right]^2 \qquad (31-3)$$

حالة خاصة:

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً يأخذ القيم الآتية: $x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n$، باحتمالات متساوية مقابلة لها على الترتيب، حيث:

$P_1=P_2=P_3=.....=P_i=.....=P_n$، فإن: $\sum_{i=1}^{n}P_i=n\cdot P=1$

وبالتالي فإن: $P=\frac{1}{n}$.

ومنه تصبح العلاقة (3−31) بالشكل الآتي:

$$\sigma^2(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[x_i-E(x)\right]^2$$

$$\sigma^2(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(x)\right]^2 \qquad (32-3)$$

- **خواص التباين:**

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، وكان توزيعه الاحتمالي $f(x)$ وتوقعه الرياضي $E(X)$، فإن تباينه $\sigma^2(x)$ يتمتع بالخواص الآتية:

1 . تباين العدد الثابت c يساوي الصفر، أي:

$$\sigma^2(c)=0 \qquad (33-3)$$

2 . إن تباين $c\cdot X$ يساوي $c^2\cdot\sigma^2(X)$، أي:

$$\sigma^2(c\cdot X)=\sum_{i=1}^{n}\left[c\cdot x_i-c\cdot E(x)\right]^2\cdot P_i$$

$$\sigma^2(c\cdot X)=c^2\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot\left[x_i-E(x)\right]^2$$

$$\sigma^2(c\cdot X)=c^2\cdot\sigma^2(x) \qquad (34-3)$$

3 . إن تباين $X\pm c$ يساوي $\sigma^2(x)$؛ أي:

$$\sigma^2(X\pm c)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[(x_i\pm c)-E(X\pm c)\right]^2$$

$$\sigma^2(X\pm c)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[x_i\pm c-E(X)\mp c\right]^2$$

$$\sigma^2(X\pm c)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[x_i-E(X)\right]^2=\sigma^2(X) \qquad (35-3)$$

4 . إن تباين $aX\pm c$ يساوي $a^2\sigma^2(X)$ ؛ أي:

$$\sigma^2(aX\pm c)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[(ax_i\pm c)-E\left(a(X)\pm c\right)\right]^2$$

$$\sigma^2(aX\pm c)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[ax_i\pm c-aE(X)\mp c\right]^2$$

$$\sigma^2(aX\pm c)=a^2\sum_{i=1}^{n}P_i\left[x_i-E(X)\right]^2$$

$$\sigma^2(aX\pm c)=a^2\sigma^2(X) \qquad (36-3)$$

نظرية (3-1):

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، وكان توقعه الرياضي $E(x)$ معلوماً، فإن تباين المتحول X يساوي:

$$\sigma^2(x)=E(x)^2-\left[E(x)\right]^2 \qquad (37-3)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sigma^2(X)=E\left[X-E(X)\right]^2$$

$$\sigma^2(X)=E\left[X^2-2E(X)\cdot X+\left[E(X)\right]^2\right]$$

$$\sigma^2(X)=E\left(X^2\right)-2E(X)\cdot E(X)+\left[E(X)\right]^2$$

$$\sigma^2(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2 \qquad (38-3)$$

حيث أن: $E(X)=\sum_{i=1}^{n}P_ix_i$

$$E(X)^2=\sum_{i=1}^{n}P_ix_i^2$$

وتستخدم العلاقة (3-38) بشكل واسع لسهولة إيجاد قيم حدودها.

3-6-2: الانحراف المعياري:

ويرمز للانحراف المعياري بـ $\sigma(X)$ ويعرّف بأنه الجذر الموجب للتباين $\sigma^2_{(X)}$ وهو يقيس تشتت قيم المتحول X عن توقعه الرياضي $E(X)$، ويعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2(X)}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\left[x_i-E(X)\right]^2} \qquad (39-3)$$

وله خواص التباين نفسها مع الانتباه إلى عملية الجذر.

مثال (3-12):

بالعودة إلى معطيات المثالين رقم (2) و(3)، أوجد التباين والانحراف المعياري للمتحول X.

الحل:

بالنسبة للمثال (3-2)، نجد أن: $\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left[x_i-E(x)\right]^2$

وبما أن: $E(x)=1$ نجد:

$$\sigma^2(X)=\frac{1}{4}[0-1]^2+\frac{1}{2}[1-1]^2+\frac{1}{4}[2-1]^2=0,5$$

ومنه فإن الانحراف المعياري $\sigma(X)$ يساوي: $\sigma(X)=\sqrt{0,5}\approx 0,71$

ويمكن إيجاد التباين بتطبيق العلاقة:

$$\sigma^2(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{n} P_i X_i^2=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot x_i^2$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{4}(0)^2+\frac{1}{2}(1)^2+\frac{1}{4}(2)^2=\frac{3}{2}=1.5$$

نعوض في علاقة التباين فنجد: $\sigma^2(X)=1,5-(1)^2=0,5$

ومنه: $\sigma(X)=\sqrt{0,5}\approx 0,71$

بالنسبة للمثال (3-3)، نجد أن:

$$\sigma^2(X) = E(x)^2 - \left[E[X]\right]^2$$

$$E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)$$

$$E(X)^2 = 0^2 \cdot 0,064 + (1)^2 \cdot 0,288 + (2)^2 \cdot 0,432 + (3)^2 \cdot 0,216$$

$$E(X)^2 = 3,96$$

نعوض في علاقة التباين مع العلم أن: $E(X) = 1,8$ نجد:

$$\sigma^2(X) = 3,96 - (1,8)^2 = 0,72$$

ومنه فإن $\sigma(X)$ يساوي: $\sigma(X) = \sqrt{0,72} \approx 0,85$

3-7: العزوم:

وتقسم العزوم إلى نوعين، هما:

1 . العزوم الابتدائية:

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، فإن القيمة المتوقعة لـ X^S حول المبدأ تدعى العزم الابتدائي من المرتبة S، أو بمعنى آخر، يدعى المقدار: $E(X^S)$ بالعزم الابتدائي للمتحول X من المرتبة S، ويرمز للعزم الابتدائي من المرتبة S للمتحول العشوائي X بالرمز $\mu_S(X)$، واختصاراً سوف نستخدم الرمز μ_S، ويعطى بالعلاقة:

$$\mu_S = E(X^S) \qquad (40-3)$$

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{n} x_i^S \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^S \cdot P_i \qquad (41-3)$$

وهكذا نجد عندما: $S = 0 \Rightarrow \mu_0 = 1$

$$S = 1 \Rightarrow \mu_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \cdot P_i = E(X)$$

أي أن العزم الابتدائي للمتحول X من المرتبة الأولى يساوي التوقع $E(x)$ وبالتالي سوف نعتبر:

$$E(X) = \mu_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i$$

وعندما $s = 2$ فإن: $\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \cdot P_i$

وهو العزم الابتدائي من المرتبة الثانية.

2 . العزوم المركزية:

ويرمز للعزوم المركزية بالرمز $M_S(X)$ واختصاراً M_S، وهي العزوم المنسوبة إلى مركز المتحول أي إلى التوقع $E(X)$ أو منسوبة إلى نقطة معينة c.

إذا كان X متحولاً عشوائياً وكان قانون توزيعه الاحتمالي $f(X)$، وتوقعه الرياضي $E(X)$، فإن المقدار $E[X-c]^S$ يدعى بالعزم المركزي حول نقطة ما مثل c، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$M_S(x) = E[X-c]^s \qquad (42-3)$$

$$M_S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[x_i - c]^s$$

أما العزم المركزي للمتحول X من المرتبة S حول التوقع $E(X)$ فيساوي:

$$M_S(X) = E[X - E(X)]^s$$

$$M_S(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[x_i - \mu_1]^s \qquad (43-3)$$

وهكذا نجد عندما:

$$S = 0 \Rightarrow M_0 = 1$$

$$S = 1 \Rightarrow M_1 = 0$$

$$S = 2 \Rightarrow M_2 = E[X - E(X)]^2 = \sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

أي أن العزم المركزي للمتحول X من المرتبة الثانية هو التباين، وبالتالي فإن:

$$\sigma^2(X) = \mu_2 - \mu_1^2 \qquad (44-3)$$

حيث:

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P_i$$

$$\mu_1 = E\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i$$

وعندما $S = 3$ فإن:

$$S = 3 \Rightarrow M_3 = E\left[X - E\left(X\right)\right]^3$$

$$M_3 = E\left[X^3 - 3E\left(X\right) \cdot X^2 + 3\left[E\left(X\right)\right]^2 \cdot X - \left[E\left(X\right)\right]^3\right]$$

وبإدخال إشارة التوقع والإصلاح، نجد:

$$M_3 = E\left(X^3\right) - 3E\left(X\right) \cdot E\left(X\right)^2 + 2E\left(X\right)^3$$

$$M_3 = \mu_3 - 3\mu_1 \cdot \mu_2 + 2\mu_1^3 \qquad (45-3)$$

وكذلك نجد أن:

$$M_4 = \mu_4 - 4\mu_3 \cdot \mu_1 + 6\mu_2 \cdot \mu_1^2 - 3\mu_1^4 \qquad (46-3)$$

وبالأسلوب نفسه يمكن حساب بقية العزوم الأخرى.

مثال (3-13):

نلقي قطعتين نقديتين. ولنفترض أن X متحولاً عشوائياً يعبر عن عدد الصور التي تظهر، فإن قانون توزيعه الاحتمالي $f\left(X\right)$ معطى بالجدول الآتي:

X	0	1	2
$f\left(x_i\right) = f\left(X = x_i\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

والمطلوب:

1 . إيجاد العزوم الابتدائية من المرتبة S حيث: $S= 0, 1 , 2, 3, 4$.

2 . إيجاد العزوم المركزية من المرتبة S حيث: $S= 0, 1 , 2, 3, 4$.

الحل:

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{n} x_i^S \cdot P_i$$

$$S=0\Rightarrow \mu_0=\sum_{i=1}^{n}P_i=1$$

$$S=1\Rightarrow \mu_1=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1\Rightarrow E(x)=1$$

$$S=2\Rightarrow \mu_2=0\cdot\frac{1}{4}+(1)^2\cdot\frac{1}{2}+(2)^2\cdot\frac{1}{4}=1{,}5$$

$$S=3\Rightarrow \mu_3=0\cdot\frac{1}{4}+(1)^3\cdot\frac{1}{2}+(2)^3\cdot\frac{1}{4}=2{,}5$$

$$S=4\Rightarrow \mu_4=0\cdot\frac{1}{4}+(1)^4\cdot\frac{1}{2}+(2)^4\cdot\frac{1}{4}=4{,}5$$

2 . إن العزم المركزي يعطى بالعلاقة: $M_S(X)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[x_i-\mu_1\right]^S$

$$S=0\Rightarrow M_0=\sum_{i=1}^{n}P_i=1$$

$$S=1\Rightarrow M_1=\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot x_i-\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot 1=1-1=0$$

$$S=2\Rightarrow M_2=\mu_2-\mu_1^2=1{,}5-(1)^2=0{,}5\Rightarrow \sigma^2(x)=0{,}5$$

$$S=3\Rightarrow M_3=\mu_3-3\mu_1\cdot\mu_2+2\mu_1^3=2{,}5-3\cdot1\cdot1{,}5+2(1)^3=0$$

$$S=4\Rightarrow M_4=\mu_4-4\mu_3\cdot\mu_1+6\mu_2\cdot\mu_1^2-3\mu_1^4$$

$$M_4=4{,}5-4\cdot2{,}5\cdot1+6\cdot1{,}5\cdot1-3\cdot(1)^4=0{,}5$$

نتيجة:

نلاحظ أن حصولنا على العزوم الابتدائية يؤدي إلى حصولنا على العزوم المركزية، وأن استخدام العزوم بشكل عام يمكّننا من الحصول على التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري، ومن ثم على مقاييس التناظر التي سوف نشرحها لاحقاً، ولكي نحصل على العزوم الابتدائية بطريقة سهلة وواضحة لابد من الاعتماد على التابع المولد للعزوم.

3-8: التابع المولد للعزوم:

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، وكان $f(x)$ قانون توزيعه الاحتمالي فإن التابع المولد للعزوم ونرمز له بـ $\psi_x(t)$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\psi_x(t) = E\left[e^{tx}\right] \qquad (47-3)$$

حيث t متحول حقيقي ما، ومنه فإن:

$$\psi_x(t) = \sum_i e^{tx_i} \cdot P_i \qquad (48-3)$$

وبما أن التابع e^{tx} ينشر بالشكل الآتي:

$$\psi_x(t) = E\left[1 + xt + \frac{x^2t^2}{2!} + \frac{x^3t^3}{3!} + \frac{x^4t^4}{4!} + ...\right]$$

$$\psi_x(t) = 1 + t \cdot E(x) + t^2 \frac{E(x^2)}{2!} + t^3 \frac{E(x^3)}{3!} + t^4 \frac{E(x^4)}{4!} + ...$$

وحيث أن:

$$\mu_1 = E(x) \quad , \qquad \mu_2 = E(x^2) \ , \mu_3 = E(x^3) \ , \qquad \mu_4 = E(x^4)$$

.....

ومنه نجد أن: $$\psi_x(t) = 1 + t \cdot \mu_1 + t^2 \cdot \frac{\mu_2}{2!} + t^3 \cdot \frac{\mu_3}{3!} + t^4 \cdot \frac{\mu_4}{4!} + ...$$

وبالتالي فإن:

$$\psi_x(t) = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{t^S \cdot \mu_S}{s!} = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{\mu_S}{s!} t^S \qquad (49-3)$$

وبذلك يمكننا أن نستخلص من هذه العلاقة جميع العزوم من المرتبة S.

مثال (3-14):

إذا كان X متحولاً عشوائياً منقطعاً، وكان قانون توزيعه الاحتمالي مبيناً كما في الجدول الآتي:

X	$1-$	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

والمطلوب:

1 . إيجاد التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$.

2 . إيجاد التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

1 . إن التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$\psi_x(t)=E\left[e^{tx}\right]=\sum_i e^{tx_i}\cdot P_i$$

$$\psi_x(t)=e^{-t}\cdot\frac{1}{2}+e^{t}\cdot\frac{1}{2}=\frac{e^{-t}+e^{t}}{2}$$

$$\psi_x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{t}\right)$$

$$\psi_x(t)=\frac{1}{2}\left[\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots\right)+\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots\right)\right]$$

$$\psi_x(t)=\left[\left(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^6}{6!}+\ldots\right)\right]$$

وبالمقارنة مع العلاقة الآتية:

$$\psi_x(t)=1+t\cdot\mu_1+t^2\cdot\frac{\mu_2}{2!}+t^3\cdot\frac{\mu_3}{3!}+t^4\cdot\frac{\mu_4}{4!}+\ldots.$$

نجد أن:

$$\mu_0=1\,,\qquad \mu_1=0$$
$$\mu_2=1\,,\qquad \mu_3=0$$
$$\mu_4=1\,,\qquad \mu_5=0$$
$$\mu_6=1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ومنه نستنتج أن:

$\mu_s=0$	S فردي
$\mu_s=1$	S زوجي

2 . التوقع الرياضي $E(X)$: $E(X)=\mu_1=0$

التباين $\sigma^2(X)$: $\sigma^2(X)=\mu_2-\mu_1^2$

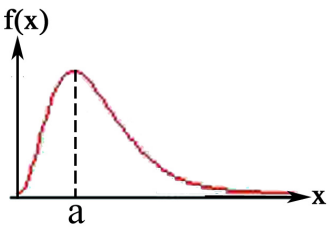
$$\sigma^2(X)=1-0=1\Rightarrow\sigma(X)=1$$

3-9: مقاييس التناظر والتطاول:

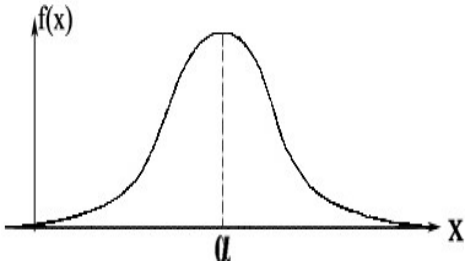
تبين هذه المقاييس فيما إذا كان التوزيع متناظراً أو متماثلاً بالنسبة لنقطة معينة، أو أنه ملتوياً نحو اليمين أو اليسار. ومن أشهر هذه المقاييس: مقياس التناظر والالتواء، ومقاييس التفرطح.

3-9-1: مقاييس التناظر والالتواء:

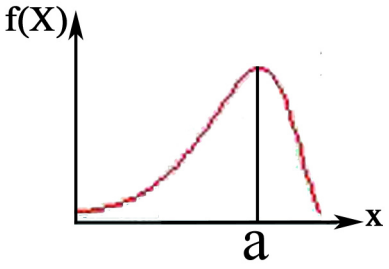
إن الأشكال البيانية التي نحصل عليها عند تمثيل التوزيعات الاحتمالية قد تكون متناظرة بالنسبة لنقطة معينة، وقد تكون ملتوية نحو اليمين أو نحو اليسار، كما في الأشكال الآتية:



متناظر بالنسبة للنقطة a



غير متناظر ومنحرف نحو اليمين



غير متناظر وملتوٍ نحو اليسار

الشكل رقم (3-10)

وفي حال تناظر الشكل البياني للتوزيع الاحتمالي لمتحول X بالنسبة لنقطة معينة (نقطة التناظر)، فإن نقطة التناظر تنطبق على مركز التوزيع؛ أي تنطبق على التوقع الرياضي للتوزيع، لذلك عندما ندرس تناظر توزيع ما، فإننا ندرسه بالنسبة للتوقع الرياضي $E(x)$ للتوزيع، وبذلك نصل إلى التعريف الآتي:

إذا كان X متحولاً عشوائياً، وكان قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ وتوقعه الرياضي $E(x)=\mu$، فإن توزيع المتحول X يكون متناظراً بالنسبة لـ $E(x)$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$P(x=\mu+x)=P(x=\mu-x) \quad \forall x \in R \qquad (50-3)$$

نظرية (3-2):

إذا كان قانون توزيع X متناظراً بالنسبة للتوقع الرياضي μ، فإن جميع العزوم المركزية من المراتب الفردية تكون معدومة؛ أي:

$$M_{2i+1}=0 \qquad \forall i=0,1,2,3,..... \qquad (51-3)$$

أما إذا كان قانون التوزيع غير متناظر فإن تلك العزوم الفردية تستخدم لقياس الإلتواء.

وباعتبار أن العزم المركزي من الدرجة الأولى يساوي الصفر دائماً؛ أي $M_1=0$، لذلك سيتم اختيار M_3 لدراسة الواقع التناظري للمتحول X بالنسبة للتوقع الرياضي $E(X)$، ويعطى معامل الالتواء بالعلاقة:

$$K=\frac{M_3(x)}{\sigma^3(x)} \qquad (52-3)$$

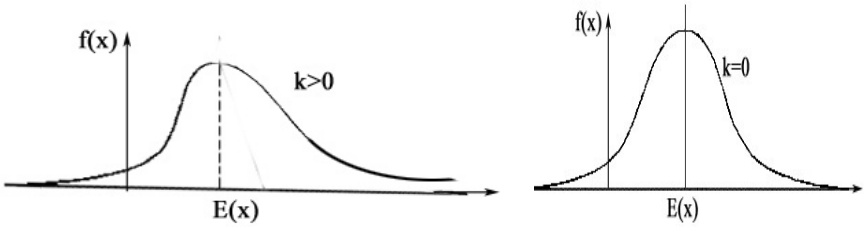
ويستخدم معامل الالتواء لقياس واقع التناظر لتوزيع المتحول X، ويتحدد ذلك حسب القيمة التي سيأخذها K:

فإذا كان $K=0$ فإن توزيع المتحول X يكون متناظراً بالنسبة للتوقع الرياضي $E(x)$.

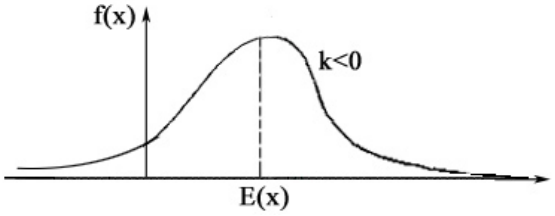
وإذا كان $K>0$ فإن توزيع المتحول X يكون ملتوياً نحو اليمين، وكلما ازدادت قيمة K كلما ازداد الالتواء أكثر.

وإذا كان $K<0$ فإن توزيع المتحول X يكون ملتوياً نحو اليسار، وكلما ابتعدت قيمة K عن الصفر، كلما ازداد الالتواء أكثر، وكلما ازدادت قيمة $|K|$ كلما ازداد الالتواء.

ويمكن بيان ذلك بالأشكال البيانية الآتية:



ملتوي نحوي اليمين　　متناظر



ملتوي نحو اليسار

الشكل رقم (3-11)

مثال (3-15):

باستخدام معطيات المثال (14)، ادرس الواقع التناظري لتوزيع المتحول X.

الحل:

نطبق العلاقة: $$K=\frac{M_3(x)}{\sigma^3(x)}$$

لذلك نقوم بحساب $M_3, \sigma^3_{(x)}$ فنجد أن:

$$M_3=\mu_3-3\mu_1\cdot\mu_2+2\mu_1^3$$

$$M_3=0-3\cdot0\cdot1+2\cdot0=0$$

ومنه نجد أن: $$K=\frac{0}{\sigma^3}=0$$

وبالتالي فإن توزيع المتحول X متناظر بالنسبة للتوقع الرياضي:

$$E(x) = \mu = 0$$

3-9-2: مقاييس التطاول:

إن الشكل البياني الذي يرسمه توزيع المتحول X يتعلق بمقدار تشتت القيم حول المقاييس المركزية، وتستخدم العزوم المركزية من المراتب الزوجية لإيجاد معامل التفرطح، وباعتبار أن العزم المركزي من المرتبة الثانية هو التباين، لذلك نستخدم العزم المركزي من المرتبة الرابعة، ويرمز لمعامل التفرطح أو التطاول بالرمز L ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$L = \frac{M_4}{\sigma^4} \qquad (53-3)$$

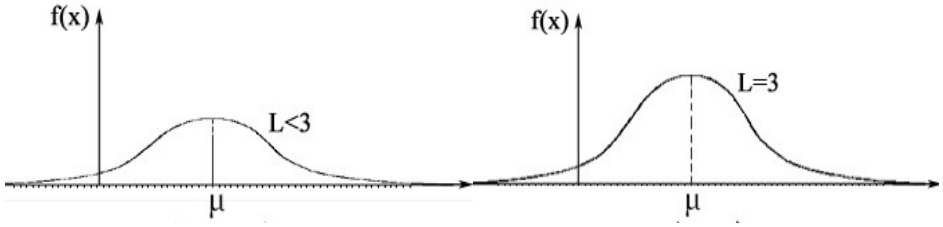
فإذا كان:

. $L = 3$ فإن توزيع المتحول X يكون توزيعاً طبيعياً.

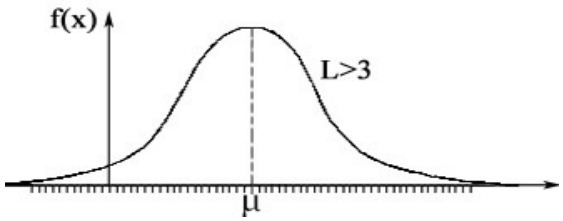
. $L > 3$ فإن توزيع المتحول X يكون متطاولاً.

. $L < 3$ فإن توزيع المتحول X يكون منبسطاً.

ويمكن بيان ذلك بالأشكال البيانية الآتية:



التوزيع طبيعي　　التوزيع منبسط



التوزيع متطاول

الشكل رقم (3-12)

تمرينات

1 . نلقي قطعة نقود أربع مرات متتالية، ولنفرض أن X متحولاً عشوائياً يعبر عن عدد مرات ظهور الشعار، والمطلوب: إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X. ثم إيجاد تابع التوزيع $F(x)$.

2 . صندوق فيه 10 مصابيح كهربائية، منها 3 معطوبة، والباقي جيدة. نختار مصباحين من الصندوق بشكل عشوائي، ولنفرض أن X متحولاً عشوائياً يعبّر عن عدد المصابيح الجيدة في العينة، والمطلوب:

1 . تعيين فضاء إمكانات العينة (Ω).

2 . إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X، أي $f(x)$

3 . إيجاد تابع التوزيع $F(x)$.

4 . ارسم الشكل البياني لـ $f(x)$ و $F(x)$.

5 . إيجاد توقع وتباين X.

6 . إيجاد الوسيط والمنوال.

3 . نطلق 5 طلقات على هدف، وفي كل مرة نصيب فيها الهدف، نسجل 3 نقاط، فإذا علمت أن احتمال إصابة الهدف في كل مرة يساوي 0.4. ولنفرض أن X متحولاً عشوائياً يعبّر عن عدد الإصابات، فالمطلوب:

1 . إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي لـ X، ورسم شكله البياني.

2 . إيجاد تابع التوزيع $F(x)$.

3 . إيجاد توقع وتباين X ثم الوسيط والمنوال.

4 . إيجاد احتمال الإصابة بطلقة واحدة على الأقل.

5 . دارسة واقعه التناظري.

4 . نلقي حجر نرد، ونرمز بـ A لحادث ظهور أحد الرقمين 4 أو 6، ولنفرض أننا كررنا التجربة خمس مرات، ولنفرض أن X متحولاً عشوائياً يعبّر عن عدد مرات تكرار التجربة، والمطلوب:

1 . إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي لـ X، ورسم شكله البياني.

2 . إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ ورسمه.

3 . حساب احتمال:

$$P(2<x\le 4) \quad , \quad P(x\le 3) \quad , \quad P(x>3)$$

4 . إيجاد التابع المولد للعزوم ψ.

5 . إيجاد التوقع الرياضي والتباين.

6 . دراسة واقعه التناظري.

5 . لجنة فيها 4 طلاب و8 طالبات نسحب عينة بحجم 3 طلاب وبشكل عشوائي لتشكيل رئيس للجنة ومساعدين اثنين له. ولنفرض أن X متحول عشوائي يعبّر عن عدد الطالبات في العينة، . إذا علمت أن السحب جرى بدون إعادة، والمطلوب:

1 . إيجاد توقع وتباين X.

2 . إيجاد معامل التناظر ومعامل الالتواء.

3 . إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ ورسمه.

4 . إيجاد التابع المولد للعزوم ψ.

5 . حساب احتمال أن تحوي العينة طالبين على الأقل.

6 . حساب احتمال أن تحوي العينة ثلاث طالبات.

7 . حساب احتمال أن تحوي العينة ثلاثة طلاب.

8 . حساب احتمال أن تحوي العينة طالباً واحداً أو طالبين.

6 . بائع مظلات واقية من الأمطار، يكسب هذا البائع 500 ليرة سورية في اليوم (إذا أمطرت، وإذا كان الجو مشمساً فإنه يخسر 10 ليرات في اليوم)، والمطلوب ما هو توقع ربحه إذا كان احتمال هطول المطر يساوي 0.4.

7 . إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي $f(x)$ معطى بالجدول الآتي:

X	-10	-20	-30

$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

والمطلوب إيجاد: $E(x^3), E[X-E(x)]^2, E(x^2), E(x)$

8 . إذا كان X متحولاً عشوائياً توزيعه الاحتمالي معطى بالجدول الآتي:

X	-1	2	5	8
$f(x)$	$0,3$	a	$0,2$	$0,1$

والمطلوب:

1 . إيجاد قيمة الثابت a.

2 . إيجاد توقع وتباين X.

3 . حساب الاحتمالات الآتية:

$P(X>9), P(0\le X\le 5), P(X\ge 0), P(X\le -2)$.

9 . رمينا حجر نرد أرضاً، فإذا رمزنا بـ X لضعف العدد الذي يظهر، وبـ Y للعددين 1 و3، حيث تدل (1) على ظهور عدد فردي، وتدل (3) على ظهور عدد زوجي، والمطلوب: حدد قانون التوزيع والتوقع الرياضي والتباين لكل من التوزيعات الآتية: $X, Y, (X+Y)$.

10 . اتفق سليم ونضال على أن يقوم نضال بإطلاق ثلاث طلقات على هدف، وأن يدفع سليم إلى نضال المبالغ الآتية:

. 200 ليرة سورية إذا أصاب الهدف بطلقتين فقط.

. 200 ليرة سورية إذا أصاب الهدف بثلاث طلقات.

ـ أما إذا لم يصب الهدف بأية طلقة فإن نضال سوف يدفع لسليم 200 ليرة سورية.

. أما إذا أصاب الهدف بطلقة فإن نضال سوف يدفع لسليم 100 ليرة سورية.

فإذا علمت أن احتمال إصابة الهدف لكل طلقة يساوي (0.5)، ولنفرض أن X متحولاً عشوائياً يعبّر عن عدد الإصابات، والمطلوب:

1 . إيجاد التوقع الرياضي لما يحصل عليه سليم ونضال من المبالغ المالية.

2 . إيجاد التوقع الرياضي لعدد الإصابات.

3 . ادرس الواقع التناظري لـ X.

11 . اتفق سامي وزياد على أن يقوم سامي بسحب ثلاث أوراق من ثلاث مجموعات من أوراق اللعب، تحوي كل مجموعة منها على 52 ورقة، إذا يجب أن يدفع زياد إلى سامي مبلغاً من المال قدره 1500 ليرة سورية إذا ظهر في كل من الأوراق الثلاث آس، و1250 ليرة سورية إذا ظهر آس في ورقتين من الأوراق الثلاث، و1000 ليرة سورية إذا ظهر آس في ورقة واحدة على الأقل من الأوراق الثلاث. أما إذا لم يظهر أي آس في الأوراق الثلاث، فإن سامي سوف يدفع مبلغاً من المال لزياد قدره 300 ليرة سورية، والمطلوب:

1 . إيجاد التوقع الرياضي لما يحصل عليه سامي وزياد.

2 . إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي لـ X إذا علمت أن X يعبر عن عدد الآسات في العينة.

3 . إيجاد توقع وتباين X.

4 . إيجاد التابع المولد للعزوم ψ.

5 . إيجاد الوسيط والمنوال.

6 . ادرس واقعه التناظري.

الفصل الرابع

قوانين التوزيع الاحتمالية المنقطعة

لقد درسنا في الفصلين الثاني والثالث المتحول العشوائي المنقطع، وكيفية إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي له. ولكن في الحياة العملية توجد بعض المتحولات العشوائية التي تعبّر عن الظواهر الاقتصادية والاجتماعية والسكّانية ... إلخ، وتخضع لقوانين توزيع احتمالية محددة، وبالتالي تكون خواصها معروفة وتسهل وتفسر الكثير من الظواهر التطبيقية التي تخضع لها، ومن هذه التوزيعات التي نتناولها في هذا الفصل التوزيعات التالية:

1 . قانون التوزيع المنتظم.

2 . قانون توزيع بيرنولي (التوزيع على نقطتين).

3 . قانون توزيع ذي الحدين، أو قانون التوزيع الثنائي.

4 . قانون التوزيع الثنائي السالب.

5 . قانون التوزيع الهندسي.

6 . قانون توزيع باسكال.

7 . قانون التوزيع فوق الهندسي.

8 . قانون التوزيع الاحتمالي الإحصائي لـ X المنقطع.

وسنتناول هذه التوزيعات بشيء من التفصيل كما يلي:

4-1: قانون التوزيع المنتظم:

إذا كان X متغيراً عشوائياً، ويأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ باحتمالات متساوية، عندئذٍ يعرّف قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X المنقطع بالعلاقة:

$$p(X=x_i)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & X=x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n \\ 0 & \text{غير ذلك}\end{cases} \qquad (1\text{-}4)$$

حيث n عدد قيم المتغير العشوائي المنقطع X.

4-1-1: خواص قانون التوزيع المنتظم:

يحقق هذا القانون الخواص الآتية:

1 . إن جميع الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي X موجبة وأكبر من الصفر، أي:

$$P_i = P(X = x_i) > 0 \qquad (2-4)$$

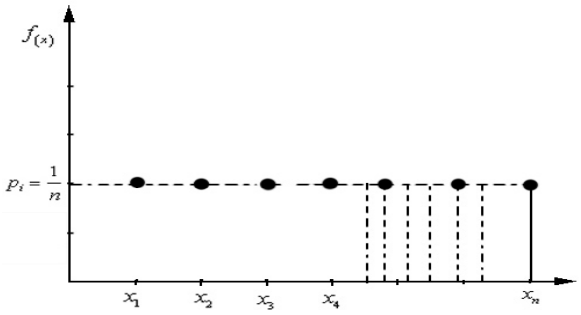
أو نعبّر عن ذلك بالعلاقة الآتية: $f(x_i) > 0$.

2 . إن مجموع الاحتمالات المقابلة لقيم X يجب أن تساوي الواحد الصحيح، أي:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1}{n} = \frac{n}{n} = 1 \qquad (3-4)$$

4-1-2: الشكل البياني لقانون التوزيع المنتظم:

يرسم قانون توزيع X المنتظم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (4-1)

ملاحظة: يلعب هذا التوزيع دوراً كبيراً في توليد الأرقام العشوائية كما سنرى في الفصول القادمة.

مثال (4-1):

نرمي حجر نرد منتظم أرضاً، ولنفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد. والمطلوب: إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي لـX المنقطع، ثم رسم شكله البياني.

الحل:

نلاحظ أن الأرقام التي يمكن أن تظهر على الوجه العلوي لحجر النرد تشكل فضاء التجربة الآتي: $\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$، وإن عدد القيم الممكنة لـ X تساوي $n = 6$، وأن احتمال أن يظهر أي رقم من الأرقام الستة على الوجه العلوي لحجر النرد يساوي: $P_i = \frac{1}{6}$، وبالتالي فإن قانون التوزيع الاحتمالي لـX المنقطع يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \forall x \in \Omega \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أو يعبر عن ذلك بالجدول الآتي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

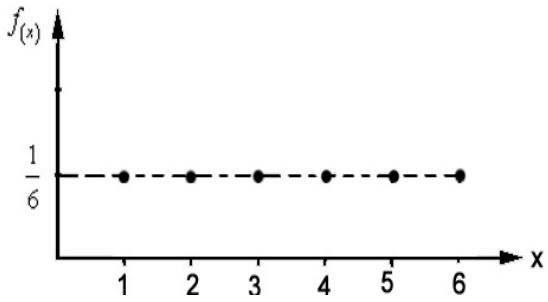
وهذا القانون يحقق الخاصتين الآتيتين:

. نلاحظ أن جميع الاحتمالات موجبة وأكبر من الصفر: $P_i > 0$.

. مجموع الاحتمالات يساوي الواحد أي:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

ويرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (4-2)

4-1-3: التوقع الرياضي والتباين لـX:

. التوقع الرياضي: يعطى التوقع الرياضي لـX بالعلاقة الآتية:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}P_i x_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot x_i$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x} \qquad (4-4)$$

. التباين: ويرمز له بـ $\sigma^2(x)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[x_i-E(x)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[x_i-\bar{x}\right]^2=\sigma^2 \qquad (5-4)$$

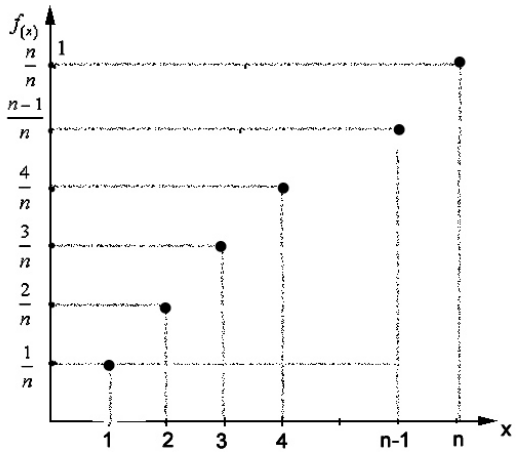
4-1-4: تابع التوزيع:

ويرمز له بـ $F(x)$ ويعطى بالعلاقة:

$$P(X\le x)=F(x)=\sum_{i=1}^{i=x}\frac{1}{n}=\frac{x}{n} \qquad (6-4)$$

حيث: $x=1,2,3....n$ ، وهي قيم المتحول X المنقطع.

ويرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (4-3)

ويمكن حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(X \geq x) = \sum_{i=x}^{i=n} \frac{1}{n} = \frac{n-x+1}{n} \qquad (7-4)$$

$$P(X > x) = \sum_{i=x+1}^{i=n} \frac{1}{n} = \frac{n-x}{n} = 1 - P(X \leq x) \qquad (8-4)$$

$$P(x_s \leq X \leq x_t) = \sum_{i=s}^{i=t} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{n}$$

$$= \frac{t}{n} - \frac{s-1}{n}$$

$$P(x_s \leq X \leq x_t) = \frac{t-s+1}{n} \qquad (9-4)$$

$$P(x_s < X \leq x_t) = \sum_{i=s+1}^{i=t} \frac{1}{n} \qquad (10-4)$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{n} = \frac{t}{n} - \frac{s}{n}$$

$$P(x_s < X \leq x_t) = \frac{t-s}{n} \qquad (11-4)$$

مثال (4-2):

لنأخذ نفس المثال رقم (4-1) والمطلوب:

1 . إيجاد التوقع الرياضي والتباين للمتغير X.

2 . إيجاد تابع التوزيع ورسمه.

3 . حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(X > 2), P(X \leq 3), P(X \geq 5), P(3 < X \leq 5)$$

الحل:

1 . التوقع الرياضي $E(x)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}P_i x_i$$

$$E(X)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=3.5$$

أو:

$$E(X)=\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{21}{6}=3.5$$

. التباين $\sigma^2(x)$ ويساوي: $\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left[x_i-\bar{x}\right]^2$

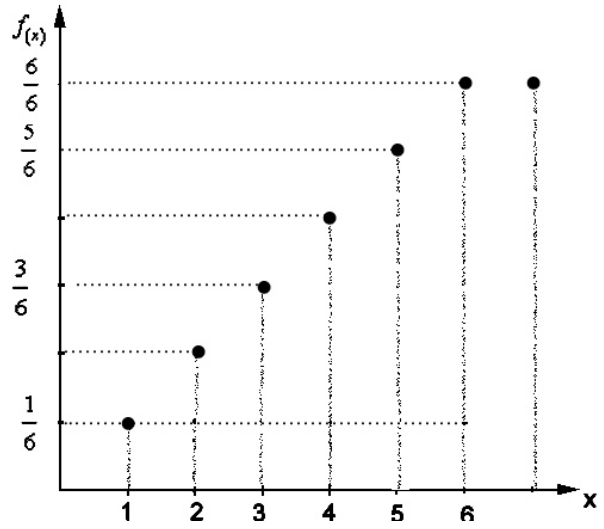
$$=\frac{1}{6}[1-3.5]^2+\frac{1}{6}[2-3.5]^2+\frac{1}{6}[3-3.5]^2+...+\frac{1}{6}[6-3.5]^2$$

$$\sigma^2(X)=2.917$$

2 . تابع التوزيع ويعطى بالجدول الآتي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$F(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

ويرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (4-4)

3 . حساب الاحتمالات:

$$P(X \le 3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{6} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(X \ge 5) = 1 - P(X < 5)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{6} = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(3 < X \le 5) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{6} - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$$

4-2: قانون توزيع بيرنوللي (التوزيع على نقطتين) Bernulli triai:

إن تجربة بيرونوللي هي عبارة عن تجربة واحدة لها نتيجتين اثنتين: إما تحقق وهي النتيجة المرغوبة فيها، وإما عدم تحقق وهي النتيجة غير المرغوب فيها. وعلى سبيل المثال، عندما نقذف قطعة نقد فإن قطعة النقد سوف تستقر على الأرض، ويظهر الناتج على الوجه العلوي للقطعة النقدية إما صورة أو كتابة، وتكون النتيجة إما أن تتحقق أو لاتتحقق الحالة المرغوب فيها.

مثال آخر، إذا كان لدينا صندوق يحتوي على كرات بيضاء وكرات سوداء، فعندما نقوم بسحب كرة من هذا الصندوق فإن هذه الكرة سوف تكون إما بيضاء وإما سوداء، وبالآتي فإن نتيجة التجربة تكون إما أن تتحقق أو لاتتحقق الحالة المرغوب فيها.

لنرمز بـS للحالة المرغوب فيها، أي النجاح، ونرمز بـ f للحالة غير المرغوب فيها، أي الفشل، وبالتالي فإن فضاء إمكانات تجربة بيرنوللي تصبح كما يلي: $\Omega=\{s,f\}$، ومنه يمكن أن نعرّف متحولاً عشوائياً X يأخذ قيمتين اثنتين فقط كما يلي:

$X=1$ في النجاح s، و $X=0$ في حالة الفشل f، ويمكن كتابتهما على الشكل التالي:

في حالة النجاح s: $X=1$

في حالة الفشل f: $X=0$

ولذلك تدعى تجربة بيرنوللي أيضاً بالتوزيع على نقطتين:

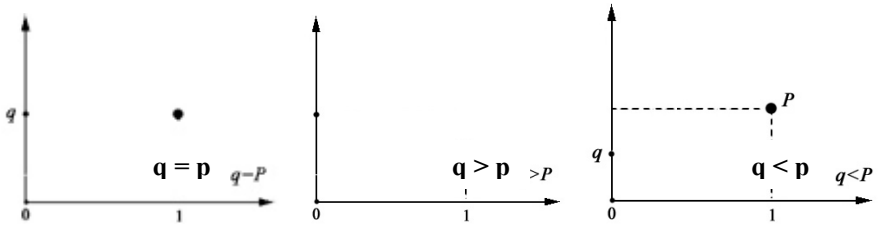
لنفرض أن احتمال تحقق النجاح s يساوي P، وعندها يكون لدينا احتمال الفشل fمساوياً $q=1-p$ ونكتب ذلك كما يلي:

$$P(x=1)=P$$
$$P(x=0)=q=1-P$$

ويمكن وضع هذه النتائج في الجدول الآتي:

X	0	1
$f(x_i)=P(X=x_i)$	q	$\boldsymbol{P}$

ويدعى هذا الجدول بجدول التوزيع الاحتمالي لتجربة برنوللي، ويرسم أشكالاً بيانية مختلفة بحسب قيم q, P، كما هو موضح بالأشكال الآتية:



الشكل (4-5)

ومما سبق يمكن تعريف قانون التوزيع الاحتمالي لتجربة برنوللي بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\begin{cases} P^x \cdot q^{1-x} & x:0,1 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (13-4)$$

حيث أن: $q=1-P$ وأن: $0 \le P \le 1$.

4-2-1: خواصه:

1 . إن $f(x_i)>0$ ، لأن كلاً من P و q لايمكن أن تكون سالبة.

2 . إن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=\sum_{i=1}^{n} P_i = q+P=1 \qquad (14-4)$$

4-2-2: قيمه المميزة:

1 . التوقع الرياضي $E(X)$ ، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = 0 \cdot q + 1 \cdot P = P \qquad (15-4)$$

نلاحظ أن التوقع الرياضي للمتحول X، والخاضع لتوزيع بيرنوللي يساوي P.

2 . التباين $\sigma^2(x)$ ، ويعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2(x)=\sum_{i=1}^{n} P_i\left[x_i - E(x)\right]^2 = q[0-P]^2 + P[1-P]^2$$

وبالإصلاح نجد أن:

$$\sigma^2(x)=qP^2 + P[1-P]^2 = qp^2 + pq^2 = qp(p+q) = q \cdot p$$

$$\sigma^2(x)=q \cdot P \qquad (16-4)$$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma(x) = \sqrt{q \cdot P} \qquad (17-4)$$

4-2-3: التابع المولد للعزوم:

ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\psi_x(t) = E\left[e^{t\,x}\right] = \sum_{i=1}^{n} e^{t\,x_i} \cdot P_i = e^{t(0)} \cdot q + e^{t(1)} \cdot P$$

$$\psi_x(t) = P.e^{t} + q \qquad (18-4)$$

وهو التابع المولد للعزوم.

وباشتقاق هذا التابع يمكن أن نحصل على العزوم μ_s من جميع المراتب، أي:

$$\mu_s = \psi_x^s(t)\Big|_{t=0} \qquad (19-4)$$

ومنه:

$$\mu_1 = \psi_x^{'}(0) = Pe^{(t)}\Big|_{t=0} = P$$

$$\mu_2 = \psi_x^{''}(0) = Pe^{(t)}\Big|_{t=0} = P$$

.....

وهكذا نجد أن جميع العزوم الابتدائية متساوية وتساوي:

$$\mu_s = P \qquad \forall \;\; s = 1,2,3,4.... \qquad (20-4)$$

وكذلك يمكن أن نستنتج العزوم المركزية Ms من جميع المراتب، وذلك بالاستعانة بالعزوم الابتدائية. ومن ثم يمكن إيجاد معامل التناظر ومعامل الالتواء.

4-2-4: تابع التوزيع $F(X)$:

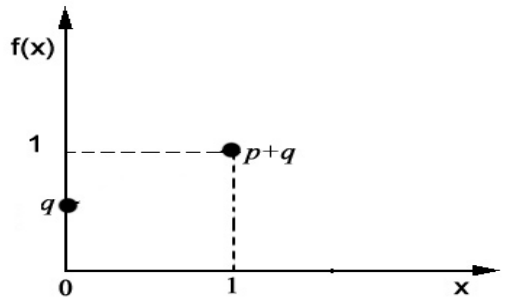
ويعطى بالعلاقة:

$$F(x_i) = P(X \le x_i) = \sum_{i=1}^{x_i} P_i \qquad (21-4)$$

ويمكن توضيح تابع التوزيع بالجدول الآتي:

X	0	1
$F(X)$	q	$P+q$

ويرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (4-6)

مثال (4-3):

نلقي قطعة نقود أرضاً مرة واحدة، ولنفرض أن X متحول عشوائي يعبر عن ظهور الصورة، والمطلوب:

1 . إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي $f(x)$ ، وارسم شكله البياني، وذلك بفرض أن قطعة النقود متوازنة.

2 . إيجاد توقع وتباين X.

3 . إيجاد التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$، ثم أوجد توقع وتباين X وقارنه مع الطلب الثاني.

4 . إيجاد تابع التوزيع $F(X)$ وارسمه.

5 . إيجاد معامل التناظر K.

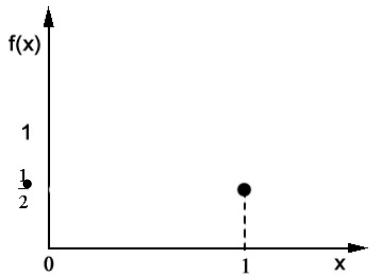
الحل:

1 . نلاحظ أن فضاء إمكانات التجربة هو: $X=\{0\ ,\ 1\}$

وبالتالي فإن جدول التوزيع الاحتمالي النظري يساوي:

X	0	1	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

ويرسم الشكل البياني الآتي:



2 . التوقع الرياضي والتباين:

إن التوقع الرياضي لـ X يساوي:

$$\mu_1 = E(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i$$

$$\mu_1 = E(x) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وإن تباين X يساوي: $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$، ولكن:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2_{(x)} = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

3 . التابع المولد للعزوم: ويحسب من العلاقة:

$$\psi_x(t) = E\left[e^{tx}\right] = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot e^{t x_i}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{t(0)} + \frac{1}{2} \cdot e^{t(1)} = \frac{1}{2} \cdot .e^{t} + \frac{1}{2}$$

وهو التابع المولد للعزوم، ومنه نجد أن:

$$E(x) = \mu_1 = \psi'_x(0) = \frac{1}{2} \cdot e^{(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2(x) = \mu_2 - \mu_1^2$$

وبما أن μ_2 يساوي:

$$\mu_2 = \psi''_x(0) = \frac{1}{2} \cdot e^{(0)} = \frac{1}{2}$$

ومنه نجد أن:

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

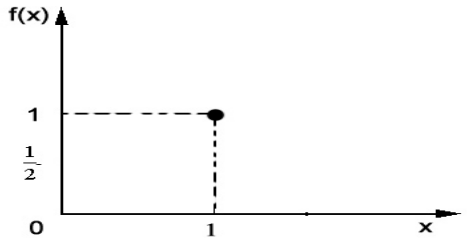
وبالمقارنة مع نتائج الطلب الثاني نلاحظ أن النتائج متساوية في كلتا الحالتين:

4 . تابع التوزيع $F(X)$:

ويعطى بالجدول الآتي:

X	0	1
$F(x)$	$\frac{1}{2}$	1

ويرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (4-7)

5 . معامل التناظر والالتواء :

ويعطى بالعلاقة (4-22):

$$K = \frac{M_3}{\sigma^3(x)}$$

وبما أن العزم المركزي من المرتبة الثالثة يساوي:

$$M_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$$

$$M_3 = \frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0$$

ومنه:

$$K = \frac{0}{\sigma^3} = 0$$

والتوزيع متناظر بالنسبة للتوقع الرياضي $E(x)$.

ملاحظة هامة:

إن توزيع بيرنوللي المعرّف على تجربة واحدة على ظاهرة ثنائية، فتح المجال لاستنباط عدة توزيعات متعلقة بهذه الظاهرة، وذلك عندما يتم تكرار التجربة عليها n مرة، ومن أجل صياغة هذه التوزيعات سنستخدم المصطلحات الآتية:

1 . احتمال تحقق الحالة المرغوبة في تجربة بيرنوللي، ونرمز له بـ P، وهو يمكن أن يكون ثابتاً أو متغيراً عند تكرار التجربة n مرة، وذلك حسب الشروط المرفقة بالتجربة.

2 . عدد التجارب التي نريد إجراءها على الظاهرة الثنائية المدروسة، ونرمز له بـ n ، وهو يمكن أن يكون محدداً مسبقاً. أو يُطلب منّا تحديده ضمن شروط معينة.

3 . عدد مرات تحقق الحالة المرغوبة (مرات النجاح) عند إجراء n تجربة على الظاهرة الثنائية المدروسة، ونرمز له بالرمز k، وهو يمكن أن يأخذ القيم $k : 0,1,2,3,....k....n$.

4 . عدد مرات عدم التحقق (مرات الفشل) عند إجراء n تجربة على الظاهرة الثنائية المدروسة، ونرمز له بالرمز ℓ ، وهنا نشير إلى أن $k+\ell=n$.

وانطلاقاً من هذه المصطلحات سنقوم بمعالجة وتقديم التوزيعات الاحتمالية اللاحقة.

4-3: قانون التوزيع الثنائي (التوزيع ذي الحدين):

يعالج هذا القانون احتمالات تحقق الحالة المرغوبة في تجربة بيرنوللي المعرفة على الظواهر الثنائية k مرة عند تكراراها n مرة، وبفرض أن احتمال تحقق تلك الحالة ثابت ويساوي P في جميع التجارب المنفردة. لذلك نرمز بـ X لعدد مرات تحقق الحالة A فيكون لدينا $P(A)=P$ في جميع التجارب المنفردة.

وبذلك يكون احتمال عدم تحقق الحالة A هو: $P(\overline{A})=1-P=q$

وبالتالي فإن فضاء إمكانات التجربة هو:

$$\Omega=\{(u_1,u_2,u_3,....u_i,...u_n);u_i=s\,or\,f\}$$

حيث تعني s النجاح، وf الفشل.

لنفرض أننا كررنا التجربة $n=4$ مرات، وكانت الحالة A قد تحققت خلال التجارب 3 مرات بالترتيب الآتي: $\{s,s,f,s\}$

وباعتبار أن احتمال التحقق P في جميع المحاولات متساوٍ وثابتة، وبالتالي فإن احتمال عدم التحقق (الفشل) يساوي $q=1-P$. ومنه نستطيع حساب احتمال تحقق الحالة A خلال هذه التجارب من كونها تحققت 3 مرات، وفشلت مرة واحدة كمايلي:

$$P(X=3)=P\cdot P\cdot(1-P)\cdot P$$

$$P(X=3)=P^3\cdot q$$

وهو احتمال تحقق الحالة A وذلك عندما يكون ترتيب النجاح والفشل خلال الأربعة تجارب بالشكل الآتي: $\{S,S,f,S\}$ أي حصولنا على ثلاثة تحققات (نجاح) وعلى عدم تحقق واحد (فشل). ولكن بما أن المحاولات مستقلة عن بعضها البعض فإننا نتوصل إلى ثلاثة حالات تحقق وحالة فشل واحدة بعدة طرق هي:

$S\ ,\ f\ ,\ S\ ,\ S$

$f\ ,\ S\ ,\ S\ ,\ S$

$S\ ,\ S\ ,\ S\ ,\ f$

وذلك بالإضافة إلى الطريقة السابقة: $S\ ,\ S\ ,\ f\ ,\ S$

وبما أن كل طريقة من هذه الطرق تعطينا ثلاثة تحققات *(3S)* وفشل واحد (f)، ويمكن الحصول على عدد الطرق والأشكال التي تعطي $f,3S$ بـ C_4^3 طريقة. وبالتالي فإن احتمال حصولنا على كل طريقة من هذه الطرق يساوي $P^3\cdot q^1$. ومنه نجد أن احتمال تحقق الحالة A يساوي جداء عدد تلك الطرق للحصول على $(f,3S)$ أي C_4^3 باحتمال ظهور كل طريقة أي:

$$P(X=3)=C_4^3\cdot P^3\cdot q^1$$

والآن لنأخذ الحادث B حيث: $B=\{S,S,f,f\}$ أي أن الحادث B يتكون من حالتين اثنتين نجاح *2S* و حالتين اثنتين فشل *2f*، وبالتالي نستطيع حساب احتمال تحقق الحادث B بالشكل:

$$P(B) = P \cdot P \cdot q \cdot q$$
$$P(B) = P^2 \cdot q^2$$

وهو احتمال تحقق الحادث B وذلك عندما يكون ترتيب النجاح والفشل خلال الأربعة محاولات بالشكل الآتي: $\{S,S,f,f\}$ أي حصولنا على حالتين اثنتين تحقق (نجاح) ثم حالتين اثنتين (فشل). وبما أن المحاولات مستقلة عن بعض فإننا نتوصل إلى اثنين تحقق واثنين فشل بعدة طرق هي:

S , f , S , f
S , f , f , S
f , S , f , S
f , f , S , S
f , S , S , f

بالإضافة إلى الطريقة السابقة: S , S , f , f

وبما أن كل طريقة من هذه الطرق تعطينا حالتين اثنتين تحقق $2S$ وحالتين اثنتين فشل (عدم تحقق) $2f$، وبما أنه يمكن الحصول على عدد الطرق الممكنة التي تعطي نفس النتيجة السابقة من عدد المتوافقات C_4^2، وبما أن احتمال حصولنا على كل طريقة من هذه الطرق يساوي $P^2 \cdot q^2$، فإن احتمال تحقق الحادث B يساوي جداء عدد الطرق C_4^2 باحتمال ظهور كل طريقة أي يساوي:

$$P(X=2) = C_4^2 P^2 \cdot q^2$$

وبنفس الأسلوب يمكن الحصول على احتمال تحقق الحادث C أي: $P(C)$ حيث $C = \{S,f,f,f\}$، ويساوي هذا الاحتمال:

$$P(X=1) = C_4^1 P^1 \cdot q^3$$

واحتمال تحقق الحادث D أي: $P(D)$ حيث: $D = \{f,f,f,f\}$

ويساوي هذا الاحتمال: $P(X=0) = C_4^0 P^0 \cdot q^4$

واحتمال تحقق الحادث E أي : $P(E)$ حيث: $E = \{S,S,S,S\}$

ويساوي هذا الاحتمال: $P(X=4) = C_4^4 P^4 \cdot q^0$

ويمكن وضع هذه النتائج بالجدول الآتي:

عدد التحققات X	0	1	2	3	4
الاحتمالات $P(X=k)$	$C_4^0P^0q^4$	$C_4^1P^1q^3$	$C_4^2P^2q^2$	$C_4^3P^3q^1$	$C_4^4P^4q^0$

وبشكل عام، عند تكرار محاولة بيرنوللي n مرة، فإن حادث تحقق الحالة المرغوبة k مرة $(0\le k\le n)$ وعدم تحققها $n-k$ مرة، يمكن أن يحصل بعدد المتوافقات C_n^k طريقة، وبما أن احتمال تحقق k نجاحاً في كل طريقة يساوي P^kq^{n-k}، وبالتالي فإن احتمال أن نحصل على k تحققاً في جميع الطرق يساوي عدد المتوافقات C_n^k مضروباً باحتمال تحقق k مرة في إحدى الطرق هو P^kq^{n-k}. أي:

$$P(X=k)=C_n^kP^kq^{n-k} \qquad (23-4)$$

ونقول إن المتحول العشوائي X والذي يعبر عن عدد مرات النجاح عند تكرار محاولة بيرنوللي n مرة له توزيع من نوع ذي الحدين ويسمى بقانون التوزيع الثنائي وإن كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة الآتية:

$$P_k=P(X=k)=\begin{cases}C_n^kP^kq^{n-k} & k=0,1,2,3,...n\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (24-4)$$

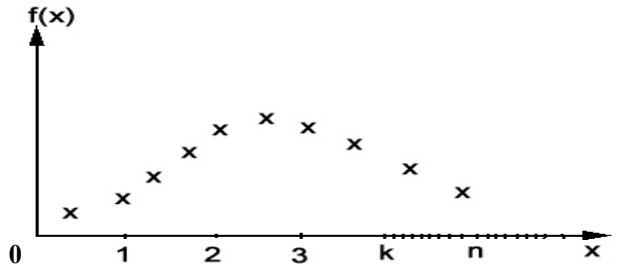
حيث $P,q>0$ عددان حقيقيان، وP هو احتمال النجاح ويبقى ثابتاً ومعلوماً (احتمال تحقق الحالة المرغوبة) في كل محاولة، ويتصف بمايلي:

$0\le P\le 1$, $q=1-P$. وبما أن n وP معلمتا هذا التوزيع لذلك يرمز له بالرمز $B(n,P)$، وبما أن العلاقة (24-4) تعطينا احتمال تحقق الحالة المرغوبة k مرة خلال n تجربة على الظاهرة الثنائية المدروسة، فإنه يمكننا وضع الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم X في الجدول كالآتي:

X	0	1	2	3	$\ldots\ldots k$	$\ldots n$
$P_k=P(X=k)$	$C_n^0P^0q^n=q^n$	$C_n^1P^1q^{n-1}$	$C_n^2P^2q^{n-2}$	$C_n^3P^3q^{n-3}$	$\ldots C_n^kP^kq^{n-k}$	$\ldots C_n^nP^nq^{n-n}=P^n$

كما ويمكننا ملاحظة أن الاحتمالات المقابلة لقيم X ماهي إلا عبارة عن مفكوك ثنائي الحد $(P+q)^n$ لذلك يسمى بقانون توزيع ثنائي الحد.

ويرسم هذا التوزيع الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (4-8)

4-3-1: خواص قانون التوزيع الثنائي:

1 . إن $P_k = P(X=k) \geq 0$ من أجل جميع قيم k: $k = 0,1,2,3,...n$.

2 . إن مجموع الاحتمالات في التوزيع الثنائي تساوي الواحد الصحيح أي:

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^k q^{n-k} = (P+q)^n = 1 \qquad (25-4)$$

4-3-2: القيم المميزة:

1 . التوقع الرياضي:

إذا كان X متحولاً عشوائياً خاضعاً لقانون التوزيع الثنائي، فإن التوقع الرياضي $E(X)$ يعطى بالعلاقة:

$$E(X) = n \cdot P \qquad (26-4)$$

البرهان: نعلم أن التوقع الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} P_k \cdot k = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k P^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)![n-k]!} \cdot P \cdot P^{k-1} \cdot q^{n-k}$$

$$= n \cdot P \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} P^{k-1} q^{n-k} \qquad (27-4)$$

ويمكن أن نكتب الجزء الأيمن من العلاقة (4-27) بالشكل:

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} P^{k-1} q^{n-k} = (P+q)^{n-1}$$

وبالتالي تصبح العلاقة (4–27) بالشكل الآتي:

$$E(x) = n \cdot P \cdot (P+q)^{n-1} \qquad (28-4)$$

وبما أن: $P+q=1$ فإن: $(P+q)^{n-1}=1$، وبذلك نجد أن:

$$E(x) = n \cdot P$$

2 . التباين:

إذا كان X متحولاً عشوائياً خاضعاً لقانون التوزيع الثنائي فإن التباين $\sigma^2(x)$ يعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k \cdot \left[k - E(x)\right]^2 = n \cdot P \cdot q \qquad (29-4)$$

البرهان: نعلم أن:

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - E^2(x) = \mu_2(x) - \mu_1^2(x) \qquad (30-4)$$

لإيجاد $\mu_2(x)$ نستخدم العلاقة الشهيرة الآتية:

$$(P+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^k q^{n-k} \qquad (31-4)$$

نشتق العلاقة (4–31) مرتين بالنسبة لـP فنجد:

$$n(n-1)(P+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k P^{k-2} q^{n-k}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ P^2 فنجد:

$$n(n-1)P^2(P+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k P^k q^{n-k} \qquad (32-4)$$

وبما أن $(p+q)^{n-2}=1$ نجد أن:

$$n(n-1)P^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k P^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k C_n^k P^k q^{n-k}$$

وبما أن:

$$E(x)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k P^k q^{n-k} = n\cdot P$$

فإن العلاقة (4–32) تساوي: $n(n-1)P^2 = \mu_2(x) - nP$

ومنها نجد أن: $\mu_2(x) = n(n-1)P^2 + nP$

وبالتعويض في العلاقة (4–30) نجد:

$$\sigma^2(x) = n(n-1)P^2 + nP - n^2P^2$$
$$= nP\left[(n-1)P + 1 - nP\right]$$
$$= nP(1-P)$$

بالإصلاح نجد أن:

$$\sigma^2(x) = nPq \qquad (33-4)$$

وبما أن العلاقة (4–33) تعطينا تباين المتحول العشوائي X الخاضع لقانون التوزيع الثنائي، وإن الانحراف المعياري هو عبارة عن الجذر الموجب للتباين فإنه يعطى بالعلاقة:

$$\sigma(x) = \sqrt{nPq} \qquad (34-4)$$

4–3–3: التابع المولد للعزوم: ويعطى بالعلاقة:

$$\psi_x(t) = E(e^{tx}) \qquad (35-4)$$

$$\psi_x(t) = \sum_{k=0}^{n} P_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{e}^{tk}$$

$$\psi_x(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^k q^{n-k} \cdot \mathrm{e}^{tk} \qquad (36-4)$$

ثم نكتب العلاقة الأخيرة على الشكل الآتي:

$$\psi_x(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(P\mathrm{e}^t\right)^k \cdot q^{n-k}$$

وحسب مفكوك ثنائي الحد نجد أن الطرف الأيمن يساوي مفكوك الثنائي الآتي:

$$\left(P\cdot e^t + q\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(Pe^t\right)^k \cdot q^{n-k}$$

وهكذا نجد أن التابع المميز لـ X الخاضع للتوزيع الثنائي يساوي:

$$\psi_x(t)=\left(P\cdot e^t+q\right)^n \qquad (37-4)$$

وباشتقاق هذا التابع نستطيع إيجاد التوقع الرياضي والتباين والعزوم المركزية ومعامل التناظر والالتواء.

مثال (4-4):

إذا كان X متحولاً عشوائياً ويخضع لتوزيع ذي الحدين الذي يعطى بالعلاقة:

$$P(X=k)=C_n^k P^k q^{n-k}$$

والمطلوب: إيجاد توقع وتباين المتحول X اعتماداً على التابع المولد للعزوم. **الحل:** إن التابع المولد للعزوم يعطى بالعلاقة:

$$\psi_x(t)=\left(P\cdot e^t+q\right)^n$$

باشتقاق $\psi_x(t)$ بالنسبة لـ X نحصل على العزوم الابتدائية من مختلف المراتب.

$$\mu_1=\left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=0}=E(x)$$

$$\mu_1=\psi'_X(t)\big|_{t=0}=n\cdot\left(P\cdot e^t+q\right)^{n-1}\cdot P\cdot e^t\Big|_{t=0}$$

$$=n\cdot\left(P\cdot e^{(0)}+q\right)^{n-1}\cdot P\cdot e^{(0)}=n(p+q)^{n-1}\cdot P$$

لأن $(P+q)^{n-1}=1$

$$\mu_1=nP=E(x)$$

ولحساب التباين نجد أن:

$$\mu_2 = \left.\frac{d^2\psi_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$\mu_2 = \psi''_X(t)\Big|_{t=0}$$

$$= n\cdot P\cdot e^t(n-1)\left(P\cdot e^t+q\right)^{n-2}\cdot P\cdot e^t + nP\cdot e^t\left(Pe^t+q\right)^{n-1}\Big|_{t=0}$$

$$= n\cdot P\cdot e^t\left[(n-1)\left(P\cdot e^t+q\right)^{n-2}\cdot P\cdot e^t + \left(P\cdot e^t+q\right)^{n-1}\right]_{t=0}$$

$$= n\cdot P\cdot e^{(0)}\left[(n-1)\left(P\cdot e^{(0)}+q\right)^{n-2} P\cdot e^{(0)} + \left(P\cdot e^{(0)}+q\right)^{n-1}\right]$$

وبإجراء الإصلاحات الرياضية نجد أن: $\mu_2 = nP\left[(n-1)P+1\right]$

ومنه فإن:

$$M_2 = \sigma^2(x) = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$= nP\left[(n-1)P+1\right] - n^2P^2$$

$$= nP\left[1-P\right]$$

$$\sigma^2(x) = nP.q$$

4-3-4: معامل التناظر K: ويعطى بالعلاقة:

$$K = \frac{M_3}{\sigma^3_{(x)}} \qquad (38-4)$$

فإذا كان $K = 0$ فإن التوزيع الثنائي يكون متناظراً.

وإذا كان $K > 0$ فإن التوزيع الثنائي للمتحول يكون ملتوياً نحو اليمين.

وإذا كان $K < 0$ فإن التوزيع الثنائي للمتحول يكون ملتوياً نحو اليسار.

كما إن M_3 تعطى بالعلاقة:

$$M_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 \qquad (39-4)$$

لقد وجدنا من المثال السابق أن:

$$\mu_1 = nP$$

$$\mu_2 = nP\left[(n-1)P+1\right]$$

وبالتالي فإننا بحاجة إلى حساب μ_3 وهو يساوي:

$$\mu_3 = \frac{d\psi_x(t)}{dt} = \left.\frac{d\psi_x(X)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\mu_3 = \psi_X'''(t)\Big|_{t=0} = n\cdot(n-1)(n-2)P^3 + 3n\cdot(n-1)P^2 + nP$$

نعوض في (4–39) فنجد أن:

$$M_3 = n\cdot(n-1)(n-2)P^3 + 3n\cdot(n-1)P^2 + nP - 3[nP][nP(n-1)P+1] + 2[nP]^3$$

وبالإصلاح نجد أن:

$$M_3 = nPq(P-q) \qquad (40-4)$$

وبالتعويض في العلاقة:

$$K = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

$$K = \frac{nPq(P-q)}{nPq\sqrt{nPq}} = \frac{(P-q)}{\sqrt{nPq}} \qquad (41-4)$$

وبالتالي فإن التوزيع يكون متناظراً عندما $K=0$، أي عندما $P-q=0$:

وهذا يعني عندما يكون: $P=q$

ويكون ملتوياً نحو اليمين إذا كان $K>0$، أي عندما: $P>q$.

ويكون ملتوياً نحو اليسار إذا كان $K<0$، أي عندما: $P<q$.

مثال (4–5):

نلقي قطعة نقدية أربع مرات متتالية، ولنفرض أن X متحول عشوائي يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة. والمطلوب: إيجاد توقع وتباين X ومعامل التناظر باستخدام التابع المولد للعزوم.

الحل:

إن التابع المولد للعزوم يعطى بالعلاقة:

$$\psi_x(t) = \left(P \cdot e^t + q\right)^n$$

$$E(x) = \mu_1 = \left.\frac{d\psi_x(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$E(x) = \mu_1 = \psi'_X(t)\Big|_{t=0} = nP\left(P \cdot e^t + q\right)^{n-1} \cdot e^t\Big|_{t=0} = nP$$

وبما أن احتمال ظهور الصورة $P = \frac{1}{2}$ فإن:

$$\mu_1 = nP = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

ولحساب التباين نلاحظ أن:

$$\sigma^2(x) = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$\mu_2 = \psi''_x(t)\Big|_{t=0} = nP\left[(n-1)P + 1\right]$$

$$\sigma^2(x) = nP\left[(n-1)P + 1\right] - n^2P^2$$

$$= nP\left[nP - P + 1 - nP\right] = nP(1-P) = nPq$$

$$\sigma^2(x) = nP.q = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

ولحساب قيمة معامل التناظر والالتواء نجد أن:

$$K = \frac{P-q}{\sqrt{nPq}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{\sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 0$$

أي أن التوزيع متناظر.

ملاحظة: كان يمكن حساب التوقع والتباين ومعامل التناظر من العلاقات الخاصة بها مباشرة.

4-3-5: تابع التوزيع الثنائي:

ويرمز له بـ $F(X)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$F(X) = P(X \le t) = \sum_{k=0}^{t} C_n^k P^k q^{n-k} \qquad (42-4)$$

ومنه يمكن حساب الاحتمالات المختلفة الآتية:

$$P(X \geq t) = 1 - P(X < t) = 1 - \sum_{k=0}^{t-1} C_n^k P^k q^{n-k}$$

$$P(X \geq t) = 1 - F(t-1) \qquad (43-4)$$

وكذلك نجد أن:

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) \qquad (44-4)$$

$$P(t \leq X \leq \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} C_n^k P^k q^{n-k}$$

$$= P(X \leq \ell) - P(X < t)$$

$$= F(\ell) - F(t-1) \qquad (45-4)$$

وفيما يلي بعض الأمثلة التوضيحية لإيجاد التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X.

مثال (4-6):

يلقي شخص قطعة نقدية أربع مرات متتالية، ولنفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة. والمطلوب:

1 . إيجاد التوزيع الاحتمالي لـ X، باستخدام فضاء التجربة ودراسة خواصه.

2 . إيجاد التوزيع الاحتمالي لـ X، باستخدام التوزيع الثنائي ودراسة خواصه.

3 . المقارنة بين النتائج في (1) و(2).

4 . إيجاد تابع التوزيع $F(X)$.

5 . إيجاد توقع وتباين X.

6 . رسم الشكل البياني الذي يمثل $F(X), f(x)$.

الحل:

1 . إن فضاء إمكانات التجربة عند إلقاء قطعة النقد أربع مرات يتألف من جميع الأشكال الممكنة، وهي:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}SSSS,SSSf,SSfS,SfSS,fSSS,ffSS,fSfS,fSSf\\SSff,SfSf,SffS,Sfff,fSff,ffSf,fffS,ffff\end{matrix}\right\}$$

حيث S تعني ظهور الصورة، و f تعني ظهور الرقم على الوجه العلوي.

وهنا نلاحظ أن المتغير العشوائي X يأخذ القيم الآتية: $X:0,1,2,3,4$

وبالتالي نستطيع حساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم X بالشكل الآتي:

$$f(0)=P(X=0)=P(\{ffff\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$f(1)=P(X=1)=P(\{fffs,ffSf,fSff,Sfff\})=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$$

$$P(X=1)=\frac{4}{16}$$

$$f(2)=P(X=2)=P(\{ffSS,fSfS,fSSf,SSff,SfSf,SffS\})=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{6}{16}$$

$$f(3)=P(X=3)=P(\{SSSf,SSfS,SfSS,fSSS\})=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$$

$$f(4)=P(X=4)=P(\{SSSS\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

ويمكن وضع النتائج في الجدول رقم (1) الآتي:

X	0	1	2	3	4
$f(x_i)$ $P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

خواصه:

. نلاحظ أن جميع الاحتمالات المقابلة لقيم X غير سالبة أي $f(x_i)>0$.

. مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح، أي:

$$\sum_{i=0}^{4} f(x_i) = \sum_{i=0}^{4} P(X = x_i)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

2 . نلاحظ أن $n = 4$ وأن: $P = \frac{1}{2}$ احتمال ظهور الصورة، وأن $q = \frac{1}{2}$.

وأن X يأخذ القيم الآتية: $X : 0,1,2,3,4$

وأن قانون التوزيع الثنائي يعطى بالعلاقة:

$$f(K) = P(X = k) = C_n^k P^k q^{n-k}$$

وهو يكتب على الشكل التالي:

$$f(K) = \begin{cases} C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} & k = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ومنه نجد أن:

$$P(x=0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(x=1) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$$

$$P(x=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

$$P(x=3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$$

$$P(x=4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

ويمكن وضع النتائج في الجدول رقم (2) الآتي:

X	0	1	2	3	4
$f(K) = P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
$F(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{16}$

خواصه:

. نلاحظ أن : $f(x_i) \geq 0$.

$$\sum_{i=0}^{4} P(X = x_i) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$$.

3 . بمقارنة النتائج التي توصلنا إليها في الجدول رقم (1) والجدول رقم (2) نلاحظ أن النتائج متطابقة في كلتا الطريقتين، وينصح باستخدام قانون التوزيع الثنائي عندما يكون حجم العينة كبيراً، لأنه يسهل العمليات الحسابية.

4 . يمكن إيجاد تابع التوزيع من خلال العلاقة: $F(X) = \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i)$

ولقد تم وضع النتائج في السطر الثالث في الجدول رقم (2).

5 . إن توقع X يحسب بالعلاقة: $E(X) = nP = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

أو باستخدام العلاقة: $E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i \cdot f(x_i)$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16}$$

$$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

وإن تباين المتحول X يعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2(X) = n \cdot P \cdot q$$

$$\sigma^2(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

أو باستخدام العلاقة:

ولكن: $\sigma^2(X) = \mu_2(x) - \mu_1^2(x)$ (1)

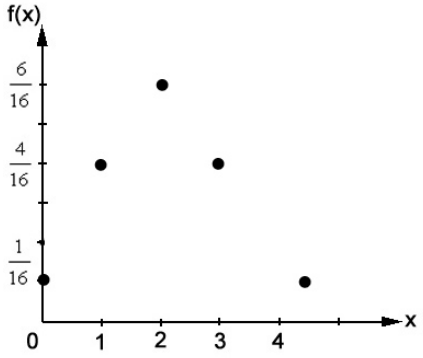
$$\mu_2(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i)$$

$$\mu_2(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{6}{16} + 9 \cdot \frac{4}{16} + 16 \cdot \frac{1}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

نعوض في (1) فنجد أن: $\sigma^2(x) = 5 - 4 = 1$

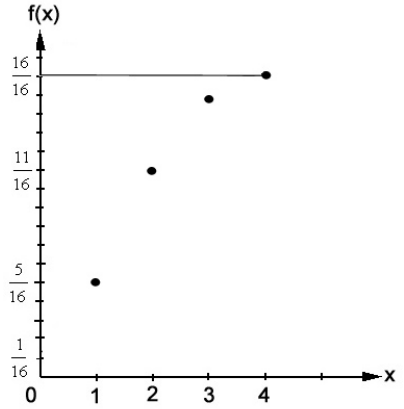
نلاحظ أن النتائج متطابقة بالنسبة للتوقع والتباين في كلتا الطريقتين.

6 . إن قانون التوزيع $f(x)$ يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (4–9)

وإن تابع التوزيع $F(X)$ يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (4–10)

مثال (4–7):

إذا كان 30% من الطلاب في إحدى الكليات يملكون سيارات، فإذا علمت أنه يوجد في إحدى القاعات 5 طلاب، ولنفرض أن X متحول عشوائي يعبر عن عدد الطلاب الذين يملكون سيارات. والمطلوب:

1 . إيجاد التوزيع الاحتمالي لـX ورسمه.

2 . إيجاد توقع وتباين X.

3 . حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(X>4), P(X\geq 3), P(X\leq 2), P(2<X\leq 4)$$

الحل: نلاحظ أن X يخضع لقانون التوزيع الثنائي ويأخذ القيم الآتية:

$$X: 0,1,2,3,4,5$$

حيث: $n=5,\quad q=0.7,\quad P=0.3$

وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية تصبح على الشكل الآتي:

$$P(X=k)=\begin{cases} C_5^k (0.3)^k (0.7)^{n-k} & k=0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

. 1 $$P(X=0)=C_5^0 (0.3)^0 (0.7)^5 = 0.16807$$

$$P(X=1)=C_5^1 (0.3)^1 (0.7)^4 = 0.36015$$

$$P(X=2)=C_5^2 (0.3)^2 (0.7)^3 = 0.3087$$

$$P(X=3)=C_5^3 (0.3)^3 (0.7)^2 = 0.1323$$

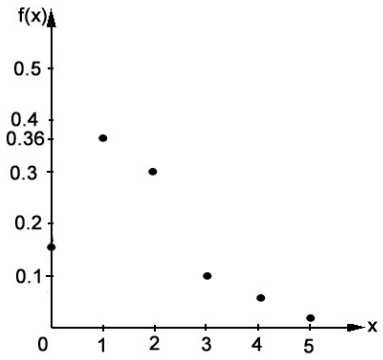
$$P(X=4)=C_5^4 (0.3)^4 (0.7)^1 = 0.02835$$

$$P(X=5)=C_5^5 (0.3)^5 (0.7)^0 = 0.00243$$

ويمكن وضع النتائج في الجدول الآتي:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	0.16807	0.36015	0.3087	0.1323	0.02835	0.00243

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (4-11)

2 . التوقع:

$$E(x) = n \cdot P$$
$$E(x) = 5 \cdot 0.3 = 1.5$$

التباين:

$$\sigma^2(x) = n \cdot P \cdot q$$
$$\sigma^2(x) = 5 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 1.05$$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي: $\sigma(x) = \sqrt{1.05} = 1.025$

3 . حساب الاحتمالات:

$$P(X \le 2) = \sum_{i=0}^{2} P(X = k)$$
$$= 0.16807 + 0.36015 + 0.3087 = 0.83692$$
$$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3)$$
$$= 1 - P(X \le 2)$$
$$P(X \ge 3) = 1 - 0.83692 = 0.16308$$

$P(X > 4) = P(X = 5)$ فقط

$$P(X > 4) = 0.00243$$
$$P(2 < X \le 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= 0.1323 + 0.02835$$
$$P(2 < X \le 4) = 0.16065$$

4-3-6: منوال التوزيع ثنائي الحد *Mod*:

إن المنوال هو قيمة المتحول العشوائي X الصحيحة والتي تقابل أكبر احتمال من بين الاحتمالات المقابلة لقيم X، أي هو القيمة الصحيحة المحصورة بين $(np - q), (nP + P)$.

البرهان: باعتبار أن المنوال هو القيمة m من قيم X التي تقابل أكبر احتمال من بين الاحتمالات المقابلة لقيم X فإن:

$$P_{m-1} < P_m \qquad (46-4)$$

$$P_{m+1} < P_m \qquad (47-4)$$

حيث m هي القيمة من قيم X التي تقابل أكبر احتمال.

يمكن كتابة المتراجحتين بالشكل الآتي:

$$\frac{P_{m-1}}{P_m} < 1 \qquad (48-4)$$

$$\frac{P_{m+1}}{P_m} < 1 \qquad (49-4)$$

من المتراجحة الأولى العلاقة (4-48) نجد أن:

$$\frac{P_{m-1}}{P_m} = \frac{n!\cdot P^{m-1}\cdot q^{n-m+1}}{(m-1)![n-m+1]!}\cdot\frac{m![n-m]!}{n!\cdot P^m\cdot q^{n-m}} < 1$$

وبالإصلاحات الرياضية نجد أن:

$$\frac{P_{m-1}}{P_m} = \frac{m}{n-m+1}\cdot\frac{q}{P} < 1 \qquad (50-4)$$

ومنه:

$$P_{m-1} = \frac{m}{n-m+1}\cdot\frac{q}{P}\cdot P_m \qquad (51-4)$$

ومن العلاقة (4-51) يمكن إيجاد الاحتمالات المتتالية والمتناقصة اعتباراً من P_m.

ومن العلاقة (4-50) نجد:

$$mq < (n-m+1)P \Rightarrow m(1-P) < (n-m+1)P$$

$$m - mP < (nP - mP + P)$$

$$m < nP + P \qquad (52-4)$$

ومن المتراجحة الثانية العلاقة (4-49) نجد:

$$\frac{P_{m+1}}{P_m}=\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{P}{q}<1 \qquad (53-4)$$

ومنها نجد كما فعلنا سابقاً أن:

$$P_{m+1}=\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{P}{q}\cdot P_m \qquad (54-4)$$

ومن العلاقة (4–54) يمكن إيجاد الاحتمالات المتتالية المتزايدة اعتباراً من P_m. ومن العلاقة (4–53) نجد:

$$(n-m)P<(m+1)q \Rightarrow nP-mP<mq+q$$
$$nP-mP<m-mP+q$$

ومنه:

$$nP-q<m \qquad (55-4)$$

وبمقارنة العلاقتين (4–52) و(4–55) نجد أن:

$$nP-q<m<nP+P \qquad (56-4)$$

وهذا يعني أن المنوال m يأخذ القيمة الصحيحة المحصورة بين القيمتين $(nP-q),(nP+P)$.

ملاحظة: إذا كان المقدار $nP+P$ عدداً صحيحاً فإن المقدار $nP-q$ يكون أيضاً عدداً صحيحاً، وفي هذه الحالة يكون للتوزيع قيمتان منواليتان متجاورتان هما $(nP-q)$, $(nP+P)$ وتقابلان أكبر احتمالين من بين الاحتمالات المقابلة لقيم المتحول العشوائي X.

مثال (4–8):

وجد في إنتاج إحدى الشركات أن 40% من إنتاجها هو من النوع الجيد. فإذا أخذت عينة مكونة من 25 وحدة من الإنتاج، والمطلوب:

1 . إيجاد منوال التوزيع الثنائي لعدد الوحدات الجيدة.

2 . إيجاد الاحتمال المقابل للمنوال.

الحل:

1 . نلاحظ أن:

$n = 25 \quad , \quad P = 0.40 \quad , \quad q = 0.60$

ولإيجاد المنوال m نطبق العلاقة الآتية:

$$nP - q < m < nP + P$$
$$25 \cdot 0.40 - 0.60 < m < 25 \cdot 0.40 + 0.40$$
$$9.4 < m < 10.4$$

وبما أن المنوال mod يأخذ قيمة صحيحة فإنه يساوي: $\text{mod} = m = 10$

2 . ولإيجاد الاحتمال المقابل لذلك المنوال نلاحظ أنه عندما نضع:

$k = m = 10$ ثم نطبق توزيع ثنائي الحد فنجد أن:

$$P(X = 10) = C_{25}^{10} \cdot (0.4)^{10} \cdot (0.6)^{15} = 0.1612$$

مثال (4–9):

لنأخذ نفس المثال رقم (4–8) ولنفرض أن العينة مكونة من 19 وحدة من الإنتاج، والمطلوب:

1 . إيجاد منوال توزيع ثنائي الحد.

2 . إيجاد الاحتمال المقابل للمنوال.

الحل:

1 . نلاحظ أن: $n = 19 \quad , \quad P = 0.4 \quad , \quad q = 0.6$

لإيجاد المنوال m نطبق العلاقة الآتية:

$$nP - q < m < nP + P$$
$$19 \cdot 0.4 - 0.6 < m < 19 \cdot 0.4 + 0.4$$
$$7 < m < 8$$

وبالتالي فإن للتوزيع قيمتان منواليتان هما 7و 8 ونحسبهما كما يلي:

$$nP - q = 7 \Rightarrow \text{mod} = m_1 = 7$$
$$nP + P = 8 \Rightarrow \text{mod} = m_2 = 8$$

2 . إن الاحتمالين المقابلين للمنوالين متساويان ويساويان:

$$m_1 = 7 \Rightarrow P(X=7) = C_{19}^{7} \cdot (0.4)^{7} \cdot (0.6)^{12} = 0.1797$$
$$m_2 = 8 \Rightarrow P(X=8) = C_{19}^{8} \cdot (0.4)^{8} \cdot (0.6)^{11} = 0.1797$$

مثال (4-10):

كم مرة يجب إلقاء حجر نرد أرضاً لكي يكون منوال ظهور الرقم (2) بمقدار 32 مرة.

الحل:

لنرمز لظهور الرقم (2) بـ X، وبما أن احتمال الظهور $P = \frac{1}{6}$، واحتمال عدم ظهوره $q = \frac{5}{6}$. وبما أن المنوال:

$$n = ? \quad q = \frac{5}{6} \quad , \quad P = \frac{1}{6} \quad , \quad m = 32$$

ولحساب n نطبق المتراجحة الآتية:

$$nP - q < m < nP + P$$
$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} < 32 < n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

لنكتب المتراجحة المزدوجة على شكل متراجحتين:

$$\frac{n-5}{6} < 32 \Rightarrow n - 5 < 192 \Rightarrow n < 197$$
$$\frac{n+1}{6} > 32 \Rightarrow n + 1 > 192 \Rightarrow n > 191$$

وهذا يعني أنه يجب تكرار التجربة مابين 192 مرة، و196 مرة, ليكون منوال الحصول على الرقم 2 مساوياً لـ 32 مرة.

مثال (4-11):

أطلق أحد الرماة على هدف أربع طلقات فإذا علمت أن احتمال الإصابة للهدف بكل طلقة يساوي $P = 0.7$. لنفرض أن X متحول عشوائي يعبر عن عدد الطلقات التي تصيب الهدف.

والمطلوب:

1 . إيجاد التوزيع الاحتمالي لـX ورسمه ودراسة خواصه.

2 . إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ ورسمه.

3 . حساب احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات على الأقل.

4 . حساب احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات على الأكثر.

5 . حساب احتمال إصابة الهدف بطلقتين أو بثلاث طلقات.

6 . إيجاد توقع وتباين والانحراف المعياري لـX.

7 . إيجاد منوال التوزيع الاحتمالي لـ X ومن ثم الاحتمال المقابل لقيمة المنوال.

8 . إيجاد الاحتمالات المتناقصة والمتتالية عن الاحتمال المقابل لقيمة المنوال.

الحل:

1 . نلاحظ أن X يخضع لقانون التوزيع الثنائي ويأخذ القيم الآتية:

$$x = 0,1,2,3,4$$

وحيث أن: $n = 4\ ,\ p = 0,7\ ,\ q = 0,3$

وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$f(x_i) = P(X = k) = \begin{cases} C_4^k (0,6)^k (0,4)^{4-k} & x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ومنه نقوم بإيجاد الاحتمالات المقابلة لقيم X، فنجد أن:

$$P(x=0) = C_4^0 (0,7)^0 (0,3)^4 = 0,0081$$

$$P(x=1) = C_4^1 (0,7)^1 (0,3)^3 = 0,0756$$

$$P(x=2) = C_4^2 (0,7)^2 (0,3)^2 = 0,2646$$

$$P(x=3) = C_4^3 (0,7)^3 (0,3)^1 = 0,4116$$

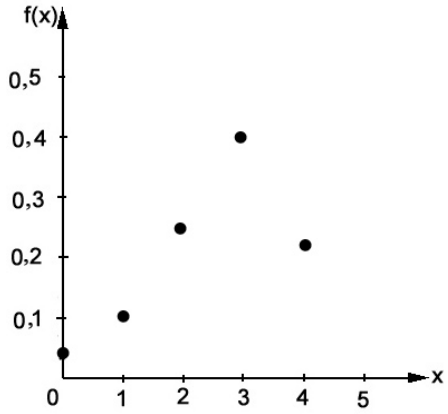
$$P(x=4) = C_4^4 (0,7)^4 (0,3)^0 = 0,2401$$

ويمكن وضع النتائج في الجدول الآتي:

X	0	1	2	3	4
$f(x_i)=P(x=k)$	0.0081	0.0756	0.2646	0.4116	0.2401

$F(x)$	0.0081	0.0837	0.3483	0.7599	1

ويرسم $f(x_i)$ الشكل البياني الآتي:



الشكل (4-12)

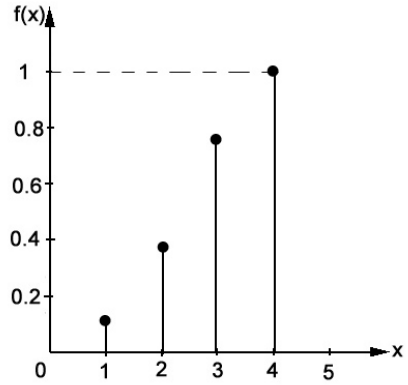
ومن دراسة خواصه نلاحظ أن:

. إن $f(x_i) \geq 0$ لأن الاحتمالات المقابلة لقيم X غير سالبة.

. إن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح، أي:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(x = k) = 1$$

2 . إن تابع التوزيع الاحتمالي $F(X)$ تم إيجاده ووضعه في الجدول السابق في السطر الثالث، وهو يرسم الشكل الآتي:



الشكل (4-13)

3 . إن إصابة الهدف بثلاث طلقات على الأقل تعني أن إصابة الهدف بثلاث طلقات أو إصابته بأربع طلقات، والاحتمال لهذه الحالة يحسب من العلاقة:

$$p(x \geq 3) = p(x=3) + p(x=4)$$
$$p(x \geq 3) = 0,4116 + 0,2401$$
$$p(x \geq 3) = 0,6517$$

4 . إن احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات على الأكثر يساوي:

$$p(x \leq 3) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3)$$
$$p(x \leq 3) = 0,0081 + 0,0756 + 0,2646 + 0,4116$$
$$p(x \leq 3) = 0,7599 = F(3)$$

5 . إن احتمال إصابة الهدف بطلقتين أو ثلاث يساوي:

$$p(x=2) + p(x=3) = 0,2646 + 0,4116 = 0,6762$$

6 . والتوقع الرياضي لـX يساوي: $E(x) = n \cdot p = 4 \cdot 0,7 = 2,8$

والتباين يساوي: $\sigma^2_{(x)} = np \cdot q = 4 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,84$

والانحراف المعياري يساوي: $\sigma(x) = \sqrt{0,84} = 0,92$

7 . المنوال: يعطى منوال توزيع ثنائي الحد بالعلاقة:

$$np - q < m < np + P$$
$$4 \cdot 0,7 - 0,3 < m < 4 \cdot 0,7 + 0,7$$
$$2,5 < m < 3,5$$

ومنه فإن: $\text{mod} = m = 3$

وبالتالي فإن الاحتمال المقابل لقيمة المنوال يمكن إيجاده من الجدول السابق مباشرةً، أي: $p_m = p(x=3) = 0,4116$

أو بالتعويض في علاقة التوزيع الثنائي:

$$p(x=3) = C_4^3 (0,7)^3 (0,3)^1 = 0,4116$$

8 . ويمكن حساب الاحتمالات المتناقصة والمتتالية بالعلاقة الآتية:

$$p_{m-1} = \frac{m}{n-m+1} \cdot \frac{q}{p} \cdot p_m$$

ويمكننا حساب الاحتمالات المتزايدة والمتتالية من العلاقة:

$$p_{m+1} = \frac{n-m}{n+1} \cdot \frac{P}{q} \cdot P_m$$

ومنهما نجد أن

$$p_4 = \frac{4-3}{3+1} \cdot \frac{0.7}{0.3} \cdot 0.4116 = 0.2401$$

$$p_2 = \frac{3}{4-3+1} \cdot \frac{0,3}{0,7} \cdot 0,4116 = 0,2646$$

$$p_1 = \frac{2}{4-2+1} \cdot \frac{0,3}{0,7} \cdot 0,2646 = 0,0756$$

$$p_0 = \frac{1}{4-1+1} \cdot \frac{0,3}{0,7} \cdot 0,0756 = 0,0081$$

وهي الاحتمالات نفسها التي حصلنا عليها أثناء تطبيق التوزيع الثنائي.

4-4: قانون توزيع بواسون Poisson distribution:

يطبق هذا القانون على التجارب التي لها نتيجتان هما: A تحقق الحالة المرغوبة ، و $\overline{A}$ عدم تحقق الحالة المرغوبة بالإضافة إلى ضرورة تحقق الشرطين الآتيين:

. إن يكون احتمال تحقق الحالة المرغوبة $P(A)$ صغيراً جداً ويساوي P.

. أن يكون عدد التجارب n كبيراً، وأن يكون $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot P = \lambda$

والأمثلة على هذه التجارب كثيرة منها: عدد الأخطاء في صفحات كتاب ما، عدد الإصابات المرضية بالسل خلال أحد الأيام، عدد الأشخاص الذين يصلون متأخرين إلى المسرح لحضور مسرحية معينة.... إلخ.

لنفترض أن X متحول عشوائي يمثل عدد المرات التي تتم فيها ملاحظة الظاهرة العشوائية خلال فترة زمنية معينة (وزن، مساحة، حجم....إلخ) ونريد إيجاد دالّة الكثافة الاحتمالية $f(x)$.

لنقم بتقسيم الفترة الزمنية t إلى فترات زمنية قصيرة عددها n وبالتالي فإن طول الفترة الزمنية القصيرة يساوي $\frac{t}{n}$ ونرمز لها بـ Δt، أي: $\Delta t = \frac{t}{n}$ ولنعتبر أن الفترات الزمنية هي مجالات تُجرى عليها تجارب مستقلة وأن احتمال التحقق في كل مجال جزيء ثابت ويساوي $P = \lambda \cdot \Delta t$ حيث (λ عدد ثابت موجب). وباعتبار التجارب مستقلة عن بعضها البعض فإن احتمال تحقق الحادث A فقط وفقط k مرة عند تكرار التجربة n مرة يمكن حسابه باستخدام قانون توزيع الثنائي الذي يعطى بالعلاقة:

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (57-4)$$

حيث: $k = 0,1,2,.....n$

وبما أنه حسب الفرض لدينا: $P = \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot \frac{t}{n} = \frac{\lambda t}{n}$

$$q = 1 - P = 1 - \frac{\lambda t}{n}$$

نعوض في العلاقة (4-57)، فنجد أن:

$$P_k = P(X=k) = C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \qquad (58-4)$$

حيث: $k = 0,1,2,.....n$

وبأخذ نهاية طرفي العلاقة (4-58) عندما n تسعى إلى اللانهاية، نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \lim_{n\to\infty} C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)....(n-k+1)(n-k)!}{n^k \cdot (n-k)!} \cdot$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^k} \qquad (59-4)$$

ومن العلاقة (4–59) نجد أن نهاية الحد الأول تساوي:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}{n^k}=1$$

وذلك لأن مرتبة البسط والمقام متساوية.

وإن نهاية الحد الثاني تساوي نفسه، أي أنه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

وذلك لأنه لا يحتوي المقدار على n، وبالتالي فإن نهاية المقدار الأيسر تساوي نفسه، وإن نهاية الكسر الذي في مقام الحد الثالث تساوي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^k=1$$

وذلك لأن $\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda t}{n}=0$، وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}(1)^k=1$

ولحساب نهاية الكسر في بسط الحد الثالث الذي يساوي: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n$

ونحن نعلم أن: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ وأن:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e^{-1} \qquad (60-4)$$

لنفترض أن: $\frac{\lambda t}{n}=\frac{1}{x}$، فنجد أن $n=x\cdot\lambda t$:

لنكتب العلاقة (4–60) على الشكل الآتي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\lambda t}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\lambda t}=\left[e^{-1}\right]^{\lambda t}=e^{-\lambda t}$$

ثم نعوض كل ذلك في العلاقة (4–59) فنجد أن:

$$\lim P_k=P(X=k)=1\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda t}}{1}$$

ومنه نحصل على أن:

$$P(X=k)=e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad (61-4)$$

وللسهولة لنعتبر أن الفترة الزمنية t هي الواحد (وحدة القياس $t=1$) فإن قانون الكثافة الاحتمالية لـ X في واحدة الزمن يسمى قانون توزيع بواسون، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$P(X=k)=\begin{cases} e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!} & \lambda>0\ ,\ k=0,1,2,.....\infty \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (62-4)$$

- **خواصه:**

1 . إن $P(X=k)\geq 0$ مهما كانت قيمة k.

2 . إن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد:

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (63-4)$$

ومن نشر التوابع وفق سلسلة صحيحة، نعلم أن:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}=\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+...+\frac{\lambda^k}{k!}+....\right) \qquad (64-4)$$

ومنه نعوّض في (4-63) فنجد:

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=e^0=1$$

4-4-1- القيم المركزية:

1 . التوقع الرياضي $E(X)$: يعطى التوقع الرياضي $E(X)$ بالعلاقة الآتية:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot p_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda\cdot\lambda^{k-1}}{k(k-1)!}$$

$$E(X)=\lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}$$

ويكون لدينا:

$$E(X)=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda\cdot e^{0}=\lambda$$

لأن المقدار: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=e^{\lambda}$ حسب نشر التوابع الوارد في (4-64) السابقة.

2 . التباين: ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sigma^2(X)=\mu_2(x)-\left[\mu_1(x)\right]^2 \qquad (65-4)$$

$$\sigma^2(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot f(x)-\lambda^2$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}-\lambda^2$$

لنستبدل k^2 بالتركيب المطابق له $\left[k(k-1)+k\right]$ فنجد أن:

$$\sigma^2(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[k(k-1)+k\right]\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}-\lambda^2$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}-\lambda^2$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^2\cdot\lambda^{k-2}}{k(k-1)(k-2)!}+\lambda-\lambda^2$$

$$\sigma^2(X)=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda-\lambda^2$$

وبما أن نشر التوابع حسب العلاقة (4-64) يعطينا:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$$

فإن: $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=e^{\lambda}$

ومنه فإن: $\sigma^2(X)=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda-\lambda^2$

$=\lambda^2\cdot e^{0}+\lambda-\lambda^2$

$$\sigma^2(X)=\lambda \qquad (66-4)$$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma(X)=\sqrt{\lambda} \qquad (67-4)$$

مثال (4-12):

معجم مؤلف من 800 صفحة ويحتوي على 1600 خطأ موزعة بشكل عشوائي على صفحات هذا المعجم، ولنفرض أن X متحول عشوائي يعبر عن عدد الأخطاء في الصفحة, نفتح المعجم على صفحة ما وبشكل عشوائي. والمطلوب:

1 . إيجاد احتمال عدم وجود أي خطأ في الصفحة المفتوحة، ثم إيجاد الاحتمالات الآتية:

$$P(X=3)\ ,P(X=2)\ \ ,P(X=1)\ ,P(X=4),\ P(X=5)$$

2 . إيجاد توقع وتباين المتحول X.

الحل: نلاحظ أن: $n=1600$

وإن احتمال اختيار الصفحة عشوائياً يساوي: $P=\frac{1}{800}$

ومنه: $\lambda=n\cdot P=1600\cdot\frac{1}{800}=2$

وبالتالي فإن: $P(X=k)=e^{-2}\frac{2^k}{k!}$ ، $k=0,1,2,3,4,5....$

$$P(X=0)=e^{-2}\frac{2^0}{0!}=0.1353$$

$$P(X=1)=e^{-2}\frac{2^1}{1!}=0.2707$$

$$P(X=2)=e^{-2}\frac{2^2}{2!}=0.2707$$

$$P(X=3)=e^{-2}\frac{2^3}{3!}=0.1804$$

$$P(X=4)=e^{-2}\frac{2^4}{4!}=0.0902$$

$$P(X=5)=e^{-2}\frac{2^5}{5!}=0.0361$$

.....

$$E(x)=\lambda=2 \qquad .2$$

$$\sigma^2(x)=\lambda=2$$

الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma^2(x)=\sqrt{2}$$

4-4-2: التابع المولد للعزوم: $\psi_x(t)$: ويعطى بالعلاقة:

$$\psi_x(t)=E\left[e^{tx}\right]=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\cdot f(x) \qquad (68-4)$$

$$\psi_x(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}e^{tx}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\cdot\frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!} \qquad (69-4)$$

وبما أن المقدار:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\cdot\frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!}=e^{\lambda\cdot e^t}$$

وبالتالي فإن:

$$\psi_x(t)=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda\cdot e^t}$$

$$\psi_x(t)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)} \qquad (70-4)$$

وهو التابع المولد للعزوم. ومن هذا التابع يمكن إيجاد العزوم الابتدائية، وبالتالي العزوم المركزية من مختلف المراتب.

مثال (4-13):

أوجد توقع وتباين X باستخدام التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$ في توزيع بواسون.

الحل: نعلم أن التابع المولد للعزوم يساوي:

$$\psi_x(t) = E\left[e^{tx}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot P_x$$

ومن العلاقة (4-70) نجد أن: $\psi_x(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$

وباشتقاق التابع $\psi_x(t)$ نحصل على العزوم الابتدائية أي:

$$E(x) = \mu_1 = \left.\frac{d\psi_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\psi_x'(t)\right|_{t=0} = \left.\lambda \cdot e^t \cdot e^{\lambda\left(e^t-1\right)}\right|_{t=0} = \lambda$$

$$\mu_2 = \left.\frac{d\psi_x(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\mu_2 = \left.\psi_x''(t)\right|_{t=0} = \left[\lambda \cdot e^t \cdot e^{\lambda\left(e^t-1\right)} \cdot t + \left(\lambda \cdot e^t\right)^2 \cdot e^{\lambda\left(e^t-1\right)}\right]_{t=0}$$

$$\mu_2 = \lambda + \lambda^2$$

ومنه:

$$\sigma^2(x) = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$\sigma^2(x) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

4-4-3: معامل التناظر: ويعطى معامل التناظر بالعلاقة:

$$K = \frac{M_3}{\sigma^3} \qquad (71-4)$$

وهنا يلزمنا حساب M_3 العزم المركزي من المرتبة الثالثة والذي يعطى بالعلاقة:

$$M_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 \qquad (72-4)$$

وبما أن: $\mu_3 = \left.\psi_x'''(t)\right|_{t=0} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$

وبالتعويض في العلاقة (4-72) نجد:

$$M_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda\left[\lambda + \lambda^2\right] + 2\lambda^3$$
$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda^2 - 3\lambda^3 + 2\lambda^3$$
$$M_3 = \lambda$$

نعوض في معامل التناظر فنجد أن:

$$K = \frac{\lambda}{\sigma^2 \cdot \sigma} = \frac{\lambda}{\lambda \cdot \sqrt{\lambda}}$$
$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad (73-4)$$

ويكون التوزيع متناظراً عندما يكون البسط معدوماً، وباعتبار أن البسط من العلاقة (4–73) لايمكن أن يكون معدوماً أبداً، لأنه يساوي الواحد، وبالتالي فإن توزيع بواسون غير متناظر، كما نلاحظ من ناحية أخرى أن: $k > 0$ دائماً، وبالتالي فإن التوزيع ملتوي نحو اليمين.

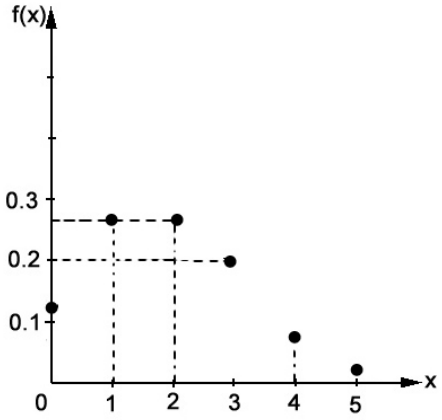
مثال (4–14):

بالاستناد إلى معطيات المثال رقم (4–12) أوجد معامل التناظر، وبيّن ذلك على الرسم البياني.

الحل: نلاحظ أن: $\lambda = 2$.

ومن (4–73) فإن معامل التناظر يساوي: $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نلاحظ أن $K > 0$ والتوزيع ملتوٍ نحو اليمين، وهذا واضح من الرسم البياني الآتي.



الشكل (4-14)

4-4-4: تابع التوزيع $F(X)$: ويعطى بالعلاقة:

$$F(X)=P(X\le t)=\sum_{k=0}^{t}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} \qquad (74-4)$$

ويمكن حساب الاحتمالات الأخرى المختلفة الآتية:

$$P(X>t)=1-P(X\le t)=1-\sum_{k=0}^{t}P_k \qquad (75-4)$$

$$P(X<t)=\sum_{k=0}^{t-1}P_k=\sum_{k=0}^{t-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} \qquad (76-4)$$

$$P(t\le X\le S)=P(X\le S)-P(X<t) \qquad (77-4)$$

$$=\sum_{k=0}^{S}P_k-\sum_{k=0}^{t-1}P_k=\sum_{k=t}^{S}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

مثال (4-15):

لنفرض أن ظاهرة ما تحدث خلال كل دقيقة قدرها Δt باحتمال قدره 0.3 والمطلوب:

1 . احسب احتمال رصد هذه الظاهرة *3,2,1,0* مرة في فترة زمنية قدرها 10 دقائق.

2 . حساب توقع وتباين عدد مرات الظهور X وتابع توزيعه.

الحل:

1 . نلاحظ أن:

$\lambda = 0.3\ ,\ t = 10$

$\lambda t = 0.3 \cdot 10 = 3$

وبالتالي فإن عدد مرات ظهور X كمتحول عشوائي يخضع لقانون توزيع بواسون الآتي [انظر العلاقة (4−61)]:

$$P(X = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0,1,2,3,....$$

ومنه فإن:

$$P(X = k) = e^{-3} \cdot \frac{3^k}{k!}$$

ومنه:

$$P(X = 0) = e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} = 0.0498$$

$$P(X = 1) = e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} = 0.1494$$

$$P(X = 2) = e^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} = 0.2240$$

$$P(X = 3) = e^{-3} \cdot \frac{3^3}{3!} = 0.2240$$

التوقع الرياضي:

$$E(x) = \lambda \Rightarrow E(x) = 3$$

التباين:

$$\sigma^2(x) = \lambda \Rightarrow \sigma^2(x) = 3$$

تابع التوزيع $F(X)$ ويعطى بالعلاقة:

$$P(X \le S) = \sum_{k=0}^{S} P_k$$

ويمكن حسابه ووضع النتائج في جدول كالتالي:

X	0	1	2	3	…
$P(X = k)$	0.0498	0.1494	0.2240	0.2240	….
$F(S) = P(X \le S)$	0.0498	0.1992	0.4232	0.6472	….

- **منوال قانون توزيع بواسون:**

إن المنوال هو قيمة المتحول العشوائي X الصحيحة، والتي تقابل أكبر احتمال من بين الاحتمالات المقابلة لقيم X. وهو القيمة الصحيحة المحصورة بين $\lambda - 1$ و λ.

البرهان:

باعتبار أن المنوال هو قيمة من قيم X الصحيحة والتي تقابل أكبر احتمال من بين الاحتمالات المقابلة لقيم X. لنفرض أن m هي القيمة من قيم X والتي تقابل أكبر احتمال عندئذ فإن:

$$P_{m-1} < P_m \qquad (78-4)$$

$$P_{m+1} < P_m \qquad (79-4)$$

ويمكن كتابة المتراجحتين (4-78) و(4-79) بالشكل الآتي:

$$\frac{P_{m-1}}{P_m} < 1 \qquad (80-4)$$

$$\frac{P_{m+1}}{P_m} < 1 \qquad (81-4)$$

من العلاقة (4-80) نجد أن:

$$\frac{P_{m-1}}{P_m} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}}{e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^m}{m!}} = \frac{m}{\lambda} < 1 \qquad (82-4)$$

ومنه نجد أن:

$$m < \lambda \qquad (83-4)$$

ومن العلاقة (4-81) نجد أن:

$$\frac{P_{m+1}}{P_m} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}}{e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^m}{m!}} = \frac{\lambda}{m+1} < 1 \qquad (84-4)$$

ومنه:

$$\lambda - 1 < m \qquad (85-4)$$

بمقارنة العلاقتين (4–83) و(4–85) نجد أن:

$$\lambda - 1 < m < \lambda \qquad (86-4)$$

وهذا يعني أن المنوال يأخذ القيمة الصحيحة والمحصورة بين $\lambda - 1$ و λ

مثال (4–16):

إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لقانون توزيع بواسون، وكانت $n=100$ و $p = 0,025$ ، والمطلوب:

1 . إيجاد منوال قانون توزيع X.

2 . إيجاد الاحتمال المقابل لقيمة المنوال.

الحل:

1 . نلاحظ أن $n=100$ و $p = 0,025$

ومنه: $\lambda = np = 100 \cdot 0,025 = 2,5$

$$\lambda - 1 = 2,5 - 1 = 1,5$$

وبتطبيق العلاقة: $\lambda - 1 < m < \lambda$

$$1,5 < m < 2,5$$

نجد أن المنوال mod يساوي: $\text{mod} = m = 2$

وذلك لأن m تأخذ قيمة صحيحة من قيم المتحول العشوائي X .

أما الاحتمال المقابل لقيمة المنوال فنحصل عليه بتطبيق العلاقة:

$$p(x = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$p(x = m = 2) = e^{-2,5} \cdot \frac{(2,5)^2}{2!} = 0,25652$$

- **ملاحظة:**

إذا كانت λ عدداً صحيحاً فمن الطبيعي أن يكون $\lambda - 1$ عدداً صحيحاً، وبالآتي يكون للتوزيع قيمتان منواليتان هما $\lambda, \lambda - 1$.

مثال (4-17):

باستخدام بيانات المثال رقم (4-15)، المطلوب:

1 . حساب قيمة المنوال.

2 . إيجاد الاحتمال المقابل لقيمة المنوال.

3 . حدد ذلك على الشكل البياني.

الحل:

1 . نلاحظ أن: $\lambda = 3$

ومنه: $\lambda - 1 = 3 - 1 = 2$

وبتطبيق العلاقة:

$$\lambda - 1 < m < \lambda$$
$$2 < m < 3$$

وهكذا نجد أن للتوزيع قيمتان منواليتان هما:

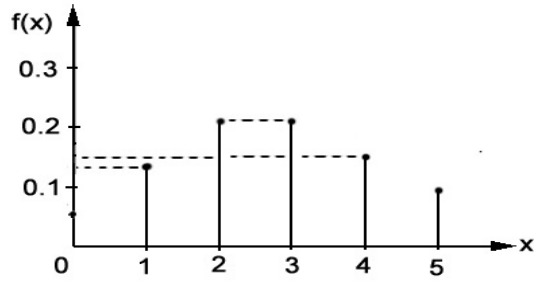
$\mathrm{mod}_1 = m - 1 = 2$ و $\mathrm{mod}_2 = m = 3$.

2 . يمكن إيجاد الاحتمال المقابل لقيمة المنوالين على الشكل الآتي:

$$P\,\mathrm{mod}_1 = p(x = 2) = e^{-3}\frac{(3)^2}{2!} = 0,224$$

$$P\,\mathrm{mod}_2 = p(x = 3) = e^{-3}\frac{(3)^3}{3!} = 0,224$$

3 . يمكن ملاحظة المنوالين على الشكل الآتي:



الشكل (4-15)

ملاحظـة: مـن العلاقـة (4–82)، نجـد أن الاحتمـالات المتتاليـة لهـذا التوزيـع مرتبطـة بالعلاقة:

$$p_{m-1} = \frac{m}{\lambda} \cdot p_m \qquad (87-4)$$

ومن العلاقة (4–87) يمكن حساب الاحتمالات المتتالية المتناقصة.

ومن العلاقة (4–84) نجد أن:

$$p_{m+1} = \frac{\lambda}{m+1} \cdot p_m \qquad (88-4)$$

ومن العلاقة (4–88) يمكن حساب الاحتمالات المتتالية المتزايدة.

مثال (4–18):

باستخدام بيانات المثال رقم (4–16)، المطلوب إيجاد الاحتمالات المتتالية المتزايدة والمتناقصة مستخدماً قيمة المنوال والاحتمال المقابل لها.

الحل:

لقد وجدنا أن: $p_m = 0,25652$, $m = 2$

لحساب الاحتمالات المتتالية المتناقصة نستخدم العلاقة رقم (4–87)، ومنها نجد:

$$m = 2 \Rightarrow p_2 = 0,25652$$

$$p_{2-1} = \frac{2}{2,5} \cdot 0,25652 \Rightarrow p_1 = 0,20522$$

$$p_{1-1} = \frac{1}{2,5} \cdot 0,20522 \Rightarrow p_0 = 0,08209$$

لحساب الاحتمالات المتتالية المتزايدة نستخدم العلاقة رقم (4–88)، ومنها نجد:

$$m=2 \Rightarrow p_2 = 0,25652$$

$$p_{2+1} = \frac{2,5}{3} \cdot 0,25652 \Rightarrow p_3 = 0,21377$$

$$p_{3+1} = \frac{2,5}{4} \cdot 0,21377 \Rightarrow p_4 = 0,13360$$

$$p_{4+1} = \frac{2,5}{5} \cdot 0,13360 \Rightarrow p_5 = 0,0668$$

.....

ملاحظة:

عندما تكون p قريبة من الواحد، فإن $q \approx 0$ (صغيرة).

وإذا كانت: $\lim_{n\to\infty} nq = a$، وكان $a > 0$:

فإننا نتمكن من تطبيق توزيع بواسون على الوجه الآخر للظاهرة المدروسة (الظاهرة المتممة)، وبالتالي يصبح قانون توزيع بواسون الذي يطبق على الوجه الآخر للظاهرة بالشكل الآتي:

$$p(X=k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!} \qquad , \qquad a>0 \qquad (89-4)$$

لذلك يسمى قانون بواسون بقانون توزيع الظواهر النادرة التي تتميّز بأنها ذات وجهين فقط. ويعطينا احتمالات تحقق لتلك الظواهر النادرة k مرة، عندما نجري عليها عدداً كبيراً من التجارب أو نتابع سلوكها عدداً كبيراً من المرات.

الفصل الخامس

المتحولات العشوائية المستمرة وقوانين توزيعها

Random Variables Continues

5-1: تعريف المتحول العشوائي المستمر:

لقد عرفنا في الفصل السابق المتحول العشوائي المنقطع بأنه المتحول الذي يأخذ قيماً منقطعة قابلة للعد، وتكون هذه القيم منتهية أو غير منتهية. أما إذا كان المتحول العشوائي X يأخذ قيماً مستمرة في مجال $[a,b]$، فإن المتحول X يمكن أن يأخذ أية قيمة ضمن المجال المذكور دون انقطاع، وبالتالي فإن القيم التي يأخذها تكون غير قابلة للعد وغير منتهية. عندئذ يطلق على المتحول العشوائي X بالمتحول العشوائي المستمر، ويرمز لهذا المتحول بأحرف كبيرة مثل Z, Y, X... إلخ.

والأمثلة على المتحولات العشوائية المستمرة كثيرة نذكر منها:

. عمر إنسان اختير عشوائياً، هو متحول عشوائي مستمر في المجال $[0,120]$

ـ درجة الحرارة خلال فترة ما في مدينة ما، هي متحول عشوائي مستمر ضمن المجال $[-10,45]$.

. كمية المياه المصروفة خلال فترة ما، هي متحول عشوائي مستمر ضمن المجال $[a,b]$.

. كمية الكهرباء المستهلكة خلال فترة ما، هي متحول عشوائي مستمر ضمن المجال $[c,d]$.

ـ طول شخص ما اختير عشوائياً، ، هي متحول عشوائي مستمر ضمن المجال $[100,200]$ سم.

. الدخل الشهري لأسرة اختيرت بشكل عشوائي، هي متحول عشوائي مستمر ضمن المجال $[5000,20000]$.

وبشكل عام يمكننا أن نقول إن المتحول العشوائي المستمر X بأنه متحول يأخذ قيمه بشكل مستمر في مجال تغيره، حركة هذا المتحول ضمن ذلك المجال تتصف بشيء من النظام، وهي تخضع لما يسمى بقانون التوزيع الاحتمالي للمتحول المستمر X، فهو مثلاً قد يتكرر في وسط المجال $[a,b]$ أكثر من تكراره على طرفيه. وبصورة عامة فإنه حتى نتعرف على كيفية سلوك أي متحول عشوائي مستمر لابد من تحديد أمرين هامين هما:

1 . مجال ذلك المتحول، ونرمز له بـ$[a,b]$.

2 . قانون التوزيع الاحتمالي هو العلاقة الرياضية أو الجدولية التي تربط بين قيم المتحول X، والاحتمالات المقابلة، ولتوضيح بعض خصائص المتحول العشوائي X، سنميز بين نوعين من قوانين التوزيع الاحتمالية هما:

. قوانين التوزيع الإحصائية أو التجريبية.

. قوانين التوزيع النظرية أو الرياضية.

5-2: قانون التوزيع الاحتمالي لمتحول مستمر X:

إن المتحول العشوائي المستمر يختلف عن المتحول العشوائي المنقطع بأنه يتحول (يأخذ قيمه الممكنة) ضمن مجال متصل أو مستمر $[a,b]$. كما أن عدد قيمة الممكنة ضمن ذلك المجال يكون لانهائياً. لذلك فإننا نلاحظ أنه من المتعذر عرض هذه القيم الممكنة ضمن جدول واحد (كما فعلنا مع المتحولات المنقطعة) دون أن نقوم بدمجها وتبويبها ضمن مجالات جزئية متجاورة وغير متقاطعة، ثم حساب التكرارات المقابلة لكل منها. وحتى نتوصل إلى ذلك نقوم بالإجراءات التالية:

1 . نقوم بإجراء n تجربة على سلوك المتحول X، فنحصل على n قياساً عددياً أو نوعياً له.

2 . نحدد مجال تحول X بحيث يكون متصلاً أو شاملاً، ولنفترض أنه $[a,b]$.

3 . نقسم المجال إلى مجالات جزئية متساوية طول كل منها:

$$\ell = \frac{b-a}{m} \qquad (1-5)$$

حيث m عدد المجالات الجزئية المرغوبة أو هو عدد الفئات المطلوبة، ويحسب بشكل تقريبي من علاقة (ستورجيز) التالية:

$$m = 1 + 3.322\,Lg\,n \qquad (2-5)$$

4 . نقوم بتبويب القياسات التي حصلنا عليها في جدول منظم كالتالي:

رقم المجال i	1	2	3	4	5	....	i	....	m	Σ
المجال الجزئي	$[a,x_1]$	$[x_1,x_2]$	$[x_2,x_3]$	$[x_3,x_4]$	$[x_4,x_5]$	....	$[x_{i-1},x_i]$	....	$[x_{m-1},b]$	-
التكرارات المطلقة	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	....	n_i	....	n_m	n
التكرارت النسبية	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	$\frac{n_4}{n}$	$\frac{n_5}{n}$	....	$\frac{n_i}{n}$	....	$\frac{n_m}{n}$	1
الاحتمالات الإحصائية	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	....	P_i	....	P_m	1

5 . نقسم كل من التكرارات المطلقة n_i على مجموعها n فنحصل على التكرارات النسبية الموضوعة في السطر الأخير من الجدول السابق. وإن هذه التكرارات النسبية هي الاحتمالات التجريبية أو الإحصائية المقابلة للمجالات الجزئية المبينة في الجدول.

وهنا نشير إلى أنه كلما كان عدد التجارب n كبيراً ويحقق تعبئة مشبعة لجميع المجالات الجزئية، كلما أصبحت الاحتمالات الإحصائية قريبة من الاحتمالات النظرية للمتحول X.

لذلك نرمز للاحتمالات الإحصائية السابقة، بالرمز P_i ، ونضع المعادلة التالية:

$$P_i = \frac{n_i}{n} \qquad i:1,2,3,...m \qquad (3-5)$$

وهي الأعداد الحقيقية الموضوعة في السطر الأخير من الجدول السابق.

5-2-1: خواص قانون التوزيع الإحصائي لـ X المستمر:

إن قانون توزيع X كغيره من قوانين التوزيع الاحتمالية يحقق الخاصيتين الآتيتين:

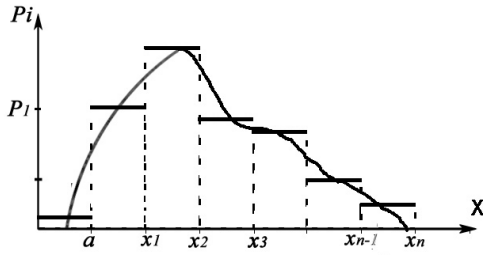
1 . إن: $f(x_i) \geq 0$.

2 . إن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد؛ أي:

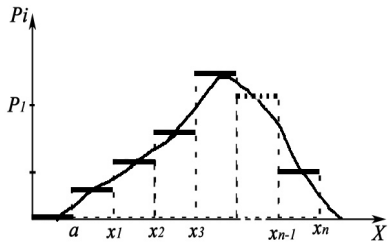
$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) = \sum_{i=1}^{m} P_i = \sum \frac{n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1 \qquad (4-5)$$

5-2-2: الشكل البياني لقانون توزيع المتحول الإحصائي المستمر (X):

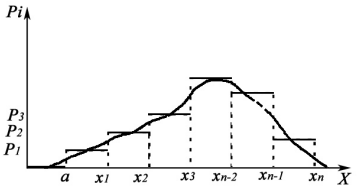
إن الشكل البياني لقانون التوزيع الإحصائي لـ X المستمر هو عبارة عن قطع مستقيمة تتوضع فوق المجالات الجزيئية، وتكون أطوالها بطول المجالات الجزئية الموافقة وتبعد عنها بمقدار P_i، وقد تكون الأشكال البيانية التي يرسمها توزيع X قريبة من التوزيع الطبيعي، أو قد تكون ملتوية نحو اليسار أو اليمين، وبالإضافة إلى ذلك قد تكون هذه الأشكال متطاولة (مدببة) أو منبسطة، وذلك حسب قيم P_i، كما في الأشكال الآتية:



الشكل رقم (5-1)



الشكل رقم (5-2)



الشكل رقم (5-3)

ثم نصل أنصاف القطع المستقيمة بخطوط ممهدة، فنحصل على منحني يدعى بالمنحني التكراري، أو منحني توزيع X.

5-2-3: تابع التوزيع الاحتمالي الإحصائي $F(X)$:

ويعطى تابع التوزيع الاحتمالي $F(X)$ بالعلاقة الآتية:

$$F(X)=P(X\le x_t)=\sum_{i=1}^{t}P_i \qquad (5-5)$$

حيث x_t تمثل الحد الأعلى للمجال الذي ترتيبه t.

أما إذا كانت x_t لاتمثل الحد الأعلى للمجال الذي ترتيبه t، بل هي نقطة ضمن المجال، عندئذ فإننا نحصل على الاحتمال المطلوب بالعلاقة:

$$P(X\le x_t)=\sum_{i=1}^{t-1}P_i+\frac{x_t-x_{t-1}}{\ell_t}\cdot P_t \qquad (6-5)$$

حيث ℓ_t هو طول المجال t.

ويمكن حساب الاحتمالات الأخرى المختلفة:

$$P(x_s\le X\le x_t)=\sum_{i=1}^{t}P_i-\sum_{i=1}^{s-1}P_i \qquad (7-5)$$

حيث s تمثل حداً أدنى للمجال.

$$P(x_s< X\le x_t)=\sum_{i=1}^{t}P_i-\sum_{i=1}^{S}P_i \qquad (8-5)$$

حيث s تمثل حداً أعلى للمجال.

5-2-4: خواص تابع التوزيع $F(X)$:

إن تابع التوزيع يحقق الخواص التالية:

1 . إن تابع التوزيع تابع متزايد دوماً.

2 . $F(a)=0$ $(9-5)$

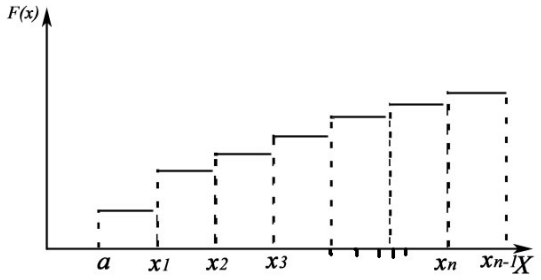
3 . $F(b)=1$. $(10-5)$

4 . إذا كانت $s<t$ فإن:

$$F(x_s)\le F(x_t) \qquad (11-5)$$

الشكل البياني لتابع التوزيع $F(X)$:

إن الشكل البياني لتابع التوزيع هو عبارة عن قطع مستقيمة أطوالها تساوي أطوال المجالات الجزئية المقابلة لها وتتوضع فوق بعضها مشكّلةً رسماً بيانياً يشبه الدرج كما في الشكل التالي:



الشكل رقم (5-4)

5-2-5: القيم المركزية:

- **التوقع الرياضي** $E(x)$:

كما هو معروف إن التوقع الرياضي يعطى بالعلاقة الآتية:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{m}P_i\cdot x_i^{'}=\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{n}\cdot x_i^{'}=\bar{x} \qquad (12-5)$$

حيث: $x_i^{'}$ تمثل مراكز المجالات.

- **التباين:**

ويعطى تباين المتحول X الإحصائي بالعلاقة:

$$\sigma_{(x)}^2=\sum_{i=1}^{m}P_i\left[x_i-E(x)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{n}\left[x_i-E(x)\right]^2$$

$$\sigma_{(x)}^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}n_i\left[x_i-\bar{x}\right]^2}{n}=\sigma^2 \qquad (13-5)$$

- **الانحراف المعياري** $\sigma_{(x)}$:

وهو الجذر الموجب للتباين، أي:

$$\sigma_{(x)}=\sqrt{\sigma_{(x)}^2} \qquad (14-5)$$

- **العزوم:**

. العزوم الابتدائية $\mu_s(x)$: وتعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu_s(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^s \qquad (15-5)$$

عندما:

$$s = 0 \Rightarrow \mu_0(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^0 = \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow \mu_1(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^1 = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i' = E(x)$$

$$\mu_1(x) = \mu$$

. العزوم المركزية $M_s(x)$:

وتعطى العزوم المركزية بالعلاقة العامة:

$$M_s(x) = E\left[x_i' - E(x)\right]^s \qquad (16-5)$$

أو بالعلاقة:

$$M_s(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i\left[x_i' - E(x)\right]^s \qquad (17-5)$$

عندما:

$$s = 0 \Rightarrow M_0(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i\left[x_i' - E(x)\right]^0 = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow M_1(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i\left[x_i' - E(x)\right]^1 = 0$$

$$s = 2 \Rightarrow M_2(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i\left[x_i' - E(x)\right]^2 = \sigma_{(x)}^2$$

- **معامل التناظر k:**

ويعطى معامل التناظر بالعلاقة الآتية:

$$K=\frac{M_3(x)}{\sigma_{(x)}^3} \qquad (18-5)$$

- **معامل التطاول L:**

ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$L=\frac{M_4(x)}{\sigma_{(x)}^4} \qquad (19-5)$$

حيث $M_4(x)$ هو العزم المركزي من المرتبة الرابعة.

مثال (5-1):

قامت مجموعة من طلاب الدراسات العليا بإجراء دراسة إحصائية حول دخل الأسرة الشهري في منطقة سكنية ما، ومن أجل ذلك سحبت عينة عشوائية مؤلفة من 2000 أسرة، ونتيجة للدراسات الأولية وجدت أن:

. $\min X=20$ و $\max X=20$ (القيمة ألف ليرة سورية).

. عدد المجالات الجزئية الممكنة يساوي: $m=1+3.322\ \ell og(2000)=12$.

. طول المجال الجزئي يساوي:

$$L=\frac{20-2}{12}=1.5$$

ولكن من الأسهل علينا أن نجعل طول المجال $L=2$، وبذلك يكون عدد المجالات $m=9$، ولنفترض أنه: تم تفريغ البيانات وفق النتائج السابقة فحصلنا على التوزيع التكراري التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
المجالات (ألف ليرة سورية)	$[2-4[$	$[4-6[$	$[6-8[$	$[8-10[$	$[10-12[$	$[12-14[$	$[14-16[$	$[16-18[$	$[18-20[$	
N_i	100	250	400	500	300	250	100	75	25	2000

وبفرض أن X متحول عشوائي يعبر عن دخل الأسرة الشهري، والمطلوب:

1 . إيجاد قانون توزيع X ثم رسمه.

2 . ادرس خواص $f(x)$ الإحصائي.

3 . إيجاد تابع التوزيع $F(X)$ وارسمه، ثم احسب الاحتمالات التالية:

$P(8 \le X \le 16)$, $P(X \le 14), P(X \le 13)$, $P(8 < X < 14)$

4 . إيجاد وتوقع وتباين X والانحراف المعياري.

5 . إيجاد العزوم الابتدائية والعزوم المركزية حتى المرتبة الرابعة.

6 . إيجاد معامل التناظر ومعامل التفرطح والتطاول.

الحل:

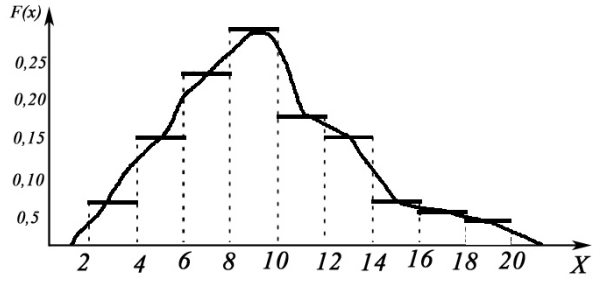
1 . لإيجاد قانون التوزيع الإحصائي لـX, نطبق العلاقة التالية:

$$P_i = \frac{n_i}{n}$$

ونضع النتائج في الجدول التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
مجالات X	$[2-4[$	$[4-6[$	$[6-8[$	$[8-10[$	$[10-12[$	$[12-14[$	$[14-16[$	$[16-18[$	$[18-20[$	
$\frac{N_i}{N}$	$\frac{100}{2000}$	$\frac{250}{2000}$	$\frac{400}{2000}$	$\frac{500}{2000}$	$\frac{300}{2000}$	$\frac{250}{2000}$	$\frac{100}{2000}$	$\frac{75}{2000}$	$\frac{25}{2000}$	1
$f(x)=P_i$	0.05	0.125	0.2	0.25	0.15	0.125	0.05	0.0375	0.0125	1
$F(x)$	0.05	0.175	0.375	0.625	0.775	0.90	0.95	0.9875	1	
$X_i^{'}$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	

ويرسم الشكل البياني التالي:



شكل رقم (5-5) الشكل البياني لـ $f(x)$

2 . نلاحظ أن الخاصة الأولى محققة باعتبار أن: $p_i \geq 0$ ، أما بالنسبة للخاصة الثانية فهي محققة أيضاً، لأن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد، أي:

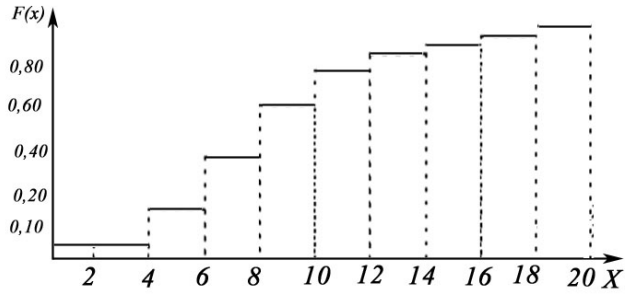
$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$$

3 . إن تابع التوزيع يعطى بالعلاقة: $F(x_t) = \sum_{i=1}^{t} P_i = P(X \leq x_t)$

حيث x_t تمثل الحد الأعلى للمجال الجزئي.

ويظهر تابع التوزيع في السطر الخامس من الجدول السابق.

ويرسم $F(X)$ الشكل البياني الآتي:



شكل رقم (5–6) الشكل البياني $F(X)$

$$P(X \le 14) = F(14) = 0.90$$

$$P(8 \le X \le 16) = 0.95 - 0.625 = 0.325$$

$$P(8 \le X < 14) = 0.90 - 0.625 = 0.275$$

$$P(X \le 13) = 0.775 + \frac{13-12}{14-12} \cdot 0.125 = 0.8375$$

4 .

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot x_i'$$

$$= 0.05 \cdot 3 + 0.125 \cdot 5 + 0.2 \cdot 7 + ... + 0.0125 \cdot 19$$

$$E(x) = \mu = 9.325$$

$$\sigma_{(x)}^2 = \mu_2(x) - \mu^2(x)$$

$$\mu_2(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot (x_i')^2$$

$$\mu_2(x) = 0.05 \cdot (3)^2 + 0.125 \cdot (5)^2 + 0.2 \cdot (7)^2 + ... + 0.0125 \cdot (19)^2$$

$$\mu_2(x) = 99.5$$

ومنه نجد:

$$\sigma_{(x)}^2 = 99.5 - (9.325)^2 = 12.54$$

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{12.54} = 3.54$$

5 . العزوم الابتدائية:

$$\mu_s(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^S$$

$$S = 0 \Rightarrow \mu_0(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^0 = 1$$

$$S = 1 \Rightarrow \mu_1(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^1 = E(x) = 9.325$$

$$S = 2 \Rightarrow \mu_2(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^2 = 99.5$$

$$S = 3 \Rightarrow \mu_3(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^3$$

$$= 0.05 \cdot (3)^3 + 0.125 \cdot (5)^3 + 0.2 \cdot (7)^3 + ... + 0.0125 \cdot (19)^3$$

$$\mu_3(x) = 1179.93$$

$$S = 4 \Rightarrow \mu_4(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \left(x_i'\right)^4 =$$

$$= 0.05 \cdot (3)^4 + 0.125 \cdot (5)^4 + 0.2 \cdot (7)^4 + ... + 0.0125 \cdot (19)^4$$

$$\mu_4(x) = 15261.2$$

. العزوم المركزية:

سنقوم بإيجاد العزوم المركزية باستخدام العلاقة العامة للعزوم:

$$M_S(x) = E\left[x' - E(x)\right]^S$$

$$s = 0 \Rightarrow M_0(x) = E\left[x' - E(x)\right]^0 = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow M_1(x) = E\left[x' - E(x)\right]^1 = 0$$

$$s = 2 \Rightarrow M_2(x) = E\left[x' - E(x)\right]^2 =$$

$$= \mu_{2(x)} - \mu^2_{(x)} = 99.5 - (9.325)^2 = 12.54 = \sigma^2$$

$$s = 3 \Rightarrow M_3(x) = \mu_{3(x)} - 3\mu_{1(x)} \cdot \mu_{2(x)} + 2\mu^3_{1(x)}$$

$$= 1179.93 - 3 \cdot 9.325 \cdot 99.5 + 2 \cdot [9.325]^3 = 18.14$$

$$s = 4 \Rightarrow M_4(x) = \mu_{4(x)} - 4\mu_{1(x)} \cdot \mu_{3(x)} + 6\mu^2_{1(x)} \cdot \mu_{2(x)} - 3\mu^4_{1(x)}$$

$$= 15261.2 - 4 \cdot 9.325 \cdot 1179.93 + 6(9.325)^2 \cdot (99.5) - 3(9.325)^4$$

$$\mu_{4(x)} = 478.48$$

6 . معامل التناظر:

$$K = \frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}} = \frac{18.14}{12.54 \cdot 3.54} = 0.41$$

نلاحظ أن $K > 0$ ، وهذا يعني أن التوزيع ملتوٍ قليلاً نحو اليمين، كما يظهر في الشكل البياني.

معامل التطاول:

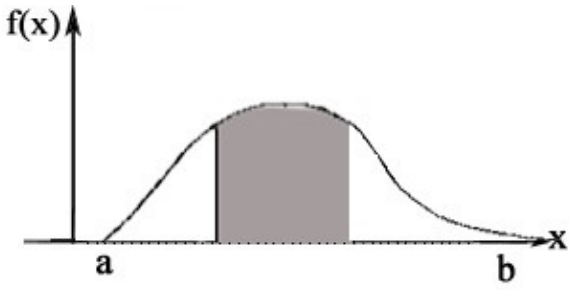
$$L = \frac{M_4(x)}{\sigma^4_{(x)}} = \frac{478.48}{12.54 \cdot 12.54} = 3.04$$

نلاحظ أن $L > 3$ بقليل ، وبالتالي فإن التوزيع قريب جداً من التوزيع الطبيعي، كما يظهر في الشكل البياني.

ملاحظة:

ويستفاد من قانون التوزيع الإحصائي لتوضيح فكرة قانون التوزيع الاحتمالي النظري، ولذلك نفترض أن عدد القياسات أو التجارب أصبح كبيراً جداً، وأن أطوال المجالات الجزئية أصبحت صغيرة جداً بحيث يتحول كل مجال جزئي إلى نقطة على

المحور OX، وعندها سنجد أن الشكل البياني (5-1) سيتحول إلى منحني انسيابي متصل كما في الشكل الآتي:



الشكل رقم (5-7)

وإننا سنحاول أن نعبر عن هذا المنحني الانسيابي بواسطة معادلة رياضية مناسبة $f(x)$ ، تسمى قانون التوزيع الاحتمالي النظري للمتحول X.

5-3: قانون التوزيع النظري للمتحول المستمر X:

ويعرف بأنه العلاقة الرياضية التي تربط بين قيم المتحول X، والاحتمالات المقابلة لكل مجال جزئي من مجال التعريف $[a,b]$. ونرمز لهذا القانون بـ $f(x)$.

ونكتبه على الشكل الآتي:

$$P(x)=\begin{cases} f(x) & : a \le x \le b \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (20-5)$$

كما تدعى هذه العلاقة بتابع الكثافة الاحتمالية للمتحول العشوائي X.

واعتماداً على هذا القانون يمكننا حساب الاحتمالات المقابلة لأي مجال جزئي $[c,d]$ من المجال $[a,b]$ ، من العلاقة الآتية:

$$P(c \le X \le d)=\int_c^d f(x)dx \qquad (21-5)$$

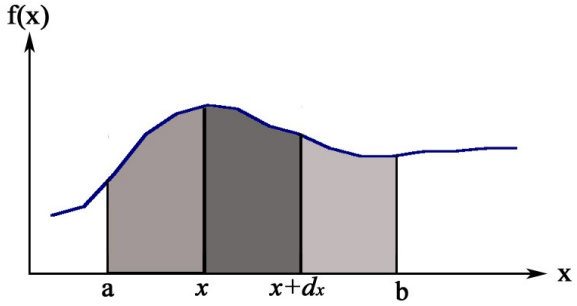
وإذا أردنا حساب احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيماً تقع في مجال صغير طوله dx أي في المجال $[x,x+dx]$ نجد أن:

$$P\left(x \le X \le x+dx\right) = \int_{x}^{x+dx} f\left(x\right)dx \qquad (22-5)$$

ومن نظرية القيمة الوسطى للتكامل نستنتج أنه يمكن إيجاد θ التي تحقق العلاقة:

$$P\left(x \le X \le x+dx\right) = f\left(x+\theta dx\right)\cdot dx \qquad (23-5)$$

ويمكن التعبير عن ذلك بيانياً كما على الشكل الآتي:



الشكل رقم (5-8)

أما إذا أردنا حساب احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة معينة c نجد أن:

$$P\left(c < X < C\right) = \int_{c}^{C} f\left(x\right)dx = 0 \qquad (24-5)$$

أي أن احتمال أن يأخذ المتحول المستمر X قيمة معينة C يساوي الصفر دوماً.

وبناءً على ذلك يمكننا أن نستنتج العلاقة الهامة الآتية:

$$P\left(X = c\right) = 0 \qquad (25-5)$$

وهي خاصة يتصف بها المتحول المستمر فقط، لأن عدد قيمه الممكنة لانهائياً. لذلك لايجوز حساب الاحتمالات المستمرة على نقاط محددة، بل على مجالات جزئية.

- **خواص قانون التوزيع الاحتمالي لـX المستمر:**

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، وكان $f\left(x\right)$ قانون توزيعه الاحتمالي، فيجب أن يحقق الخاصتين الآتيتين:

1 . إن الاحتمالات المقابلة للمجالات الجزئية موجبة دائماً (غير سالبة)، أي:

$$f\left(x\right) \ge 0 \qquad \forall \ -\infty < X < +\infty \qquad (26-5)$$

2 . إن المساحة المحصورة تحت المنحني تساوي الواحد، أي أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad (27-5)$$

أي أن المساحة تحت منحنى التوزيع تساوي الواحد.

مثال (5-2):

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب: دراسة خواصه ورسم شكله البياني، وحساب الاحتمالات الآتية:

$$P(1 \le X \le 1.5)\ ,\ P(0 \le X \le 1), P(1.5 \le X \le 2)$$

الحل:

1 . باعتبار أن $f(x)$ قانون توزيع للمتحول العشوائي X، فيجب أن يحقق الشرطين الآتيين:

1) $f(x) \ge 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

إن الشرط الأول محقق لأن: $0 \le X \le 2$.

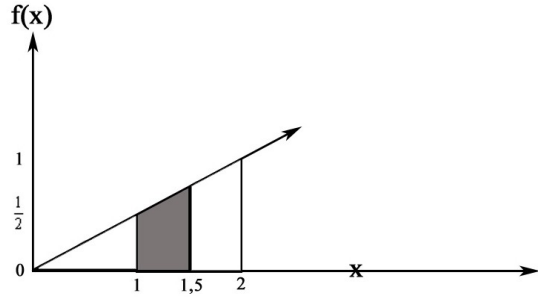
أما بالنسبة للشرط الثاني فإنا نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} 0 \cdot dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} xdx + 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}[2-0] = 1$$

أي أن الشرط الثاني محقق أيضاً.

2 . الرسم البياني لـ $f(x)$: وهو يأخذ الشكل المبين فيمايلي:



الشكل رقم (5–9): الشكل البياني لـ $f(x)$

3 . حساب الاحتمالات:

$$P(0 \le X \le 1) = \frac{1}{2}\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{1}{4}$$

$$P(1 \le X \le 1.5) = \frac{1}{2}\int_1^{1.5} x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1.5} = \frac{1}{2}\left[\frac{2.25}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1.25}{4}$$

$$P(1.5 \le X \le 2) = \frac{1}{2}\int_{1.5}^2 x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1.5}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2} - \frac{2.25}{2}\right] = \frac{1.75}{4}$$

وبجمع الاحتمالات الناتجة نجد: $\frac{1}{4} + \frac{1.25}{4} + \frac{1.75}{4} = \frac{4}{4} = 1$

وبالتالي فإن المساحة المظللة المحصورة تحت الخط المستقيم تساوي الواحد.

مثال (5–3):

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً قانون توزيعه الاحتمالي معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & \forall\ x > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1 . إيجاد قيمة الثابت k.

2 . دراسة خواص $f(x)$.

3 . رسم الشكل البياني لـ $f(x)$.

4 . حساب احتمال أن يقع X في المجال $[0.5,1]$ وفي المجال $[2,3]$.

الحل:

1 . باستخدام الخاصة الثانية من خواص قانون التوزيع الاحتمالي نكتب:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} ke^{-3x}dx = k\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx = k\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$= k\left[0 + \frac{1}{3}\right] = \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$$

ومنه يصبح قانون التوزيع الاحتمالي على الشكل الآتي:

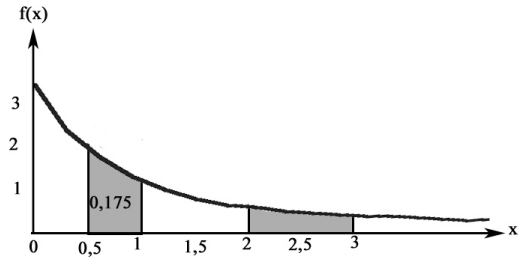
$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \forall\ x > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

2 . نلاحظ أن الشرط الأول محقق أي: $f(x) \geq 0$ وذلك لأن: $X > 0$.

أما بالنسبة للشرط الثاني فنجد أنه محقق أيضاً لأن:

$$3\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx = 1 \Rightarrow 3\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\infty} = 3\left[0 + \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{3} = 1$$

3 . نلاحظ أن $f(x)$ يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5-10)

4 .
$$P(0.5 \leq X \leq 1) = 3\int_{0.5}^{1} e^{-3x}dx = 3\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{0.5}^{1} = \left[-e^{-3x}\right]_{0.5}^{1}$$

$$= [-0.0498 + 0.223] = 0.173$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = 3\int_{2}^{3} e^{-3x}dx = 3\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_2^3 = \left[-e^{-3x}\right]_2^3 \approx 0.0024$$

إذاً المساحة المحصورة تحت منحنى $f(x)$ في المجال $[0.5,1]$ تساوي 0.173، وتساوي 0.0024 في المجال $[2,3]$، وهي المناطق المظللة على الشكل البياني على الترتيب.

5-4: تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول المستمر X:

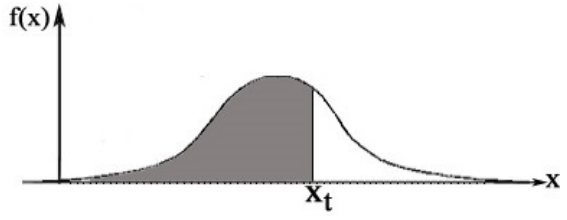
إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، وكان $f(x)$ قانون توزيعه الاحتمالي، فإننا نستطيع حساب احتمال أن يأخذ المتحول X قيماً في المجال $[x_s, x_t]$ من العلاقة الآتية:

$$P(x_s \le X \le x_t) = \int_{x_s}^{x_t} f(x)\,dx \qquad (28-5)$$

وعندما: $x_s \to -\infty$ فإن الحد الأدنى للتكامل يصبح $-\infty$، وبالتالي فإن العلاقة (5-28) تصبح من الشكل:

$$F(x_t) = P(X \le x_t) = \int_{-\infty}^{x_t} f(x)\,dx \qquad (29-5)$$

ويدعى $F(X)$ بتابع التوزيع الاحتمالي أو بدالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X المستمر. وبالتالي فإن $F(X)$ يعطينا احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي القيمة المعينة x_t. ويمكن تحديد هذا الاحتمال على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5-11)

يمثل $P(X \le x_t)$ بالمنطقة المظللة

- إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ ، وتابع توزيعه $F(x)$، فإن احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X المستمر أية قيمة ضمن

مجال جزئي $[a,b]$ حيث $(a \le b)$ من مجال تغيره يعطى بالعلاقة:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) \qquad (30-5)$$

لأن العلاقة تكتب بالشكل:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

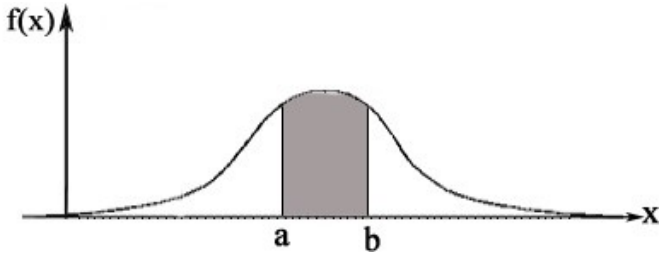
$$= \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \qquad (31-5)$$

إن كل حد من حدود العلاقة (5−11) هو نفس العلاقة (5−9) وبناءً على ذلك نجد:

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a) \qquad (32-5)$$

ويمكن تمثيل الاحتمال $P(a \le X \le b)$ بالمنقطة المظللة على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5−12)

بالاستفادة مما تقدم يمكننا حساب الاحتمال الآتي:

$$P(X \ge x_t) = \int_{x_t}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_t} f(x)\,dx \quad (33-5)$$

$$P(X \ge x_t) = 1 - P(X \le x_t)$$

$$P(X \ge x_t) = 1 - F(x_t) \qquad (34-5)$$

ملاحظة: إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، فإن قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ لايتأثر سواءً كان مجال تغير X مفتوحاً أو مغلقاً أي:

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) =$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

وذلك لأن إضافة أو حذف نقطة واحدة إلى المجال لاتغير من قيمة الاحتمال، وذلك $P(X=c)=0$ كما رأينا سابقاً.

5-5: خواص تابع التوزيع الاحتمالي:

1 . إن تابع التوزيع يحقق العلاقة:

$$F(X)=P(X\le x_t)\ge 0 \qquad (35-5)$$

2 . إن قيمة تابع التوزيع عند $(-\infty)$ تساوي الصفر، لأن:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{x\to-\infty} P(X\le x)=P(X<-\infty)=0 \quad (36-5)$$

أي:

$$P(X<-\infty)=F(-\infty)=0$$

وتمثل احتمال حدوث حادث مستحيل.

3 . إن قيمة تابع التوزيع عند $(+\infty)$ تساوي الواحد لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty} P(X\le x)=P(X<+\infty)=1 \quad (37-5)$$

أي أن:

$$F(+\infty)=1$$

وتمثل احتمال حدوث حادث أكيد.

4 . إذا كان b,a أي عددين حقيقيين بحيث أن: $a<b$ فإن:

$$F(a)\le F(b) \qquad (38-5)$$

أي أن تابع التوزيع هو تابع غير متناقص، وبالتالي يرسم شكل بياني يحقق الخواص السابقة.

5 . إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً وكان قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ ، فإن تابع توزيعه الاحتمالي $F(X)$ يعطى بالعلاقة:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (39-5)$$

وبالتالي حسب النظرية الأساسية للتكامل نجد أن:

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

أو:

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = f(x)$$

$$F'(x) = f(x) \qquad (40-5)$$

أي أنه باشتقاق تابع التوزيع يمكن أن نحصل على قانون التوزيع الاحتمالي.

مثال (5-4):

باستخدام قانون التوزيع الاحتمالي الناتج في المثال رقم (5-3)، أوجد تابع التوزيع الاحتمالي لـ X واحسب $P(0.5 \le X \le 1)$، ثم ارسم شكله البياني.

الحل: نلاحظ أن $f(x)$ معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \forall\ x > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبالتالي فإن $F(x)$ يعطى بالعلاقة: $F(x_s) = \int_{-\infty}^{x_s} f(x)dx$

$$F(x_s) = 3\int_{0}^{x_s} e^{-3x}dx = 3\left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^{x_s} = \left[-e^{-3x}\right]_0^{x_s} = -e^{-3x_s} + 1$$

$$F(x_s) = 1 - e^{-3x_s}$$

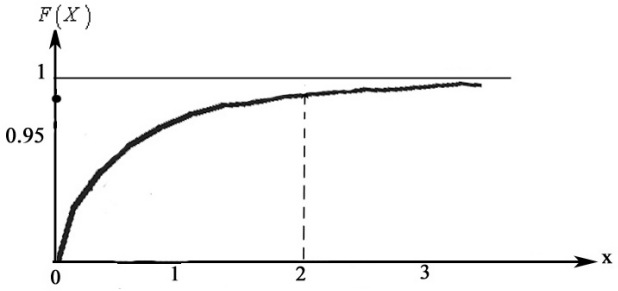
وبناءً على ذلك نكتب تابع التوزيع $F(X)$ على الشكل الآتي:

$$F(X) = \begin{cases} 1 - 3e^{-3x_s} & X > 0 \\ 0 & X \le 0 \end{cases}$$

$$P(0.5 \le X \le 1) = F(1) - F(0.5) = 0.95 - 0.777 = 0.173$$

وهو نفس الاحتمال الذي حصلنا عليه في المثال رقم (5-2).

أما بالنسبة للشكل البياني لـ $F(X)$، بأنه يرسم الشكل الآتي:



الشكل رقم (5-13)

مثال (5-5):

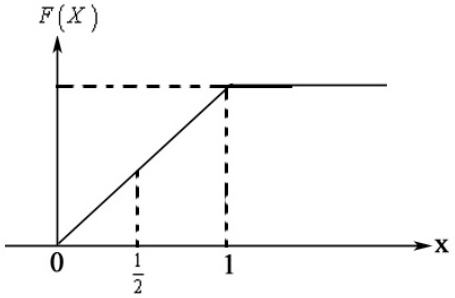
إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، تابع توزيعه الاحتمالي معطى بالعلاقة:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \forall\ X\le 0\\ x & \forall\ 0<x<1\\ 1 & \forall\ x\ge 1\end{cases}$$

والمطلوب: رسم الشكل البياني لـ $F(x)$، ثم دراسة خواصه. ثم إيجاد قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ ثم ارسمه، ثم دراسة خواص $f(x)$ ، ثم حساب الاحتمال: $P(0.4\le X\le 0.6)$.

الحل:

1 . إن الشكل البياني لـ $F(X)$، يأخذ الشكل الآتي:



الشكل رقم (5-14)

2 . نلاحظ أنه عندما: $X\le 0$ أي في القسم الأيسر من محور الإحداثيات فإن $F(x)=0$، وكذلك أنه عندما: $X\ge 1$ فإن: $F(x)=1$، كما هو موضح على الشكل البياني.

3 . نعلم أن:

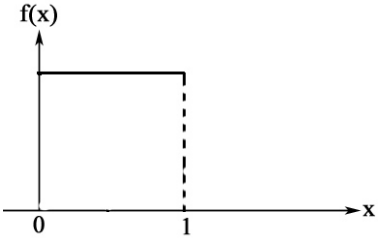
$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \forall\ X\le 0\\ 1 & \forall\ 0<x<1\\ 0 & \forall\ x\ge 1\end{cases}$$

وبالإصلاح نحصل على قانون التوزيع الاحتمالي لـ $f(x)$ الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

ويرسم $f(x)$ الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5-15)

4 . نلاحظ أن الشرط الأول محقق لأن $f(x)=1$ ضمن المجال $0<x<1$. أما بالنسبة للشرط الثاني فإنه محقق أيضاً، لأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{1}1\cdot dx=[x]_0^1=[1-0]=1$$

ولحساب الاحتمال المطلوب نجد أن:

$$P(0.4\le X\le 0.6)=\int_{0.4}^{06}1\cdot dx=[x]_{0.4}^{0.6}=0.6-0.4=0.2$$

أو عن طريق تابع التوزيع مباشرة:

$$P(0.4\le X\le 0.6)=F(0.6)-F(0.4)=0.6-0.4=0.2$$

5-6: القيم المميزة:

إن عملية إيجاد القيم المميزة للمتحول العشوائي X المستمر هي نفسها كما سبق، وتم إيجادها للمتحول العشوائي المنقطع، ولكن باستبدال إشارة المجموع Σ

بإشارة التكامل $\int$. وسنقوم بدارسة المقاييس المركزية ومقاييس التشتت، ومقاييس التناظر. وسنأتي على شرح كلٍ منها على التوالي كمايلي:

5-6-1: المقاييس المركزية:

وتشمل التوقع الرياضي والوسيط والمنوال.

5-6-1-1: التوقع الرياضي:

ويرمز له بالرمز بـ $E(x)$ ويعطى بالعلاقة:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \qquad (41-5)$$

خواص التوقع الرياضي:

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$، فإن توقعه الرياضي $E(x)$ يتمتع بالخواص الآتية:

1 . إذا كان x متحولاً عشوائياً مستمراً ، وكان $X=C$ فإن توقعه الرياضي يساوي C، العدد نفسه، أي:

$$E(C)=\int_{-\infty}^{+\infty} C\,f(x)\,dx=C\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=C\cdot 1=C \qquad (42-5)$$

2 . التوقع الرياضي لـ $C\cdot X$ يساوي توقع المتحول مضروباً بالعدد الثابت أي: $C\cdot E(x)$:

$$E(C\cdot X)=\int_{-\infty}^{+\infty} Cx\,f(x)\,dx=C\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx \qquad (43-5)$$

وبما أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=E(x)$$

فإن:

$$E(C\cdot X)=C\cdot E(x) \qquad (44-5)$$

3 . التوقع الرياضي لـ $X+C$ يساوي توقع المتحول X مضافاً العدد الثابت أي: $E(x)+C$:

$$E(X+C)=\int_{-\infty}^{+\infty}(X+C)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}C\cdot f(x)dx=E(X)+C\cdot 1$$

$$E(X+C)=E(X)+C \qquad (45-5)$$

4 . إذا كان: $a\le X<b$ فإن:

$$a\le E(X)<b \qquad (46-5)$$

5 . إذا كان: Y, X متحولان عشوائيان مستمران فإن:

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y) \qquad (47-5)$$

6 . التوقع الرياضي لـ $ax+b$ يساوي $aE(x)+b$ أي:

$$E(aX+b)=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}axf(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}bf(x)dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad (48-5)$$

مثال (5-6):

باستخدام معطيات المثال رقم (5-3)، أوجد التوقع الرياضي للمتحول X المعرف على المجال $]0,+\infty[$.

الحل: إن التوقع الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

$$E(X)=3\int_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-3x}dx=3\left[\left(x\cdot\frac{e^{-3x}}{-3}\right)_0^{+\infty}+\frac{1}{3}\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)_0^{+\infty}\right]=\frac{1}{3}$$

5-6-1-2: الوسيط:

ويرمز له بـ Me ويعرف بأنه إحدى النقاط التي يأخذها المتحول X، بحيث تتحقق العلاقة الآتية:

$$P(X>Me)=P(X<Me)=\frac{1}{2} \qquad (49-5)$$

وأن العلاقة (5–49) تكافئ العلاقة:

$$1-P\left(X\le Me\right)=P\left(X<Me\right)=\frac{1}{2}$$

$$1-F\left(Me\right)=F\left(Me\right)=\frac{1}{2} \qquad (50-5)$$

وبالتالي فإن الوسيط هو جميع النقاط التي يمكن أن تكون حلاً للمعادلة الآتية:

$$F\left(Me\right)=\frac{1}{2} \qquad (51-5)$$

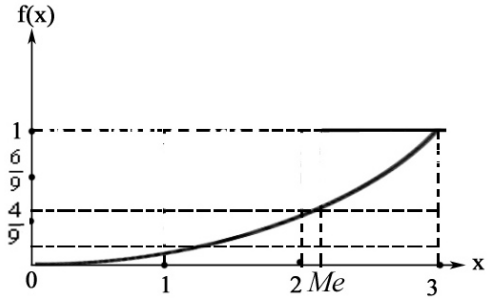
مثال (5–7):

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً تابع توزيعه الاحتمالي $F\left(x\right)$ معطى بالعلاقة:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0 & \forall\ x\le 0\\ \dfrac{x^2}{9} & 0<x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

والمطلوب: ارسم الشكل البياني لتابع التوزيع، ثم إيجاد قيمة الوسيط، وتحديد ذلك على الشكل البياني نفسه.

الحل: إن توزيع X يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5–16)

ولإيجاد الوسيط نفترض أن الوسيط هو x فنجد:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{9}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2X^2=9\Rightarrow X^2=\frac{9}{2}\Rightarrow X=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

ولكن الإشارة السالبة مرفوضة، وبالتالي فإن:

$$X = Me = 2.12$$

5-6-1-3: المنوال *Mod*:

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، وكان قانون التوزيع الاحتمالي له $f(x)$، فإنه لإيجاد منوال المتحول X نشتق $f(x)$، ثم نضع هذا المشتق مساوياً للصفر أي نضع المعادلة التالية:

$$f'(x) = 0 \qquad (52-5)$$

ثم نقوم بحل المعادلة الناتجة واستنتاج قيمة X التي تسمى المنوال.

مثال (5-8):

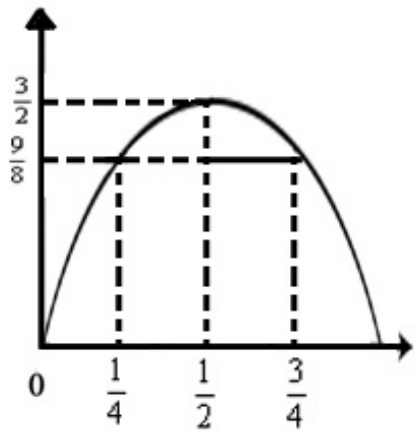
إذا كان X متحولاً عشوائياً قانون توزيعه الاحتمالي معطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < X < 1 \\ 0 \end{cases}$$

والمطلوب: إيجاد منوال المتحول X ، وحدد ذلك على الشكل البياني:

الحل:

إن $f(x)$ يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5-17)

ولإيجاد المنوال نشتق $f(x)$ ثم نوجد حل المعادلة: $f'(x)=0 \Rightarrow$

وبما أن: $f(x)=6x-6x^2$

فإن: $f'(x)=6-12x=0 \Rightarrow 12x=6 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

ومنه: $Mod=x=\frac{1}{2}$

كما هو مبين على الشكل البياني.

5-6-2: مقاييس التشتت:

وتشمل التباين والانحراف المعياري والعزوم.

5-6-2-1: التباين:

ويرمز له بـ $\sigma^2(x)$ ويعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2(x)=E\left[X-E(x)\right]^2 \qquad (53-5)$$

وباعتبار X متحولاً مستمراً فإن $\sigma^2(x)$ يساوي:

$$\sigma^2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[X-E(x)\right]^2 f(x)dx \qquad (54-5)$$

- إذا كان X متحولاً عشوائياً قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ فإن تباينه $\sigma^2(x)$ يعطى بالعلاقة: $\sigma^2(x)=E(x^2)-E^2(x)$

وقد تم برهان هذه العلاقة في فصل المتحولات العشوائية المنقطعة. حيث:

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx \qquad (55-5)$$

خواص التباين:

1 . إن:

$$\sigma^2_{(x)}\geq 0 \qquad (56-5)$$

2 . إذا كان $X=c$ فإن: $\sigma^2_{(c)}=0$ لأن:

$$\sigma^2_{(c)} = E\left[c - E(c)\right]^2 = E\left[c - c\right]^2 = 0 \qquad (57-5)$$

3 . إذا كان $X = cx$ فإن:

$$\sigma^2_{(cx)} = c^2 \cdot \sigma^2_{(x)}$$

لأن:

$$\sigma^2_{(c\cdot x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[cx - E(cx)\right]^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$\sigma^2_{(c\cdot x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c \cdot x - cE(x)\right]^2 \cdot f(x)\,dx =$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(x)\right]^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$\sigma^2_{(c\cdot x)} = c^2 \cdot \sigma^2_{(x)} \qquad (58-5)$$

4 . إذا كان $X = x + b$ فإن:

$$\sigma^2_{(x+b)} = \sigma^2_{(x)}$$

لأن:

$$\sigma^2_{(x+b)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(x+b) - E(x+b)\right]^2 \cdot f(x)\,dx$$

بإجراء الاختصار نجد أن:

$$\sigma^2_{(x+b)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(x)\right]^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$\sigma^2_{(x+b)} = \sigma^2_{(x)} \qquad (59-5)$$

5 . إذا كان $X = ax + b$ فإن:

$$\sigma^2_{(ax+b)} = a^2 \cdot \sigma^2_{(x)} \qquad (60-5)$$

6 . إذا كان x و y متحولان عشوائيان مستقلان، فإن $\sigma^2(x+y)$ يساوي:

$$\sigma^2_{(x+y)} = \sigma^2_{(x)} + \sigma^2_{(y)} \qquad (61-5)$$

أما إذا كان x و y غير مستقلين، فإن:

$$\sigma^2_{(x\pm y)} = \sigma^2_{(x)} + \sigma^2_{(y)} \pm 2\,\mathrm{cov}(x,y) \qquad (62-5)$$

ويدعى $\mathrm{cov}(x,y)$ بتمام التشتت أو التباين المشترك. وسنأتي على دراسته عندما ندرس جملة متحولات عشوائية.

7 . إذا كان: $Y = g(x)$ فإن:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{(g(x))}^2 = E\left[g(x) - E\left[g(x)\right]\right]^2 \qquad (63-5)$$

حيث: $g(x)$ تابع للمتحول العشوائي Y.

5-6-2-2: الانحراف المعياري:

ويرمز له بـ $\sigma(x)$، ويعرف بأنه الجذر الموجب للتباين، ويتمتع بخواص التباين نفسها. مع الانتباه للجذر وهو يساوي:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(x)} \qquad (64-5)$$

مثال (5-9):

أوجد تباين المتحول X الوارد في المثال رقم (5-8).

الحل: إن التباين يعطى بالعلاقة:

$$\sigma_{(x)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(x)\right]^2 \cdot f(x)\,dx \qquad (1)$$

$$\sigma_{(x)}^2 = 6\int_0^1 \left[x - E(x)\right]^2 x(1-x)\,dx$$

ولكن التوقع الرياضي يساوي:

$$E(X) = 6\int_0^{-\infty} x \cdot x(1-x)\,dx = 6\int_0^1 \left[x^2 - x^3\right]dx$$

$$= 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0\right] = \frac{1}{2}$$

ومنه نجد أن: $\sigma_{(x)}^2 = 6\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - x^2\right)dx = 0.05$

أو باستخدام العلاقة الآتية :

$$\sigma_{(x)}^2 = E\left(x^2\right) - E^2(x) \qquad (2)$$

$$E\left(x^2\right) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\,dx = 6\int_0^1 x^2 \cdot x(1-x)\,dx = \frac{6}{20}$$

ومنه: $\sigma^2(x) = \frac{6}{20} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.05$

وهو نفس التباين الذي حصلنا عليه باستخدام العلاقة (1) وبطريقة أسهل، لذلك عند حساب التباين بفضل استخدام العلاقة (2).

ومنه فإن الانحراف المعياري $\sigma(x)$ يساوي: $\sigma(x)=\sqrt{0.05}=0.22$

5-6-2-3: العزوم:

وهي على نوعين هما:

- **العزوم الابتدائية:** وهي عبارة عن القيمة المتوقعة لـ X من المرتبة s حول المبدأ، ويرمز لها بـ μ_s حيث: μ_s هي العزم الابتدائي من المرتبة S. وتعطى بالعلاقة الآتية:

$$\mu_s(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \cdot f(x)dx \qquad (65-5)$$

عندما: $S=0$ يكون $\mu_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \cdot f(x)dx=1$

عندما: $S=1$ يكون $\mu_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^1 \cdot f(x)dx=E(x)$

أي أن العزم الابتدائي من المرتبة الأولى هو عبارة عن التوقع الرياضي للمتحول X.

- **العزوم المركزية:** وهي عبارة عن القيمة المتوقعة لـ X من المرتبة s حول التوقع $E(x)$، ويرمز لها بـ $M_s(x)$، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$M_s(x)=E\left[x-E(x)\right]^S$$

حيث: $M_s(x)$ هي العزم المركزي من المرتبة S، وباعتبار أن X متحول مستمر فإن العزم المركزي من المرتبة S يعطى بالعلاقة الآتية:

$$M_s(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-\mu_1\right]^S \cdot f(x)dx \qquad (66-5)$$

أما العزم المركزي من المرتبة S حول نقطة ما، مثل C يساوي:

$$M_s(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-c]^S\cdot f(x)dx \qquad (67-5)$$

من العلاقة (5–66) يمكن حساب العزوم المركزية الآتية:

عندما: $S=0$ يكون $M_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu_1]^0\cdot f(x)dx=1$

عندما: $S=1$ يكون $M_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu_1]^1\cdot f(x)dx=0$

عندما: $S=2$ يكون $M_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu_1]^2\cdot f(x)dx=\sigma^2(x)$

أي أن العزم المركزي من المرتبة الثانية هو عبارة عن تباين المتحول X. ومن العلاقة العامة للعزم المركزي $M_s(x)$، يمكن حساب العزوم المركزية المتتالية من العزوم الابتدائية كمايلي:

$$M_3(x)=E(x^3)-3E(x^2)\cdot E(x)+2E^3(x) \qquad (68-5)$$

وبما أن $E(x^3),E(x^2),E(x)$ هي العزوم الابتدائية، إذاً تصبح العلاقة (5–68) بالشكل الآتي: $M_3(x)=\mu_3-3\mu_2\cdot\mu_1+2\mu_1^3$

وقياساً على ماتقدم يمكن إيجاد:

$$M_4(x)=\mu_4-4\mu_3\mu_1+6\mu_2\cdot\mu_1^2-3\mu_1^4(x)$$

$$M_5(x)=.....$$

.....

ومنه نستنتج، أننا نستطيع حساب العزوم المركزية من مختلف المراتب S، إذا استطعنا حساب العزوم الابتدائية المختلفة:

مثال (5–10):

باستخدام بيانات المثال رقم (5–8)، أوجد العزوم الابتدائية حتى المرتبة الرابعة، وكذلك العزوم المركزية حتى المرتبة الرابعة.

الحل: إن قانون توزيع المتحول X يعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & 0<X<1\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

وإن العزم الابتدائي من المرتبة s يعطى بالعلاقة:

$$\mu_s(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^S\cdot f(x)dx$$

$$s=0\Rightarrow \mu_0(x)=6\int_0^1 x^0\cdot x(1-x)dx=1$$

$$s=1\Rightarrow \mu_1(x)=6\int_0^1 x^1\cdot x(1-x)dx=\frac{1}{2}$$

$$s=2\Rightarrow \mu_2(x)=6\int_0^1 x^2\cdot x(1-x)dx=\frac{6}{20}$$

$$s=3\Rightarrow \mu_3(x)=6\int_0^1 x^3\cdot x(1-x)dx=\frac{6}{30}$$

$$s=4\Rightarrow \mu_4(x)=\frac{6}{42}$$

أما العزم المركزي من المرتبة s، فيعطى بالعلاقة:

$$M_s(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu_1]^S\cdot f(x)dx$$

ومنه:

$$s=0\Rightarrow M_0(x)=6\int_0^1\left[x-\frac{1}{2}\right]^0\cdot x(1-x)dx=1$$

$$s=1\Rightarrow M_1(x)=6\int_0^1\left[x-\frac{1}{2}\right]^1\cdot x(1-x)dx=0$$

$$s=2\Rightarrow M_2(x)=6\int_0^1\left[x-\frac{1}{2}\right]^2\cdot x(1-x)dx=0.05$$

أو باستخدام العلاقة: $\sigma^2_{(x)}=\mu_2-\mu_1^2$

$$\sigma^2_{(x)}=\frac{6}{20}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{20}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}=0.05$$

وهو نفس الجواب الذي حصلنا عليه سابقاً.

$$s=3\Rightarrow M_3(x)=\mu_3-3\mu_2\cdot\mu_1+2\mu_1^3$$
$$=\frac{6}{30}-3\cdot\frac{6}{20}\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^3=0$$
$$s=4\Rightarrow M_4(x)=\mu_4-4\mu_3\mu_1+6\mu_2\cdot\mu_1^2-3\mu_1^4$$
$$=\frac{6}{42}-4\cdot\frac{6}{30}\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{6}{20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^4\approx 0.0054$$

5-6-2-4: التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$:

إذا كان X متحولاً عشوائياً ما، فإن التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$، يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\psi_x(t)=E\left[e^{tx}\right] \qquad (69-5)$$

وباعتبار أن X متحول عشوائي مستمر، فإن: $\psi_x(t)$ يصبح بالشكل الآتي:

$$\psi_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t\,x}\cdot f(x)dx \qquad (70-5)$$

وباشتقاق التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$، بالنسبة لـt ومن ثم حساب قيمتها عندما $t=0$، نحصل على العزوم الابتدائية من مختلف المراتب ومن ثم نحصل على العزوم المركزية.

مثال (5-11):

باستخدام معطيات المثال (5-3)، المطلوب: إيجاد التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$، ثم إيجاد العزوم الابتدائية والعزوم المركزي حتى المرتبة الرابعة.

الحل: إن قانون التوزيع الاحتمالي $f(x)$ يعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

وإن التابع المولد للعزوم يعطى بالعلاقة:

$$\psi_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\cdot f(x)\,dx \qquad =3\int_{0}^{+\infty} e^{tx}\cdot e^{-3x}dx=3\int_{0}^{+\infty} e^{(t-3)x}\cdot dx$$

$$\psi_x(t)=3\left[\frac{1}{t-3}\cdot e^{(t-3)x}\right]_0^{\infty} \quad , \quad t<3$$

$$\psi_x(t)=\frac{3}{3-t} \quad , \quad t<3$$

وهو التابع المولد للعزوم، وباشتقاق هذا التابع ثم وضع $t=0$ نحصل على العزوم الابتدائية $\mu_s(x)$ من مختلف المراتب، أي:

$$\psi_x'(t)\Big|_{t=0}=\mu_1(x)=\frac{3}{(3-t)^2}\Bigg|_{t=0}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\psi_x''(t)\Big|_{t=0}=\mu_2(x)=\frac{6(3-t)}{(3-t)^4}\Bigg|_{t=0}=\frac{18}{81}=9$$

وبنفس الأسلوب نجد أن:

$$\psi_x'''(t)\Big|_{t=0}=\mu_3(x)=\frac{2}{9}$$

$$\psi_x''''(t)\Big|_{t=0}=\mu_4(x)=\frac{40}{81}$$

ومنه فإن العزوم المركزية تساوي:

$$M_1(x)=E\left[x-E(x)\right]^1=0$$

$$M_2(x)=\sigma^2(x)=\mu_2-\mu_1^2=\frac{2}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$$

$$M_3(x)=\mu_3-3\mu_2\cdot\mu_1+2\mu_1^3==\frac{2}{9}-3\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$$

$$M_4(x)=\mu_4-4\mu_3\cdot\mu_1+6\mu_2\cdot\mu_1^2-3\mu_1^4=$$

$$=\frac{40}{81}-4\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-3\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{25}{81}$$

5-6-3: مقاييس التناظر والالتواء:

5-6-3-1: مقاييس التناظر:

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، فإنه لدراسة تناظر X بالنسبة للتوقع الرياضي، نطبق العلاقة الآتية:

$$K = \frac{M_3(x)}{\sigma^3(x)} \qquad (71-5)$$

فإذا كان:

$K = 0$ فإن منحنى توزيع X يكون متناظراً بالنسبة للتوقع الرياضي.

$K > 0$ فإن منحنى توزيع X يكون ملتوياً نحو اليمين.

$K < 0$ فإن منحنى توزيع X يكون ملتوياً نحو اليسار.

5-6-3-2: مقاييس التطاول:

ويدرس هذا المقياس توزيع القيم بالنسبة للمقاييس المركزية، فإذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، فإنه لدراسة تطاول توزيع X عن التوزيع الطبيعي، نطبق العلاقة الآتية:

$$L = \frac{M_4(x)}{\sigma^4(x)} \qquad (72-5)$$

فإذا كانت: $L = 3$ فإن شكل التوزيع يكون طبيعياً.

أما إذا كان: $L > 3$ فإن التوزيع يكون متطاولاً.

وإذا كان: $L < 3$ فإن التوزيع يكون منبسطاً.

مثال (5-12):

باستخدام معطيات المثال (5-11)، أوجد معامل التناظر والتطاول.

الحل: من المثال (5-11) وجدنا أن:

$$M_1(x) = 0\ ,\ \ M_2(x) = \frac{1}{9}\ ,\ \ M_3(x) = \frac{2}{27}\ ,\ \ M_4(x) = \frac{25}{81}$$

وبالتالي نجد أن معامل التناظر يعطى بالعلاقة:

$$K=\frac{M_3(x)}{\sigma^3(x)}$$

$$K=\frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{27}}=\frac{2}{1}=2$$

$$K=2>0$$

وبما أن $K>0$ فإن منحنى توزيع X يكون ملتوياً نحو اليمين.

وأن معامل التطاول يعطى بالعلاقة: $$L=\frac{M_4(x)}{\sigma^4(x)}$$

$$L=\frac{\frac{25}{81}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}}=\frac{25}{81}\cdot\frac{81}{1}$$

$$L=25>3$$

وبما أن $L>3$ فإن شكل التوزيع متطاول عن الشكل الطبيعي.

5-7: تغيير المتحولات:

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، تابع كثافته $f(x)$ معلوم. وكان Y متحولاً عشوائياً آخر، مرتبطاً بـ X وفق العلاقة: $Y=U(x)$، وكان التابع $U(x)$ تابعاً مستمراً أيضاً، وقابلاً للاشتقاق وقابلاً للعكس أي يمكن حسابه بدلالة Y. أو يمكن الحصول على $X=U^{-1}(y)$.

والسؤال ماهو تابع الكثافة الاحتمالي لـY والذي نرمز له بـ $g(y)$؟

نظرية:

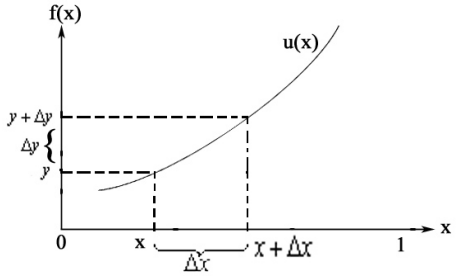
إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً وكان قانون توزيعه $f(x)$ معلوماً. وكان Y متحولاً عشوائياً آخراً مرتبطاً بـ X وفق العلاقة: $Y=U(x)$، وكان $U(x)$ مستمراً قابلاً للاشتقاق والعكس، فإن قانون التوزيع الاحتمالي لـ Y ونرمز له بـ $g(y)$ يعطى بالعلاقة:

$$g(y)=f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad (73-5)$$

لبرهان العلاقة (5–73) نميز بين ثلاث حالات:

الحالة الأولى:

نفرض أن $U(x)$ تابع مستمر ومتزايد، كما يظهر على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5–18)

الآن نجري تجربة حول المتحول X، فإذا كانت قيمة X تنتمي إلى المجال $[x, x+\Delta x]$ فإن قيمه Y بموجب العلاقة التابعية: $Y = U(x)$ تنتمي إلى المجال $[y, y+\Delta y]$.

وإذا كانت قيمة X لاتنتمي إلى المجال $[x, x+\Delta x]$، فإن قيمة Y لاتنتمي بدورها إلى المجال $[y, y+\Delta y]$. نستنتج مما تقدم أن احتمال $X \in [x, x+\Delta x]$ يساوي احتمال $Y \in [y, y+\Delta y]$، وبما انه لدينا:

$$P[x < X < x+\Delta x] = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx \qquad (74-5)$$

وكذلك فإن:

$$P[y < Y < y+\Delta y] = \int_{y}^{y+\Delta y} g(y)\,dy \qquad (75-5)$$

حيث $g(y)$ قانون التوزيع الاحتمالي للمتحول Y، وهو توزيع غير معلوم يُطلب إيجاده. وحسب ماتقدم فإن الطرف الأيمن من العلاقتين (5–74) و(5–75) متساويين، وبالتالي فإننا نكتب:

$$\int_{y}^{y+\Delta y} g(y)\,dy = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx \qquad (76-5)$$

وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى للتكامل نجد:

$$\Delta y.g\left(y+\theta.\Delta y\right)=\Delta x.f\left(x+\theta.\Delta x\right) \qquad (77-5)$$

حيث $0\le\theta<1$ نقسم الطرفين على Δy فنجد:

$$g\left(y+\theta.\Delta y\right)=\frac{\Delta x}{\Delta y}.f\left(x+\theta.\Delta x\right) \qquad (78-5)$$

عندما: $\Delta y\to 0$ فإن $\Delta x\to 0$.

وبموجب استمرار التابع $U(x)$. فإن العلاقة (5−78) تصبح بالشكل الآتي:

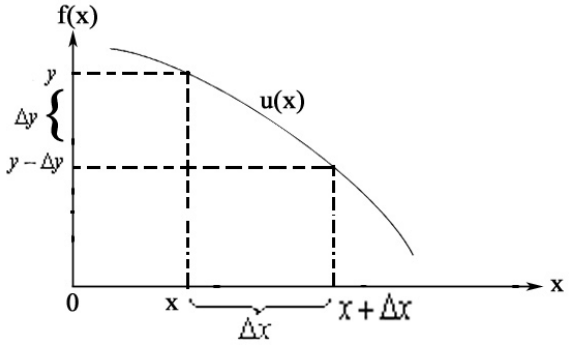
$$g(y)=\frac{dx}{dy}\cdot f(x) \qquad (79-5)$$

ومن العلاقة (5−79) نلاحظ أن $\frac{dx}{dy}>0$ لأن التابع U متزايد، وأن $f(x)>0$.

وبالتالي فإن: $g(y)$ قانون التوزيع الاحتمالي لـY موجب (غير سالب).

الحالة الثانية:

نفرض أن: $Y=U(x)$ تابع مستمر ومتناقص، كما يظهر على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5−19)

وباختصار نكتب:

$$P\left(x<X<x+\Delta x\right)=P\left(y-\Delta y<Y<y\right) \qquad (80-5)$$

أي:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx=\int_{y-\Delta y}^{y} g(y)dy \qquad (81-5)$$

وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى للتكامل نجد:

$$\Delta x.f\left(x+\theta.\Delta x\right)=-\Delta y.g\left(y-\theta'.\Delta y\right)$$

نقسم الطرفين على $-\Delta y$ فنجد:

$$-\frac{\Delta x}{\Delta y}.f\left(x+\theta,\Delta x\right)=+\frac{\Delta x}{\Delta y}\cdot g\left(y+\theta',\Delta y\right) \qquad (82-5)$$

عندما: $\Delta x\to 0\Rightarrow\ \Delta y\to 0$

وبموجب استمرار التابع $U(x)$، تصبح العلاقة (5–82) على الشكل الآتي:

$$g(y)=\left|\frac{-dx}{dy}\right|\cdot f(x) \qquad (83-5)$$

من العلاقة (5–83) نلاحظ أن: $f(x)>0$ و $\left|-\frac{dx}{dy}\right|>0$.

وبالتالي فإن $g(y)$ قانون التوزيع الاحتمالي لـY موجب (غير سالب).

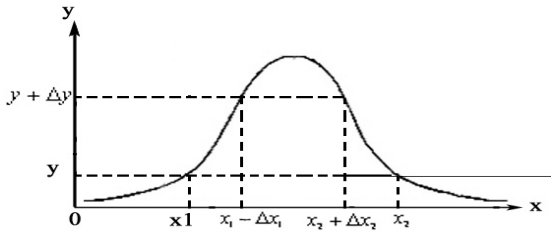
نتيجة:

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ معلوم. وكان Y متحولاً عشوائياً آخر مرتبطاً بـX بالعلاقة: $Y=U(x)$، وكان $U(x)$ مستمراً متزايداً أو متناقصاً فإن قانون التوزيع الاحتمالي $g(y)$ للمتحول Y يعطى بالعلاقة:

$$g(y)=f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad (84-5)$$

الحالة الثالثة:

نفرض أن $U(x)$ تابع مستمر متزايد ومتناقص خلال مجال تعريفه كما يظهر على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5–20)

نلاحظ أنه من أجل أي قيمة لـ X يقابلها قيمة وحيدة لـ Y، ولكن من أجل أي قيمة لـ Y يقابلها قيمتان لـ X. وبناءً على ذلك نكتب:

$$Y \in (y, y+\Delta y) = X \in (x_1, x_1+\Delta x_1) \bigcup X \in (x_2-\Delta x_2, x_2) \qquad (85-5)$$

ومنه نجد:

$$P(y<Y<y+\Delta y) = P(x_1<X<x_1+\Delta x_1) + P(x_2-\Delta x_2<X<x_2) \quad (86-5)$$

أي:

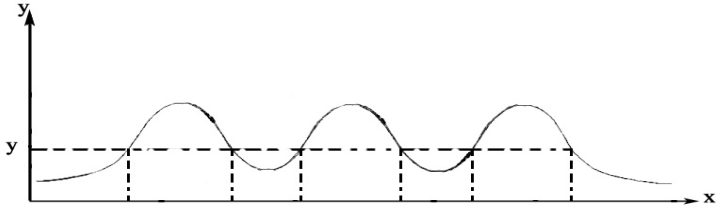
$$\int_{y}^{y+\Delta y} g(y)\,dy = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x)\,dx + \int_{x_2-\Delta x_2}^{x_2} f(x)\,dx \qquad (87-5)$$

وبالاستفادة مما تقدم نجد:

$$g(y) = \left|\frac{dx_1}{dy}\right| \cdot f(x_1) + \left|\frac{dx_2}{dy}\right| \cdot f(x_2) \qquad (88-5)$$

الحالة العامة:

عندما يكون $U(x)$ متقلباً (متزايداً ومتناقصاً)، فإننا نقوم بتقسيم مجال تحول X إلى مجالات جزئية بحيث يكون $U(x)$ إما متزايداً أو متناقصاً، ومن ثم نوجد قانون التوزيع الاحتمالي لـ Y عند كل مجال جزئي. وثم نأخذ مجموع هذه القوانين فنحصل على قانون التوزيع الاحتمالي لـ Y على كامل مجال تحول X، كما هو مبين على الشكل الآتي:



الشكل رقم (5-21)

بنفس الأسلوب الذي اتبعناه في الحالات السابقة نوجد قانون التوزيع الاحتمالي من العلاقة:

$$g(y) = \left|\frac{dx_1}{dy}\right| \cdot f(x_1) + \left|\frac{dx_2}{dy}\right| \cdot f(x_2) + ... + \left|\frac{dx_n}{dy}\right| \cdot f(x_n)$$

أو: $g(y)=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{dx_i}{dy}\right|\cdot f(x_i)$ $(89-5)$

وهو المطلوب.

مثال (5-13):

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، وكان قانون توزيعه معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

وكان Y متحولاً عشوائياً آخر مرتبطاً بـ X وفق العلاقة: $Y=2x-1$ والمطلوب: إيجاد قانون توزيع Y. ثم إيجاد توقعه وتباينه، ورسم الشكل البياني لتوزيع Y.

الحل: بتطبيق العلاقة (5-84) الخاصة بتغير المتحولات والتي تأخذ الصيغة الآتية:

$$g(y)=f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$y=2x-1\Rightarrow x=\frac{y+1}{2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$$

ولإيجاد مجال تغير المتحول Y نعتمد على العلاقة التي تربط بين Y وX، أي على العلاقة: $y=U(x)=2x-1$

$$x=0\Rightarrow y=-1$$

$$x=2\Rightarrow y=3$$

نعوض في العلاقة السابقة فنجد:

$$g(y)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y+1}{2}\right)\cdot\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{8}(y+1)$$

وهو قانون التوزيع الاحتمالي لـ Y ونكتبه على الشكل الآتي:

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(y+1) & :-1\le y\le 3\end{cases}$$

عدا ذلك

$$E(y)=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3} y(y+1)dy=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3}\left(y^2+y\right)dy=\frac{1}{8}\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{3}$$

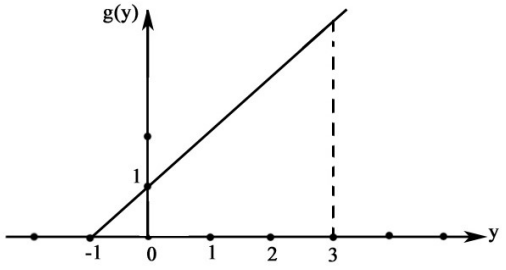
$$\mu_1(y)=E(y)=\frac{10}{6}$$

$$\sigma^2_{(y)}=\mu_2(y)-\mu_1^2(y)$$

$$\mu_2(y)=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3} y^2(y+1)dy=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3}\left(y^3+y^2\right)dy=\frac{1}{8}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3}=\frac{11}{3}$$

نعوض في علاقة التباين فنجد: $\sigma^2_{(y)}=\frac{11}{3}-\left(\frac{10}{6}\right)^2=\frac{32}{36}=0.89$

ويرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (5-22)

مثال (5-14):

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً وكان قانون توزيعه الاحتمالي معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty<X<+\infty$$

وكان Y متحولاً عشوائياً آخراً مرتبطاً بـ X وفق العلاقة: $y=\frac{1}{2}x^2$.

والمطلوب: إيجاد قانون توزيع Y.

الحل:

نستخدم قانون تغيير المتحولات الآتي: $g(y)=f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|$

وبما أن $f(x)$ معلوم، وإن $U(x)$ تتناقص ثم تتزايد، فإننا نعالجه كمايلي:

$$y=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow x^2=2y$$

$$x=\pm\sqrt{2y}\Rightarrow dx=\frac{\pm1}{\sqrt{2y}}\cdot dy\Rightarrow\left|\frac{dx}{dy}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2y}}\right|$$

وبالتالي فإن قانون توزيع Y يتألف من جزأين: الأول عندما تكون $x<0$، والثاني عندما تكون $x>0$ أي:

$$g(y)=f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x<0}+f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x>0}$$

وبسبب التناظر لـ $f(x)$ نكتب العلاقة الأخيرة على الشكل الآتي:

$$g(y)=2\cdot f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad (1)$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$g(y)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(2y)}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right)$$

وبالإصلاح نجد: $g(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y}\cdot y^{-\frac{1}{2}} \qquad :y>0$

وهو قانون التوزيع الاحتمالي لـ Y، ويعرف بقانون توزيع Γ الذي سندرسه لاحقاً حيث: $0\le Y\le\infty$ وهو المطلوب.

تمرينات

1 . إذا كان X متحول عشوائي تابع كثافته الاحتمالية معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3} & -1<x<2\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

. دراسة خواصه ثم رسمه.

. إيجاد توقعه وتباينه.

. إيجاد التوقع الرياضي لـ $(2x-1)$.

2 . إذا كان X متحولاً عشوائياً تابع كثافته الاحتمالية معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x(2-x)}{4} & 0<x<2\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

. إيجاد تابع التوزيع $F(X)$.

. حساب احتمال: $P\left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right), P(x\le 1)$.

. إيجاد قيمة المنوال.

. إيجاد التابع المولد للعزوم.

. دراسة واقعه التناظري.

3 . إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً تابع كثافته الاحتمالية معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & 0<x<3\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

. رسم الشكل البياني $f(x)$.

. إيجاد قيمة الوسيط.

. إذا كان Y متحولاً عشوائياً آخراً ومرتبطاً بـ X وفق العلاقة: $y = x^3$.

والمطلوب:

أ . إيجاد تابع الكثافة الاحتمالية لـ Y.

ب . إيجاد تابع التوزيع لـ Y.

ج . إيجاد توقع وتباين Y.

4 . إذا كان X متحولاً عشوائياً قانون توزيعه الاحتمالي معطى بالعلاقة:

$$f(x) = Ae^{-|x|}$$

والمطلوب:

. تحديد قيمة الثابت A ثم تحديد المنحنى الذي يرسمه $f(x)$.

. حساب القيم المميزة للمتحول العشوائي X.

5 . إذا كان X متحولاً عشوائياً تابع كثافته معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

. إيجاد قيمة الثابت a.

. ادرس خواص $f(x)$ وارسمه.

. حساب احتمال $P\left(\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\right)$.

ـ إذا كان Y متحولاً عشوائياً آخر حيث: $Y = x^2$ ، والمطلوب إيجاد قانون توزيع Y, ثم أوجد تابع توزيعه $F(Y)$.

6 . إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمر تابع كثافته معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}\left(x^2 - 1\right) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب: . إيجاد قيمة الثابت a.

. إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ ورسمه.

. حساب احتمال $P\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right)$.

. إيجاد التابع المولد للعزوم.

. إيجاد العزوم الابتدائية والمركزية حتى المرتبة الرابعة.

. دراسة واقعه التناظري.

7 . تحمل طائرة حربية ثلاث قنابل وتحلق فوق خط سكة حديدية، فإذا سقطت القنبلة على بعد 40 متر على الأكثر فإنها ستكون كافية لتحطيم الخط الحديدي، لنفرض أن X يمثل بعد موقع القذيفة عن الخط الحديدي تابع كثافته $f(x)$ معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{100+x}{10000} & -100<x<0\\ \frac{100-x}{10000} & 0<x<100\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب: حساب احتمال قطع الخط الحديدي علماً بأن الطائرة قد ألقت ثلاث قنابل على هذا الخط.

8 . ليكن X متحولاً عشوائياً تابع كثافته الاحتمالية معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}a\left(x^2+2\right) & 0<x<3\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

. حدد قيمة الثابت a.

. إيجاد توقع وتباين x.

. إيجاد تابع التوزيع $F(x)$.

. ارسم الشكل البياني لـ $F(x), f(x)$.

. حساب احتمال $P(1 \le x \le 2)$.

6 . ادرس الواقع التناظري لـX.

الفصل السادس

التوزيعات الاحتمالية المستمرة

6-1: مقدمة:

إن التحليل الرياضي لسلوك العديد من المتحولات العشوائية المستمرة أظهر أنه يمكننا أن نستنبط قوانين نظرية لهذه المتحولات، وأنه يمكننا في الكثير من الأحيان أن نصيغ تلك القوانين بواسطة علاقات رياضية محددة. وذلك كما فعلنا مع المتحولات العشوائية المنقطعة. ونتيجة للأبحاث المضنية التي قام بها الباحثون أمكن التوصل إلى عدة قوانين احتمالية نظرية، نذكر منها:

1 . قانون التوزيع المنتظم لـX المستمر في المجال $[a,b]$ ويعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad : a\le x\le b \qquad (1-6)$$

2 . قانون التوزيع الأسي لـX المستمر والموجب، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x)=k\cdot e^{-kx} \qquad : x>0 \qquad (2-6)$$

3 . قانون التوزيع الطبيعي العام لـX المستمر على المجال $[-\infty,+\infty]$، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad : -\infty<x<+\infty \qquad (3-6)$$

4 . قانون التوزيع الطبيعي المعياري لـX المستمر، ويعطى بالعلاقة:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad : -\infty<x<+\infty \qquad (4-6)$$

5 . قانون توزيع غاما لـX المستمر والموجب، ويعطى بالعلاقة:

$$\Gamma_P(x)=C\cdot x^{P-1}e^{-kx} \qquad : x>0 \qquad (5-6)$$

6 . قانون توزيع (بيتا) لـX المستمر والمعرف على المجال [0,1]، ، ويعطى بالعلاقة:

$$\beta_{P\cdot q}(x) = C \cdot x^{P-1}(1-x)^{q-1} \qquad : 0 < x < 1 \qquad (6-6)$$

7 . قانون توزيع (كاي مربع) لـX المستمر والموجب، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \chi^2(x) = C \cdot x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad : x \geq 0 \qquad (7-6)$$

8 . قانون توزيع ستودينت T لـX المستمر على $]-\infty,+\infty[$ ، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = T_k(x) = C \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \qquad : -\infty < x < +\infty \qquad (8-6)$$

9 . قانون توزيع فيشر F لـX المستمر والموجب، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = F_{k,m}(x) = C \cdot \left(\frac{k}{m} \cdot x + 1\right) x^{-\frac{k}{2}} \qquad : x \geq 0 \qquad (9-6)$$

10 . قانون التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي لـX المستمر والموجب، ويعطى بالعلاقة:

$$g(y) = C \cdot \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell n \frac{y}{m}}{\sigma}\right)^2} \qquad y > 0 \qquad (10-6)$$

11 . قانون توزيع (إيرلانغ) لـX المستمر والموجب، ويعطى بالعلاقة:

$$f_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot x^{m-1} \cdot e^{-x} \qquad x \geq 0 \qquad (11-6)$$

12 . قانون توزيع (كوشي) لـX المستمر على $[-\infty,+\infty]$ ، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (12-6)$$

13 . قانون توزيع (باريتو) لـX المستمر على $]1,+\infty[$ ، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = k \cdot x^{-(k+1)} \qquad 1 \leq x < +\infty \qquad (13-6)$$

14 . قانون التوزيع المتدرج لـX المستمر على $[0,1]$ ، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = k \cdot x^{k-1} \qquad x \geq 0 \qquad (14-6)$$

15 . قانون توزيع القيم العظمى Min أو Max ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = e^{x-a} \cdot e^{-e^{x-a}} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (15-6)$$

16 . قانون توزيع (وايبول) لـX المستمر والموجب، ويعطى بالعلاقة:

$$f(x) = W_{p,q}(x) = P \cdot k \cdot x^{P-1} \cdot e^{-(kx)P} \qquad x > 0 \quad (16-6)$$

وسنقوم ضمن هذا الفصل باستعراض هذه القوانين ودراسة خواصها الأساسية ومميزاتها العددية، وسنقدم بعض التطبيقات العملية عليها لتوضيح كيفية استخدام هذه القوانين في البحوث العلمية.

6-2: قانون التوزيع المنتظم لـ X المستمر:

6-2-1: تعريف: إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً يأخذ جميع قيمه الممكنة في المجال $[a\ ,\ b]$، فإن قانون التوزيع المنتظم لـ X المستمر يعرف بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (17-6)$$

كما يدعى هذا التوزيع أيضاً بالتوزيع المستطيلي.

6-2-2: خواص قانون التوزيع المنتظم:

يحقق هذا القانون الخاصتين التاليتين:

1 . نلاحظ أن:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}>0 \qquad (18-6)$$

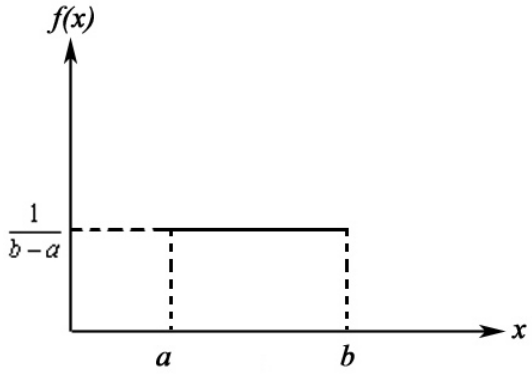
. 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\cdot dx \qquad (19-6)$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}dx=\frac{1}{b-a}\left[x\right]_{a}^{b}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[b-a\right]=1$$

ويرسم هذا القانون الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-1)

6-2-3: تابع التوزيع الاحتمالي لـX المنتظم:

إن تابع التوزيع يعطى بالعلاقة:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\cdot dx \qquad (20-6)$$

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\cdot dx=\frac{1}{b-a}\left[x\right]_a^x=\frac{1}{b-a}\left[x-a\right]$$

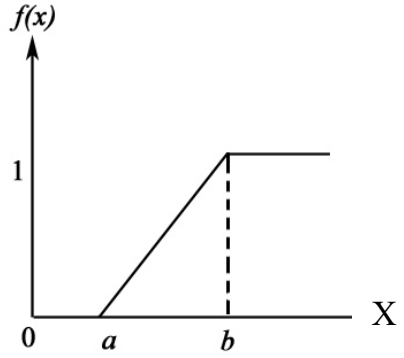
ومنه :

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{x-a}{b-a} \qquad (21-6)$$

ومنه فإن تابع التوزيع يعرف بالعلاقة التالية:

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases} \qquad (22-6)$$

وإن تابع التوزيع يرسم الشكل البياني التالي:



الشكل رقم (6-2)

ومنه فإن:

$$F(a)=P(X\le a)=0$$
$$F(b)=P(X\le b)=1$$

وبالتالي يمكن حساب الاحتمالات الأخرى التالية:

$$P(X>x)=1-P(X\le x)=1-F(x) \qquad (23-6)$$
$$P(a_1\le X\le b_1)=F(b_1)-F(a_1) \qquad (24-6)$$

مثال (6-1):

إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً قانون توزيعه معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases} k & 0\le x\le 8 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث k عدد ثابت يجب تحديده. والمطلوب:

1 . إيجاد قيمة الثابت k حتى يصبح $f(x)$ قانون توزيع احتمالي.

2 . إيجاد تابع التوزيع $F(X)$.

3 . ارسم الشكل البياني لـ $f(x)$ و $F(X)$.

4 . حساب الاحتمالات الآتية: $P(2\le X\le 6)$, $P(X\le 3)$, $P(X\ge 5)$

الحل: حتى يكون $f(x)$ قانون توزيع احتمالي يجب أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx=1$$

وباستخدام هذه الخاصة يمكن تحديد قيمة الثابت k، أي:

$$k\int_0^8 dx \;= k\left[x\right]_0^8 = k\left[8-0\right] = 1$$

$$8k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$

وبالتالي يصبح قانون التوزيع الاحتمالي المنتظم لـX المستمر بالشكل التالي:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 \le x \le 8 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

2 . تابع التوزيع $F\left(x\right)$: ويعطى بالعلاقة:

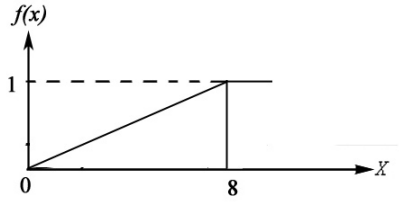
$$F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(x\right)\cdot dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{8}\cdot dx = \frac{1}{8}\int_0^x dx = \frac{1}{8}\left[x\right]_0^x = \frac{x}{8}$$

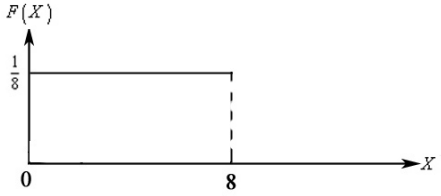
ومنه فإن تابع التوزيع الاحتمالي يأخذ الصيغة التالية:

$$F\left(X\right) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{8} & 0 \le x \le 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

3 . الشكل البياني لـ $F\left(x\right), f\left(x\right)$:



الشكل البياني لـ $f\left(x\right)$



الشكل البياني لـ $F\left(X\right)$

4 . لحساب $P\left(x \le 3\right)$ $\qquad P\left(x \le 3\right) = \frac{1}{8}\int_0^3 dx = \frac{1}{8}\left[x\right]_0^3 = \frac{3}{8}$

أو من خلال التعويض بتابع التوزيع:

$$P(x \le 3) = F(3) = \frac{3}{8}$$

$$P(x \ge 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(2 \le X \le 6) = F(6) - F(2) = \frac{6}{8} - \frac{2}{8} = \frac{4}{8}$$

أو بطريقة ثانية:

$$P(2 \le X \le 6) = \frac{1}{8}\int_{2}^{6} dx = \frac{1}{8}[x]_2^6 = \frac{1}{8} \cdot [6-2] = \frac{4}{8}$$

6-2-4: القيم المركزية:

6-2-4-1: التوقع الرياضي $E(x)$ **:**

يعرف التوقع الرياضي للمتحول X المستمر والخاضع للتوزيع المنتظم بالعلاقة الآتية:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \qquad (25-6)$$

$$E(x) = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

$$E(x) = \frac{b+a}{2} = \mu \qquad (26-6)$$

6-2-4-2: الوسيط Me **:** لقد علمنا أن الوسيط هو حل للمعادلة:

$$F(X) = \frac{1}{2} \qquad (27-6)$$

وبالتالي فإن: $\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x-2a=b-a$

ومنه فإن:

$$Me=x=\frac{b+a}{2} \qquad (28-6)$$

وهي نفس قيمة التوقع الرياضي لهذا المتحول.

6-2-4-3: التباين $\sigma^2_{(x)}$: ويعطى التباين بالعلاقة الآتية:

$$\sigma^2_{(x)}=\mu_2(x)-E^2(x) \qquad (29-6)$$

نحسب العزم الابتدائي من المرتبة الثانية $\mu_2(x)$ والذي يعطى بالعلاقة:

$$\mu_2(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\cdot dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$\mu_2(x)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}$$

ومنه نجد: $\mu_2(x)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$

نعوض في (6-29) فنجد أن:

$$\sigma^2(x)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(b+a)^2}{4}$$

وبإجراء الإصلاحات الرياضية نجد أن:

$$\sigma^2(x)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (30-6)$$

ومنه فإن الانحراف المعياري:

$$\sigma(x)=\frac{\sqrt{(b-a)^2}}{2\sqrt{3}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \qquad (31-6)$$

6-2-4-4: العزوم:

العزوم الابتدائية $\mu_S(x)$: وتعطى بالعلاقة:

$$\mu_S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^s f(x)\,dx \qquad (32-6)$$

وعندما $s=0$ فإن:

$$\mu_0(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^0\cdot dx=1$$

وعندما $s=1$ فإن:

$$\mu_1(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\cdot dx=\frac{b+a}{2}=E(x)$$

أي أن:

$$E(x)=\mu=\frac{b+a}{2}$$

العزوم المركزية $M_S(x)$: وتعطى بالعلاقة العامة:

$$M_S(x)=E\left[X-E(x)\right]^S \qquad (33-6)$$

أو بالعلاقة:

$$M_S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(x)\right]^s f(x)\cdot dx \qquad (34-6)$$

عندما $s=0$ فإن:

$$M_0(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[x-E(x)\right]^0\cdot dx=1$$

وعندما $s=1$ فإن:

$$M_1(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[x-E(x)\right]^1\cdot dx=0$$

وباستخدام العلاقة العامة يمكن إيجاد بقية العزوم، أي:

عندما $s=0$ فإن:

$$M_2(x)=E\left[x-E(x)\right]^2=\sigma^2(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

وعندما $s=0$ فإن:

$$M_3(x)=E\left[x-E(x)\right]^3=$$

$$M_3(x)=\mu_3-3\mu_1\cdot\mu_2+2\mu_1^3=0$$

وهكذا يمكن استنتاج بقية العزوم.

6-2-5: معامل التناظر K: ويعطى بالعلاقة:

$$k=\frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}}=K=\frac{0}{\frac{(b-a)^2}{12}}=0 \qquad (35-6)$$

أي أن التوزيع متناظر لكل المتحولات المنتظمة.

6-2-6: التابع المولد للعزوم المنتظم: ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\psi_x^{(t)} = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)dx = \int_{-a}^{+b} e^{tx} \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right)dx$$

$$\psi_x^{(t)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_a^b = \frac{1}{t(b-a)}\left[e^{tb} - e^{at}\right]$$

وهكذا نجد أن: $$\psi_x^{(t)} = \frac{1}{t(b-a)}\left[e^{bt} - e^{at}\right]$$

مثال (6-2):

باستخدام معطيات المثال رقم (6-1)، والمطلوب:

1 . إيجاد التوقع والتباين، ثم الانحراف المعياري لـ X.

2 . إيجاد الوسيط Me .

3 . إيجاد العزوم الابتدائية والعزوم المركزية حتى المرتبة الثالثة.

4 . ادرس واقعه التناظري.

الحل:

1 . التوقع الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \frac{1}{8}\int_0^8 x \cdot dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^8 = \frac{1}{8}\left[\frac{64}{2}\right] = \frac{64}{16}$$

$$E(x) = 4$$

التباين $\sigma^2(x)$:

$$\sigma^2(x) = \mu_2(x) - \mu_1^2(x)$$

$$\mu_2(x) = \frac{1}{8}\int_0^8 x^2 dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^8 = \frac{64}{3}$$

ومنه:

$$\sigma^2(x) = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}$$

ومنه الانحراف المعياري يساوي: $\sigma(x)=\frac{4}{\sqrt{3}}$

2 . الوسيط Me : ويمكن إيجاده من حل المعادلة التالية:

$$F(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{8}=\frac{1}{2}$$

$$2x=8\Rightarrow x=\frac{8}{2}=4$$

إذاً، الوسيط يساوي التوقع (لأنه متناظر): $Me=x=4$

3 . العزوم الابتدائية:

وتعطى بالعلاقة التالية: $\mu_S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^S\cdot f(x)dx$

وعندما $S=0$ فإن: $\mu_0(x)=\frac{1}{8}\int_0^8 dx=\frac{1}{8}[x]_0^8=1$

وعندما $S=1$ فإن: $\mu_1(x)=\frac{1}{8}\int_0^8 x\cdot dx=4$

وعندما $S=2$ $\mu_2(x)=\frac{1}{8}\int_0^8 x^2\cdot dx=\frac{64}{3}$

وعندما $S=3$ فإن: $S=3\Rightarrow\mu_3(x)=\frac{1}{8}\int_0^8 x^3\cdot dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^8$

$$\mu_3(x)=128$$

العزوم المركزية:

وتعطى بالعلاقة: $M_S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(x)\right]^S\cdot f(x)\cdot dx$

وعندما $s=0$ فإن: $M_0(x)=\frac{1}{8}\int_0^8\left[x-E(x)\right]^0\cdot dx=1$

وعندما $s=1$ فإن: $M_1(x)=\frac{1}{8}\int_0^8 \left[x-E(x)\right]^1\cdot dx=0$

وعندما $s=2$ فإن: $M_2(x)=\mu_2(x)-\mu_1^2(x)$

$$M_2(x)=\frac{64}{3}-(4)^2=\frac{16}{3}$$

وعندما $s=3$ فإن: $M_3=\mu_3-3\mu_1\cdot\mu_2+2\mu_1^3$

$$M_3=128-3\cdot 4\cdot\frac{64}{3}+2\cdot(4)^3=0$$

4 . معامل التناظر: ويعطى بالعلاقة:

(أي أن التوزيع متناظر) $k=\frac{M_3(x)}{\sigma_{(x)}^3}=k=\frac{0}{\frac{16}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}}=0$

6-3: التوزيع الأسي:

6-3-1: تعريف التوزيع الأسي للمتحول X:

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، ويأخذ جميع قيمه الممكنة في المجال $]\infty\ ,\ 0]$، فإن قانون التوزيع الأسي له يعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}ke^{-kx} & x>0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (36-6)$$

ويدعى توزيع X المعرف بالعلاقة (6-36) بالتوزيع الأسي وسيطه k، حيث $k>0$ (عدد موجب).

6-3-2: خواص قانون التوزيع الأسي: يحقق هذا التوزيع الخاصتين التاليتين:

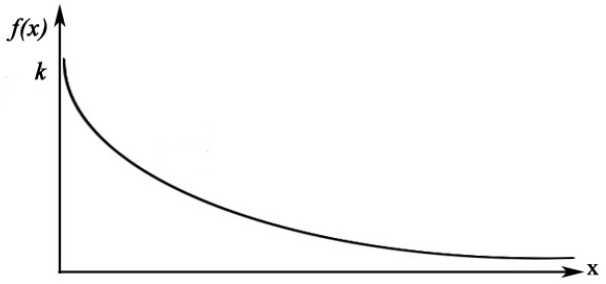
. نلاحظ أن: $f(x)\geq 0$.

. المساحة المحصورة تحت المنحني الذي يرسمه $f(x)$ تساوي الواحد، أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = \int_{0}^{\infty} ke^{-kx}\cdot dx = k\int_{0}^{\infty} e^{-kx}\cdot dx$$

$$= k\left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^{\infty} = k\left[+\frac{1}{k}\right] = 1$$

6-3-3: الشكل البياني للتوزيع الأسي: ويرسم التوزيع الأسي الشكل البياني التالي:



الشكل رقم (6-4)

نلاحظ أن منحنى توزيع x يقطع المحور العمودي في النقطة $(0,k)$ دوماً.

6-3-4: تابع التوزيع $F(X)$:

ويعطى تابع التوزيع بالعلاقة:

$$F(x_s) = P(X \le x_s) = \int_{-\infty}^{x_s} f(x)dx \qquad (37-6)$$

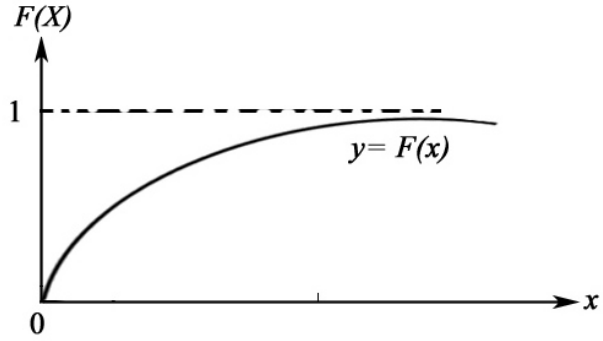
$$F(x) = P(X \le x) = \int_{0}^{x} ke^{-kx}\cdot dx = k\left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^{x}$$

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-kx} \qquad (38-6)$$

وبالتالي فإن تابع التوزيع الأسي $F(X)$ يعرف بالعلاقة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 1-e^{-kx} & x > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (39-6)$$

ويرسم تابع التوزيع الشكل البياني التالي:



الشكل البياني رقم (6-5)

ويمكن حساب الاحتمالات المختلفة بالتعويض في تابع التوزيع $F(X)$ مباشرة.

مثال (6-3):

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً وكان خاضعاً للتوزيع الأسي المعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-4x} & x>0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1 . إيجاد قيمة الثابت k.

2 . رسم الشكل البياني لـ $f(x)$.

3 . إيجاد تابع التوزيع $F(X)$ ثم ارسمه.

4 . حساب الاحتمالات التالية: $P\left(X\le\frac{1}{4}\right)$, $P(0.5\le X\le 1)$

الحل: باستخدام الخاصة التالية:

يكون لدينا: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

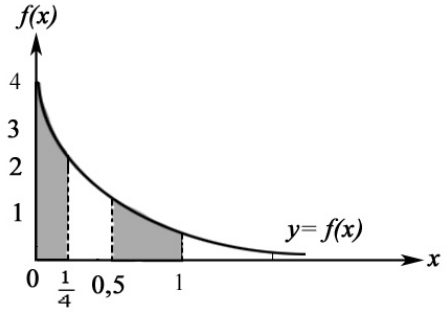
$$k\int_0^{\infty} e^{-4x}\cdot dx = k\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=1$$

$$k\left[-\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\right]=0+\frac{1}{4}k=1\Rightarrow k=4$$

وبالتالي يأخذ $f(x)$ الصيغة الآتية:

$$f(x)=\begin{cases}4e^{-4x} & x>0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

2 . ويرسم الشكل البياني التالي:



الشكل (6-6) الشكل البياني لـ $f(x)$

3 . تابع التوزيع $F(X)$:

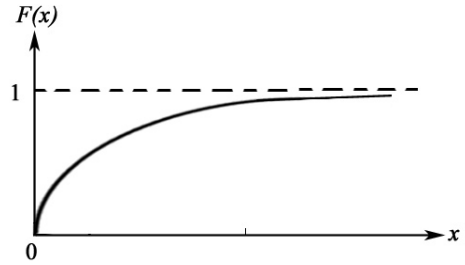
$$F(x)=P(X\le x)=4\int_0^x e^{-4x}dx=4\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^x$$

$$F(x)=1-e^{-4x}$$

ومنه نجد أن تابع التوزيع يأخذ الصيغة التالية:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-4x} & x>0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

ويرسم الشكل البياني التالي:



الشكل (6-7)الشكل البياني لـ $F(X)$

4 . حساب الاحتمالات:

$$P\left(X \le \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - e^{-4\left(\frac{1}{4}\right)} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

$$P(0.5 \le X \le 1) = F(1) - F(0.5) = \left[1 - e^{-4(1)}\right] - \left[1 - e^{-4(0.5)}\right]$$

$$P(0.5 \le X \le 1) = 0.98 - 0.86 = 0.12$$

وهي الأجزاء المظللة على الشكل البياني السابق.

6-3-5: القيم المركزية:

6-3-5-1: التوقع الرياضي:

يعرف التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X المستمر الذي يخضع للتوزيع الأسي بالعلاقة الآتية:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \qquad (40-6)$$

$$E(x) = k\int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-kx} \cdot dx = k\left[-\frac{1}{k} \cdot x \cdot e^{-kx}\right]_0^{\infty} + k\int_{0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{-kx} \cdot dx$$

نكامل بالتجزئة:

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-kx} \cdot dx = \left[-\frac{1}{k} \cdot e^{-kx}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{k}$$

$$E(x) = \frac{1}{k} \qquad (41-6)$$

6-3-5-2: الوسيط Me: ونحصل على الوسيط بحل المعادلة التالية:

$$F(x) = \frac{1}{2} \qquad (42-6)$$

$$1 - e^{-kx} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-kx} = \frac{1}{2}$$

وبأخذ اللوغاريتم النيبري للطرفين وإجراء الإصلاحات الرياضية نجد أن:

$$Me = x = \frac{\ell n \frac{1}{2}}{-k} \qquad (43-6)$$

6-3-5-3: التباين $\sigma^2_{(x)}$: ويعطى التباين بالعلاقة:

$$\sigma^2_{(x)} = \mu_2(x) - \mu_1^2(x) \qquad (44-6)$$

$$\mu_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\mu_2(x) = k \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-kx} \cdot dx$$

ونحسب التكامل بالتجزئة فنجد أن:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = e^{-kx}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{k} \cdot e^{-kx}$$

ومنه نجد:

$$k\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-kx} \cdot dx = k\left\{\left[-x^2 \frac{1}{k} \cdot e^{-kx}\right]_0^{\infty} + \frac{2}{k}\int_0^{\infty} x \cdot e^{-kx} \cdot dx\right\}$$

وبمتابعة التكامل وإجراء الإصلاحات الرياضية نجد أن:

$$\mu_2(x) = \frac{2}{k^2} \qquad (45-6)$$

وبالتعويض في علاقة التباين نجد أن:

$$\sigma^2_{(x)} = \frac{2}{k^2} - \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$\sigma^2_{(x)} = \frac{1}{k^2} \qquad (46-6)$$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma_{(x)} = \frac{1}{k} \qquad (47-6)$$

6-3-6: العزوم:

العزوم الابتدائية $\mu_s(x)$: تعطى العزوم الابتدائية بالعلاقة التالية:

$$\mu_S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\cdot dx \qquad (48-6)$$

$$\mu_S(x)=k\int_{0}^{+\infty} x^s e^{-kx}\cdot dx$$

عندما $S=0$ نجد أن: $\mu_0(x)=k\int_0^{\infty} x^0\cdot e^{-kx}dx=1$

عندما $S=1$ نجد أن: $\mu_1(x)=k\int_0^{\infty} x^1\cdot e^{-kx}dx=E(x)=\frac{1}{k}$

العزوم المركزية $M_S(x)$: تعطى العزوم المركزية بالعلاقة التالية:

$$M_S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(x)\right]^s f(x)\cdot dx \qquad (49-6)$$

$$M_S(x)=k\int_{0}^{+\infty}\left[x-E(x)\right]^s e^{-kx}\cdot dx$$

عندما $s=0$ نجد أن: $M_0(x)=k\int_0^{\infty}\left[x-E(x)\right]^0\cdot e^{-kx}\cdot dx=1$

وعندما $s=1$ نجد أن: $M_1(x)=k\int_0^{\infty}\left[x-E(x)\right]^1\cdot e^{-kx}\cdot dx=0$

وعندما $s=2$ نجد أن: $M_2(x)=k\int_0^{\infty}\left[x-E(x)\right]^2\cdot e^{-kx}\cdot dx=\frac{1}{k^2}$

أي أن: $\sigma^2_{(x)}=M_2(x)=\frac{1}{k^2}$

6-3-7: التابع المولد للعزوم للتوزيع الأسي: يعرف التابع المولد للعزوم بالعلاقة العامة الآتية:

$$\Psi x(t)=E\left[e^{tx}\right] \qquad (50-6)$$

وبما أن X متحول مستمر، فإن التابع المولد للعزوم يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Psi_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\cdot f(x)\cdot dx \qquad (51-6)$$

$$= k\int_0^{\infty} e^{tx}\cdot e^{-kx}\cdot dx = k\int_0^{\infty} e^{(t-k)x}\cdot dx$$

$$= k\left[\frac{1}{t-k}e^{(t-k)x}\right]_0^{\infty}$$

وبإجراء الإصلاحات الرياضية نجد أن:

$$\Psi_x(t) = \frac{k}{k-t} \qquad t<k \qquad (52-6)$$

وبالاشتقاق المتتالي للتابع المولد للعزوم بالنسبة لـ t وبوضع $t=0$ نحصل على العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة، ومن ثم نحصل على العزوم المركزية، أي:

$$\mu_1(x) = \Psi'_x(t) = \left.\frac{k}{(k-t)^2}\right|_{t=0} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

$$\mu_2(x) = \Psi''_x(t) = \left.\frac{2k(k-t)}{(k-t)^2}\right|_{t=0} = \frac{2}{k^2}$$

$$\mu_3(x) = \Psi'''_x(t) = \frac{6}{k^3}$$

وهكذا...

أما بالنسبة للعزوم المركزية نستخدم العلاقة: $M_S(x) = E\left[x - E(x)\right]^S$

وعندما: $s = 1,2,3,...$ ، نجد أن: ..... $M_1 = 0$, $M_2 = \frac{1}{k^2}$

وهكذا نحصل على العزوم المركزية من مختلف المراتب مع الاستعانة بالعزوم الابتدائية.

6-3-8: معامل التناظر: يعطى معامل التناظر بالعلاقة:

$$K = \frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}} \qquad (53-6)$$

فإذا كان: $K = 0$ فالتوزيع متناظر.

أما إذا كان: $K > 0$ التوزيع ملتوٍ نحو اليمين.

أما إذا كان: $K<0$ التوزيع ملتوٍ نحو اليسار.

مثال (6-4):

باستخدام معطيات المثال رقم (6-3) والمطلوب:

1 . إيجاد التوقع والتباين للمتحول X والانحراف المعياري.

2 . إيجاد الوسيط Me .

3 . إيجاد العزوم الابتدائية والعزوم المركزية حتى المرتبة الثالثة.

4 . إيجاد التابع المولد للعزوم ثم أوجد العزوم الابتدائية والعزوم المركزية حتى المرتبة الثالثة، ثم قارن بينها وبين العزوم في الطلب الثالث.

5 . إيجاد معامل التناظر.

الحل:

1 . التوقع الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\cdot dx$$

$$E(x)=4\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-4x}\cdot dx=4\left[-x\cdot\frac{e^{-4x}}{4}\right]_0^{\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-4x}\cdot dx$$

$$=0-\left[\frac{e^{-4x}}{4}\right]_0^{\infty}=-\left[0-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}$$

أو مباشرة من العلاقة (6-41):

$$E(x)=\frac{1}{k}=\frac{1}{4}$$

التباين $\sigma^2_{(x)}$ ، ويحسب من العلاقة:

$$\sigma^2_{(x)}=E\left(x^2\right)-E^2(x)$$

$$E\left(x^2\right)=4\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot e^{-4x}\cdot dx=\frac{2}{k^2}=\frac{2}{16}$$

نعوض في علاقة التباين فنجد:

$$\sigma^2_{(x)} = \frac{2}{16} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\sigma^2_{(x)} = \frac{1}{16}$$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي: $\sigma_{(x)} = \frac{1}{4}$

2 . وسيط المتحول X الخاضع للتوزيع الأسي، ونحصل عليه بحل المعادلة:

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

$$1 - e^{-4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow -4x = \ln\frac{1}{2}$$

ومنه فإن: $Me = x \approx 0.173$

أو من العلاقة (6−43) مباشرة:

$$Me = x = \frac{\ell n\frac{1}{2}}{-k} = \frac{\ell n\frac{1}{2}}{-4}$$

$$Me = x = 0.173$$

3 . العزوم الابتدائية $\mu_S(x)$ ، وتعطى بالعلاقة:

$$\mu_S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \cdot f(x)\,dx$$

$$\mu_S(x) = 4\int_{0}^{+\infty} x^s \cdot e^{-4x} \cdot dx$$

وعندما $s = 0$ فإن: $\mu_0(x) = 4\int_0^{\infty} x^0 \cdot e^{-4x} \cdot dx = 1$

وعندما $s = 1$ فإن: $\mu_1(x) = 4\int_0^{\infty} x^1 \cdot e^{-4x} \cdot dx = E(x) = \frac{1}{4}$

وعندما $s = 2$ فإن: $\mu_2(x) = 4\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-4x} \cdot dx = \frac{2}{16}$

وعندما $s = 3$ فإن: $\mu_3(x) = 4\int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-4x} \cdot dx = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

العزوم المركزية $M_s(x)$:

وتعطى بالعلاقة: $$M_s(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(x)\right]^s\cdot f(x)\cdot dx$$

وعندما $s=0$ فإن: $$M_0(x)=4\int_0^{\infty}\left[x-E(x)\right]^0\cdot e^{-4x}\cdot dx=1$$

وعندما $s=1$ فإن: $$M_1(x)=4\int_0^{\infty}\left[x-E(x)\right]^1\cdot e^{-4x}\cdot dx=0$$

أما بقية العزوم المركزية فيمكن إيجادها من العلاقة العامة:

$$M_S(x)=E\left[x-E(x)\right]^S$$

وعندما $s=2$ فإن: $$M_2=\mu_2-\mu_1^2=\frac{2}{16}-\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$M_2(x)=\frac{1}{16}$$

وعندما $s=3$ فإن: $$M_3(x)=\mu_3-3\mu_2\cdot\mu_1+2\mu_1^3$$

$$=\frac{3}{32}-3\cdot\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$M_3(x)=\frac{1}{32}$$

4 . التابع المولد للعزوم $\Psi_x(t)$:

$$\Psi_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\cdot f(x)\cdot dx$$

$$\Psi_x(t)=4\int_0^{+\infty}e^{tx}\cdot e^{-4x}\cdot dx=4\int_0^{+\infty}e^{(t-4)x}\cdot dx$$

$$=4\left[\frac{1}{t-4}\cdot e^{(t-4)x}\right]_0^{\infty}=-\frac{4}{t-4}$$

$$\Psi_x(t)=\frac{4}{4-t}\qquad t<4$$

وهو التابع المولد للعزوم $\Psi_x(t)$.

ولإيجاد العزوم الابتدائية باستخدام التابع المولد للعزوم، نشتق التابع $\Psi_x(t)$، فنجد:

$$\mu_0(x) = \Psi_x(t)\big|_{t=0} = 1$$

$$\mu_1(x) = \Psi'_x(t) = \frac{4}{(4-t)^2}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{4}$$

$$\mu_2(x) = \Psi''_x(t) = \frac{8(4-t)}{(4-t)^4}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{8}$$

$$\mu_3(x) = \Psi'''_x(t) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

أما بالنسبة للعزوم المركزية فنجد أن:

$$M_S(x) = E\left[x - E(x)\right]^S$$

وعندما $s=0$ فإن: $M_0(x) = E\left[x - E(x)\right]^0 = 1$

وعندما $s=1$ فإن: $M_1(x) = E\left[x - E(x)\right]^1 = 0$

وعندما $s=2$ فإن: $M_2(x) = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

$$M_2(x) = \frac{1}{16}$$

وعندما $s=3$ فإن: $M_3(x) = \mu_3 - 3\mu_2 \cdot \mu_1 + 2\mu_1^3$

$$= \frac{3}{32} - 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{32}$$

وبمقارنة العزوم التي حصلنا عليها باستخدام التابع المولد للعزوم، نجد أنها متطابقة مع العزوم التي حصلنا عليها في الطلب الثالث.

5 . معامل التناظر: ويعطى بالعلاقة:

$$K = \frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4}} = 2 > 0$$

والتوزيع غير متناظر، بل متلوٍ نحو اليمين .

مثال (6-5):

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً يعبر عن زمن خدمة المشتري في المخزن ويخضع للتوزيع الأسي. ولنفرض أن متوسط الزمن اللازم لخدمة المشتري يساوي 20 دقيقة. والمطلوب: ماهو احتمال انتظار شخص دوره في الخدمة بين 20 و40 دقيقة، وماهو احتمال انتظار دوره عشر دقائق وأقل.

الحل:

نلاحظ أن X متحول عشوائي يخضع لقانون التوزيع الأسي، الذي يأخذ الصيغة التالية:

$$f(x) = k \cdot e^{-kx} \qquad k > 0$$

نعلم أن التوقع الرياضي للتوزيع الأسي يساوي: $E(x) = \frac{1}{k}$

ومنه فإن: $E(x) = \frac{1}{k} = 20 \Rightarrow k = \frac{1}{20}$

ويصبح قانون التوزيع الأسي للمتحول X من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{1}{20}x}$$

وبالتالي فإن تابع $F(X)$ يصبح من الشكل التالي:

$$F(X) = 1 - e^{-kx} \qquad = 1 - e^{-\frac{1}{20}x}$$

ومنه فإن:

$$P(20 \le X \le 40) = F(40) - F(20)$$

$$= \left[1 - e^{-\frac{1}{20}\cdot 40}\right] - \left[1 - e^{-\frac{1}{20}\cdot 20}\right]$$

$$= \left[1 - e^{-2}\right] - \left[1 - e^{-1}\right]$$

$$= 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P(20 \le X \le 40) \approx 0.233$$

$$P(X \le 10) = F(10) = 1 - e^{-\frac{1}{20}\cdot 10} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.393$$

6-4: قانون التوزيع الطبيعي العام:

6-4-1: تعريف قانون التوزيع الطبيعي العام للمتحول X:

إذا كان X متحولاً عشوائياً طبيعياً أو مستمراً على المجال $]-\infty,+\infty[$، فإن قانون التوزيع الطبيعي العام له يعرف بالعلاقة:

$$f(x) = k \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} : -\infty < X < +\infty \qquad (54-6)$$

حيث μ, σ وسيطان عدديان و $k > 0,\ \sigma > 0$. وسنحدد قيمة كل سهم فيما بعد ولإيجاد قيمة الثابت k نكتب الشرط الثاني كمايلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

$$k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx = 1$$

لإجراء هذا التكامل نجري التحويل التالي، نفرض أن:

$t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $x - \mu = t \cdot \sigma \Rightarrow x = \sigma t + \mu$

$$dx = \sigma \cdot dt$$

نحسب حدود التكامل الجديدة فنجد أنه عندما $x \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty$

$$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$$

وبالتعويض في التكامل السابق نجد أن:

$$k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \sigma \cdot dt = k \cdot \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt = 1 \qquad (55-6)$$

ونعلم أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qt^2} \cdot dt = \sqrt{\frac{\pi}{q}} \qquad (55a-6)$$

حيث $q > 0$ عدد ثابت هو أمثال t^2، ومنه فإن العلاقة (6-55) تأخذ الشكل التالي:

$$k\sigma\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=k\sigma\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=1\Rightarrow k\sigma\sqrt{2\pi}=1$$

أي أن: $$K=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

وبالتعويض في العلاقة (6−54) نحصل على الصيغة النهائية المحددة للتوزيع الطبيعي العام التالي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\qquad -\infty<X<+\infty\quad(56-6)$$

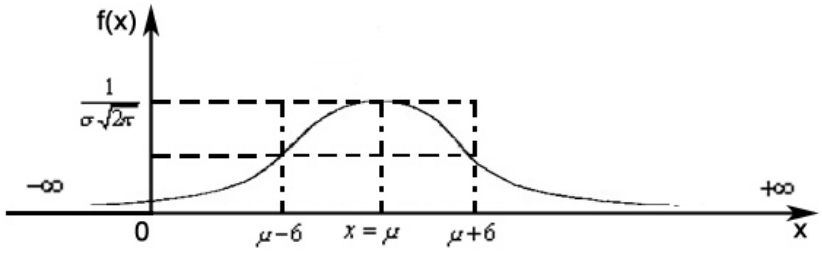
حيث σ,μ وسيطان عدديان و $\sigma>0$، وبالتالي فإنه يمكننا أن نقول إن X المتحول العشوائي المستمر يخضع للتوزيع الطبيعي العام، بتوقع رياضي μ وتباين σ^2، ويرمز له بـ $X:\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

ويسمى هذا التوزيع أيضاً بتوزيع (غوص . لابلاس). ويعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية على الإطلاق.

ولتحديد شكله البياني، نلاحظ أنه عندما $X=\mu$ فإن التابع يأخذ نهايته العظمى التي إحداثياتها $\left(\mu,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$.

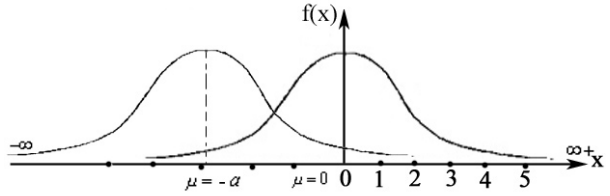
وعندما: $X\to\pm\infty$ فإن: $f(x)\to 0$.

كما نلاحظ أن: $f(x)$ متناظر بالنسبة للمستقيم $X=\mu$، وله نقطتا انعطاف متناظرتان مقابل النقطتين $x_1=\mu+\sigma$, $x_2=\mu-\sigma$. ومنه فإن $f(x)$ يرسم الشكل البياني التالي:



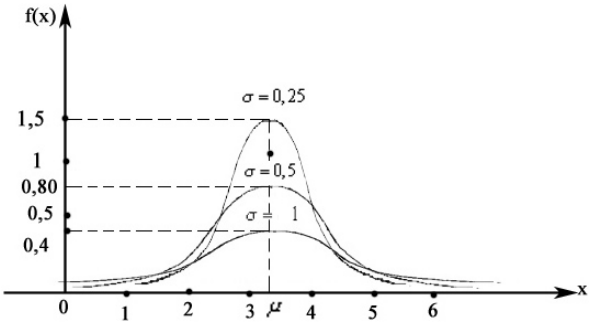
الشكل رقم (6−8)

ويمكن أن يكون شكل المنحني متناظراً بالنسبة للمحور العمودي $f(x)$ ، وذلك عندما يكون $\mu = 0$ ، ويمكن أن يقع المنحني في الجزء السالب (الربع الثاني)، وذلك عندما يكون $\mu = -a$ ، كما هو موضح في الشكل البياني رقم (6-9) التالي:



الشكل رقم (6-9)

أما بالنسبة لـ σ^2، فنلاحظ أنه عندما تزداد σ فإن منحني التوزيع يصبح أكثر انبساطاً على طول المحور OX. وعندما تتناقص σ فإن منحني التوزيع يصبح أكثر تطاولاً وانضغاطاً من الجانبين، وذلك مع بقاء التوقع ثابتاً في الحالات المختلفة، ومن أجل إيضاح ذلك. نفترض أنه لدينا ثلاثة متحولات خاضعة للتوزيعات $X \sim N(3,1)$ و $Y \sim N(3,0.5)$ و $Z \sim N(3,0.25)$. لنرسم الأشكال البيانية لهذه التوزيعات على نفس الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-10)

من الشكل البياني السابق نلاحظ مدى تطاول أو تفرطح منحنى التوزيع حسب قيم σ.

6-4-2: خواص قانون التوزيع الطبيعي $f(x)$:

حتى يكون $f(x)$ قانون توزيع يجب أن يحقق الشرطين التاليين:

. إن $f(x) \geq 0$ وهذه الخاصة محققة باعتبار أن $\sigma > 0$.

. إن المساحة المحصورة تحت المنحني البياني لـ $f(x)$ تساوي الواحد، أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1$$

وبإدخال متحول جديد t حيث: $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$، وإيجاد حدود التكامل وإجراء الإصلاحات الرياضية كما فعلنا سابقاً، فإن العلاقة السابقة تصبح على الشكل التالي:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = 1$$

6-4-3: تابع التوزيع الطبيعي $F(X)$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$F(X) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot dx \qquad (57-6)$$

لمعالجة هذا التكامل نفرض أن: $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\sigma t = x - \mu$$

$$x = \sigma t + \mu \Rightarrow dx = \sigma\cdot dt$$

كما نجد أنه عندما:

$$X \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty$$

$$X \to x \Rightarrow t \to \frac{x-\mu}{\sigma}$$

بالتعويض في التكامل السابق نجد أن:

$$P(X \le x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot dt \qquad (58-6)$$

ومن هذه العلاقة يمكن إيجاد الاحتمالات المختلفة. إلا أن حساب التكامل السابق غير ممكن حتى الآن، لذلك تم إيجاد قيمة تقريبية له، وذلك عن طريق نشره حسب سلسلة تايلور في جوار نقاط متتالية، وذات خطوات صغيرة. ولسهولة النشر تم اختيار الحالة التي يكون فيها $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ ، وبالتالي يصبح تابع التوزيع بالصيغة التالية:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot dx \qquad (59-6)$$

ويدعى هذا التكامل بتابع التوزيع الطبيعي المعياري الذي سندرسه في الفقرة (6-5) اللاحقة، واعتماداً عليه سوف نتوصل إلى حساب الاحتمالات المختلفة للمتحولات الخاضعة للتوزيع الطبيعي العام $N(\mu,\sigma^2)$.

6-4-4: القيم المركزية:

. التوقع الرياضي للمتحول الطبيعي X :

ويعطى بالعلاقة التالية:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot dx \qquad (60-6)$$

ولحساب هذا نفرض أن:

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$x-\mu=\sigma t$$

$$x=\sigma t+\mu \Rightarrow dx=\sigma\cdot dt$$

وكذلك نجد أن حدود التكامل الجديدة تصبح نفسها كما يلي:

$$X\to-\infty \Rightarrow t\to-\infty$$

$$X\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty$$

نعوض في العلاقة (6-60) فنجد أن:

$$E(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot\sigma dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma t\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot dt$$

وبإجراء الإصلاحات الرياضية مع الاستفادة من العلاقة (6-55a) نجد أن:

$$E(x)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=0+\mu$$

$$E(x)=\mu \qquad (61-6)$$

أي أن العدد μ الوارد في التعريف هو التوقع الرياضي لـ X.

التباين $\sigma^2_{(x)}$:

$$\sigma^2_{(x)} = \mu_2(x) - \mu_1^2(x)$$

ولكن $(62-6)$ $$\mu_2(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

نفرض أن:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma t + \mu$$

$$dx = \sigma \cdot dt$$

ومنه: $$x^2 = (\sigma t + \mu)^2 = \sigma^2 t^2 + 2\sigma\mu t + \mu^2$$

ونلاحظ أن حدود التكامل تبقى نفسها.

وبالتعويض في العلاقة (6−62) نجد أن:

$$\mu_2(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma \cdot dt +$$

$$+ \frac{2\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma \cdot dt + \frac{\mu^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt \qquad (63-6)$$

لنأخذ التكامل الأول ونكتبه كما يلي.

$$A = \frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma \cdot dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة المعرّف بـ $\int_{-\infty}^{+\infty} udv = u \cdot v - \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot du$ نضع:

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \Rightarrow v = -e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$A = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt\right\} = 0 + \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} = \sigma^2$$

$$B = \frac{2\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \sigma dt = \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$C = \frac{\mu^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma \cdot dt = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt$$

$$C = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \mu^2$$

وبتعويض كلٍ من A وB وC في العلاقة (6−63) نجد أن:

$$\mu_2(x) = \sigma^2 + 0 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 \qquad (64-6)$$

وبالتعويض في علاقة التباين نجد:

$$\sigma^2(x) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2 \qquad (65-6)$$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2} \qquad (66-6)$$

أي أن العدد الموجب σ الوارد في التعريف هو عبارة عن الانحراف المعياري لـ X

ومنه يمكن القول إنه إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً ويخضع لقانون التوزيع الطبيعي العام $N(\mu,\sigma^2)$، فإن توقعه يساوي μ، وتباينه يساوي σ^2 ، ونعبر عن ذلك بالرمز $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

مثال (6−6):

إذا كان $X \sim N(100,25)$ فأوجد صيغة قانون التوزيع للمتحول X.

الحل: نلاحظ أن X يخضع لقانون التوزيع الطبيعي العام، الذي يأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

وباعتبار أن $\mu = 100$، وتباينه يساوي $\sigma^2 = 25$، وانحرافه المعياري $\sigma = 5$ فإن قانون توزيع X يصبح على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{5}\right)^2}$$

6-4-5: العزوم:

العزوم الابتدائية $\mu_s(x)$ وتعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu_S(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx \qquad (67-6)$$

فعندما $s = 0$ فإن:

$$\mu_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx = 1$$

وعندما $s = 1$ فإن:

$$\mu_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

$$\mu_1(x) = E(x) = \mu$$

وعندما $s = 2$ فإن:

$$\mu_2(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

$$\mu_2(x) = \sigma^2 + \mu_1(x)$$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم الابتدائية المختلفة.

. العزوم المركزية $M_S(x)$ تعطى العزوم المركزية بالعلاقة العامة التالية:

$$M_S(x) = E\left[x - E(x)\right]^S \qquad (68-6)$$

فعندما $s = 0$ فإن:

$$M_0(x) = E\left[x - E(x)\right]^0 = 1$$

وعندما $s = 1$ فإن:

$$M_1(x) = E\left[x - E(x)\right]^1 = 0$$

ولحساب العزوم المركزية المتتالية من المرتبة s نكتبها كما يلي:

$$M_S(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - \mu_1(x)\right]^s \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx \qquad (69-6)$$

نفرض أن:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$x - \mu = \sigma \cdot t$$

$$dx = \sigma \cdot dt$$

أما حدود التكامل الجديدة فتبقى نفسها لأن:

$$X \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty$$

$$X \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$$

وتصبح العلاقة (6-69) على الشكل التالي:

$$M_S(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t)^s \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \sigma dt$$

$$M_S(x) = \frac{\sigma^S}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^s \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt \qquad (70-6)$$

لنكتب العلاقة (6-70) على الشكل التالي:

$$M_S(x) = \frac{\sigma^S}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{s-1} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt \qquad (71-6)$$

لحساب هذا التكامل بالتجزئة نفرض أن:

$$u = t^{S-1} \Rightarrow du = (s-1)t^{S-2} \cdot dt$$

$$dv = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \Rightarrow V = -e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$M_S(x) = \frac{\sigma^S}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-t^{S-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + (s-1) \int_{-\infty}^{+\infty} t^{s-2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt \right\}$$

وبإجراء الإصلاحات الرياضية نلاحظ أن الحد الأول يساوي الصفر، وبذلك نجد أن:

$$M_S(x) = \frac{\sigma^S}{\sqrt{2\pi}} \cdot (s-1) \int_{-\infty}^{+\infty} t^{S-2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt \qquad (72-6)$$

وقياساً على العلاقة (6-70) يمكننا أن نكتب تلك العلاقة على الشكل التالي:

$$M_{(S-2)}(x) = \frac{\sigma^{S-2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{S-2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt$$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة $\sqrt{2\pi}$، والتقسيم على σ^{S-2} نجد أن:

$$\frac{M_{(S-2)}(x)\cdot\sqrt{2\pi}}{\sigma^{S-2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}t^{S-2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot dt \qquad (73-6)$$

نعوض العلاقة (6−73) في العلاقة (6−72) فنجد:

$$M_S(x)=\frac{\sigma^s}{\sqrt{2\pi}}(S-1)\cdot\frac{M_{(S-2)}(x)\cdot\sqrt{2\pi}}{\sigma^{S-2}}$$

وبإجراء الاختصارات اللازمة نجد:

$$M_S(x)=\sigma^2(s-1)\cdot M_{(S-2)}(x) \qquad (74-6)$$

ومن هذه العلاقة يمكن إيجاد كافة العزوم المركزية من المراتب المختلفة والمتتالية ابتداءاً من العزم المركزي من المرتبة الثانية، فيكون لدينا:

عندما $s=2$ يكون: $M_2(x)=\sigma^2_{(2-1)}\cdot M_{(2-2)}=\sigma^2\cdot M_0=\sigma^2=1=\sigma^2$

عندما $s=3$ يكون: $M_3(x)=2\sigma^2\cdot M_1=2\sigma^2\cdot 0=0$

عندما $s=4$ يكون: $M_4(x)=3\sigma^2\cdot M_2(x)=3\sigma^2\cdot\sigma^2=3\sigma^4$

عندما $s=5$ يكون: $M_5(x)=4\sigma^2\cdot M_3(x)=4\sigma^2\cdot 0=0$

عندما $s=6$ يكون: $M_6(x)=5\sigma^2\cdot M_4(x)=5\sigma^2\cdot 3\sigma^4=15\sigma^6$

ونلاحظ أن جميع العزوم المركزية من المراتب الفردية تساوي الصفر، وذلك لأن التوزيع متناظر بالنسبة للتوقع، كما سنرى عند دراسة الواقع التناظري للتوزيع.

وبالتالي فإننا نستنتج العلاقة الهامة التالية:

$$M_S(x)=\begin{cases}0 & \text{إذا كان S فردياً}\\ (S-1)!!\sigma^S & \text{إذا كان S زوجياً}\end{cases} \qquad (75-6)$$

حيث $(S-1)!!$ تعني العاملي الفردي، أي:

$$(S-1)!!=(S-1)\cdot(S-3)\cdot(S-5)....3\cdot 1$$

وكمثال على هذا العاملي نضع $s=10$، فنجد أن:

$$(S-1)!!=(10-1)!!=9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$$

6-4-6: التابع المولد للعزوم $\Psi x(t)$:

يعرف التابع المولد للعزوم بالعلاقة الآتية:

$$\Psi_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx \qquad (76-6)$$

$$\Psi_x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

نفرض أن:

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$x = \sigma \cdot u + \mu$$

$$dx = \sigma \cdot du$$

ومنه نجد أن:

$$\Psi_x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\sigma u+\mu)} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot \sigma \cdot du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\sigma u + t\mu} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot du = \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2 + t\sigma u} \cdot du$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2 - 2t\sigma u + \sigma^2 t^2 - \sigma^2 t^2\right)} \cdot du$$

وبإجراء بعض الترتيبات الرياضية نجد أن:

$$\Psi_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-\sigma t)^2} \cdot du$$

نفرض الآن أن: $Z = u - \sigma t$ ومنه نجد: $dz = du$

$$\Psi_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{t\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}\cdot dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{t\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$\Psi_x(t)=e^{t\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2}} \qquad (77-6)$$

وهو التابع المولد للعزوم $\Psi x(t)$، ومن هذا التابع يمكن إيجاد العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة، فعندها يكون:

$$\mu_1(x)=\psi'_x(t)\big|_{t=0}=\mu$$

$$\mu_2(x)=\psi''_x(t)\big|_{t=0}=\sigma^2+\mu_1^2(x)$$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم الابتدائية.

أما بالنسبة للعزوم المركزية فيمكن إيجادها من العلاقة (6-75).

6-4-7: مقاييس التناظر:

- **معامل التناظر k**، ويعطى هذا المعامل بالعلاقة:

$$k=\frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}} \qquad (78-6)$$

لإيجاد $M_3(x)$ نستخدم العلاقة (6-75)، ونلاحظ أن S فردي، وبالتالي فإن $M_3(x)=0$، ومنه نجد أن:

$$k=\frac{0}{\sigma^3\cdot\sigma}=0$$

نستنتج أن التوزيع الطبيعي متناظر بالنسبة للتوقع الرياضي.

- **معامل التطاول:**

ويعطى بالعلاقة التالية: $(78-6)$ $$L=\frac{M_4(x)}{\sigma^4_{(x)}}$$

لإيجاد $M_4(x)$ نستخدم العلاقة (6-75) فنجد أن:

$$M_4(x)=(4-1)!!\cdot\sigma^4=3\cdot1\cdot\sigma^4=3\sigma^4$$

وبالتعويض في العلاقة (79−6) نجد أن:

$$L=\frac{3\sigma^4}{\sigma^2\cdot\sigma^2}=\frac{3\sigma^4}{\sigma^4}=3$$

وبما أن: $L=3$ فإن تطاول هذا التوزيع طبيعي لذلك تم أخذ الرقم 3 كأساس لقياس التطاول.

مثال (6−7):

إذا كان X متحولاً عشوائياً حيث $X \square N(5,25)$ ، والمطلوب:

1 . إيجاد صيغة قانون توزيع X ورسمه.

2 . إيجاد توقع وتباين X.

3 . إيجاد التابع المولد للعزوم $\Psi_x(t)$.

4 . دراسة واقعه التناظري.

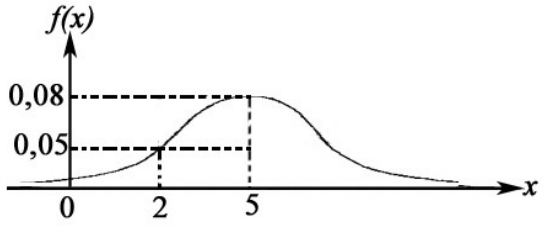
5 . رسم المنحني البياني لـ $f(x)$ ، عندما $\sigma=2$, $\sigma=1$ ، ثم المقارنة بينهما، وبين المنحني البياني لـX عندما $\sigma=5$ ، وذلك على نفس الشكل البياني السابق.

الحل:

1 . نلاحظ أن X يخضع لقانون التوزيع الطبيعي من الشكل:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{5}\right)^2}$$

2 . $E(x)=\mu=5 \qquad \sigma^2_{(x)}=\sigma^2=25$



شكل (6−11)

3 . التابع المولد للعزوم ويعطى بالعلاقة (77−6) التالية:

$$\Psi_x(t) = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\Psi_x(t) = e^{5t + \frac{25t^2}{2}}$$

$$\Psi_x(t)\Big|_{t=0} = 1$$

$$\Psi'_x(t)\Big|_{t=0} = \mu_1(x) = 5$$

$$\Psi''_x(t)\Big|_{t=0} = \mu_2(x) = \sigma^2 + \mu_1^2 = 25 + 25 = 50$$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة.

4 . معامل التناظر الطبيعي، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$K = \frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}}$$

وبما أن $M_3(x) = 0$ ، فإن: $K = \frac{0}{\sigma^3(x)} = 0$

والتوزيع متناظر.

معامل التطاول الطبيعي، ويعطى بالعلاقة التالية: $L = \frac{M_4(x)}{\sigma^4_{(x)}}$

وحسب العلاقة (6−75) نجد أن: $M_4(x) = (4-1)!!\cdot\sigma^4 = 3\cdot 1\cdot\sigma^4 = 3\cdot\sigma^4$

ومنه: $L = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$ والتوزيع ذو تطاول طبيعي.

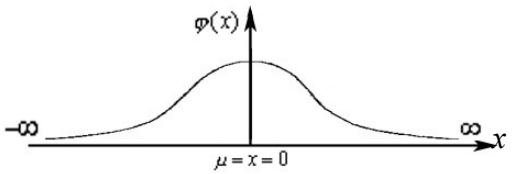
6−5: التوزيع الطبيعي المعياري:

6−5−1: تعريف التوزيع الطبيعي المعياري:

إنه حالة خاصة من قانون التوزيع الطبيعي والتي يكون فيها التوقع الرياضي $\mu = 0$ ، والانحراف المعياري $\sigma = 1$، عندئذ نقول إن المتحول العشوائي X يخضع لتوزيع يدعى بالتوزيع الطبيعي المعياري ونرمز له $\varphi(x)$ ويأخذ الشكل التالي:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad : -\infty < X < +\infty \qquad (80-6)$$

ويرمز له بـ $X : N(0,1)$. ويرسم الشكل البياني التالي:



شكل (6-12)

6-5-2: خواصه:

إن:

$$\varphi(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

نلاحظ من تعريف هذا التوزيع أن توقعه الرياضي $E(x) = 0$ ، وتباينه $\sigma^2 = 1$.

6-5-3: تابع التوزيع $\Phi(x)$:

ويرمز لتابع التوزيع الطبيعي المعياري بـ $\Phi(x)$، ويعطى العلاقة التالية:

$$P(X \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x) \cdot dx$$

$$P(X \leq x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx \qquad (81-6)$$

لذلك يرمز للطرف الأيمن بالعلاقة المشهورة التالية:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx \qquad (82-6)$$

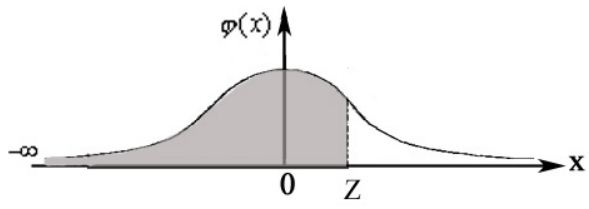
وهكذا نحصل على أن:

$$P(x \leq z) = \Phi(z) \qquad (82a-6)$$

وهكذا نجد أن:

$$P(x \geq z) = 1 - \Phi(z) \qquad (82b-6)$$

وتوجد في آخر الكتاب جداول خاصة تعطينا الاحتمالات المقابلة لقيم $\Phi(z)$، وذلك من أجل قيم $z \geq 0$. وإن العلاقة (82a–6) تعطينا المساحة المحصورة تحت المنحني من $-\infty$ حتى نقطة محددة $X = z$ ، وتمثل احتمال وقوع المتحول X في $]-\infty, z[$، كما في الشكل البياني التالي:



الشكل رقم (6–13)

ولحساب قيم تابع التوزيع المقابلة للقيم السالبة نعلم أنه إذا كانت $Z > 0$ فإن الاحتمالات المقابلة للقيم السالبة $-Z$ تحسب من العلاقة التالية:

$$\Phi(-z) = 1 - P(X \leq z) = 1 - \Phi(z) \qquad (83-6)$$

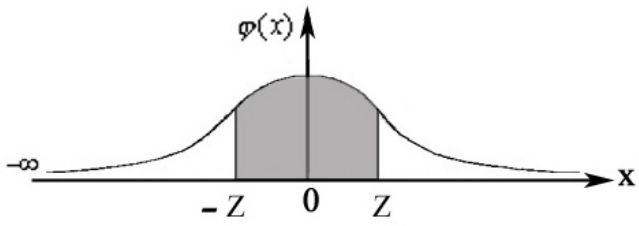
وكذلك يمكن حساب الاحتمالات التالية:

$$P(-z \leq X \leq z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = \Phi(z) - 1 + \Phi(z)$$

$$P(-z \leq X \leq z) = 2\Phi(z) - 1 \qquad (84-6)$$

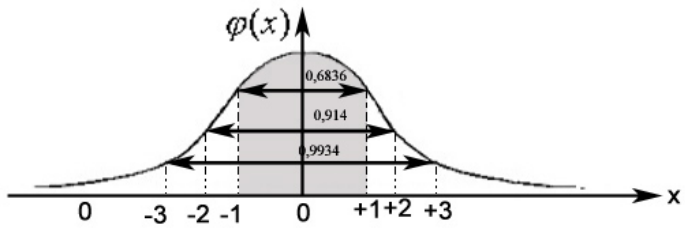
ويمثل هذا الاحتمال وقوع المتحول X في المجال $[-z, z]$.

كما في الشكل البياني التالي:



الشكل رقم (6–14)

ومن أهم خصائص منحنى التوزيع الطبيعي المعياري أنه متناظر بالنسبة للمحور الشاقولي والمساحة المحصورة تحته تساوي الواحد، وموزعة على الشكل التالي:



الشكل رقم (6-15)

ويمكن التعبير عن المساحة المحصورة تحت المنحنى بالاحتمالات أي:

$$P(-1 \le x \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$$
$$= 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$$
$$P(-2 \le x \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$
$$P(-3 \le x \le 3) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0.9987 - 1 = 0.9974$$

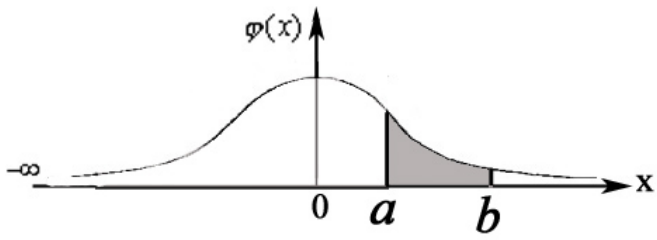
أما بالنسبة للمساحة المحصورة تحت المنحني وفوق المحور OX وبين المستقيمين $X = a$ حيث $X = b$, $a < b$ تساوي الاحتمالي التالي:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b \varphi(x) \cdot dx \qquad (85-6)$$

وهي تمثل احتمال وقوع X في المجال $[a,b]$ ، ويحسب هذا الاحتمال من تابع التوزيع على الشكل التالي:

$$P(a \le x \le b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^{a} \varphi(x) \cdot dx$$
$$P(a \le x \le b) = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (86-6)$$

وهي تمثل بيانياً على الشكل التالي:



الشكل رقم (6-16)

مثال (6-8):

إذا كـان X متحـولاً عشـوائياً ويخضـع لقـانون التوزيـع الطبيعـي المعيـاري، والمطلوب حساب الاحتمالات التالية:

$$P(X<-2),\ P(X\le 1),\ P(X\ge 3),\ P(X\le 2)$$
$$P(|X|\le 3),\ P(-2\le X\le +2),\ P(X\ge -2)$$
$$P(X\le 0),\ P(X\le -\infty),\ P(X\le +\infty)$$

الحل: سنقوم بحساب هذه الاحتمالات اعتماداً على جداول $\Phi(z)$ في الملحق.

$$P(X\le 2)=\Phi(2)=0.9772$$
$$P(X\ge 3)=1-P(X\le 3)=1-\Phi(3)=1-0.9986=0.0014$$
$$P(X\le 1)=\Phi(1)=0.8413$$
$$P(X<-2)=1-P(X\le +2)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$$
$$P(X\ge -2)=1-P(X\le -2)=1-\left[1-\Phi(2)\right]=\Phi(2)=0.9772$$
$$(-2\le X\le 2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-1+\Phi(2)$$
$$=2\Phi(2)-1=2\cdot 0.9772-1=0.9544$$
$$P(|X|\le 3)=P(-3\le X\le 3)=2\Phi(3)-1$$
$$=2\cdot 0.9986-1=0.9972$$
$$P(X<-\infty)=\Phi(-\infty)=0$$
$$P(X<+\infty)=\Phi(+\infty)=1$$
$$P(X\le 0)=\Phi(0)=0.5$$

6-5-4: معايرة المتحول X الخاضع للتوزيع الطبيعي العام:

إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع للتوزيع الطبيعي العام الذي توقعه μ وتباينه σ^2 ، فلحساب الاحتمالات المختلفة له لابد من استخدام علاقة التحويل المعيارية، ومن أجل ذلك نوجد تابع التوزيع للمتحول X، فيكون:

$$F(X)=P(X\le x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot dx \qquad (87-6)$$

ولإجراء عملية معايرة لـ x نفرض أن:

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$x = \mu + t\sigma$$
$$dx = \sigma \cdot dt$$

وبذلك نجد أن حدود التكامل تصبح كما يلي:

$$x \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty$$
$$X = x \Rightarrow t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد أن:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \sigma \cdot dt$$

$$= P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt \qquad (88-6)$$

وقياساً على العلاقة (6-82) فإن العلاقة (6-88) تأخذ (بعد استبدال z بـ $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$) الشكل التالي:

$$P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (89-6)$$

وتستخدم العلاقة (6-89) لإيجاد الاحتمالات المختلفة للمتحول X الخاضع للتوزيع الطبيعي العام.

- أما إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لقانون التوزيع الطبيعي العام، فإن احتمال أن يقع X في المجال $[a,b]$ يساوي:

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx \qquad (90-6)$$

ونكتب هذه العلاقة على الشكل التالي:

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

ولإجراء المعايرة نفرض أن:

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

فيكون:
$$\sigma t = x-\mu \Rightarrow x=\sigma t+\mu \Rightarrow dx=\sigma\cdot dt$$

أما حدود التكامل الجديدة فتكون:
$$X\to-\infty \Rightarrow t\to-\infty$$

$$X=b\Rightarrow t=\frac{b-\mu}{\sigma}$$

$$X=a\Rightarrow t=\frac{a-\mu}{\sigma}$$

ومنه نجد أن الاحتمال السابق يأخذ الشكل التالي:

$$P(a\le X\le b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot dt$$

وقياساً على العلاقتين (6-88) و(6-89) نجدأن:

$$P(a\le X\le b)=P\left(X\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-P\left(X\le\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=$$

$$P(a\le X\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad (91-6)$$

- إذا كان $a=\mu-k\sigma$, $b=\mu+k\sigma$، فإن احتمال أن يقع X في المجال $[\mu-k\sigma,\mu+k\sigma]$ يساوي:

$$\begin{aligned}P(a\le X\le b)&=P(\mu-k\sigma\le X\le\mu+k\sigma)=\\&=P(X\le\mu+k\sigma)-P(X\le\mu-k\sigma)\\&=\Phi\left(\frac{(\mu+k\sigma)-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(\mu+k\sigma)-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi(k)-\Phi(-k)=\Phi(k)-1+\Phi(k)\end{aligned}$$

$$P(a\le X\le b)=2\Phi(k)-1 \qquad (92-6)$$

ومنها نستنتج أنه:

عندما $k=1$، فإن:
$$\begin{aligned}P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)&=2\phi(1)-1\\&=2\cdot0.8413-1=0.6826\end{aligned}$$

عندما $k=2$، فإن: $P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=2\phi(2)-1$
$=2\cdot0.9772-1=0.9544$

عندما $k=3$، فإن: $P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)=2\phi(3)-1$
$=2\cdot0.9986-1=0.9972$

ويعني مما تقدم، احتمال أن يقع X في مجال مركزه μ ونصف طوله $k\sigma$، ويساوي $2\Phi(x)-1$.

مثال (6-9):

إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لقانون التوزيع الطبيعي العام بتوقع $\mu=8$، وانحراف معياري $\sigma=6$، والمطلوب حساب الاحتمالات التالية:

$P(6\le X\le10)$, $P(X\le10)$, $P(X\ge6)$, $P(X\le8)$

$P(8-2\sigma\le X\le8+2\sigma)$, $P(10\le X\le12)$, $P(4\le X\le10)$

الحل:

$$P(X\le8)=\Phi\left(\frac{8-8}{6}\right)=\Phi(0)=0.5$$

$$P(X\ge6)=1-P(X\le6)=1-\Phi\left(\frac{6-8}{6}\right)=1-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=1-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right]=1-1+\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=0.6293$$

$$P(X\le10)=\Phi\left(\frac{10-8}{6}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=0.6293$$

$$P(6\le X\le10)=\Phi\left(\frac{10-8}{6}\right)-\Phi\left(\frac{6-8}{6}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right]=2\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-1$$

$$=2\cdot0.6293-1=0.2586$$

$$P(4 \le X \le 10) = \Phi\left(\frac{10-8}{6}\right) - \Phi\left(\frac{4-8}{6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = 0.6293 + 0.7454 - 1 = 0.3747$$

$$P(10 \le X \le 12) = \Phi\left(\frac{12-8}{6}\right) - \Phi\left(\frac{10-8}{6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0.7454 + 0.6293 = 0.1161$$

$$P(8-2\sigma \le X \le 8+2\sigma) = \Phi\left(\frac{8+2\sigma-8}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{8-2\sigma-8}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi 2 - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

6-6: قانون توزيع $\Gamma_P(x)$ (غاما):

لدراسة توزيع $\Gamma(x)$ (غاما) والصفات المميزة له وشكله البياني لابد من تعريف التابع أو التكامل $\Gamma(P)$.

6-6-1: تعريف التكامل $\Gamma(P)$:

نرمز للتابع التكاملي غاما بالرمز $\Gamma(P)$، ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$\Gamma(P) = \int_0^{\infty} x^{P-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \qquad (94-6)$$

حيث P عدد ثابت و $P > 0$، ويتمتع هذا التابع بالخواص الآتية:

عندما $P = 1$ فإن: $\Gamma(1) = 1$

عندما $P = \frac{1}{2}$ فإن: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

عندما $P = 2$ فإن: $\Gamma(2) = 1$

وكذلك يمكن البرهان على أن:

$$\Gamma(P) = (P-1) \cdot \Gamma(P-1) \qquad (94A-6)$$

$$\Gamma(P+1) = P \cdot \Gamma(P) = P \cdot (P-1) \cdot \Gamma(P-1) \qquad (94B-6)$$

وعندما تكون P عدداً صحيحاً وليكن M فإن:

$$\Gamma(M)=(M-1)! \qquad (95-6)$$

أو:

$$\Gamma(M+1)=M!$$

أي أن $\Gamma(5)=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1$

كما يمكننا البرهان اعتماداً على (94B-6) على أن:

$$\Gamma\left(P+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(P+\frac{1}{2}-1+1\right)=\Gamma\left(P-\frac{1}{2}+1\right)=\left(P-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(P-\frac{1}{2}\right) \quad (95A-6)$$

$$\Gamma\left(\frac{P+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{P}{2}+\frac{1}{2}-1+1\right)=\Gamma\left(\frac{P}{2}-\frac{1}{2}+1\right)=\left(\frac{P}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{P}{2}-\frac{1}{2}\right) \quad (95B-6)$$

2-6-6: تعريف قانون توزيع $\Gamma_P(x)$:

نقول عن المتحول العشوائي X إنه يخضع لتوزيع غاما، إذا كان قانون توزيعه الاحتمالي معرفاً بالعلاقة العامة الآتية:

$$\Gamma_P(x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{k^P}{\Gamma_{(p)}}\cdot x^{P-1}\cdot e^{-kx} & : \quad X>0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (96-6)$$

حيث k وP عددان حقيقيان موجبان و $\Gamma(P)$ تكامل غاما المعرف سابقاً. ونعبر عن المتحول X الخاضع لتوزيع غاما بالشكل الآتي: $X \square \Gamma(P,k)$.

- وعندما $P=1$ فإن قانون توزيع غاما يأخذ شكل التوزيع الأسي:

$$\Gamma_1(x)=f(x)=\begin{cases}k\cdot e^{-kx} & x>0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (97-6)$$

وبالتالي فإن x يخضع للتوزيع الأسي بوسيط k.

- وعندما $k=1$ فإن قانون توزيع غاما العام يأخذ الشكل الآتي الخاص بوسيط $k=1$:

$$\Gamma_P(x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma_{(P)}}\cdot x^{p-1}\cdot e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (98-6)$$

وسنقوم بدراسة توزيع غاما في الحالة التي يكون فيها $k=1$.

6-6-3: خواص قانون توزيع غاما Γ:

1 . إن: $\Gamma_P(x) \geq 0$

2 . إن المساحة المحصورة تحت منحني التوزيع تساوي الواحد:

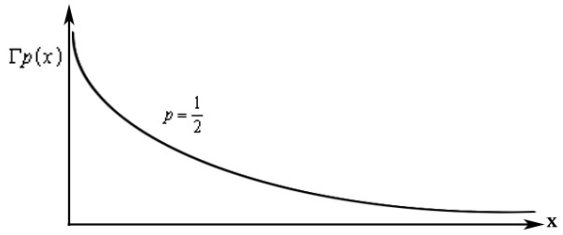
$$\int_0^{+\infty} \Gamma_P(x) \cdot dx = 1$$

$$\frac{1}{\Gamma_{(P)}} \int_0^{+\infty} x^{P-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = \frac{1}{\Gamma_{(P)}} \cdot \Gamma(P) = 1$$

6-6-4: الشكل البياني لـ $\Gamma_P(x)$:

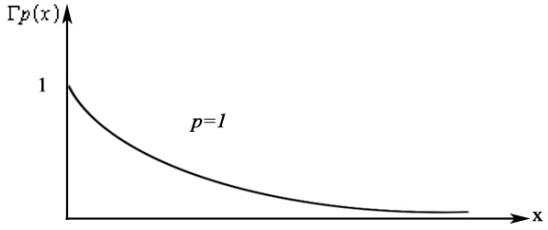
يرسم التوزيع $\Gamma_P(x)$ أشكالاً بيانية مختلفة بحسب قيم الوسيط P.

فعندما: $P = \frac{1}{2}$ فإن توزيع X يرسم الشكل البياني:



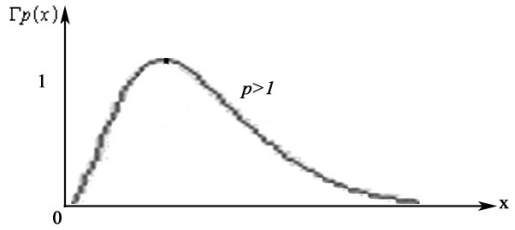
الشكل رقم (6-17)

وعندما: $P = 1$ فإن التوزيع $\Gamma_1(x)$ يرسم الشكل الآتي:



الشكل رقم (6-18)

وعندما: $P > 1$ فإن التوزيع $\Gamma_P(x)$ يرسم الشكل الآتي:



الشكل رقم (6-19)

ويرسم توزيع X الوارد في العلاقة العامة (6-96) نفس الأشكال البيانية.

6-6-5: تابع التوزيع $F(X)$:

يعطى تابع التوزيع $F(X)$ للمتحول X الخاضع لتوزيع $\Gamma_{(x)}$ بالعلاقة الآتية:

$$P(X<x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x}\Gamma_P(x)\cdot dx$$

$$P(X<x)=F(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{\Gamma_{(P)}}x^{P-1}\cdot e^{-x}\cdot dx \qquad (99-6)$$

ويشير تابع التوزيع $F(X)$ إلى احتمال أن يقع المتحول X في المجال $[0,x[$.

ويتمتع هذا التابع بنفس خواص توابع التوزيع الاحتمالية المختلفة السابقة.

6-6-6: القيم المركزية:

التوقع الرياضي $E(X)$ ، ويعطى بالعلاقة:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\Gamma_P(x)\cdot dx \qquad (100-6)$$

$$=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\int_{0}^{+\infty}x\cdot x^{P-1}\cdot e^{-x}\cdot dx=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\int_{0}^{+\infty}x^{(P+1)-1}\cdot e^{-x}\cdot dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\cdot\Gamma_{(P+1)}=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\cdot P\cdot\Gamma_{(P)}$$

$$E(x)=P \qquad (101-6)$$

أي أن التوقع الرياضي لـ X الخاضع للتوزيع $\Gamma_P(x)$ يساوي P.

التباين $\sigma^2_{(x)}$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sigma^2_{(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(x)\right]^2 \cdot \Gamma_P(x) \cdot dx$$

أو بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\Gamma(P)} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot x^{P-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = \frac{1}{\Gamma_{(P)}} \int_0^{+\infty} x^{(P+2)-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(P)} \cdot \Gamma_{(P+2)} = \frac{1}{\Gamma_{(P)}} \cdot (P+1) \cdot \Gamma(P+1)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(P)} \cdot (P+1) \cdot P \cdot \Gamma(P)$$

$$\mu_2 = (P+1)P = P^2 + P \qquad (102-6)$$

ومنه نجد:

$$\sigma^2_{(x)} = P^2 + P - P^2 = P \qquad (103-6)$$

أي أن تباين المتحول X الخاضع للتوزيع $\Gamma_P(x)$ يساوي P أيضاً.

نلاحظ أن التباين والتوقع للمتحول X الخاضع لتوزيع $\Gamma_P(x)$ متساويان، أما الانحراف المعياري فيساوي:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{P} \qquad (104-6)$$

أما بالنسبة لتوقع X الوارد في العلاقة العامة (6-96) فإن:

$$E(x) = \frac{k^P}{\Gamma(P)} \cdot \int_0^{\infty} x \cdot x^{P-1} \cdot e^{-kx} \cdot dx \qquad (105-6)$$

وللبرهان، نفرض أن:

$$kx = y \Rightarrow x = \frac{1}{k} y \Rightarrow dx = \frac{1}{k} dy$$

وبالتعويض نجد:

$$E(x) = \frac{k^P}{k^{P+1} \cdot \Gamma_{(P)}} \cdot \int_0^{\infty} y^{(P+1)-1} \cdot e^{-y} \cdot dy = \frac{1}{k \cdot \Gamma_{(P)}} \cdot \Gamma_{(P+1)}$$

وبإجراء الإصلاحات الرياضية نجد:

$$E(x)=\frac{P}{k} \qquad (106-6)$$

ولإيجاد التباين العام:

$$E(x^2)=\frac{k^P}{\Gamma_{(P)}}\int_0^{\infty} x^2\cdot x^{P-1}\cdot e^{-kx}\cdot dx \qquad (107-6)$$

وبالأسلوب نفسه نجد:

$$E(x^2)=\frac{P(P+1)}{k^2} \qquad (108-6)$$

ومنه نجد:

$$\sigma^2_{(x)}=\frac{P(P+1)}{k^2}-\frac{P^2}{k^2}=\frac{P}{k^2} \qquad (109-6)$$

وبذلك نجد أن الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma_{(x)}=\frac{\sqrt{P}}{k} \qquad (110-6)$$

وعندما $k=1$ فإننا نحصل على نفس التوقع والتباين والانحراف المعياري لتوزيع X المعطى بالعلاقة الخاصة (6-98).

6-6-7: العزوم:

. العزوم الابتدائية من المرتبة s:

لنحسب هذه العزوم للحالة التي يكون فيها $k=1$، فنجد أنها تعطى بالعلاقة:

$$\mu_S(x)=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\int_0^{\infty} x^s\cdot x^{P-1}\cdot e^{-x}dx \qquad (111-6)$$

$$=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\int_0^{\infty} x^{(P+S)-1}\cdot e^{-x}dx$$

$$\mu_S(x)=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\cdot\Gamma(P+S) \qquad (112-6)$$

فعندما $s=0$ فإن: $\mu_0(x)=\frac{\Gamma_{(P)}}{\Gamma_{(P)}}=1$

وعندما $s=1$ فإن: $\mu_1(x)=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\cdot\Gamma(P+1)=P$

$$\mu_1(x)=E(x)=P$$

وعندما $s=2$ فإن: $\mu_2(x)=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\cdot\Gamma(P+2)=P(P+1)$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة.

- **العزوم المركزية من المرتبة s**، وتعطى بالعلاقة:

$$M_S(x)=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\int_0^{\infty}\left[x-E(x)\right]^S\cdot x^{P-1}\cdot e^{-x}\cdot dx \qquad (113-6)$$

فعندما $s=0$ فإن: $M_0(x)=1$

فعندما $s=1$ فإن: $M_1(x)=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\int_0^{\infty}\left[x-E(x)\right]^1\cdot x^{P-1}\cdot e^{-x}\cdot dx=0$

ومن أجل حساب العزوم الأخرى تستخدم العلاقة العامة لسهولة حساب العزوم المركزية منها، أي:

$$M_S(x)=E\left[x-E(x)\right]^S \qquad (114-6)$$

فعندما $s=2$ فإن: $M_2(x)=\mu_2-\mu_1^2$

$$M_2(x)=P(P+1)-P^2$$

$$M_2(x)=\sigma_{(x)}^2=P$$

فعندما $s=3$ فإن: $M_3(x)=\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3$

$$M_3(x)=(P+2)(P+1)\cdot P-3P\cdot P(P+1)+2P^3$$

$$M_3(x)=2P$$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم المركزية من المراتب المختلفة.

6-6-8: التابع المولد للعزوم لتوزيع غاما عندما $k=1$، ويعطى بالعلاقة:

$$\Psi_x(t)=E\left(e^{tx}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\cdot f(x)\cdot dx \qquad (115-6)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(P)}\int_{0}^{+\infty}e^{tx}\cdot x^{P-1}\cdot e^{-x}\cdot dx=\frac{1}{\Gamma(P)}\int_{0}^{+\infty}e^{-(1-t)x}\cdot x^{P-1}\cdot dx$$

ولمتابعة البرهان نفرض أن: $(1-t)x=u$:

$$x=\frac{1}{1-t}\cdot u\Rightarrow dx=\frac{1}{1-t}du$$

$$\Psi_x(t)=\frac{1}{\Gamma(P)}\int_{0}^{+\infty}e^{-u}\cdot\frac{1}{(1-t)^{P-1}}\cdot u^{P-1}\cdot\frac{1}{1-t}du$$

$$=\frac{1}{(1-t)^{P}\cdot\Gamma(P)}\int_{0}^{+\infty}e^{-u}\cdot u^{P-1}\cdot du=\frac{1}{(1-t)^{P}}$$

$$\Psi_x(t)=\left(\frac{1}{1-t}\right)^{P} \qquad (116-6)$$

وهو التابع المولد للعزوم وباشتقاقه بشكل متتالي بالنسبة لـ t، ومن ثم جعل $t=0$ ، نحصل على العزوم الابتدائية المتتالية، أي مثلاً:

$$\mu_1(x)=\Psi'_x(t)\big|_{t=0}=P\left(\frac{1}{(1-t)}\right)^{P-1}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\Bigg|_{t=0}=P$$

$$\mu_2(x)=\Psi''_x(t)\big|_{t=0}=P(P+1)$$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة.

أما بالنسبة للعزوم المركزية فنستخدم العلاقة العامة:

$$M_S(x)=E\left[x-E(x)\right]^S$$

وبإعطاء S قيماً متتالية وبالاستفادة من العزوم الابتدائية $\mu_S(x)$ نحصل على العزوم المركزية من المراتب المختلفة.

أما بالنسبة لتوزيع X الوارد في العلاقة العامة (6-96) فإن التابع المولد للعزوم يساوي:

$$\Psi_x(t) = E\left[e^{tx}\right] = \frac{k^p}{\Gamma(P)} \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot x^{P-1} \cdot e^{-kx} \cdot dx \quad (117-6)$$

وبإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على التابع المولد للعزوم الذي يأخذ الصيغة الآتية:

$$\Psi_x(t) = \left(\frac{k}{k-t}\right)^P \quad (118-6)$$

وعندما $k=1$ فإننا نحصل على نفس التابع المولد للعزوم لتوزيع X المعطى بالعلاقة (6-98).

ونترك للطالب على سبيل التمرين إيجاد العزوم الابتدائية والمركزية لتوزيع X.

6-6-9: معامل التناظر، ويعطى بالعلاقة:

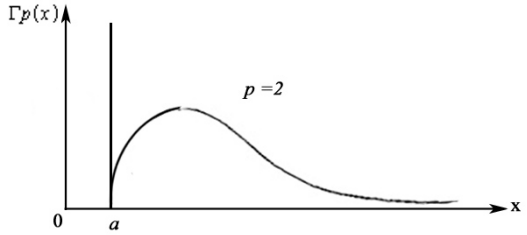
$$K = \frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}} = \frac{2P}{P.\sqrt{P}} = \frac{2}{\sqrt{P}}$$

وبما أن $K > 0$ فإن التوزيع ملتوي نحو اليمين.

إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لتوزيع $\Gamma_P(x)$ ، ومعرفاً على المجال $[a,\infty[$ ، فإن قانون التوزيع الاحتمالي يأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \Gamma_P(x) = \begin{cases} \frac{k^p}{\Gamma(P)}(x-a)^{P-1} \cdot e^{-k(x-a)} & x > a \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \quad (119-6)$$

ويرسم أشكالاً بيانية مختلفة بحسب قيمة P وابتداء من الخط المستقيم $X = a$ ، أي على سبيل المثال:



الشكل (6-20)

ونترك للطالب إيجاد تابع التوزيع والقيم المميزة للمتحول X الذي يخضع لتوزيع غاما الوارد في العلاقة (6-119)

مثال (6-10):

إذا كان X متحولاً عشوائياً ويخضع لـ $N(\mu,\sigma^2)$ فأثبت أن: $u=\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ يكون خاضعاً لـ $\Gamma\frac{1}{2}(u)$.

الحل: إن التوزيع الطبيعي لـ X يعطي بالعلاقة:

$$f(x)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ولنفترض أن:

$$u=\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Rightarrow 2\sigma^2u=(x-\mu)^2$$

$$\pm\sigma\sqrt{2u}=x-\mu$$

وبأخذ الجذر الموجب نجد أن $dx=\frac{\sigma}{\sqrt{2u}}du\Rightarrow\frac{dx}{du}=\frac{\sigma}{\sqrt{2u}}$

بالتعويض في قانون تغيير المتحولات المتناظرة نجد أن:

$$g(u)=2\cdot f(x)\cdot\left|\frac{dx}{du}\right|$$

$$g(u)=2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-u}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{2u}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot e^{-u}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{u}}$$

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-u}\cdot u^{-\frac{1}{2}}$$

وبما أن $\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ فإن: $g(u)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot u^{\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-u}=\Gamma_{\frac{1}{2}}(u)$

وهو توزيع $\Gamma_{\frac{1}{2}}(x)$ بوسيط $P=\frac{1}{2}$.

ملاحظة: إذا كان X متحولاً عشوائياً خاضعاً للتوزيع الطبيعي العام $N\left(0,\sigma^2\right)$ فإن:

$u=\frac{x^2}{2\sigma^2}$ يكون أيضاً خاضعاً لـ $\Gamma_{\frac{1}{2}}(u)$ (حالة خاصة).

وكذلك إذا كان X متحولاً عشوائياً خاضعاً للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ فإن:

$u=\frac{x^2}{2}$ يكون خاضعاً لـ $\Gamma_{\frac{1}{2}}(u)$ (حالة خاصة أخرى).

6-7: قانون توزيع $\beta_{p,q}(x)$ (بيتا):

لدراسة توزيع $\beta(x)$ (بيتا) والصفات المميزة له وشكله البياني لابد من تعريف التكامل $\beta_{(p,q)}$.

6-7-1: تعريف التكامل $\beta_{(p,q)}$:

يرمز للتكامل β بالرمز $\beta_{(p,q)}$ ويعرّف بالعلاقة الآتية:

$$\beta_{(p,q)}=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx \qquad (120-6)$$

حيث $p,q>0$ و p,q عددين ثابتين:

ويمكن أن نصيغ التكامل $\beta_{(p,q)}$ بدلالة التكامل $\Gamma(P)$ بالشكل الآتي:

$$\beta_{(p,q)}=\frac{\Gamma_{(P)}\cdot\Gamma_{(q)}}{\Gamma_{(P+q)}} \qquad (121-6)$$

ومن هذه العلاقة يمكن أن نجد قيمة $\beta_{(p,q)}$ عند بعض القيمة لـ p وq مثل:

$\beta_{(1,1)}=1$

$\beta_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\pi$

. لدينا علاقات هامة يتمتع بها التكامل $\beta_{(p,q)}$ وتأخذ الشكل الآتي:

$$\beta_{(p+1,q)} = \frac{p}{p+q}\beta_{(p,q)} \qquad (122-6)$$

$$\beta_{(p,q+1)} = \frac{q}{p+q}\beta_{(p,q)} \qquad (123-6)$$

وتستخدم هذه العلاقات عند إيجاد الصفات العددية للمتحول X الخاضع لتوزيع $\beta(x)$.

6-7-2: تعريف قانون توزيع $\beta_{p,q}(x)$:

نقول عن المتحول العشوائي X المعرّف على المجال [0,1] إنه يخضع لتوزيع $\beta_{p\cdot q}(x)$ إذا كان قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ معرّفاً بالعلاقة:

$$f(x) = \beta_{p,q}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (124-6)$$

حيث $p, q > 0$ ، وp وq عددين موجبين، و $\beta_{(p,q)}$ تكامل β و $\beta_{p,q}(x)$ تابع الكثافة الاحتمالية للمتحول X، ونعبر عن المتحول X الخاضع لتوزيع β بالشكل الآتي: $X : \beta_{(p,q)}$

وباستخدام العلاقة (6-121) نجد أن تابع الكثافة الاحتمالية لـ X يأخذ الشكل الآتي:

$$\beta_{p,q}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(P)\cdot\Gamma(q)}\cdot x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (125-6)$$

. عندما $p = 1$ فإن:

$$\beta_{p,q}(x) = q(1-x)^{q-1} \qquad : 0 \le x \le 1 \qquad (126-6)$$

. عندما $q = 1$ فإن:

$$\beta_{p,q}(x) = px^{P-1} \qquad : 0 \le x \le 1 \qquad (127-6)$$

6-7-3: خواص قانون توزيع $\beta_{p,q}(x)$:

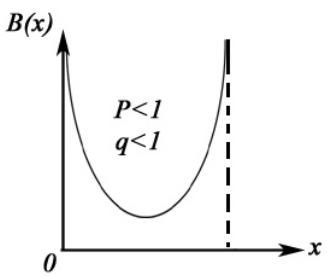
1 . إن: $\beta_{p,q}(x) \ge 0$

2 . إن $\int_0^1 \beta_{(p,q)}(x)\,dx = 1$

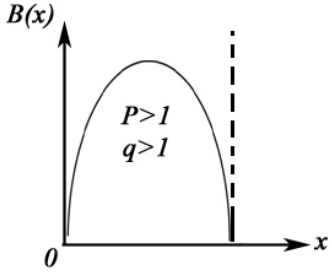
$$\frac{1}{\beta_{(p,q)}}\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{1}{\beta_{(p,q)}}\cdot\beta_{(p,q)} = 1$$

6-7-4: الشكل البياني لـ $\beta_{p,q}(x)$:

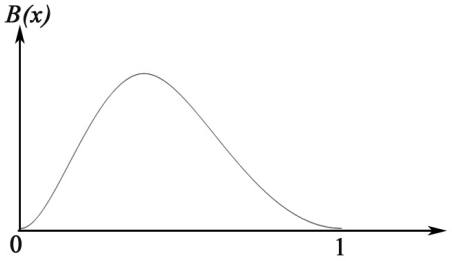
يرسم التوزيع $\beta_{p,q}(x)$ أشكالاً بيانية مختلفة بحسب قيم كلاً من p وq:



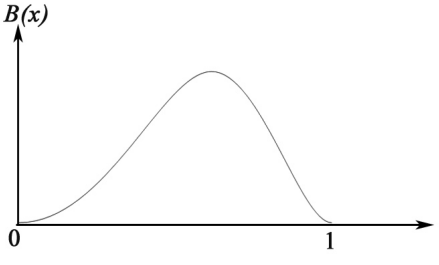
الشكل رقم (6-22)



الشكل رقم (6-21)



الشكل رقم (6-24)



الشكل رقم (6-23)

6-7-5: تابع التوزيع $F(X)$:

يعطى تابع التوزيع بالعلاقة الآتية:

$$F_{P,q}(x) = P(X < x) =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\beta(P,q)}\cdot x^{P-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx \qquad (128-6)$$

ويتم إيجاد تابع التوزيع بعد تحديد قيمة الوسيطين q,P . ويشير إلى احتمال أن يقع المتحول X في المجال $[0,x]$.

6-7-6: القيم المركزية:

- **التوقع الرياضي**، ويعطى بالعلاقة:

$$E(x)=\frac{1}{\beta(P,q)}\int_0^1 x\cdot x^{P-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx$$

$$=\frac{1}{\beta(P,q)}\int_0^1 x^{(P+1)-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx=\frac{1}{\beta(P,q)}\cdot\beta(P+1,q)$$

$$=\frac{1}{\beta(P,q)}\cdot\frac{P}{P+q}\cdot\beta(P,q)$$

$$E(x)=\frac{P}{P+q} \qquad (129-6)$$

- **التباين** $\sigma^2_{(x)}$، **ويعطى بالعلاقة الآتية:**

$$\sigma^2_{(x)}=\mu_2-\mu_1^2$$

$$\mu_2=\frac{1}{\beta(P,q)}\int_0^1 x^2\cdot x^{P-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx$$

$$=\frac{1}{\beta(P,q)}\int_0^1 x^{(P+2)-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx=\frac{1}{\beta(P,q)}\cdot\beta(P+2,q)$$

$$=\frac{1}{\beta(P,q)}\cdot\frac{P(P+1)}{(P+q)(P+q+1)}\cdot\beta(P,q)=\frac{P(P+1)}{(P+q)(P+q+1)}$$

$$\sigma^2_{(x)}=\frac{P(P+1)}{(P+q)(P+q+1)}-\frac{P^2}{(P+q)^2}$$

$$\sigma^2_{(x)}=\frac{P\cdot q}{(P+q)^2(P+q+1)} \qquad (130-6)$$

- ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma_{(x)}=\sqrt{\sigma^2_{(x)}}=\sqrt{\frac{p\cdot q}{(p+q)^2(p+q+1)}} \qquad (130A-6)$$

6-7-7: العزوم:

- **العزوم** الابتدائية $\mu_S(x)$، وتعطى العزوم بالعلاقة:

$$\mu_S(x) = E(x^s) = \frac{1}{\beta(P,q)} \int_0^1 x^S \cdot x^{P-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx$$

$$\mu_S(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} \cdot \beta(p+s,q) \qquad (131-6)$$

ومن هذه العلاقة يمكن إيجاد العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة s.

فعندما $s=0$ يكون: $\mu_0(x) = E(x^0) = 1$

وعندما $s=1$ يكون: $\mu_1(x) = E(x^1) = \frac{1}{\beta(p,q)} \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \beta(p,q)$

$$\mu_1(x) = E(x) = \frac{p}{p+q}$$

وعندما $s=2$ يكون: $\mu_2(x) = E(x^2) = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم.

- **العزوم المركزية** $M_S(x)$، وتعطى بالعلاقة:

$$M_S(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 \left[x - E(x)\right]^S \cdot x^{P-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx \quad (132-6)$$

فعندما $s=0$ فإن: $M_0(x) = 1$

وعندما $s=1$ فإن: $M_1(x) = 0$

وبالنسبة لبقية العزوم نستخدم العلاقة العامة لسهولة حساب العزوم المركزية، أي:

فعندما $s=2$ فإن: $M_2(x) = E(x^2) - E^2 = \mu_2 - \mu_1^2(x)$

$$M_2(x) = \frac{p \cdot q}{(p+q)^2 (p+q+1)} = \sigma^2_{(x)}$$

فعندما $s=3$ فإن: $M_3(x) = \mu_3 - 3\mu_1 \cdot \mu_2 + 2\mu_1^3$

$$M_3(x)=\frac{2p\cdot q(q-p)}{(p+q)^3(p+q+1)(p+q+2)} \qquad (133-6)$$

6-7-8: معامل التناظر، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$k=\frac{\mu_3(x)}{\sigma^3_{(x)}}=\frac{2(q-p)\sqrt{P+q+1}}{(P+q+2)\sqrt{P\cdot q}} \qquad (134-6)$$

وعندما تكون $q>P$ فإن التوزيع يكون ملتوياً نحو اليمين، أما إذا كانت $q<P$ فإن التوزيع يكون ملتوياً نحو اليسار، انظر الشكلين رقم (6-23) و(6-24). وعندما $q=P$ فإن التوزيع يكون متناظراً.

إذا كان Y متحولاً عشوائياً خاضعاً لتوزيع $\beta(x)$ والمعرف على المجال $[a,b]$ فإننا نستطيع إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي لـY، أي $\beta(y)$ اعتماداً على $\beta_{p\cdot q}(x)$ وذلك باستخدام التحويل الآتي:

$$y=a+(b-a)x$$

وبتطبيق قانون تغيير المتحولات نجد أن:

$$g(y)=\beta_{p,q}(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

ومن التحويل نجد أن: $1-x=1-\frac{y-a}{b-a}=\frac{b-y}{b-a}$ وأن $x=\frac{y-a}{b-a}$

$$y-a=(b-a)x\Rightarrow dy=(b-a)dx$$

$$\frac{dx}{dy}=\left|\frac{1}{b-a}\right|$$

أما حدود تغير y فتساوي:

$$x=0\Rightarrow y=a$$
$$x=1\Rightarrow y=b$$

وبالتعويض في قانون تغيير المتحولات، نجد أن:

$$g(y)=\frac{1}{\beta_{(p,q)}}\cdot\frac{(y-a)^{P-1}}{(b-a)^{P-1}}\cdot\frac{(b-y)^{q-1}}{(b-a)^{q-1}}\cdot\left|\frac{1}{b-a}\right|$$

بالإصلاح نجد أن:

$$g(y)=\frac{1}{\beta(p,q)}\cdot\frac{(y-a)^{P-1}\cdot(b-y)^{q-1}}{(b-a)^{P+q-1}}$$

أي أن توزيع y يأخذ الشكل الآتي:

$$\beta_{p,q}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta(P,q)(b-a)^{P+q-1}}\cdot(y-a)^{P-1}\cdot(b-y)^{q-1} & : a\le y\le b\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (135\text{-}6)$$

حيث q,P ثابتان عددان موجبان، ويرسم هذا التابع أشكالاً بيانية مختلفة حسب q,P، مشابهة للأشكال السابقة، أما توقعه الرياضي $E(y)$ يساوي:

$$E(y)=E\left[a+(b-a)x\right]=E(a)+(b-a)E(x)$$

$$=a+(b-a)\cdot\frac{P}{P+q}$$

$$E(y)=\frac{aq+bq}{P+q} \qquad (136-6)$$

أو تباينه $\sigma^2_{(y)}$ يساوي:

$$\sigma^2_{(y)}=\operatorname{var}(y)=\operatorname{var}\left[a+(b-a)x\right]$$

$$=(b-a)^2\operatorname{var}(x)=(b-a)^2\cdot\frac{Pb}{(P+q)^2(P+q+1)}$$

$$\sigma^2_{(y)}=\frac{(b-a)^2\cdot Pb}{(P+q)^2(P+q+1)} \qquad (137-6)$$

6-8: قانون توزيع كاي مربع χ^2:

6-8-1: تعريف قانون توزيع كاي مربع χ^2:

إذا كان X متحولاً عشوائياً موجباً ومستمراً، وكان قانون توزيعه الاحتمالي معطى بالعلاقة الآتية:

$$\left\{\frac{1}{n\quad(\ )}\cdot x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot e^{-\frac{x}{2}} \qquad x\ge 0 \qquad (138\text{-}6)\right.$$

عدا ذلك

عندئذٍ نقول إن المتحول X يخضع لتوزيع $\chi^2(x)$ بـ n درجة حرية، ونعبر عن ذلك بالرمز $X \square \chi_n^2(x)$ ، حيث n عدد صحيح موجب، يعبر عن درجات الحرية، لذلك يسمى n بعدد درجات الحرية.

وحيث أن $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ هو تكامل غاما بوسيط $p=\frac{n}{2}$.

وعندما n=2 فإن توزيع $\chi_2^2(x)$ يصبح مساوياً للتوزيع الأسي $f(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

6-8-2: خواص توزيع $\chi_n^2(x)$:

1 . إن: $f(x)=\chi_n^2(x)\geq 0$

2 . وأن: $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx=1$

للبرهان نفرض أن:

$$u=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2u\Rightarrow dx=2du$$

أما حدود التكامل فتبقى لأن:

$$x=0\Rightarrow u=0$$
$$x\to\infty\Rightarrow u\to\infty$$

وبالتعويض نجد:

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}(2u)^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-u}\cdot 2du=$$

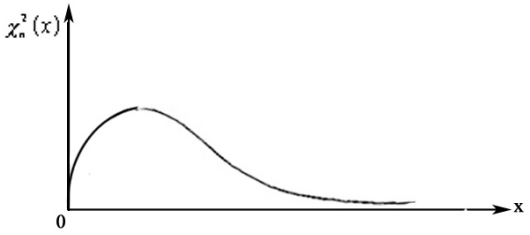
وبإجراء الإصلاحات الرياضية نجد:

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}u^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-u}\cdot du=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=1$$

وبالآتي فإن $f(x)=\chi_n^2(x)$ يمتل تابع كثافة احتمالية للمتحول X.

6-8-3: الشكل البياني لـ $\chi_n^2(x)$:

يرسم قانون توزيع X أشكالاً بيانية مختلفة حسب درجة الحرية n، ومن هذه الأشكال:



الشكل رقم (6-25)

6-8-4: تابع التوزيع الاحتمالي $F(X)$:

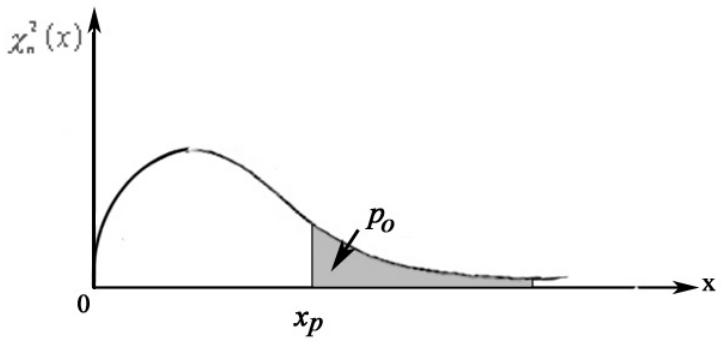
$$F(x)=P(X\le x_P)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}}\int_0^{x_P}x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot dx \qquad (139-6)$$

ويعطينا هذا التابع الاحتمالي $P(X\le x_P)$.

إلا أن الاحتمال الأكثر أهمية هو الاحتمال الآتي: $P(X\ge x_P)$ والذي يحسب من العلاقة:

$$P(X\ge x_P)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}}\int_{x_P}^{\infty}x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot dx=P_o \qquad (140-6)$$

وتدعى P_o بمستوى الدلالة، ويمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-26)

وللاحتمال الوارد في العلاقة (6-140) تطبيقات إحصائية هامة في مجال اختبار الفرضيات ذات الاتجاه الواحد.

وأن قيم x_p تعطى في جداول خاصة في الملحق بآخر الكتاب، وذلك بدلالة n درجات الحرية، ومستوى الدلالة P_o .

مثال (6-11):

أوجد قيمة x_p عندما: $n=20$, $P_o=0.05$.

أوجد قيمة x_p عندما: $n=30$, $P_o=0.10$.

الحل:

من الجدول الملحق لتابع التوزيع $\chi_n^2(x)$ نجد أن:

$$P(X \geq x_{0.05}) = 0.05 \Rightarrow x_{0.05} = 31.41$$

وكذلك أيضاً:

$$P(X \geq x_{0.10}) = 0.10 \Rightarrow x_{0.10} = 40.256$$

6-8-5: القيم المركزية والتباين:

- **التوقع الرياضي** $E(x)$: ويعطى بالعلاقة:

$$E(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx \qquad (141-6)$$

$$E(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\left(\frac{n}{2}+1\right)-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx$$

بالمتابعة بالبرهان نفرض أن: $u = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2u \Rightarrow dx = 2du$

أما حدود التكامل الجديد فتبقى نفسها $\begin{matrix} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x \to \infty \Rightarrow u \to \infty \end{matrix}$

وبالتعويض نجد أن:

$$E(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}(2u)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)-1}\cdot e^{-u}\cdot 2\cdot du$$

وبإجراء الإصلاحات الرياضية نجد أن:

$$E(x)=\frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$E(x)=n \qquad (142-6)$$

أي أن التوقع الرياضي يساوي عدد درجات الحرية n.

- **التباين** $\sigma^2_{(x)}$**، ويعطى بالعلاقة:**

$$\sigma^2_{(x)}=\mu_2-\mu_1^2 \qquad (143-6)$$

$$\mu_2=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}x^2\cdot x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot dx$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}x^{\left(\frac{n}{2}+2\right)-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot dx \qquad (144-6)$$

نفرض أن: $u=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2u\Rightarrow dx=2du$

وحدود التكامل نفسها، بالتعويض نجد:

$$\mu_2=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}(2u)^{\left(\frac{n}{2}+2\right)-1}\cdot e^{-u}\cdot 2\cdot du \qquad (145-6)$$

بإجراء الإصلاحات الرياضية نجد:

$$\mu_2 = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = 2n\left(\frac{n}{2}+1\right) \qquad n^2+2n \qquad (146-6)$$

ومنه يكون:

$$\sigma^2_{(x)} = n^2 + 2n - n^2$$

$$\sigma^2_{(x)} = 2n \qquad (147-6)$$

أي أن التباين يساوي ضعف عدد درجات الحرية.

أما الانحراف المعياري فيساوي:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{2n} \qquad (148-6)$$

6-8-6: التابع المولد للعزوم $\Psi_x(t)$، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\Psi_x(t) = E\left[e^{tx}\right] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot dx \quad (149-6)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot dx$$

ولمتابعة البرهان نفرض أن:

$$x\left(\frac{1}{2}-t\right) = u \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{2}-t} \cdot u \Rightarrow \; dx = \frac{1}{\frac{1}{2}-t} \cdot du$$

بالتعويض نجد أن:

$$\Psi_x(t)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{n}{2}-1}}\cdot u^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)}du$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[\frac{1}{2}(1-2t)\right]^{\frac{n}{2}}}\cdot\int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-u}\cdot du$$

$$=\frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\Psi_x(t)=(1-2t)^{-\frac{n}{2}} \qquad (150-6)$$

وهو التابع المولد للعزوم للمتحول X.

وباشتقاق التابع المولد للعزوم بالنسبة لـt عدة مرات متتالية، ومن ثم جعل $t=0$ ، نحصل على العزوم الابتدائية $\mu_S(x)$ من المراتب المختلفة، أي:

فعندما $s=0$ فإن: $\Psi_x(t)\big|_{t=0}=1$

وعندما $s=1$ فإن: $\Psi'_x(t)\big|_{t=0}=\mu_1(x)=n$

وعندما $s=2$ فإن: $\Psi''_x(t)\big|_{t=0}=\mu_2(x)=n^2+2n$

وعندما $s=3$ فإن: $\Psi'''_x(t)\big|_{t=0}=\mu_3(x)=n^3+6n^2+4n$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة.

أما بالنسبة للعزوم المركزية $M_S(x)$ فإننا نطبق العلاقة العامة:

$$M_S(x)=E\left[x-E(x)\right]^S \qquad (151-6)$$

فعندما $s=0$ فإن: $M_0(x)=E\left[x-E(x)\right]^0=1$

وعندما $s=1$ فإن: $M_1(x)=E\left[x-E(x)\right]^1=0$

وعندما $s=2$ فإن: $M_2(x)=E\left[x-E(x)\right]^2=\mu_2(x)-\mu_1^2(x)$

$$\sigma^2_{(x)}=M_2(x)=n^2+2n-n^2=2n$$

وعندما $s=3$ فإن: $M_3(x)=E\left[x-E(x)\right]^3=\mu_3-3\mu_1\cdot\mu_2+2\mu_1^3$

$$= n^3 + 6n^2 + 8n - 3n\left(n^2 + 2n\right) + 2n^3 = 8n$$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم المركزية الأخرى من مختلف المراتب S.

6-8-7: معامل التناظر: ويعطى هذا المعامل بالعلاقة الآتية:

$$K = \frac{M_3(x)}{\sigma^3_{(x)}} \qquad (152-6)$$

$$K = \frac{8n}{2n \cdot \sqrt{2n}} = \frac{4}{\sqrt{2n}}$$

وهنا نلاحظ أن $K > 0$ ، وبالآتي فإن التوزيع ملتوي نحو اليمين. كما نلاحظ أنه كلما ازداد عدد درجات الحرية n كلما اقترب k من الصفر، وبالآتي فإن التوزيع يقترب من التناظر.

6-8-8: نظريات هامة:

1 . إذا كانت $X_1, X_2, X_3, ...X_i, ..., X_n$ متحولات عشوائية مستقلة مثنى مثنى، وكان كل من X_i يخضع للتوزيع $\chi^2(x)$ وبـ n_i درجة حرية، فإن مجموعها: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ يكون خاضعاً لتوزيع χ^2 بـ $\sum_{i=1}^{n} n_i$ درجة حرية.

2 . إذا كان X_1, X_2 متحولان عشوائان مستقلان، وكان المتحول X_1 يخضع لتوزيع $X^2_{n_1}(x)$ ، وكان المتحول $X = X_1 + X_2$ يخضع لتوزيع χ^2 وبـ n درجة حرية، حيث $n > n_1$ ، فإن X_2 يخضع لتوزيع χ^2 وبـ $n_2 = n - n_1$ درجة حرية.

3 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ فإن مربعه المتحول X^2 يكون خاضعاً للتوزيع χ^2 بدرجة حرية واحدة.

البرهان: نستخدم طريقة تغيير المتحول فنجد أن: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2}{2}}$

وأن: $$y = X^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

نعوض في قانون تغيير المتحولات المتناظرة فنجد أن:

$$g(y)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot y^{\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

وهو توزيع $g(y)=\chi_1^2(x)$.

4 . إذا كانت $X_1,X_2,X_3,.....,X_n$ متحولات عشوائية مستقلة، وكان كل منها يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ فإن المتحول X، الذي يعبر عن مجموع مربعاتها، أي: $X=X_1^2+X_2^2+X_3^2+.....+X_n^2$

يخضع لتوزيع χ^2 بـ n درجة حرية.

5 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع للتوزيع الطبيعي العام $N(\mu,\sigma^2)$ فإن: $Y=\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ يكون خاضعاً لـ χ^2 بدرجة حرية واحدة.

وكذلك إذا كان: $X_1,X_2,X_3,.....,X_n$ متحولات عشوائية مستقلة وخاضعة للتوزيع $N(\mu,\sigma^2)$ فإن: $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ يكون خاضعاً لـ χ^2 بـ n درجة حرية.

6 . إذا كان X خاضعاً لـ $\Gamma_P(x)$ فإن: $Y=2X$ يكون خاضعاً لـ: $\chi_{2P}^2(y)$.

البرهان:

نعلم إن توزيع X هو: $\Gamma_P(x)=\frac{1}{\Gamma_{(P)}}\cdot x^{P-1}\cdot e^{-x}$

للبرهان نضع: $y=2x\Rightarrow x=\frac{1}{2}y\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dy\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$

وبالتعويض نجد أن: $g(y)=f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|$

$$g(y)=\frac{1}{\Gamma(P)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{P-1}\cdot y^{P-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}y}\cdot\frac{1}{2}$$

$$g(y)=\frac{1}{2^P\Gamma(P)}\cdot y^{P-1}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

ونلاحظ أن: $n = 2P \Leftarrow P = \frac{n}{2}$

ومنه: $g(y) = \chi^2_2 P^{(x)}$

6-9: قانون توزيع ستيودينت T:

6-9-1: تعريف قانون توزيع ستيودينت :

إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً، وكان قانون توزيعه معطى بالعلاقة:

$$f(x) = T_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\cdot\left(1+\dfrac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} & -\infty \le X \le +\infty \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (153\text{-}6)$$

عندئذ نقول إن المتحول X يخضع لتوزيع ستيودينت Tبـ k درجة حرية، ونعبر عن ذلك بالرمز $X : T_k(x)$ حيث: k عدد صحيح موجب يعبر عن عدد درجات الحرية.

6-9-2: خواصه:

1 . إن: $T_k(x) \ge 0$

2 . وإن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k(x)\cdot dx = 2\int_{0}^{+\infty} T_k(x)\cdot dx$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\frac{k}{2}}\cdot\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \quad (1)$$

للبرهان نفرض أن:

$$u = 1 + \frac{x^2}{k} \Rightarrow ku = k + x^2$$

$$x^2 = ku - k = k(u-1)$$

$$x = \pm\sqrt{k} \cdot \sqrt{u-1}$$

$$dx = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{u-1}} du$$

وعندما:

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$$

بالتعويض في (1) وإجراء الاختصارات نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{1}^{+\infty} u^{-\frac{k+1}{2}} \cdot (u-1)^{-\frac{1}{2}} du \qquad (2)$$

ولمتابعة البرهان نفرض أن:

$$v = \frac{u-1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{1-v}$$

$$du = \frac{1}{(1-v)^2} dv$$

أما حدود التكامل الجديد فتصبح كمايلي:

$$u = 1 \Rightarrow v = 0$$

$$u \to \infty \Rightarrow v = 1$$

نعوض في (2) فنجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{k}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^1\left(\frac{1}{1-v}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\cdot\left(\frac{v}{1-v}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-v}dv$$

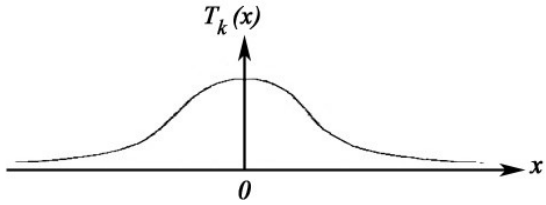
$$=\sqrt{k}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^1(1-v)^{\frac{k+1}{2}}\cdot(1-v)^{\frac{1}{2}}\cdot v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{-2}\cdot dv$$

$$=\sqrt{k}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^1(1-v)^{\frac{k}{2}-1}\cdot v^{\frac{1}{2}-1}\cdot dv$$

$$=\sqrt{k}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\beta\left(\frac{1}{2},\frac{k}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{k}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}=1$$

ويرسم $T_k(x)$ أشكالاً بيانية مختلفة بحسب قيم k وعدد درجات الحرية كمايلي:



الشكل رقم (6-27)

6-8-3: القيم المركزية والتباين:

- **التوقع الرياضي** $E(x)$:

إن التوقع الرياضي للمتحول X الخاضع لتوزيع ستودنت T يساوي الصفر، أي:

$$E(x)=0 \qquad (154-6)$$

وبما أن التابع $f(x)$ متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات ومنه فإن: $f(x)=f(-x)$

- **التباين** $\sigma^2_{(x)}$:

ويعطى تباين X الخاضع لتوزيع T بالعلاقة:

$$\sigma^2_{(x)}=\frac{k}{k-2} \quad , \quad k>2 \qquad (155-6)$$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{\frac{k}{k-2}}$$

عندما $k=1$ فإن توزيع t يصبح على الشكل الآتي:

$$T_1(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \qquad (156-6)$$

ويدعى هذا التوزيع بتوزيع كوشي، وهو حالة خاصة من توزيع ستيودينت عندما $k=1$. وأن توقعه يساوي الصفر وتباينه غير معروف.

6-9-4: تابع التوزيع $F(X)$:

إن تابع التوزيع يعطى بالعلاقة الآتية:

$$F(X) = P(X \le x_P) = \int_{-\infty}^{x_P} T_k(x) \cdot dx \qquad (157-6)$$

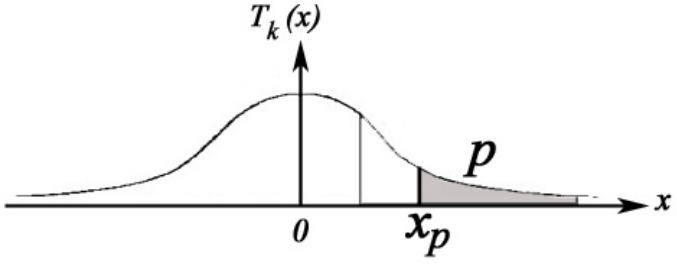
ولكن الاحتمال الأكثر أهمية هو:

$$P(X \ge x_P) = \int_{x_P}^{+\infty} T_k(x) \cdot dx \qquad (158-6)$$

وإذا وضعنا العلاقة (6-158) مساوية لـ P فإننا نجد:

$$P(X \ge x_P) = \int_{x_p}^{+\infty} T_k(x) \cdot dx = P \qquad (159-6)$$

وأن P تعبر عن مستوى الدلالة والمبينة على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-28)

وعندما تكون P محددة فإننا نستطيع إيجاد قيمة x_p إذا كانت درجات الحرية معلومة، من خلال الجداول الموجودة في الملحق، التي تعطينا قيم x_p التي تحقق العلاقة :

$$P\left(X \geq x_P\right) = P$$

فمثلاً، إذا كان: $P\left(X \geq x_{0.05}\right) = 0.05$

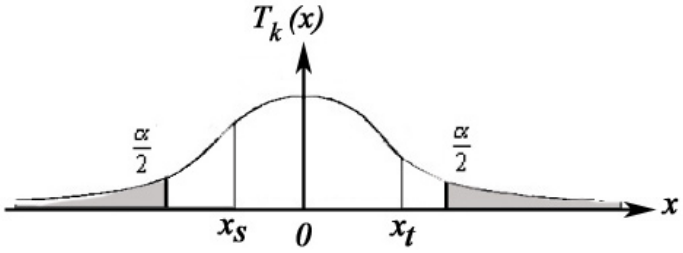
وكانت درجات الحرية: $k = 15$

فإننا نجد من الجداول: $x_{(0.05,15)} = t_{(0.05,15)} = 1.753$

إن للاحتمال الوارد في العلاقة (6−159) تطبيقات إحصائية في مجال اختبار الفرضيات ذات الاتجاه الواحد وإيجاد مجالات الثقة. أما إذا كان الاختبار ثنائي الجانب فإننا نستخدم العلاقة:

$$P\left(x_S \leq X \leq x_t\right) = \int_{x_S}^{x_t} T_k\left(x\right) \cdot dx = 1 - \alpha \qquad (160-6)$$

وبالتالي نبحث في الجداول الإحصائية عن قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ والمقابلة لدرجات الحرية k، ولمستوى دلالة $P = \frac{\alpha}{2}$، أي أن α تتوزع على جانبي التوزيع بمقدار $\frac{\alpha}{2}$ ، ويمكن بيان ذلك بالمنطقتين المظللتين على الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6−29)

فمثلاً، ماهي قيمة X_P عندما $k = 20$ بحيث يكون:

$$P\left(-x_P \leq X \leq x_P\right) = 0.95$$
$$P\left(X \leq x_P\right) - P\left(X \leq -x_P\right) = 0.95$$
$$1 - P\left(X > x_P\right) - P\left(X > x_P\right) = 0.95$$
$$1 - 2P\left(X > x_P\right) = 0.95 \Rightarrow 2P\left(X > x_P\right) = 0.05$$
$$P\left(X > x_P\right) = 0.025 \Rightarrow x_{(0.025,20)} = t_{(0.025,20)} = 2.086$$

وبالتالي فإن: $P\left(-2.086 \leq X \leq 2.086\right) = 0.95$

ملاحظات:

1 . يطبق قانون توزيع ستيودينت عندما تكون حجوم العينات صغيرة أي: $k < 30$ ، وباعتبار أن التوزيع متناظر حول التوقع الرياضي $E(x) = 0$ ، فإن توزيع T يمكن تقريبه إلى التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ ، وذلك عندما تكون $k \geq 30$. وعندما تكون k كبيرة جداً، أي $k \to \infty$ فإن:

$$T_k(x) \to N(0,1)$$

وبالتالي فإن:

$$E(x) = 0$$

$$\sigma^2_{(x)} \approx 1$$

2 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع للتوزيع الطبيعي العام $N(\mu,\sigma^2)$، ولتقدير متوسط المجتمع μ نسحب عينة من هذا المجتمع بحجم n و $n < 30$ ، ونحسب متوسط العينة $\bar{x}$ حيث:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ونعتبره تقديراً لمتوسط المجتمع μ.

وعند إيجاد مجال الثقة للمتوسط μ فإننا نستخدم المقدار:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad (161-6)$$

وأن المقدار t يخضع لتوزيع ستيودنت بـ $k = n - 1$ درجة حرية.

حيث s تحسب من جذر التباين المصحح للعينة والمعرف بالعلاقة:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

3 . بما أن التوزيع متناظر حول التوقع، فإن:

$$t_{k,\alpha} = -t_{k(1-\alpha)} \qquad (162-6)$$

6-10: قانون توزيع فيشر أو توزيع F:

6-10-1: تعريف قانون توزيع F:

إذا كان X متحولاً عشوائياً موجباً ومستمراً، وكان قانون توزيعه معطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=F_{k,m}(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}\cdot\left(\frac{k}{m}x+1\right)^{-\frac{k+m}{2}}\cdot x^{\frac{k}{2}-1} & 0\le x<\infty \\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (163-6)$$

حيث m, k عددان صحيحان موجبان يعبران عن درجتي الحرية.

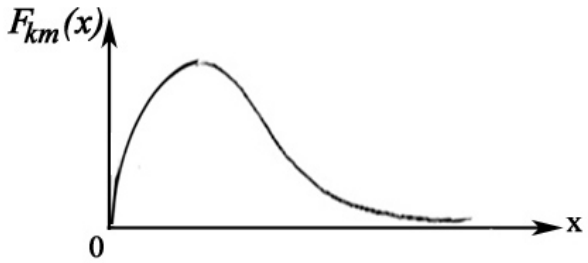
عندئذ نقول أن المتحول X يخضع لتوزيع فيشر F بـ m, k درجات حرية، ونعبر عن ذلك بالرمز: $X \square F_{k,m}(x)$.

خواصه:

1 . إن: $F_{k,m}(x)\ge 0$

2 . وإن: $\int_0^{\infty} F_{k,m}(x)\,dx=1$

ويرسم أشكالاً بيانية مختلفة حسب درجتي الحرية m, k، وبشكل عام يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (6-30)

أما توقعه الرياضي فيساوي:

$$E(x)=\frac{m}{m-2}\ ,\quad m>2 \qquad (164-6)$$

وتباينه يساوي:

$$\sigma^2_{(x)}=\frac{2m^2(k+m-2)}{k(m-2)^2(m-4)}\ ,\quad m>4 \qquad (165-6)$$

6-10-2: تابع التوزيع $F(X)$:

إن تابع التوزيع $F(X)$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$F(x)=P(X\le F_P)=\int_0^{F_P}F_{k.m}(x)\cdot dx \qquad (166-6)$$

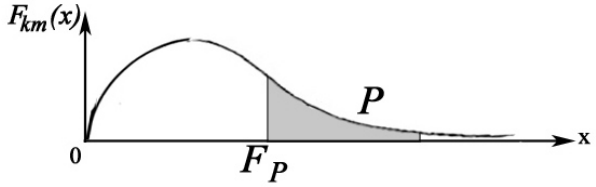
ولكن الاحتمال الأكثر أهمية هو:

$$P(X\ge F_P)=\int_{F_P}^{\infty}F_{k.m}(x)dx \qquad (167-6)$$

وإذا وضعنا العلاقة (6−167) مساوية لـ P فإننا نجد:

$$P(X\ge F_P)=\int_{F_P}^{\infty}F_{k.m}(x)dx=P \qquad (168-6)$$

وإن P تعبر عن مستوى الدلالة والمبينة على الشكل الآتي:



الشكل رقم (6−31)

وعندما تكون P محددة فإننا نستطيع إيجاد قيمة F_P حسب درجات الحرية من خلال الجداول الموجودة في الملحق.

فعلى سبيل المثال، أوجد قيمة $F_{0.01}$ عندما تكون $k=14$, $m=20$.

من الجداول الملحقة والخاصة بتوزيع F نجد:

$$F_{0.01(14,20)}=3.132$$

ومن خواص توزيع F هو أن:

$$F_{1-\alpha}(k,m)=\frac{1}{F_\alpha(m,k)} \qquad (169-6)$$

وتستخدم العلاقة الأخيرة عندما نكون بحاجة لحساب قيمة $F_{1-\alpha}$ من F_α.

فعلى سبيل المثال، أوجد قيمة $F_{0.95}$ نحدد درجات حرية $k=14$, $m=20$.

وبتطبيق العلاقة الأخيرة نجد:

$$F_{0.95}(14,20)=\frac{1}{F_{0.05}(20,14)}=\frac{1}{2.39}\approx 0.418$$

وتستخدم الجداول المذكورة في مجال اختبار الفرضيات وتحليل التباين وإنشاء مجالات الثقة.

ملاحظات:

1 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لتوزيع فيشر $F_{k.m}(x)$ فإن منحنى هذا التوزيع يشبه منحنى توزيع χ^2 .

2 . إذا سحبنا عينتين من مجتمع واحد، وكانت S_2^2, S_1^2 تباينا العينتين على الترتيب حيث: $S_2^2 < S_1^2$ فإن المقدار:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} > 1 \qquad (170-6)$$

يخضع لتوزيع F بدرجات حرية $k = n_1 - 1$, $m = n_2 - 1$.

وأن S_1^2, S_2^2 يحسبان من العلاقتين:

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \text{ , } S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

3 . إذا سحبنا عينتين من مجتمعين طبيعيين بحجم n_1 , n_2 ، وكانت متوسطاتهما $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ ، وتبايناتهما S_1^2, S_2^2 على الترتيب وكان $S_2^2 < S_1^2$ فإن المقدار:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \qquad (171-6)$$

يخضع لتوزيع F بدرجات حرية $k = n_1 - 1$, $m = n_2 - 1$.

11-6: قانون التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي:

ويستخرج هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي العام $N(\mu, \sigma^2)$ ، لذلك نفترض X خاضعاً للتوزيع $N(\mu, \sigma^2)$ ، وأن Y متحول عشوائي مرتبط بقيم X الموجبة بالعلاقة اللوغاريتمية الآتية:

$$y = e^x \qquad : x > 0$$

ولإيجاد توزيع Y نحسب X فنجد أن: $x = \ell n$ ، ومنها نجد أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$.

ولنفترض أن $e^{\mu} = m$، وبذلك نجد أن $\mu = \ell n$.

وبتطبيق قاعدة تغيير المتحولات نجد أن:

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

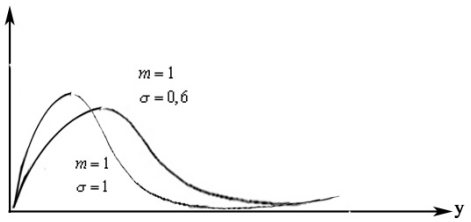
$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$g(y) = \frac{1}{y \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell n\, y - \ell n\, m}{\sigma}\right)^2}$$

وبالتالي فإن قانون التوزيع اللوغاريتمي لـ x يعطى بالعلاقة:

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell n \frac{y}{m}}{\sigma}\right)^2} & : \ y > 0 \qquad (172\text{-}6) \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-32)

وإن توقعه الرياضي يساوي: $E(y) = m \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}}$

وإن منواله يساوي: $Mo = \dfrac{m}{e^{\sigma^2}}$

وإن وسيطه يساوي: $Me = m$

وإن تباينه يساوي: $\sigma^2_{(y)} = m^2 \cdot e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

وإن العزم الابتدائي الرائي يعطى بالعلاقة: $\mu_r = m^r . e^{\frac{r^2\sigma^2}{2}}$

6-12: قانون توزيع (إيرلانغ):

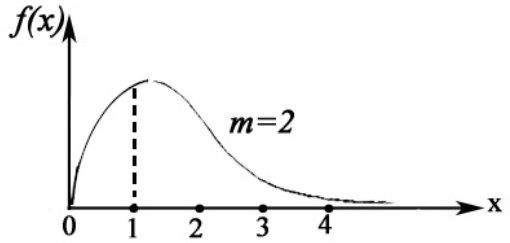
وهو حالة خاصة من توزيع $\Gamma_{(P)}(x)$ عندما يكون P عدداً صحيحاً موجباً. ويساوي $P=m$، وعندها نجد أن قيمة التكامل $\Gamma_{(P)}$ تساوي:

$$\Gamma(P)=\Gamma(m)=(m-1)!$$

وهو يعرف بالعلاقة:

$$f_m(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{m-1}\cdot e^{-x}}{(m-1)!} & : \ x>0 \\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (173-6)$$

وهو يرسم الشكل الآتي:



الشكل رقم (6-33)

وإن توقعه الرياضي يساوي: $E(x)=m$

وإن تباينه يساوي: $\sigma^2_{(x)}=m$

وإن منواله يساوي: $Mo=m-1$

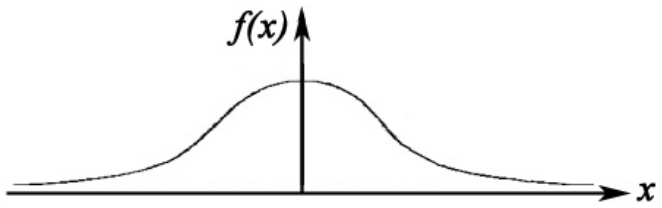
وإن التابع المولد للعزوم الابتدائية: $\psi(t)=\dfrac{1}{(1-t)^m} \qquad (t<1)$

6-13: قانون توزيع كوشي:

وهو حالة خاصة من توزيع ستودينت عندما $K=1$ حيث نجد أنه يعطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty<x<+\infty \qquad (174-6)$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-34)

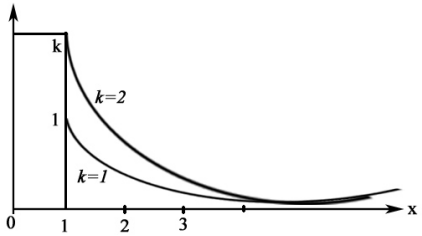
وإن توقعه الرياضي يساوي $E(x)=0$ ، وإنه متناظر بالنسبة للمحور الشاقولي، وإن تباينه غير معروف. وهذا ماجعل تطبيقاته محدودة.

6-14: قانون توزيع باريتو:

وهو يعرف على المجال $]1,+\infty[$، ويتضمن وسيطاً واحداً موجباً k، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\begin{cases} k\cdot x^{-(k+1)} & 1\le x\le +\infty \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (175-6)$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-35)

وإن توقعه الرياضي يساوي: $E(x)=\dfrac{k}{k-1}$

وإن العزم الابتدائي من المرتبة r يساوي: $\mu_r=\dfrac{k}{k-r}(k>r)$

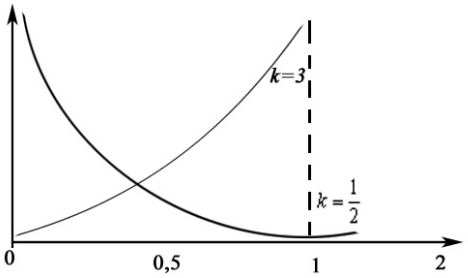
وإن تباينه يساوي: $\sigma^2=\left(\dfrac{k}{k-2}\right)-\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^2 \quad (k>2)$

6-15: قانون التوزيع المتدرج:

وهو يعرف على المجال $]0,1[$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\begin{cases} k\cdot x^{k-1} & 0\le x \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (176-6)$$

وإنه يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-36)

وإن توقعه الرياضي يساوي: $E(x)=\dfrac{k}{k+1}$

وإن تباينه يساوي: $\sigma^2=\dfrac{k}{(k+1)^2(k+2)}$

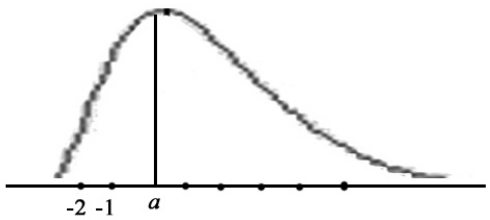
وإن عزمه الابتدائي الرائي يساوي: $\mu_r=\dfrac{k}{k+r}$

6-16: قانون توزيع القيمة الصغرى Min:

وهو يعرف عن كامل المجال $]-\infty,+\infty[$، وله صيغتان: واحدة للقيمة الصغرى Min، وأخرى للقيمة الكبرى Max. وإننا هنا سنستعرض قانون التوزيع الخاص بالقيمة الصغرى Min ذي الوسيط a، والذي يعرف بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=e^{x-a}\cdot e^{-e^{(x-a)}} \qquad -\infty<x<+\infty \qquad (177-6)$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل رقم (6-37)

وإن توقعه الرياضي يساوي: $E(x)=a-0.57721$

وإن منواله يساوي: $Mo = a$

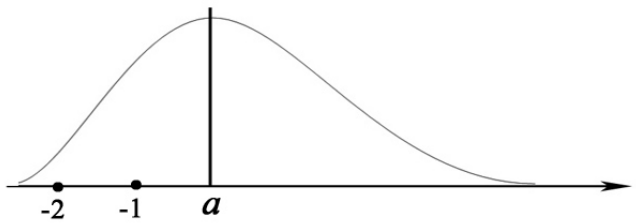
وإن تباينه: $\sigma^2 = \frac{\pi^2}{\sigma}$

6-17: قانون توزيع القيمة الكبرى (Max):

للحصول على قانون التوزيع الخاص بالقيمة الكبرى Max، نستبدل في التوزيع السابق كل x بـ (-x) فنحصل على مايلي:

$$g(x) = e^{-x-a} \cdot e^{-e^{-x-a}} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (178-6)$$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



شكل رقم (6-38)

وإن توقعه الرياضي يساوي: $E(x) = a + 0.57721$

وإن منواله يساوي: $Mo = a$

وتباينه: $\sigma^2 = \frac{\pi^2}{\sigma}$

6-18: قانون توزيع وايبول:

نقول عن المتحول X إنه يخضع لتوزيع وايبول W ونرمز له بـ $W_{p,q}(x)$ إذا كان قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ معطى بالعلاقة:

$$f(x) = W_{p,q}(x) = \begin{cases} pkx^{P-1} \cdot e^{(-kx)^p} & x > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (179-6)$$

حيث k,P عددان موجبان، ونعبر عن المتحول X الخاضع لتوزيع W بالشكل الآتي $X \square W(P,K)$، حيث k,P وسيطان عدديان وهو يرسم الشكل الآتي:

شكل (6-39)

. عندما $p=1$ فإن توزيع وايبول يصبح على الشكل الأسي الآتي:

$$f(x)=W_{p.q}(x)=k\cdot e^{-Kx} \qquad (180-6)$$

وبالتالي فإن X يخضع للتوزيع الأسي.

وإن التوقع الرياضي لمتحول وايبول = $E(x)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{c+1}{c}\right)}{k}$

أما المنوال فيساوي:

$$Mo=\tfrac{1}{k}\left[1-\frac{1}{c}\right]^{\frac{1}{c}} \qquad (181-6)$$

والتباين يساوي:

$$\sigma^2=\frac{1}{k}\left\{\Gamma\left(\frac{c+2}{c}\right)\left[\Gamma\left(\frac{c+1}{c}\right)\right]^2\right\} \qquad (182-6)$$

ويتمتع $W_{p,q}(x)$ بنفس خواص قوانين التوزيع الاحتمالية، ويرسم أشكالاً بيانية مختلفة بحسب قيم p وk. ومن العلاقة رقم (6-179) يمكن إيجاد القيم المميزة له وتابع التوزيع $F(X)$ الخاص به.

6-19: توزيع (ريلي):

نقول عن المتحول R إنه يخضع لتوزيع ريلي إذا كان قانون توزيعه الاحتمالي $f(r)$ معطى بالعلاقة:

$$f(r)=\begin{cases}2h^2r\cdot e^{-h^2r^2} & r\geq 0\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (183-6)$$

حيث h ثابت عددي، و h وسيط لتوزيع ريلي:

ويمكـــن البرهـــان علـــى توقعـــه $E(r)=\frac{1}{h}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{4}}$، وأن تباينـــه يســـاوي

$$\sigma^2_{(r)}=\frac{1}{2h^2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$$

ويتمتـع توزيـع ريلـي بـنفس خـواص قـوانين التوزيـع الاحتماليـة، ومـن قـانون التوزيـع الاحتمالي المعطى بالعلاقة (6-183) يمكن إيجاد القيم المميزة وتابع التوزيع $F(R)$.

6-20: توزيع (ماكسويل):

نقول عن المتحول X إنه يخضع لتوزيع ماكسويل إذا كان قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot P^{\frac{3}{2}}x^2e^{\frac{-p}{2}x^2} & x>0 \\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases} \qquad (6-184)$$

حيث P ثابت عددي موجب.

ويتمتع توزيع ماكسويل بنفس خواص قوانين التوزيع الاحتمالية، ومن قانون التوزيع الاحتمالي المعطى بالعلاقة (6-184) يمكن إيجاد القيم المميزة وتابع التوزيع $F(X)$.

تمرينات

1 . إذا كان: $X \square N(10,9)$ ، فأوجد صيغة قانون التوزيع الذي يخضع له المتحول X.

2 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يعبر عن أطوال 1000 شخص، ويخضع للتوزيع الطبيعي العام، فإذا علمت أن متوسط أطوال هؤلاء الأشخاص هو 170 سم، وبانحراف معياري 10 سم، والمطلوب:

. إيجاد قانون توزيع X.

. إيجاد عدد الأشخاص الذين تكون أطوالهم أقل من 170 سم.

. إيجاد عدد الأشخاص الذين تكون أطوالهم أكثر من 190 سم.

ـ إيجاد عدد الأشخاص الذين تتراوح أطوالهم بين 160 سم و180 سم، ومثل ذلك بيانياً.

. إيجاد الاحتمالات الآتية:

$P(170-2\sigma \le X \le 170+2\sigma)$

$P(170-3\sigma \le X \le 170+3\sigma)$

3 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لتوزيع χ^2 بـ 10 درجات حرية، فأوجد $P(X>2)$ ، ثم أوجد قيمة X لكي يكون: $P(X>x)=0.7$.

4 . إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً وقانون توزيعه معطى بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

. إيجاد تابع التوزيع $F(X)$ وارسمه.

. إيجاد قيمة الاحتمال $P(1 \le x \le 2)$.

. إيجاد التابع المولد للعزوم $\psi_x(t)$، ثم أوجد العزوم الابتدائية حتى المرتبة الرابعة.

. دراسة الواقع التناظري لـ X.

5 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لقانون التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ ، والمطلوب:

حساب الاحتمالات الآتية:

$P(|x| \le 0,5)$, $P(1,95 < x \le 2)$

$P(x > 2)$, $P(x \le 1,95)$

6 . إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً وقانون توزيعه معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} k & a \le X \le b \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

. تعيين قيمة الثابت K حتى يكون $f(x)$ قانون توزيع احتمالي لـ X وارسمه.

. إذا كان $a = 6$, $b = 10$ عين K ثم احسب $P(7 < x < 9)$.

. تحديد تابع التوزيع $F(X)$.

. إيجاد توقع وتباين X.

7 . إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً وقانون توزيعه معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2}$$

حيث: $-\infty < x < +\infty$ ، والمطلوب:

. إيجاد قيمة الثابت A وارسم منحني $f(x)$.

. إيجاد تابع التوزيع $F(X)$.

. إيجاد $P(0 \le x \le 5)$.

8 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع للتوزيع الأسي الآتي:

$f(x) = \mu e^{-\mu x}$, $x \ge 0$

والمطلوب:

. رسم منحني هذا التوزيع.

. دراسة خواصه.

. إيجاد التابع المولد للعزوم، ثم أوجد العزوم الابتدائية حتى المرتبة الثالثة.

. دراسة الواقع التناظري.

. إيجاد توقع وتباين X.

. حساب احتمال $P\left(x \le E\left(x\right)\right)$

9 . إذا كان R متحولاً عشوائياً يمثل بعد نقطة الإصابة عن مركز الهدف وقانون توزيعه معطى بالعلاقة:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} Are^{-h^2r^2} & r \ge 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

. إيجاد قيمة A ثم ارسم منحني التوزيع.

. إيجاد قيمة المنوال والتوقع والتباين.

. إيجاد تابع التوزيع.

. حساب الاحتمال: $P\left(R < Mod\right)$.

10 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع للتوزيع $T_k\left(x\right)$، فبرهن إذا كان:

$$Y=\frac{1}{1+\frac{\chi^2}{k}}$$

فإن Y يخضع للتوزيع: $\beta_{\frac{k}{2},\frac{1}{2}}\left(y\right)$ في المجال [0,1] ، ثم أوجد $\sigma^2_{(y)},E\left(y\right)$.

11 . إذا كان X خاضعاً لـ $F_{k_1,k_2}\left(x\right)$ ، فبرهن على أنه إذا كان:

$$Y=\frac{k_2}{\left(k_2+k_1x\right)}$$

فإن Y يخضع للتوزيع: $\beta_{\frac{k}{2},\frac{1}{2}}\left(y\right)$

ثم برهن على أنه إذا كان:

$$Z=\frac{k_1x}{k_2+k_1x}$$

فإن Z يخضع للتوزيع: $\beta_{\frac{k_1}{2},\frac{k_2}{2}}(Z)$

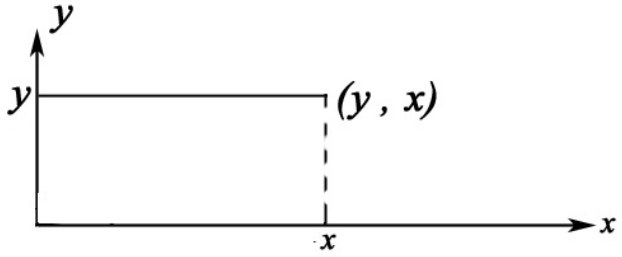
12 . إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لتوزيع بيتا، والمطلوب: رسم $f(x)$ عندما $q=2$, $P=2$

الفصل السابع

التوزيعات الاحتمالية لجملة متحولات عشوائية منقطعة

7-1: مقدمة:

نصادف في الحياة العملية الكثير من التجارب التي لا تتعين نتيجتها بمتحول واحد وإنما بمتحولين أو ثلاثة متحولات أو أكثر. فمثلاً عندما نجري تجربة إحصائية حول المواليد فإننا نأخذ قياس أطوال وأوزان هؤلاء المواليد، نلاحظ أن هذه التجربة تتعلق بمتحولين، أحدهما يعبر عن الطول والآخر يعبر عن الوزن. وكذلك عندما نجري تجربة إحصائية حول قياس أطوال وأوزان مجموعة من الأطفال لدراسة مستوى النمو لديهم فإننا نلاحظ أن هذه التجربة تتعلق بثلاثة متحولات، الأول يعبر عن الطول والثاني يعبر عن الوزن والثالث يعبر عن العمر ونرمز للمتحولات العشوائية بأحرف كبيرة مثل X,Y,Z، ونرمز لجملة هذه المتحولات بالرمز (X,Y,Z) أما بالنسبة لتمثيل هذه المتحولات على جملة محاور إحداثية فإن ذلك يتم حسب عدد المتحولات التي تتضمنها الجملة، فإذا كنا أمام متحولين عشوائيين (X,Y) فإن كل قيمتين متقابلتين من X و Y تعينان نقطة (x,y) على المستوي الإحداثي XoY كما في الشكل التالي:



الشكل رقم (7-1)

أما إذا كنا أمام ثلاثة متحولات (X,Y,Z) فإن القيم المتقابلة لهذه المتحولات تعين أيضاً نقطة (x,y,z) في فراغ ثلاثي البعد... وهكذا.

وفي هذا الفصل سوف ندرس التوزيعات الاحتمالية الإحصائية وصفاتها العددية لجملة متحولين عشوائيين (x,y) من النوع المنقطع. وبنفس الأسلوب يمكن تعميم النتائج على أكثر من متحولين عشوائيين.

7-2: التوزيعات الاحتمالية للثنائية (X,Y):

7-2-1: تعريف:

نقول عن جملة المتحولين العشوائيين (X,Y) أنهما من النوع المنقطع، إذا كان كل من المتحولين يأخذ قيماً بشكل منقطع، ولنفترض أن X يأخذ n قيمة ويمكن ترتيبها كمايلي:

$$X: x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_i, \ldots x_n$$

كما نفترض أن Y يأخذ m قيمة ويمكن ترتيبها كمايلي:

$$Y: y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_j, \ldots y_m \qquad (1-7)$$

وبالتالي فإن المستوي XoY يحوي عدداً منتهياً من ثنائيات القيم (x_i, y_j).

7-2-2: التوزيع الاحتمالي الإحصائي للجملة (X,Y):

لنفرض أننا أجرينا N قياساً أو تجربة على الثنائية لـ (X,Y) ، فكانت القيم التي يأخذها كل من المتحولين Y,X مرتبة في جدول بحيث أن كل ثنائية من هذه القيم (x_i, y_j) يقابلها عدد من التكرارات N_{ij}، كما في الجدول التالي:

Y / X	y_1 y_2 y_3 ... y_j..... y_m	$\sum_{j=1}^{m} Nij$
x_1	N_{11} N_{12} N_{13}... N_{1j}... N_{1m}	$N_{1.}$
x_2	N_{21} N_{22} N_{23}... N_{2j}... N_{2m}	$N_{2.}$
x_3	N_{31} N_{32} N_{33}... N_{3j}.. N_{3m}	$N_{3.}$
:	.....	:
x_i	N_{i1} N_{i2} N_{i3}... N_{ij}... N_{im}	$N_{i.}$
:	.....	:
x_n	N_{n1} N_{n2} N_{n3}... N_{nj}... N_{nm}	$N_{n.}$

(2-7)

$\sum_{i=1}^{n} Nij$	$N_{.1}\ N_{.2}\ \ N_{.3}...\ N_{.j}...\ N_{.m}$	N

وإذا رمزنا بـ $(Ni\cdot)$ ترمز لمجموع عناصر السطر i ونصنفها في العمود الأخير فنحصل على عمود يتضمن مجموع تكرارات الأسطر. كما نرمز لمجموع عناصر العمود j بالرمز $(Nj\cdot)$ ، ونصنفها في السطر الأخير فنحصل على عمود يتضمن مجموع تكرارات الأعمدة، أما بالنسبة لـ N فهي مجموع عناصر الأسطر والأعمدة ، وبذلك تكون لدينا العلاقات التالية:

$$N_{i.} = \sum_{j=1}^{m} N_{i.j} \qquad N_{.j} = \sum_{i=1}^{n} N_{i.j}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_{ij} = \sum_{i=1}^{n} N_{i.} = \sum_{j=1}^{m} N_{.j} = N \qquad (3-7)$$

ولإيجاد قانون التوزيع الاحتمالي المشترك لـ (X,Y) نقوم بتقسيم التكرارات N_{ij} المقابلة لكل ثنائية من $(x_i\ ,\ y_j)$ على مجموع التكرارات N فنحصل على نسب عددية نرمز لها بـ p_{ij} وتساوي:

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N} \qquad (4-7)$$

حيث: $(i:1,2,3,....n)$ و $(j:1,2,3,...m)$

وتعني p_{ij} احتمال أن تأخذ (X,Y) النقطة $(x_i\ ,\ y_j)$ ونعبر عن ذلك بالعلاقة:

$$P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij} \qquad (5-7)$$

حيث: $(i:1,2,3,....n)$ و $(j:1,2,3,...m)$

ويمكن ترتيب هذه الاحتمالات في جدول يدعى بالتوزيع الاحتمالي المشترك لـ (X,Y) ونرمز له بـ f (x,y) كمايلي:

جدول التوزيع المشترك لـ (X,Y)

Y / X	y_1 y_2 y_3..... y_j.... y_m	$\sum_{j=1}^{m}$

x_1	$p_{11}\ p_{12}\ p_{13}\cdots\ p_{1j}\cdots p_{1m}$	$P_{1.}$
x_2	$p_{21}\ p_{22}\ p_{23}\cdots\ p_{2j}\cdots p_{2m}$	$P_{2.}$
x_3	$p_{31}\ p_{32}\ p_{33}\cdots\ p_{3j}\cdots p_{3m}$	$P_{3.}$
:	.....	:
x_i	$p_{i1}\ p_{i2}\ p_{i3}\cdots\ p_{ij}\cdots p_{im}$	$P_{i.}$
:	.....	:
x_n	$p_{n1}\ p_{n2}\ p_{n3}\cdots\ p_{nj}\cdots p_{nm}$	P_n
$\sum_{i=1}^{n}$	$P_{.1}\ P_{.2}\ P_{.3}\cdots\ P_{.j}\cdots P_{.m}$	1

وبالتالي فإن كل ثنائية من القيم (x_i , y_j) يقابلها الاحتمال p_{ij} وما عدا ذلك تقابل الاحتمال صفر. وبالاعتماد على ما تقدم فإن قانون التوزيع الاحتمالي المشترك f(x,y) يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$f(x,y)=\begin{cases} p_{ij} & \text{عندما } X=x_i, Y=y_j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (6-7)$$

ويتمتع قانون التوزيع الاحتمالي المشترك بالخواص التالية:

1 . نلاحظ أن:

$$f(x_i,y_j)=p_{ij}\geq 0 \qquad :(j:1,2,3,...m)\,(i:1,2,3,....n)$$

2 . إن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد أي:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{N_{ij}}{N}=\frac{N}{N}=1$$

أما تابع التوزيع F(x,y) فإنه يعطى بالعلاقة:

$$F(x,y)=P\left(X\leq x_s, Y\leq y_t\right)$$

$$F(x,y)=\sum_{x_i\leq x_s}\sum_{y_j\leq y_t}f(x_i,y_j)=\sum_{x_i\leq x_s}\sum_{y_j\leq y_t}p_{ij} \qquad (7-7)$$

ويمكن حساب الاحتمالات الأخرى المختلفة كمايلي:

$$P(X \le x_s, Y \le y_t) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} p_{ij}$$

$$P(X \le x_s, Y \ge y_t) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=t}^{m} p_{ij} \qquad (8-7)$$

$$P(X \ge x_s, Y \le y_t) = \sum_{i=s}^{n} \sum_{j=1}^{t} p_{ij}$$

$$P(X \ge x_s, Y \ge y_t) = \sum_{i=s}^{n} \sum_{j=t}^{m} p_{ij}$$

$$P(x_s \le X \le x_k, y_t \le Y \le y_\ell) = \sum_{i=s}^{k} \sum_{j=t}^{\ell} p_{ij}$$

$$p(x_s < X < x_k, y_t \le Y < y_l) = \sum_{i=s+1}^{k-1} \sum_{j=t+1}^{\ell-1} p_{ij}$$

مثال (7-1):

أجرينا تجربة على 100 طفل وقمنا بأخذ قياس الوزن والعمر لهم، ورتبنا النتائج فحصلنا على الجدول التكراري اللاحق، بافتراض أن X متحول عشوائي يعبر عن الوزن بالكيلوغرام، وY متحول عشوائي يعبر عن العمر بالسنة كمايلي:

	j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
i	**Y** / **X**	3	4	5	6	7	$\sum$
1	18	4	10	9	5	4	32
2	20	5	4	6	6	3	24
3	22	3	4	5	7	2	21
4	25	1	5	7	6	4	23
	$\sum$	13	23	27	24	13	100

والمطلوب:

1- إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي المشترك f(x,y) .

2- دراسة خواصه.

3- احسب الاحتمالات التالية:

$$P(x \le 22, y \le 5), P(x \le 20, y \le 6), P(x \ge 20, y \ge 6)$$

$$P(x \ge 22, y \le 4), P(20 \le x \le 25, 4 \le y \le 6), P(20 < x < 25, 4 < y < 6)$$

الحل:

1- نحسب الاحتمالات المقابلة p_{ij} لكل ثنائية من القيم $\left(X=x_i, Y=y_i\right)$ بالعلاقة $\frac{N_{ij}}{N}$ ونضع النتائج في الجدول التالي:

$f\left(x_i, y_i\right) =$

	j	1	2	3	4	5
i	X / Y	3	4	5	6	7
1	18	0.04	0.1	0.09	0.05	0.04
2	20	0.05	0.04	0.06	0.06	0.0 3
3	22	0.03	0.04	0.05	0.07	0.0 2
4	25	0.01	0.05	0.07	0.0 6	0.0 4

وهو قانون التوزيع الاحتمالي المشترك f(x,y) للجملة Y,X.

2- نلاحظ أن جميع الاحتمالات موجبة وبالتالي فإن الخاصية $p_{ij} \geq 0$ محققة أما بالنسبة للخاصية الثانية: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} pi_j = 1$ فيمكننا التحقق منها بأخذ مجموع تلك الاحتمالات فنجد أن:

$$0.04+0.1+0.09+.....0.05+0.04+....0.03+....+0.01+....0.04=1$$

إذاً الخاصة الثانية محققة أيضاً:

3- إيجاد الاحتمالات:

$$p(x \leq 22, y \leq 5) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 0.04+0.1+0.09+...0.03+0.04+0.05 = 0.5$$

$$p(x \geq 20, y \geq 6) = \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=4}^{5} p_{ij} = 0.07+0.02+0.06+0.04 = 0.19$$

$$p(x \leq 20, y \geq 6) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=4}^{5} p_{ij} = 0.05+0.04+0.06+0.03 = 0.18$$

$$p(x \geq 22, y \leq 4) = \sum_{i=3}^{4} \sum_{j=1}^{2} p_{ij} = 0.03+0.04+0.01+0.05 = 0.13$$

$$p(20 \leq x \leq 25, 4 \leq y \leq 6) = \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=2}^{4} p_{ij} = 0.04+0.06+0.06+....0.06 = 0.5$$

$$p(20 < x < 25, 4 < y < 6) = \sum_{i=3}^{3} \sum_{j=3}^{3} p_{ij} = P_{33} = 0.05$$

7-2-3: التوزيع الهامشي لـ X (توزيع X بمفرده):

يرمز للتوزيع الهامشي لـ X بـ f(x) أو p(x) ويعطى بالعلاقة:

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \frac{N_{i.}}{N}, i = 1.2,....n \qquad (9-7)$$

ويمكن البرهان على أن:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i.} \qquad (10-7)$$

من أجل $(i: 1,2,3,....n)$

ونحصل على هذه الاحتمالات من العمود الأخير في جدول التوزيع الاحتمالي المشترك $f(x,y)$ وهو تشكل التوزيع الهامشي لـX، وإذا اعتبرنا أن X متحول عشوائي وحيد فإن قانون توزيعه الاحتمالي $f(x)$ يمكن عرضه في جدول الآتي:

x	X_1 X_2 X_3... X_i... X_n
$P(x) = f(x)$	$p_{1.}$ $p_{2.}$ $p_{3.}$... $p_{i.}$... $p_{n.}$

ويدعى هذا الجدول بالتوزيع الهامشي لـ x المرتبط بالتوزيع الاحتمالي المشترك $f(x,y)$ ويحقق هذا التوزيع الخواص التالية:

$$f(x_i) = P(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{i.} = 1$$

أما تابع التوزيع $F(X)$، ويدعى بتابع التوزيع الهامشي لـ x فيعطى بالعلاقة التالية:

$$F(X) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_{i.} \qquad (11-7)$$

ويمكن حساب الاحتمالات المختلفة والمتعلقة بالتوزيع الهامشي لـ X وفق ما سبق في حالة المتحول الواحد.

7-2-4: التوزيع الهامشي لـ Y (توزيع Y بمفرده):

يرمز للتوزيع الهامشي لـ Y بـ f(y) أو p(y) ويعطى بالعلاقة :

$$P(y=y_j)=p_{.j}=\frac{N_{.j}}{N}\ ,\ j=1.2...m \qquad (12-7)$$

أو بالعلاقة:

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_j)=p_{.j} \qquad (13-7)$$

وذلك من أجل $(j:1,2,3,...m)$

نضع هذه الاحتمالات في السطر الأخير في جدول التوزيع الاحتمالي المشترك $f(x,y)$، فنحصل على التوزيع الهامشي Y، وإذا اعتبرنا أن Y متحول عشوائي وحيد، فإن قانون توزيعه الاحتمالي $f(y)$ يمكن عرضه في جدول منفرد كالتالي:

y	y_1 y_2 y_3... y_j... y_m
$P(x)=f(y)$	$p_{.1}$ $p_{.2}$ $p_{.3}$... $p_{.j}$... $p_{.m}$

ويدعى هذا الجدول بالتوزيع الهامشي لـ Y المرتبط بالتوزيع الاحتمالي المشترك $f(x,y)$، ويحقق هذا التوزيع الخواص التالية:

. إن: $f(y_j)=p(y_j)\geq 0$

. وأن: $\sum_{j=1}^{m}f(y_j)=\sum_{j=1}^{m}p.j=1$

أما تابع التوزيع $F(y)$ ويدعى بتابع التوزيع الهامشي لـ Y فيعطى بالعلاقة التالية:

$$F(y)=p(Y\leq y)=\sum_{y_j\leq y}p_{.j} \qquad (14-7)$$

ويمكن حساب الاحتمالات المختلفة والمتعلقة بالتوزيع الهامشي لـ y وفق ماسبق في حالة المتحول الواحد.

مثال (7-2):

بالاستعانة بمعطيات المثال رقم (7-1): أوجد التوزيع الهامشي لـ X والتوزيع الهامشي لـ Y، وادرس خواص كل منهما. ثم أوجد تابع التوزيع $F(X)$ و $F(y)$. ثم احسب الاحتمالات التالية: $P(x\leq 20)$

$P(y\geq 5), P(18<x\leq 22), P(4\leq y<7),$

الحل:

لحساب التوزيع الهامشي لـ X نطبق العلاقة (7–9) ونأخذ التكرارات من العمود الأخير ونعالجها كما في الجدول الآتي:

X	18	20	22	25
N_i	32	24	21	23
$P(x=x_i)=\frac{N_{i.}}{N}$	$\frac{32}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{23}{100}$
$f(x)=p_{i.}$	0.32	0.24	0.21	0.23
$F(x)$	0.32	0.56	0.77	1.00

أما بالنسبة لخواصه فنلاحظ أن: $P(X)=f(x_i)\geq 0$

وأن: $\sum_{i=1}^{n} p_{i.}=0.32+0.24+0.21+0.23=1$

ولحساب التوزيع الهامشي لـ y نطبق العلاقة (7–12) ونأخذ التكرارات من السطر الأخير ونعالجها كما في الجدول التالي:

Y	3	4	5	6	7
$f(y)=p_{.j}=P(y=y_j)=\frac{N_{.j}}{N}$	0.13	0.23	0.27	0.24	0.13
$F(y)$	0.13	0.36	0.63	0.87	1

أما بالنسبة لخواص $f(y)$ نلاحظ أنها محققة.

2 . إن تابع التوزيع لـ X و Y، لقد تم إيجادهما ووضع كل منهما في السطر الأخير في الجدولين السابقين.

$$P(X\leq 20)=\sum_{i=1}^{2} p_{ij}=0.32+0.24=0.56$$

$$P(X\geq 5)=\sum_{j=3}^{5} p_{.j}=0.27+0.24+0.13=0.64$$

$$P(18<x\leq 22)=F(22)-F(18)=0.45$$

$$P(4\leq y<7)=F(6)-F(3)=0.74$$

7-2-5: التوزيعات الشرطية واستقلال المتحولات العشوائية:

7-2-5-1: التوزيع الشرطي لـ X:

وهو عبارة عن قانون توزيع X ، ولكنه المشروط بقيمة معينة لـ Y. أو بمعنى آخر، هو توزيع X عندما Y تأخذ قيمة معينة مثل: $Y = y_t$، ويتم الحصول على هذا التوزيع الشرطي لـ X بتقسيم التكرارات N_{it}في عمود y_t على مجموع التكرارات $N_{.t}$ المقابلة لـ y_t أي حساب $\frac{N_{it}}{N_{.t}}$ وعندما نجعل $i:1,2,3...n$، فإننا نحصل على سلسلة من القيم الحقيقية والمقابلة لقيم المتحول X ندعوها بالتوزيع الاحتمالي الشرطي لـ X عندما $Y = y_t$ ، ونرمز لهذا التوزيع بالرمز $P(X/y_t)$ أو بالرمز $f(X/y_t)$ أو اختصاراً بالرمز $p_{i/t}$ ، ويظهر هذا التوزيع بالشكل التالي:

$$\begin{array}{ll} \text{X:} & X_1 \quad X_2 \quad X_3 ....X_i ....X_n \\ P(X/y_t): & \frac{N_{1t}}{N_{.t}} \frac{N_{2t}}{N_{.t}} \frac{N_{3t}}{N_{.t}} ..... \frac{N_{it}}{N_{.t}} ..... \frac{N_{nt}}{N_{.t}} \\ p_{i/t}: & P_1/t \;\; P_2/t \;\; P_3/t \;\ldots\; P_i/t \ldots P_n/t \end{array} \qquad (15\text{-}7)$$

أما عندما نريد إيجاد قانون التوزيع الشرطي لـ X عند القيمة y_j حيث $j:1,2,3...m$ ، فإننا نحصل على عدد من التوزيعات الشرطية لـ X بعدد قيم Y . أي يوجد لدينا m توزيعاً شرطياً لـ X. ونرمز لها بالرمز $P(X/y_j)$ أو $p_{i/j}$ وتظهر هذه التوزيعات كمايلي:

$$\begin{array}{lllll} \text{X:} & x_1 & x_2 & x_3 .....x_i .....x_n \\ P(X/y_1): & \frac{N_{11}}{N_{.1}} & \frac{N_{21}}{N_{.1}} & \frac{N_{31}}{N_{.1}} ..... \frac{N_{i1}}{N_{.1}} ..... \frac{N_{n1}}{N_{.1}} \\ P(X/y_2): & \frac{N_{12}}{N_{.2}} & \frac{N_{22}}{N_{.2}} & \frac{N_{32}}{N_{.2}} ..... \frac{N_{i2}}{N_{.2}} ..... \frac{N_{n2}}{N_{.2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ P(X/y_m): & \frac{N_{1m}}{N_{.m}} & \frac{N_{2m}}{N_{.m}} & \frac{N_{3m}}{N_{.m}} ..... \frac{N_{im}}{N_{.m}} ..... \frac{N_{nm}}{N_{.m}} \end{array} \qquad (7\text{-}16)$$

وتحقق هذه التوزيعات الخواص التالية:

- إن : $p_{i/j} = P(X / y_j) \geq 0$

وكذلك فإن: $\sum_{i=1}^{n} p_{i/j} = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i / y_j) = 1$

7-2-5-2: التوزيع الشرطي لـ Y:

وهو عبارة عن قانون توزيع Y، ولكنه المشروط بقيمة معينة لـ X. أو بمعنى آخر، هو توزيع Y عندما X تأخذ قيمة معينة مثل: $X = x_s$. ويتم الحصول على التوزيع الشرطي لـ Y بتقسيم التكرارات N_{sj} في سطر x_s على مجموع التكرارات $N_{s.}$ المقابلة لـ x_s أي $\frac{N_{sj}}{N_s}$. وعندما نجعل $j:1,2,3...m$ فإننا نحصل على سلسلة من القيم الحقيقية والمقابلة لقيم المتحول Y ندعوها بالتوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y عندما $X = x_i$: . ونرمز لهذا التوزيع بالرمز : $P\left(X / x_s\right)$أو بالرمز $f\left(Y / x_s\right)$ أو اختصاراً بالرمز $p_{j/s}$ ، ويظهر هذا التوزيع كمايلي:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Y:} & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots\ldots\ldots & y_j & \ldots\ldots\ldots & y_m \\ p(Y/x_s): & \frac{N_{s1}}{N_{s.}} & \frac{N_{s2}}{N_{s.}} & \frac{N_{s3}}{N_{s.}} & \ldots\ldots\ldots & \frac{N_{sj}}{N_{s.}} & \ldots\ldots\ldots & \frac{N_{sm}}{N_{s.}} \\ & p_{j/s} & p_{1/s} & p_{2/s} & p_{3/s} & \ldots\ldots p_{j/s} & \ldots & p_{m/s} \end{array} \qquad (17-7)$$

أما عندما نريد إيجاد قانون التوزيع الشرطي لـ Y عند القيمة x_i (حيث $i:1,2,3...n$) فإننا نحصل على عدد من التوزيعات الشرطية لـ Y بعدد قيم X، أي يوجد لدينا n توزيعاً شرطياً لـ Y، ونرمز لها بالرمز: $P\left(Y / x_i\right)$أو $p_{j/i}$ وتظهر هذه التوزيعات كمايلي:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Y:} & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots\ldots & y_j & \ldots\ldots & y_m \\ p(y/x_1): & \frac{N_{11}}{N_{1.}} & \frac{N_{12}}{N_{1.}} & \frac{N_{13}}{N_{1.}} & \ldots\ldots & \frac{N_{1j}}{N_{1.}} & \ldots\ldots & \frac{N_{1m}}{N_{1.}} \\ p(y/x_2): & \frac{N_{21}}{N_{2.}} & \frac{N_{22}}{N_{2.}} & \frac{N_{23}}{N_{2.}} & \ldots\ldots & \frac{N_{2j}}{N_{2.}} & \ldots\ldots & \frac{N_{2m}}{N_{2.}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & & & & & \\ p(y/x_n): & \frac{N_{n1}}{Nn.} & \frac{N_{n2}}{Nn.} & \frac{N_{n3}}{Nn.} & \ldots\ldots & \frac{N_{nj}}{Nn.} & \ldots\ldots & \frac{N_{nm}}{Nn.} \end{array} \qquad (18-7)$$

وتحقق هذه التوزيعات الخواص التالية:

إن: $p_{j/i} = P(y/x_i) \geq 0$

وكذلك فإن: $\sum_{j=1}^{m} p_{j/i} = \sum_{j=1}^{m} P(Y = y_j / x_i) = 1$

خواص عامة:

- إذا كان X و Y متحولين عشوائيين منفصلين، ولهما التوزيع المشترك $f(x,y)$ فإن احتمال تحقق الحادث $X = x_i$ و $Y = y_j$ معاً يساوي:

$$f(x_i, y_j) = P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i].P[Y = y_j / X = x_i]$$

أي أن:

$$f(x_i, y_j) = f(x_i) \cdot P(y_j / x_i) \qquad (19-7)$$

ومنها نجد أن:

$$p(y_j / x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{f(x_i)} = \frac{p_{ij}}{pi.} = p_{j/i} \qquad (20-7)$$

كما يمكن حسابه بالعلاقة:

$$f(x_i, y_j) = P[X = x_i, Y = y_j] = P[Y = y_j].p[X = x_i / Y = y_j] \quad (21-7)$$

ومنها نجد أن:

$$p(x_i / y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f(y_j)} = \frac{p_{ij}}{p.j} = p_{i/j} \qquad (22-7)$$

أما إذا كان X و Y متحولين مستقلين فإن:

$$P[Y = y_j / X = x_i] = P(Y = y_j) = p_{.j}$$

$$P[X = x_i / Y = y_j] = P(X = x_i) = p_{i.} \qquad (23-7)$$

وبالتالي تصبح العلاقتين (7−19) و(7−21) بالشكل التالي:

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i).P(Y = y_j) \qquad (24-7)$$

أي أن: $p_{ij} = p_{i.}.p_{.j}$

وكذلك:

$$f(x,y) = P(Y = y_j).P(X = x_i) \qquad (25-7)$$

$$p_{ij} = p_{.j}.p_{i.}$$

ومنه نستنتج، إذا كان X و Y متحولين مستقلين، فإنه يجب أن يكون لدينا:

$$f(x,y) = f(x).f(y) \qquad (26-7)$$

$$p_{ij} = p_{i.}.p_{.j}$$

أو بمعنى آخر، نقول عن X و Y أنهما متحولان مستقلان إذا استطعنا كتابة قانون التوزيع الاحتمالي المشترك لهما $f(x,y)$ على شكل جداء تابعين f(x) بـ f(y) كما في العلاقة (7−26).

يمكن حساب الاحتمالات المختلفة والمتعلقة بالتوزيع الشرطي لـ X كما يلي:

- $P(X \le x_t / y_j) = \sum_{i=1}^{t} P(x_i / Y = y_j) = \sum_{i=1}^{t} P_i / j \qquad (27-7)$

حيث: $j : 1,2,3...m$

- $P(X < x_t / y_j) = \sum_{i=1}^{t-1} P(x_i / Y = y_j) = \sum_{i=1}^{t-1} P_{i/j}$

حيث: $j : 1,2,3...m$

- $P(X \ge x_t / y_j) = \sum_{i=t}^{n} P(x_i / Y = y_j) = \sum_{i=t}^{n} P_{i/j}$

أو بالعلاقة:

- $P(X \ge x_t / y_j) = 1 - P(X < x_t / y_j)$
- $P(x_s < X \le x_t / y_j) = \sum_{i=s+1}^{t} P(x_i / y_j) = \sum_{i=s+1}^{t} P_{i/j}$
- $P(x_s \le X < x_t / y_j) = \sum_{i=s}^{t-1} P(x_i / y_j) = \sum_{i=s}^{t-1} P_{i/j}$

أما بالنسبة لعملية حساب الاحتمالات المختلفة والمتعلقة بالتوزيع الشرطي لـ Y فهي كما يلي:

- $P(Y \le y_k / x_i) = \sum_{j=1}^{k} P(y_j / X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} P_{j/i} \qquad (28-7)$

حيث: $i : 1,2,3...n$

- $P(Y < y_k / x_i) = \sum_{j=1}^{k-1} P(y_j / X = x_i) = \sum_{j=1}^{k-1} P_{j/i}$
- $P(Y \geq y_k / x_i) = \sum_{j=k}^{m} P(y_j / X = x_i) = \sum_{j=k}^{m} P_{j/i}$

أو بالعلاقة:

$$P(Y \geq y_k / x_i) = 1 - P(Y < y_k / x_i)$$

- $P(y_k < Y \leq y_l / x_i) = \sum_{j=k+1}^{l} P(y_j / x_i) = \sum_{j=k+1}^{l} P_{i/i}$
- $P(y_k \leq Y < y_l / x_i) = \sum_{j=k}^{l-1} P(y_j / x_i) = \sum_{j=k}^{l-1} P_{j/i}$

مثال (7-3):

اعتماداً على معطيات المثال رقم (1) ابحث فيما يلي:

1- إيجاد التوزيعات الشرطية لـ X.

2- إيجاد التوزيعات الشرطية لـ Y.

3- بين فيما إذا كان X و Y مستقلين.

4- احسب الاحتمالات التالية:

$P(20 \leq Y < 25/5)$, $P(X \geq 22/6)$, $P(X \leq 20/4)$, $P(Y \leq 5/20)$

$P(4 < Y < 6/25)$, $P(4 \leq Y \leq 6/25)$, $P(Y < 5/22)$

الحل:

1 . التوزيعات الشرطية لـ X هي:

X.:	18	20	22	25
$P(X/y=3)$:	$\frac{4}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$
$P(X/y=4)$:	$\frac{10}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$
$P(X/y=5)$:	$\frac{9}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{7}{27}$
$P(X/y=6)$:	$\frac{5}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{6}{24}$
$P(X/y=7)$:	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$

وهكذا نلاحظ أنه يوجد خمسة توزيعات شرطية لـ X أي بعدد قيم Y.

2- التوزيعات الشرطية لـ Y هي:

$$Y=: \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$P(Y/x=18): \frac{4}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{9}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{4}{32}$$

$$P(Y/x=20): \frac{5}{24} \quad \frac{4}{24} \quad \frac{6}{24} \quad \frac{6}{24} \quad \frac{3}{24}$$

$$P(Y/x=22): \frac{3}{21} \quad \frac{4}{21} \quad \frac{5}{21} \quad \frac{7}{21} \quad \frac{2}{21}$$

$$P(Y/x=25): \frac{1}{23} \quad \frac{5}{23} \quad \frac{7}{23} \quad \frac{6}{23} \quad \frac{4}{23}$$

وهكذا نلاحظ أنه يوجد أربعة توزيعات شرطية لـ Y أي بعدد قيم X.

3 . لمعرفة فيما إذا كان X و Y مستقلين نطبق العلاقة التالية:

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$$

$$p_{11} = p_{1.} \cdot p_{.1}$$

$$0.04 \neq 0.32 \cdot 0.13$$

وبالتالي فإن X وY متحولان غير مستقلين لأن الجداء غير محقق لأحد الخلايا.

4 . حساب الاحتمالات:

$$P(X \leq 20/4) = \frac{10}{23} + \frac{4}{23} = \frac{14}{23}$$

$$P(X \geq 22/6) = \frac{7}{24} + \frac{6}{24} = \frac{13}{24}$$

$$P(20 \leq X < 25/5) = \frac{6}{27} + \frac{5}{27} = \frac{11}{27}$$

$$P(Y \leq 5/20) = \frac{5}{24} + \frac{4}{24} + \frac{6}{24} = \frac{15}{24}$$

$$P(Y < 5/22) = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{7}{21}$$

$$P(4 \leq Y \leq 6/25) = \frac{5}{23} + \frac{7}{23} + \frac{6}{23} = \frac{18}{23}$$

$$P(4 < Y < 6/25) = \frac{7}{23}$$

مثال (7-4):

إذا كان X و Y متحولان عشوائيان منفصلان ولهما قانون التوزيع الاحتمالي المشترك المعطى بالجدول التالي:

X \ Y	0	1	$\sum$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\sum$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

والمطلوب: إثبات أن X و Y متحولان مستقلان.

الحل: نطبق العلاقة التالية:

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j} \qquad \forall\ i, j$$

$$p_{11} = p_{1.} \cdot p_{.1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad p_{a1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ldots.$$

وبالتالي فإن X و Y متحولين مستقلين، ويمكن البرهان على ذلك بأخذ التوزيع الشرطي لـ X أو التوزيع الشرطي لـ Y. والتأكد من $f(X/Y) = f(x)$ أو $f(Y/X) = f(Y)$.

مثال (7-5):

إذا كان X و Y متحولان عشوائيان منفصلان وكان قانون التوزيع المشترك لهما يساوي:

$$p_{ij} = f(x,y) = \begin{cases} A(x_i + y_i) & : x_i = 0,1,2,3, \quad y_j = 1,2,3 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1- إيجاد قيمة الثابت A حتى يكون $f(x,y)$ توزيع احتمالي.

2- إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي المشترك $f(x,y)$.

3- هل X و Y مستقلان.

الحل:

1- بما أن: $p_{ij} = A(x_i + y_j)$

حيث: $i = 0,1,2,3, \quad j = 1,2,3$

وبالتالي نكتب الشرط الثاني كمايلي:

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1 \Rightarrow \sum_{j} (p_{0j} + p_{1j} + p_{2j} + p_{3j}) = 1$$

$$= p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1$$

$$A.(1+2+3+2+3+4+3+4+5+4+5+6) = 1$$

$$42.A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{42}$$

2- إن التوزيع المشترك $f(x,y)$ يساوي:

$f(x,y) =$

X \ Y	1	2	3	$p_{i.}$
0	$\frac{1}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{6}{42}$
1	$\frac{2}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{9}{42}$
2	$\frac{3}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{12}{42}$
3	$\frac{4}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{15}{42}$
$p_{.j}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{18}{42}$	1

3 . لإثبات استقلالية المتحولين نطبق العلاقة:

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j} \Rightarrow p_{01} = p_{0.} \cdot p_{.1}$$

فنجد أن: $\frac{1}{42} \neq \frac{6}{42} . \frac{10}{42}$

وبالتالي فإن المتحولين غير مستقلين.

7-2-6: القيم العددية المميزة للتوزيع f(x,y):

7-2-6-1: التوقع الرياضي:

ـ إن التوقع الرياضي لـ X والتوقع الرياضي لـ Y يحسبان بنفس الأسلوب في حالة المتحول الواحد أي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_{i.}.x_i=\mu(x) \qquad (29-7)$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{m} p_{.j}.y_j=\mu(y)$$

. إن التوقع الرياضي للمجموع الجبري $X\pm Y$ يساوي:

$$E(X\pm Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j).(x_i\pm y_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\cdot p_{ij}\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j.p_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\pm\sum_{j=1}^{m} y_j.\sum_{i=1}^{n}.p_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i.p_{i.}\pm\sum_{j=1}^{m} y_j.p_{.j}$$

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y) \qquad (30-7)$$

التوقع الرياضي الشرطي لـ x:

ويرمز للتوقع الرياضي لـ X عندما $Y=y_j$ بالرمز $E\left(X/y=y_j\right)$ أو بالرمز $\mu_{x/j}$ ويعطى بالعلاقة:

$$E(X/y=y_j)=\sum_{i=1}^{n} p_{i/j.}.x_i=\sum_{i=1}^{n} p(x_{i.}/y_j).x_i \qquad (31-7)$$

حيث $j=1,2,3...m$

وبالتالي فإننا نحصل على m توقعاً شرطياً لـ X بعدد قيم Y كمايلي:

$$E(X/Y=y_1)=\mu_{x/1}=\sum_{i=1}^{n}x_i.p_{i/1}$$

$$E(X/Y=y_2)=\mu_{x/2}=\sum_{i=1}^{n}x_i.p_{i/2} \qquad (32-7)$$

.....

$$E(X/Y=y_m)=\mu_{x/m}=\sum_{i=1}^{n}x_i.p_{i/m}$$

ويمكن أن نكتب التوقعات الشرطية لـ X مقارنة مع قيم Y على شكل سلسلة ارتباطية كمايلي:

$$E(X/y_j):E(X/y_1)\quad E(X/y_2)\ .....E(X/y_j)\quad E(X/y_m) \qquad (33-7)$$

$$Y \quad : \quad y_1 \quad y_2.....y_j.....y_m$$

ولدراسة العلاقة بين $E\left(X/y_j\right)$ وY، نفترض أن العلاقة بينهما خطية من الشكل:

$$E\left(X/y_j\right)=a_0+ay_j \qquad (34-7)$$

حيث a,a_0 ثوابت المعادلة المفروضة، وتدعى هذه العلاقة بعلاقة انحدار X على Y ويمكن تمثيل هذه العلاقة في المستوي XoY بخط مستقيم.

التوقع الرياضي الشرطي لـ Y:

ويرمز للتوقع الرياضي لـ Y عندما: $X=x_i$ بالرمز $E\left(Y/X=x_i\right)$ أو بالرمز $\mu_{y/i}$. ويعطى بالعلاقة:

$$E(Y/X=x_i)=\sum_{j=1}^{m}p_{j/i}.y_j=\sum_{j=1}^{m}p(y_j/x_i).y_j \qquad (35-7)$$

حيث $i:1,2,3...n$.

وبالتالي فإننا نحصل على n توقعاً شرطياً لـY، وذلك بعدد قيم X، كمايلي:

$$E(Y/X=x_1)=\mu_{y/1}=\sum_{j=1}^{m}y_j.p_{j/1}$$

$$E(Y/X=x_2)=\mu_{y/2}=\sum_{j=1}^{m}y_j.p_{j/2} \qquad (36-7)$$

.....

$$E(Y/X=x_n)=\mu_{y/n}=\sum_{j=1}^{m}y_j.p_{j/n}.$$

ويمكن أن نكتب التوقعات الشرطية لـ X مقارنة مع قيم X على شكل سلسلة ارتباطية كمايلي:

$$E(Y/x_i):E(Y/x_1)\quad E(Y/x_2)\ .....E(Y/x_i)\quad E(Y/x_n) \qquad (37-7)$$

$$X \quad : \quad x_1 \qquad x_2\ .....x_i.....x_n$$

ولدراسة العلاقة بين $E\left(Y/x_j\right)$ و Y، نفترض أن العلاقة بينهما خطية من الشكل:

$$E\left(Y/x_i\right)=b_0+bx_i \qquad (38-7)$$

حيث b,b_0 هما ثابتا المعادلة المفروضة وتدعى هذه العلاقة بعلاقة انحدار Y على X ويمكن تمثيل هذه العلاقة في المستوي XoY ، بخط مستقيم آخر.

التوقع الرياضي لـ (X. Y):

ويعرف بالعلاقة التالية:

$$E(X.Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jf(x_i,y_j) \qquad (39-7)$$

$$E(X.Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jp_{ij}=\mu_{xy}$$

مثال (7-6):

بالاستفادة من معطيات المثال رقم (7-5) والمطلوب إيجاد:

1- التوقع الرياضي لـ X بمفرده، والتوقع الشرطي لـ X.

2- التوقع الرياضي لـ Y بمفرده، والتوقع الشرطي لـY.

3- التوقع الرياضي لـ $X\cdot Y$.

الحل:

1- التوقع الرياضي لـ X بمفرده: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_{i.}x_i$

$$=0.\frac{6}{42}+1.\frac{9}{42}+2.\frac{12}{42}+3.\frac{15}{42}=\frac{78}{42}\approx 1.86$$

التوقع الشرطي لـ X ويعطى بالعلاقة:

$$E(X/y_j)=\sum_{i=1}^{n} p_{i./j}x_i=\mu_{x/j}$$

$$E(X/y=1)=\mu_{x/1}=0.\frac{1}{10}+1.\frac{2}{10}+2.\frac{3}{10}+3.\frac{4}{10}=\frac{20}{10}=2$$

$$E(X/y=2)=\mu_{x/2}=0.\frac{2}{14}+1.\frac{3}{14}+2.\frac{4}{14}+3.\frac{5}{14}=\frac{26}{14}\approx 1.86$$

$$E(X/y=3)=\mu_{x/3}=0.\frac{3}{18}+1.\frac{4}{18}+2.\frac{5}{18}+3.\frac{6}{18}=\frac{32}{18}\approx 1.78$$

2- التوقع الرياضي لـ Y بمفرده:

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{m} p_{.j}y_{.j}=1.\frac{10}{42}+2.\frac{14}{42}+3.\frac{18}{42}+=\frac{92}{42}=2.19$$

التوقع الشرطي لـ Y ويعطى بالعلاقة:

$$E(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m} p_{j./i}y_j=\mu_{y/i}$$

$$\mu_{y/0}=E(Y/x=0)=1.\frac{1}{6}+2.\frac{2}{6}+3.\frac{3}{6}=\frac{14}{6}=2.33$$

$$\mu_{y/1}=E(Y/x=1)=1.\frac{2}{9}+2.\frac{3}{9}+3.\frac{4}{9}=\frac{20}{9}=2.22$$

$$\mu_{y/2}=E(Y/x=2)=1.\frac{3}{12}+2.\frac{4}{12}+3.\frac{5}{12}=\frac{26}{12}=2.17$$

$$\mu_{y/3}=E(Y/x=3)=1.\frac{4}{15}+2.\frac{5}{15}+3.\frac{6}{15}=\frac{32}{15}=2.13$$

3- التوقع الرياضي لـ X.Y: ويعطى بالعلاقة:

$$E(x.y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i.y_j.p_{ij}$$

$$=0.1.\frac{1}{42}+0.2.\frac{2}{42}+0.3.\frac{3}{42}+1.1.\frac{2}{42}+...+2.10\frac{3}{42}+.....$$

$$.....+3.1.\frac{4}{42}+3.2.\frac{5}{42}+3.3.\frac{6}{42}$$

$$E(x.y)=\mu_{xy}=\frac{168}{42}=4$$

7-2-6-2: العزوم:

• **العزوم الابتدائية** من المرتبة (t,s) هي $E\left(x^t\cdot y^s\right)$:

ويرمز لها أيضاً بالرمز $\mu_{ts}(x.y)$ ، وتعطى بالعلاقة:

$$E(x^t.y^s)=\mu_{ts}(x.y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^t.y_j^s.p(x_i,y_j) \qquad (40-7)$$

أو بالعلاقة:

$$E(x^t.y^s)=\mu_{ts}(x.y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^t.y_j^s.p_{ij}$$

حيث t,s عددان صحيحان غير سالبين، ومنهما نجد أنه.

عندما $t=0$, $s=0$ فإن: $E(x^0.y^0)=\mu_{00}(x.y)=1$

وعندما $t=1$, $s=0$ فإن: $E(x^1.y^0)=\mu_{10}(x.y)=\sum_{i=1}^{n}x_i.p_{i.}=E(x)$

مع العلم أن: $E(x)=\mu_1(x)=\mu\ (x)$

عندما $t=0,s=1$ فإن: $E(x^0.y^1)=\mu_{01}(x.y)=\sum_{j=1}^{m}y_j.p_{.j}=E(y)=\mu(y)$

عندما $t=1,s=1$ فإن: $E(x.y)=\mu_{11}(x.y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i.y_j.p_{ij}$

وهكذا نتابع حساب بقية العزوم الابتدائية من المراتب المختلفة.

• **العزوم المركزية** من المرتبة (t,s) للثنائية (X,Y):

يعرف بالعزم المركزي من المرتبة s و t للتوزيع المشترك لـ X و Y بالعلاقة التالية:

$$M_{ts}(x.y) = E[(x-\mu_x)^t (y-\mu_y)^s]$$

$$M_{ts}(x.y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}[(x_i-\mu_x)^t (y_j-\mu_y)^s] \qquad (41-7)$$

حيث: s,t عددان صحيحان موجبان غير سالبين. ومنها نجد أنه:

عندما $t=0, s=0$ فإن: $M_{00}(x.y)=1$

عندما $t=0, s=0$ فإن: $M_{10}(x.y) = E[(x-\mu_x)^1 (y-\mu_y)^0]$

عندما $t=0, s=1$ فإن: $M_{01}(x.y) = E[(x-\mu_x)^0 (y-\mu_y)^1]$

$$M_{01}(x.y) = E[y-\mu_y] = 0$$

عندما $t=1, s=1$ فإن: $M_{11}(x.y) = E[(x-\mu_x).(y-\mu_y)]$

وهكذا نتابع بالنسبة لبقية العزوم المركزية من المراتب المختلفة.

- **التابع المولد للعزوم:**

يعرف التابع المولد للعزوم للمتحول العشوائي X بمفرده بالعلاقة التالية:

$$\Psi_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}.p_{i.} \qquad (42-7)$$

ويعرف التابع المولد للعزوم للمتحول العشوائي Y بمفرده بالعلاقة التالية:

$$\Psi_y(t) = E[e^{ty}] = \sum_{j=1}^{m} e^{ty_j}.p_{.j} \qquad (43-7)$$

أما التابع المولد للعزوم لمجموع متحولين عشوائيين مستقلين فيعطى بالعلاقة التالية:

$$\Psi_{x+y}(t) = E[e^{t(x+y)}] = E[e^{tx}]\cdot E[e^{ty}] \qquad (44-7)$$

7-2-6-3: التباين:

إن التباين للمتحول X وللمتحول Y يحسب بنفس الأسلوب في حالة المتحول الواحد أي:

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - E^2(x) = \mu_2(x) - \mu_1^2(x) \qquad (45-7)$$

$$\sigma^2(y) = E(y^2) - E^2(y) = \mu_2(y) - \mu_1^2(y)$$

- **التباين المشترك لـ (X,Y):**

يرمز للتباين المشترك بالرمز cov(X,Y) ويدعى أيضاً بـ عزم الترابط بينهما، ويعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x,y) &= E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y) \qquad (46-7)\end{aligned}$$

بما أن $\operatorname{cov}(X,Y)$ يدل على عزم الترابط (بين Y وX) وبالتالي فإنه يأخذ قيمة موجبة أو سالبة ليعكس حقيقة العلاقة بين X,Y من حيث أنها طردية أو عكسية. أما إذا كانت العلاقة بين X و Y معدومة، فإن X و Y يكونان مستقلين وعندها يكون:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=0$$

لنرمز بـ μ_y,μ_x للتوقعين الرياضيين لـ X و Y المنفردان.

من العلاقة (7−41) يمكن أن نكتب التباين المشترك كمايلي:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x,y) &= E[x.y]-\mu_x E(y)-\mu_y E(x)+\mu_x\mu_y \\ &= E[x.y]-\mu_x\mu_y-\mu_y\mu_x+\mu_x\mu_y = E[x.y]-\mu_x\mu_y\end{aligned}$$

ومنه فإن:

$$E(X.Y)=\operatorname{cov}(x,y)+\mu_x\mu_y \qquad (47-7)$$

وإذا كان X و Y متحولين مستقلين فإن: $\operatorname{cov}(X,Y)=0$

وبالتالي يكون:

$$E(X.Y)=\mu_x\mu_y \qquad (48-7)$$

- **تباين المجموع الجبري لـ $(X\pm Y)$:**

ويعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\sigma^2(x\pm y) &= E[(X\pm Y)-(\mu_x\pm\mu_y)]^2 \\ &= E[(X-\mu_x)\pm(Y-\mu_y)]^2 \qquad (49-7) \\ &= E(X-\mu_x)^2+E(Y-\mu_y)^2-2E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\end{aligned}$$

$$\sigma^2(x\pm y)=\sigma^2(x)+\sigma^2(y)\pm 2\operatorname{cov}(x,y) \qquad (50-7)$$

وإذا كان X و Y متحولين مستقلين فإن $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

وبالتالي فإن تباين $(X\pm Y)$ يصبح على الشكل التالي:

$$\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y) \qquad (51-7)$$

- **تباين الجداء** $(X \cdot Y)$:

ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2(x.y) = E[(x.y) - \mu_{xy})]^2 \qquad (52-7)$$

$$= E\left[x^2.y^2 + \mu_{xy}^2 - 2\mu_{xy}.x.y\right] = E\left[x^2.y^2\right] + \mu_{xy}^2 - 2\mu_{xy}E(x.y)$$

$$= E[x^2.y^2] + \mu_{xy}^2 - 2\mu_{xy}.[\mu_x.\mu_y + \mathrm{cov}(x,y)]$$

$$\sigma^2(x.y) = E[x^2.y^2] + \mu_{xy}^2 - 2\mu_{xy}.\mu_x.\mu_y - 2\mu_{xy}.\mathrm{cov}(x,y) \qquad (53-7)$$

وإذا كان X و Y متحولين مستقلين فإن: $\mathrm{cov}(x,y) = 0$ وإن:

$$E(x.y) = \mu_{xy} = \mu_x.\mu_y$$

$$E(x^2.y^2) = E(x^2).E(y^2) = \mu_2(x).\mu_2(y)$$

بالتعويض في العلاقة (7−53) نجد:

$$\sigma^2(x.y) = \mu_2(x).\mu_2(y) + \mu_{xy}^2 - 2\mu_x.\mu_x.\mu_y.\mu_y$$

$$= \mu_2(x).\mu_2(y) + \mu_x^2.\mu_y^2 - 2\mu_x^2.\mu_y^2$$

$$\sigma^2(x.y) = \mu_2(x).\mu_2(y) - \mu_x^2.\mu_y^2 \qquad (54-7)$$

ويمكن أن تكتب العلاقة (7−54) بشكل آخر أي بدلالة توقع وتباين كل من المتحولين لأنه لدينا:

$$\sigma^2(x) = \mu_2(x) - .\mu^2(x) \Rightarrow \mu_2(x) = \sigma^2(x) + \mu^2(x)$$

$$\sigma^2(y) = \mu_2(y) - .\mu^2(y) \Rightarrow \mu_2(y) = \sigma^2(y) + \mu^2(y)$$

بالتعويض في العلاقة (7−54) نجد:

$$\sigma^2(x.y) = [\sigma^2(x) + \mu^2(x)] \cdot [\sigma^2(y) + \mu^2(y)] - \mu_x^2.\mu_y^2$$

بإجراء الإصلاحات نجد:

$$\sigma^2(x.y) = \sigma^2(x) \cdot \sigma^2(y) + \sigma^2(x).\mu^2(y) + \sigma^2(y).\mu_{(x)}^2 \qquad (55-7)$$

- **التباين الشرطي لـ X :**

ويرمز للتباين الشرطي لـ X عندما $Y = y_j$ بالرمز: $\sigma^2(X/y_j)$، ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2(X/y_j) = E[X - E(X/y_j)]^2 = E[X - \mu_{x/j}]^2 \qquad (56-7)$$

حيث : $j = 1,2,3...m$

$$\sigma^2(X/y_j) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X/y_j)]^2 \cdot p(x_i/y_j)$$

$$\sigma^2(X/y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{i/j}[x_i - \mu_{x/j}]^2 \qquad (57-7)$$

حيث : $j = 1,2,3...m$

وبالتالي نحصل على m تبايناً شرطياً لـ X وذلك بعدد قيم Y.

- **التباين الشرطي لـ Y :**

ويرمز للتباين الشرطي لـ Y عندما $X = x_i$ بالرمز: $\sigma^2(Y/x_i)$، ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2(Y/x_i) = E[Y - E(Y/x_i)]^2 = E[Y - \mu_{y/i}]^2 \qquad (58-7)$$

حيث : $i : 1,2,3...n$

$$\sigma^2(Y/x_i) = \sum_{j=1}^{m} [y_j - E(Y/x_i)]^2 . p(y_i/x)$$

$$\sigma^2(Y/x_i) = \sum_{j=1}^{m} [y_j - \mu_{y/i}]^2 . p_{j/i} \qquad (59-7)$$

حيث : $i : 1,2,3...n$

وبالتالي نحصل على n تبايناً شرطياً لـ Y وذلك بعدد قيم X.

مثال (7-7) :

بالاستفادة من معطيات المثال رقم (7-5) والمطلوب إيجاد مايلي:

1- التابع المولد للعزوم $\Psi_y(t), \Psi_x(t)$

2- $\sigma^2(y), \sigma^2(x)$

3- $\sigma^2(Y/x_i), \sigma^2(X/y_j)$

الحل:

1- نعلم أن $\Psi_x(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$\Psi_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}.p_{i.} = e^{0.t}.\frac{6}{42} + e^{1.t}.\frac{9}{42} + e^{2.t}.\frac{12}{42} + e^{3.t}.\frac{15}{42}$$

$$\Psi_x(t) = \frac{3}{42}(2 + 3.e^{t} + 4.e^{2t} + 5.e^{3t})$$

كما أن $\Psi_y(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$\Psi_y(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{ty_j}.p_{.j} = e^{t}.\frac{10}{42} + e^{2.t}.\frac{14}{42} + e^{3.t}.\frac{18}{42} =$$

$$\Psi_y(t) = \frac{2}{42}e^{t}(5 + 7.e^{t} + 9.e^{2t})$$

2- لإيجاد $\sigma^2(y), \sigma^2(x)$ نلاحظ أن:

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.p_{i.} = (0)^2.\frac{6}{42} + (1)^2.\frac{9}{42} + (2)^2.\frac{12}{42} + (3)^2.\frac{15}{42}$$

$$E(x^2) = \frac{192}{42} \approx 4.57$$

ومنه: $$\sigma^2(x) = \frac{192}{42} - (\frac{78}{42})^2 = 1.12$$

وكذلك نجد أن: $$\sigma\ (x) \approx 1.06$$

$$\sigma^2(y) = E(y^2) - E^2(y)$$

$$E(y^2) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2.p_{.j} = (1)^2\frac{10}{42} + (2)^2.\frac{14}{42} + (3)^2.\frac{18}{42} = \frac{228}{42}$$

ومنه: $$\sigma^2(y) = \frac{228}{42} - (\frac{92}{42})^2 = 0.63$$

$$\sigma(y) \approx 0.79$$

3- لإيجاد $\sigma^2(Y/x_i), \sigma^2(X/y_j)$ نطبق العلاقة الآتية:

$$\sigma^2(X/y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{i/j}.[x_i - \mu_{x/j}]^2$$

$$\sigma^2(X/1) = \frac{1}{10}[0-2]^2 + \frac{2}{10}[1-2]^2 + \frac{3}{10}[2-2]^2 + \frac{4}{10}[3-2]^2 = \frac{10}{10} = 1$$

$$\sigma^2(X/2) = \frac{2}{14}[0-1.86]^2 + \frac{3}{14}[1-1.86]^2 + \frac{4}{14}[2-1.86]^2 + \frac{5}{14}[3-1.86]^2 = 1.12$$

$$\sigma^2(X/3) = \frac{3}{18}[0-1.78]^2 + \frac{4}{18}[1-1.78]^2 + \frac{5}{18}[2-1.78]^2 + \frac{6}{18}[3-1.78]^2 \approx 1.18$$

وهكذا حصلنا على ثلاثة تباينات شرطية لـ X بعدد قيم Y.

ثم العلاقة الآتية: $\sigma^2(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m} p_{j/i}.[y_j-\mu_{y/i}]^2$

$$\sigma^2(y/0)=\frac{1}{6}[1-2.33]^2+\frac{2}{6}[2-2.33]^2+\frac{3}{6}[3-2.33]^2\approx 0.556$$

$$\sigma^2(y/1)=\frac{2}{9}[1-2.22]^2+\frac{3}{9}[2-2.22]^2+\frac{4}{9}[3-2.22]^2=0.617$$

$$\sigma^2(y/2)=\frac{3}{12}[1-2.17]^2+\frac{4}{12}[2-2.17]^2+\frac{5}{12}[3-2.17]^2=0.64$$

$$\sigma^2(y/3)=\frac{4}{15}[1-2.13]^2+\frac{5}{15}[2-2.13]^2+\frac{6}{15}[3-2.13]^2=0.65$$

7-2-6-4: معامل الارتباط:

يرمز لمعامل الارتباط بين المتحولين X و Y بالرمز $\rho(X,Y)$ ، ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} \qquad (60-7)$$

. ومن خواصه إن: $-1\le\rho(x,y)\le 1$

ـــ إذا كـــان X و Y متحـــولين مســـتقلين فـــإن $\operatorname{cov}(x,y)=0$ بحيـــث:

$\sigma(x)\neq 0,\ \sigma(y)\neq 0$ ، فإن $\rho(x,y)$

أمـا العكس إذا كـان $\rho(x,y)=0$ فـإن X و Y يكونـان غير مـرتبطين، ولكنهمـا لـيس بالضرورة أن يكونا مستقلين.

ـ إذا كـان X و Y متحـولين مـرتبطين ببعضـهما تمامـاً بحيـث يكـون X=Y فـإن $\rho(x,y)=1$.

7-3: التوزيع المتعدد:

وهو تعميم التوزيع الثنائي ويطبق على عدة حوادث متنافية. فإذا فرضنا أن A, B, C حوادث متنافية وتشكل مجموعة كلية، وكان لكل منها وجهان فقط (تحقق وعدم تحقق)، وكان احتمال تحقق A يساوي P_1 ، واحتمال B يساوي P_2 واحتمال تحقق C يساوي P_3 ، حيث أن:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

فإذا كان عدد التجارب المجراة على هذه الحوادث هو N تجربة.

وإذا رمزنا بـ X لعدد مرات تحقق A فإن: $X : 0,1,2...N$

ورمزنا بـ Y لعدد مرات تحقق B فإن: $Y : 0,1,2...N$

وإذا رمزنا بـ Z لعدد مرات تحقق C فإن: $Z : 0,1,2...N$

فإن المتحولات X و Y و Z تكون مرتبطة بـ $X + Y + Z = N$

وبما أن عدد التجارب N سيتجزأ (سيتوزع) على الحوادث الثلاثة A وB وC، فإن عدد الطرق الممكنة لهذه التجربة عندما يكون لدينا:

$Z = N - (m_1 + m_2), Y = m_2, X = m_1$ يساوي:

$$\text{طريقة } \frac{N!}{m_1!m_2!(N - m_1 - m_2)!} \qquad (61-7)$$

وبما أن احتمال أن يظهر A بمقدار m_1 مرة، وB بمقدار m_2، وC بمقدار $N - m_1 - m_2$ مرة، وذلك مقابل لكل طريقة من طرق التجزئة السابقة يساوي:

$$P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot P_3^{N-m_1-m_2} \qquad (62-7)$$

وعندما نأخذ بعين الاعتبار عدد الطرق الممكنة لتوزع عدد التجارب N على تلك الحوادث المتنافية من مجموعة كلية نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$P(X = m_1, Y = m_2, Z = N - m_1 - m_2) =$$

$$= \frac{N!}{m_1!m_2!(N - m_1 - m_2)!} \cdot P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot P_3^{N-m_1-m_2} \qquad (63-7)$$

مع العلم أن الاحتمالات في تحقيق العلاقة: $P_1 + P_2 + P_3 = 1$

وهو دستور التوزيع المتعدد لثلاثة متحولات (X,Y,Z)، والتي يشترط فيها أن تكون متنافية، وتشكل مجموعة كلية ومنقطعة وتأخذ قيماً صحيحة وغير سالبة.

ويمكن تعميم دستور التوزيع المتعدد على n متحولاً عشوائياً. حيث نجد أنه لو كانت لدينا $A_1, A_2, A_3...A_n$ حوادث متنافية وتشكل مجموعة كلية وكان احتمال تحقق كل منها هو $P_1, P_2, P_3...P_n$ على الترتيب، وكان $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$.

وإذا أجرينا على هذه الحوادث N تجربة مستقلة ورمزنا بـ $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ لعدد مرات تحقق تلك الحوادث على الترتيب، فإننا نجد أن كل X_i يمكن أن يأخذ القيم الآتية:

$$X_i = 1, 2, 3 ... m_i .... N$$

ولكنها جميعاً مرتبطة بالعلاقة:

$$X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n = N \qquad (64-7)$$

وبما أن عدد التجارب N سيتوزع (سيتجزأ) على الحوادث، فإن عدد الطرق الممكنة لهذه التجزئة عندما تأخذ المتحولات $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ القيم المحددة الآتية:

$$X_1 = m_1 \ , \ X_2 = m_2 \ , X_3 = m_3 \ , ... X_n = m_n = \sum_{i=1}^{n-1} m_i$$

يساوي:

$$\text{طريقة} \quad \frac{N!}{m_1! m_2! m_3! ... m_{n-1}! \left(N - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right)!} \qquad (65-7)$$

وإن احتمال أن يظهر X_1 بمقدار m_1 و X_2 بمقدار m_2 مرة....و X_i بمقدار m_i مرة، وبالتالي X_n بمقدار $\left(N - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right)$ مرة، وذلك مقابل كل طريقة من طرق التجزئة السابقة يساوي:

$$P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot P_3^{m_3} ..... P_n^{N - \sum_{i=1}^{n-1} m_i} \qquad (66-7)$$

وعندما نأخذ بعين الاعتبار جميع الطرق الممكنة لتوزع عدد التجارب N على تلك الحوادث نحصل على الدستور الآتي:

$$P\left[X_1 = m_1, X_2 = m_2, ... X_n = N - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right] = \qquad (67-7)$$

$$= \frac{N!}{m_1! m_2! m_3! \left(N - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right)!} \cdot P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot P_3^{m_3} ..... \left[1 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right]^{\left(N - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right)}$$

ذلك لأن الاحتمالات تحقق العلاقة $P_1 + P_2 + P_3 + ... P_n = 1$ ، وبالتالي فإن:

$$P_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i$$

وهو دستور التوزيع المتعدد للمتحولات المتنافية $(X_1, X_2, X_3 ... X_n)$ من مجموعة كلية، والتي تأخذ قيماً صحيحة غير سالبة.

ملاحظة:

نلاحظ أن الطرف الأيمن من العلاقة (7−67) ماهو إلا الحد العام لمفكوك المقدار $(P_1 + P_2 + ... + P_n)^N$. ومن المميزات العددية للتوزيع المتعدد أن:

$$\left.\begin{aligned} E(X_i) &= NP_i \\ \sigma^2(X_i) &= NP_i(1-P_i) \\ Cov(X_i, X_j) &= -nP_iP_j \end{aligned}\right\} \qquad (68-7)$$

ويرمز له عادة بالرمز $M(N, P_1P_2P_3..P_n)$:

مثال (7−8):

صنف إنتاج مصنع خلال فترة محددة إلى خمسة أصناف على الشكل الآتي:

قطع ممتازة وكانت نسبتها 10%، ونسميه الصنف A_1.

قطع جيدة جداً وكانت نسبتها 20%، ونسميه الصنف A_2.

قطع جيدة فقط وكانت نسبتها 30%، ونسميه الصنف A_3.

قطع متوسطة الجودة وكانت نسبتها 30%، ونسميه الصنف A_4.

قطع رديئة الجودة وكانت نسبتها المتبقية 10%، ونسميه الصنف A_5.

ولنفترض أننا نريد اختيار 100 قطعة بشكل عشوائي. فما هو احتمال أن تتضمن هذه الصفقة على 15 قطعة ممتازة و20 جيدة جداً و20 جيدة و30 متوسطة، وماتبقى من الصنف الرديء.

الحل:

لنرمز بـ X_1 وبـ X_2 وبـ X_3 وبـ X_4 وبـ X_5 لعدد المرات التي يمكن أن تظهر فيها الأصناف A_5, A_4, A_3, A_2, A_1 على الترتيب في الصفقة المذكورة.

وبذلك نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$P\left[X_1 = 15, X_2 = 20, X_3 = 20, X_4 = 30, X_5 = 15\right] =$$

$$= \frac{100!}{15!20!20!30!15!} \cdot (0.10)^{15} (0.20)^{20} (0.30)^{20} (0.30)^{30} (0.10)^{15}$$

وهو الاحتمال المطلوب.

تمرينات

1- إذا كان X و Y متحولين عشوائيين منقطعين تابع كثافتهما معطى بالعلاقة:

$$f(x,y)=\begin{cases}A(x_i+y_j) & x_i=1,2,3\ ,\ y_j=0,1\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

. إيجاد قيمة الثابت A حتى يكون $f(x,y)$ توزيع احتمالي مشترك.

. إيجاد التوزيع الاحتمالي المشترك وادرس خواصه.

. بيان فيما إذا كان X و Y مستقلان.

. إيجاد توقع وتباين X و Y منفردين.

. إيجاد $\Psi_y(t),\Psi_x(t)$

2- نرمي حجري نرد مرة واحدة ومن لونين مختلفين ونرمز بـ X للرقم الذي يظهر على الحجر الأول ونرمز بـY للرقم الذي يظهر على الحجر الثاني والمطلوب:

. إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي المشترك.

. التوزيع الاحتمالي الهامشي لـ X والتوزيع الهامشي لـ y.

. إيجاد $E(x\pm y),E(x.y),E(y),E(x)$.

. إيجاد $\operatorname{cov}(x,y),\ \sigma(y),\ \sigma(x)$.

. التوزيعات الشرطية لـ x والتوزيعات الشرطية لـ y.

. إيجاد $f(x,y)$ وفسر النتيجة.

3- إذا كان X و Y متحولين عشوائيين منقطعين بحيث أن:

X=0,1,2
Y=0,1,2,3

وأن تابع الكثافة للمتحولين X,Y معطى بالعلاقة:

$$\ell(x,y)=\begin{cases}c(2x_i+y_j) & i=1,2,3\ ,\ j=0,1,2,3\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

. إيجاد قيمة الثابت C. ثم احسب P(x=1,y=3).

. إيجاد $P(X \geq 1, Y \leq 2)$

. إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي المشترك.

. بيان فيما إذا كان X و Y مستقلين.

. إيجاد $\Psi_y(t), \Psi_x(t), f(x,y)$

المراجع الأساسية

أ . المراجع العربية:

أبو صالح، محمد صبحي، عوض، عدنان محمد (1983)، " مقدمة في الإحصاء"، دار جون رايلي وابنائه.

1 . د. أحمد، محمد خير (1981)، نظرية الاحتمالات، جامعة حلب.

2 . د. أحمد، محمد خير، عثمان، محمود (1986)؟، الرياضيات العامة (1)، جامعة تشرين.

3 . د. الأفندي، عبد القادر، (1976)، "نظرية الإحصاء" جامعة حلب، سورية.

4 . د. بري، عدنان بن ماجد عبد الرحمن ، د. هنيدي، محمود محمد ابراهيم د. محمد عبد الله، أنور أحمد، (1997)، " مبادئ الإحصاء والاحتمالات"، مطابع جامعة الملك سعود.

5 . بولديك، غ. م. (1989) نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، مينسك، المدرسة العليا (باللغة الروسية).

6 . حمدي، طه (1985)، مدخل في بحوث العمليات، ترجمة: ف. يا. التايغا وآخرين، موسكو، دارید (باللغة الروسية).

7 . شبيجل، موراي ر (1974) ، سلسلة ملخصات شوم في الاحتمالات، دار ماكجروهيل للنشر، ترجمة: شعبان عبد الحميد شعبان، ومراجعة: أحمد حسن الموازيني.

8 . شيتيركين، ي.م. كالاخمان، ل.، ي(1982)، الاحتمال والإحصاء، موسكو، الأموال والإحصاء (باللغة الروسية).

9 . د. العلي، إبراهيم محمد، (1992)، الرياضيات الاقتصادية، جامعة تشرين، ط2 .

10 . د. العلي، إبراهيم محمد، د. كابوس، أمل، د. حلاق، عمر (1985)، "نظرية الاحتمالات" جامعة حلب، سورية.

11 . د. العلي، إبراهيم محمد، (2003)، بحوث العمليات، جامعة تشرين، ط2 .
12 . كاراسين، أ.ي. (1979)، نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، موسكو، الإحصاء (باللغة الروسية).
13 . ليبشتز، سيمور (1974) ، سلسلة ملخصات شوم في الاحتمالات، دار ماكجروهيل للنشر، ترجمة: سامح داوود، ومراجعة: عبد العظيم أنيس.
14 . ماتسكيفيتش، ي. ب، سغيريد، غ.ب. (1993)، نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، مينسك، المدرسة العليا (باللغة الروسية).
15 . مدني دسوقي، مصطفى (1979)، "مبادئ في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي" دار النهضة العربية، القاهرة.
16 . د. الهوشي، محمد (1998)، مبادئ في الاحتمالات والإحصاء، جامعة تشرين.

ب . المراجع الأجنبية

أ . باللغتين الفرنسية والإنكليزية:

1- Fellerw. An Introduction tro Probability Theory and Its Applications, 2nd ed. Vols. I and II, Willey, New York, 1967.

2- Lapin, Lawrence, Statistics Meaning and Methods, NewYork, Harcourt Brace Jorauovich Inc, 1980.

3- Lapin, Lawrence, "Statistics For Modern Business Decisions". Harcourt Brace Jovanovich, Inc. New-York. 1973

4- Mendenhall, William, Introduction to Probability and Statistics, North Scituate : Duxbury Press, 1980.

5- SPIEGEL, M. R., (1961) "Statististics". Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New-York.

6- Springer M. D., The Algebra of Random Variables, Wiley, New York, 1979.

ب . باللغة الروسية:

المصطلحات العلمية

إنكليزي	فرنسي	عربي
. أ .		
Union	Réunion	اجتماع
probability	Probabilité	احتمال
Conditional probability	Probabilité Conditionelle	احتمال شرطي
Absolute probability	Probabilité absolute	احتمال مطلق
Marginal probability	Probabilité marginale	احتمال هامشي
Test	Test	اختبار
Test of independence	Test d'indépendence	اختبار الاستقلالية
Test of conformity	Test de conformité	اختبار التطابق (التماثل)
Test of goodness of fit	Test d'ajustement	اختبار التوافق
Test of linearity	Test of linéarité	اختبار الخطية
Test of hypothesis	Test of d'hypothéses	اختبار الفرضيات
Significant test	test de significantion	اختبار المعنوية
correlation	corrélation	ارتباط
Simple correlation	Corrélation simple	ارتباط بسيط
Partial correlation	Corrélation partielle	ارتباط جزئ
Linear correlation	Corrélation pineaire	ارتباط خطي
Auto correlation	Autocorrélation	ارتباط ذاتي
Multiple correlation	Corrélation Multiple	ارتباط متعدد
inference	Induction	استدلال
inference	Induction Statistique	استدلال إحصائي

Least significant difference	La plus petite difference significant	الفرق المعنوي الأصغر
Latin square	Latin square	المربع اللاتيني
Least square “L.S.”	Moindres carrés	المربعات الصغرى (الأقل)
Regression	Régression	انحدار
Deviation	Déviation	انحراف
Mean deviation	Deviation moyenne	انحراف متوسط
Standard deviation	deviation type (Standard)	انحراف معياري
. ت .		
Function	Function	تابع
Distribution function	function de distribution	تابع توزيع
Characteristic function	function Caractéristique	تابع مميز
Moment generating function	Function génératrice des Moment	تابع مولد للعزوم
Variance	Variance	تباين
Covariance	Covariance	تباين مشترك (عزم ارتباطي)
Interaction	Interaction	تباين خارجي (تفاعل داخلي)
Partition	Partition	تجزئ
Trial	Essai	تجربة
Analysis of variance	Analyse de variance	تحليل تباين
One way Analysis of variance	Analyse de la variance à un critére de classification	تحليل تباين أحادي التصنيف
Two way Analysis of variance	Analyse de la variance à deux critére de classification	تحليل تباين ثنائي التصنيف
Covariance analysis	analysis de la covariance	تحليل التباين المشترك

Transformations	Transformations	تحويلات
Bias	Biais	تحيز
Convergence	Convergence	تقارب
Intersection	Intersection	تقاطع
estimation	estimation	تقدير
Point estimation	Estimation pontuelle	تقدير نقطي
Interval estimation	Estimation par intervalle	تقدير مجالي
Frequency	Fréquency	تكرار
Symmetry	Symétrie	تناظر
Prediction (foreasting)	Prévision	تنبؤ
distribution	distribution	توزيع
Probability distribution	Distribution de Probabilité	توزيع احتمالي
Exponential distribution	Distribution Exponentielle	توزيع أسي
F distribution	Distribution F	توزيع أف (نسب التباين)
Frequency distribution	Distribution de Fréquences	توزيع تكراري
Pinomial distribution	Distribution binomiale	توزيع ثنائي
Student's distribution	Distribution de Student "S"	توزيع ستودينت
Normal distribution	Distribution Normale	توزيع طبيعي
Bivariate normal distribution	Distribution Normale deux dimensions	توزيع طبيعي ثنائي
Standard normal distribution	Distribution Normale type	توزيع طبيعي معياري
Gamma normal distribution	Distribution Gamma	توزيع غاما
Ghi-squared distribution	distribution de χ^2	توزيع كاي مربع
Sampling distribution	Distribution d'	توزيع المعاينة

	échentillonnage	
Bivariate distribution	distribution à deux dimensions	توزيع مزدوج
Marginal distribution	Distribution Marginale	توزيع هامشي
Geometrical distribution	Distribution Géomvétrique	توزيع هندسي
Mathematical expectations	Espérance Mathématicque	توقع رياضي
. ث .		
Constant	Constant	ثابت
Homoscedasticity	Homoscedasticité	ثبات التباين
Binomial	Binôme	ثنائي
Binomial of Newton	Binôme de Newton	ثنائي نيوتن
. ج .		
Frequency table	table de Fréquences	جدول تكراري
. ح .		
Confidence limit	Limites de Confiance	حدا الثقة
. خ .		
Regression line	line de Régression	خط التقدير (الانحدار) (الاتجاه العام)
Error	Erreur	خطأ
Standard error	Ecart-type	خطأ معياري
Linear	Linéaire	خطي

. د .		
Degrees of freedom	Degrées de liberté	درجات الحرية
Degrees of Confidence	Degrées de Confiance	درجة الثقة

. س .		
Markov chain	Chaine de Markov	سلسلة ماركوف
Stochastics processus	processus Stochastics	سياقات (عمليات) عشوائية
. ش .		
Scatter diagram	Nuage statistique (diagramme de dispersion)	شكل انتشار
Diagram	dispersion	شكل بياني
. ص .		
Quadratic form	Forme quadratique	صيغة تربيعية
. ط .		
Method	Méthod	طريقة
Maximum likelihood method	Method de vraissem-balance	طريقة الإمكانية العظمى
Estimation method	Method d' Estimation	طريقة التقدير
Method of least squares	Méthod des moindres carrés	طريقة المربعات الصغرى (الأقل)
Bayes' method	méthod de Bayes	طريقة بايز
. ع .		
Asymmetry	Asymetrie	عدم التناظر
Heteroscedasticity	Héteroscedasticité	عدم ثبات التباين
Moment	Moment	عزم
Random	aléatoire	عشوائي
Random sample	Echantillon aléatoire	عينة عشوائية

. غ .		
Nonlinear	Non-linéare	غير خطي
Unbiased	San bias	غير متحيز
. ف .		
Assumption	suppostion	فرض
Hypothesis	Hypothésis	فرضية
Statistical Hypothesis	Hypothésis Statisticque	فرضية إحصائية
Null Hypothesis	Hypothésis Null	فرضية ابتدائية (فرضية العدم)
Alternative Hypothesis	Hypothésis Alternative	فرضية بديلة
Insignificant difference	différence Insignificant e	فرق غير جوهري
Space	Espace	فضاء
Efficient	Efficace	فعال
. ق .		
Law of large number	Loi des grande numbers	قانون الأعداد الكبيرة
Measure	Measure	قياس
. م .		
Variable	Variable	متحول (متغير)
Dependent Variable	Variable Dépendente	متحول تابع
Continuous Variable	Variable aléatoire	متحول عشوائي مستمر
Discrete Variable	Variable aléatoire discontinue	متحول عشوائي منقطع
Independent Variable	Variable Indépendente	متحول مستقل
Biased	Biaisé	متحيز

Convergent	Convergent	متقارب
Confidence intervals	Intervalles de confinace	مجالات الثقة
Frequency histogram	Histogram de Fréquences	مدرج تكراري
Significance level	Niveau de signification	مستوى الدلالة
Regression equation	Equation de Régression	معادلة الاتجاه العام (معادلة الانحدار) معادلة التقدير)
Coefficient	Coefficient	معامل
Correlation Coefficient	Coefficient de Corrélation	معامل الارتباط الجزئي
Partial Correlation Coefficient	Coefficient de Corrélation Partialle	معامل الارتباط المتعدد
Multiple Correlation Coefficient	Coefficient de Corrélation Multiple	معامل الارتباط ثنائي النقطة.
Fourfold point Correlation Coefficient	Coefficient de Corrélation de point	معامل الارتباط النقطي (معامل الاقتران)
Determination Coefficient	Coefficient de Détermination	معامل التحديد
Confidence Coefficient	Coefficient de cofiance	معامل الثقة
Rank Correlation Coefficient	Coefficient de Corrélation de Rank	معامل الرتب
Probability sampling	Echantillonnage	معاينة احتمالية
Criterion	Criterére	معيار
Estimator	Estimateur	مقدر
Critical region	Region critique	منطقة الرفض

Acceptance region	Region d’acceptance	منطقة القبول
Parameter	Paraméter	مؤشر
	٠ن٠	
Estimation theory	Théorie d’ Estimation	نظرية التقدير
Central limit theorem	théorém limit Centrale	نظرية النهاية المركزية
Bayes’ theorem	théorém Bayes	نظرية (بايز)
Central tendency	Tendence Centrale	نزعة مركزية

لجنة التقويم

الدكتور	الدكتور	الدكتور
أستاذ في قسم الإحصاء	أستاذ في قسم الإحصاء	أستاذ مساعد في قسم الإحصاء

المدقق اللغوي

الدكتور

أستاذ في قسم اللغة العربية ـ كلية الآداب

حقوق الطبع والترجمة والتأليف محفوظة
لدى مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

Syrian Arab Republic
Ministry of Higher Education
Tishreen University
Faculty of Economics

Written by

Dr.
Associate Prof. Of Statistics and Programming department
Faculty of Economy

Dr.
Associate Prof. Of Statistics and Programming department
Faculty of Economy

1426-1427
2006-2007